R. P. Langlands'ın 3. Tosun Terzioğlu anma konuşmasına bir önsöz

Kâzım İlhan İKEDA
Boğaziçi Üniversitesi
Matematik Bölümü
34342, Bebek, İstanbul
kazimilhan.ikeda@boun.edu.tr

28 Eylül 2018

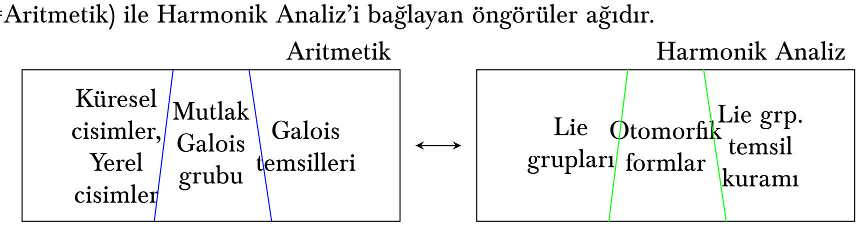
1 Giriş

T.M.D. Başkanı Sayın Prof. Dr. Attila Aşkar, 3. Tosun Terzioğlu Konuşmasının Davetli Konuşmacısı Prof. Dr. Robert P. Langlands'ın öngördüğü, günümüzde *"Langlands Programı"* olarak adlandırılan, aynı zamanda *"Matematiğin Büyük Birleşik Kuramı"* olarak da düşünebileceğimiz, beni gençlik yıllarımdan beri büyüleyen bu öngörüler ağı üzerine kısa ve teknik olmayan bir giriş konuşmasını, bu muazzam programın kurucusu olan Langlands'ın, 3. Tosun Terzioğlu Konuşması olarak birazdan sunacağı *"Otomorfik formların bağımsız bir teorisi var mı?"* adlı dersten önce yapmamı önerdiğinde çok heyecanlandım ve çok mutlu oldum. Sayın Attila Aşkar'a dolayısıyla kalpten teşekkürlerimi sunuyorum...

2 Langlands programı nedir?

M. Harris, V. Lafforgue gibi kimi matematikçiler Langlands Programını mitolojik yaratık "Hidra"ya benzetirler... Gerçekten de Langlands Programı bünyesinde çözülen bir problem beraberinde açıklama gerektiren yeni problemler türetmektedir. Bu nedenle Hidra benzetmesi sanıyorum yerindedir.

Peki Langlands Programı nedir? Bu program, en temel hali ile, Sayılar Kuramı (=Aritmetik) ile Harmonik Analiz'i bağlayan öngörüler ağıdır.



Okuyucuya Langlands Programı hakkında bir fikir vermesi açısından sadece en "basit" durum olan $\mathrm{GL}(n)$ ***grubu için yerel ve küresel Langlands karşılıklılık ilkelerinden*** bahsedeceğiz. Programın iki temel sanısı olan ***Karşılıklılık ve Fonktörsellik Ilkelerinin*** çok daha genel olduğunu da burada belirtelim.

2.1 Küresel cisimler ve yerel cisimler

Sayılar kuramında temel objeler K ile göstereceğimiz *küresel cisimler*, yani $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin veya $\mathbb{F}_q$-katsayılı $\mathbb{F}_q(T)$ fonksiyon cisminin sonlu genişlemeleri ve beraberinde tanımladığı K'nin G_K mutlak Galois grubu ve akrabası olan K'nin W_K mutlak Weil grubu ile, bu K küresel cisminin tüm sonlu veya sonsuz ν yerlerinde K'nin ν-sel tamlanışları olan K_ν *yerel cisimleri* ve tanımladıkları K_ν'nün G_{K_ν} mutlak Galois grupları ve akrabaları olan K_ν'nün W_{K_ν} mutlak Weil ile K_ν'nün WA_{K_ν} mutlak Weil-Arthur gruplarıdır[1].

2.2 Sınıf cisim kuramı

Her sonlu veya sonsuz ν yeri için K küresel cisminin ν-sel tamlanışı K_ν yerel cisminin sonlu *abelyen* genişlemeleri ve bu genişlemelerin aritmetik özellikleri, şaşırtıcı bir şekilde, $K_\nu^\times$ çarpımsal grubunun içinde, K_ν üzerinde tanımlı

$$\mathsf{Art}_{K_\nu} : K_\nu^\times \to G_{K_\nu}^{\mathrm{ab}}$$

yerel Artin karşılıklılık ilkesi olarak adlandırılan bir topolojik homomorfizma ile, kodlanmıştır. Burada, K_ν yerel cisminin G_{K_ν} mutlak Galois grubu yerine W_{K_ν} mutlak Weil grubunu kullanarak da yerel Artin karşılıklılık ilkesini formüle etmek mümkündür. Bu durumda, K_ν'nün "Weil formunda" yerel Artin karşılıklılık ilkesi

$$\mathsf{Art}_{K_\nu} : K_\nu^\times \xrightarrow{\sim} W_{K_\nu}^{\mathrm{ab}}$$

şeklinde bir topolojik izomorfizmadır. K küresel cisminin sonlu *abelyen* genişlemeleri ve bu genişlemelerin aritmetik özellikleri ise, K'nin tüm ν yerleri için tanımlı K_ν yerel cisimleri tarafından inşa edilen K'nin $\mathbb{J}_K$ idel grubunun[2] temel analitik ve topolojik özellikleri yardımıyla, yerel Artin karşılıklılık ilkelerinin "yapıştırılması" ile inşa edilen K üzerinde tanımlı

$$\mathsf{Art}_K : K^\times \backslash \mathbb{J}_K \to G_K^{\mathrm{ab}}$$

küresel Artin karşılılık ilkesi olarak adlandırılan bir topolojik homomorfizma ile, K küresel cisminin $K^\times \backslash \mathbb{J}_K$ idel sınıf grubu içinde kodlanmıştır. Bu durumda da K'nin G_K mutlak Galois grubu yerine W_K mutlak Weil grubunu kullanarak küresel Artin karşılıklılık ilkesini formüle etmek mümkündür, ve K'nin "Weil formunda" küresel Artin karşılıklılık ilkesi

$$\mathsf{Art}_K : K^\times \backslash \mathbb{J}_K \xrightarrow{\sim} W_K^{\mathrm{ab}}$$

[1] K küresel cismi için $WA_K = L_K$ otomorfik Langlands grubunun varlığı problemi, Langlands programının en önemli sorunlarından bir tanesidir.

[2] Cebirsel olarak $\mathbb{J}_K$, $\mathbb{A}_K$ halkasının $\mathbb{A}_K^\times$ birimler grubudur.

şeklinde bir topolojik izomorfizmadır. Dahası, bu topolojik izomorfizmalar aracılığla, K küresel cismi üzerine inşa edilen *yerel ve küresel sınıf cisim kuramları* olarak adlandırılan teoriler birbiriyle uyumludur.

2.3 Problem: Abelyen-olmayan sınıf cisim kuramı

K küresel cismi üzerinde tanımlı küresel ve yerel Artin karşılıklılık homomorfizmalarını K küresel cisminin ve K_ν yerel cisimlerinin *abelyen-olmayan* Galois genişlemelerini de kapsayacak biçimde genellemenin mümkün olup olmadığı sorusu, yani K küresel cismi üzerinde *yerel ve küresel abelyen-olmayan sınıf cisim kuramlarının* inşası problemi, sayılar kuramında, cevaplanması gerekli en büyük ve zorlu sorulardan bir tanesidir ve *Hilbert 9. ve 12. problemlerinde* bu soruyu dile getirmiştir. Muhtemelen böyle bir inşanın tam olarak yapılabilmesi için beraberinde *"Hodge Sanısı", "Periyot Sanısı", "Tate Sanısı", ve Grothendieck'in "Standart Sanılar"* gibi cebirsel geometri kökenli son derece önemli ve merkezi bazı soruların da bir şekilde cevaplanması gerekli olacaktır.

Bu yönde, birinci adım olarak, K küresel cismi üzerinde tanımlı küresel ve yerel Artin karşılıklılık ilkelerinin, "abelyen-olmayan" yönde genellemeye açık, yeni ifadelerini elde etmek iyi bir başlangıç olacaktır. Dolayısıyla, ilk olarak, K'nin her ν yeri için WA_{K_ν} yerel kompakt grubu çalışılmalıdır. Bunun için de, *Tannaka dualite* teoremi sonucu, her ν için WA_{K_ν} grubunun

$$\rho_\nu : WA_{K_\nu} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

n-boyutlu kompleks ve sürekli temsillerini ve bu temsillere atadığımız, K_ν yerel cisminin cebirsel genişlemelerinin aritmetik özelliklerinin kodlandığı, analitik objeler $L^{\mathrm{Artin-Weil}}(s;\rho_\nu)$ yerel Artin-Weil L-faktörleri ve $\varepsilon^{\mathrm{Artin-Weil}}(s;\rho_\nu,\psi_\nu)$ yerel Artin-Weil ε-faktörleri çalışılmalıdır. Burada, $n=1$ durumu incelendiğinde,

$$\begin{tikzcd}
WA_{K_\nu} \arrow[rr, "\rho_\nu"] \arrow[dr, "\mathrm{ab}"'] & & \mathbb{C}^\times \\
& W^{\mathrm{ab}}_{K_\nu} \arrow[ur, "\rho^{\mathrm{ab}}_\nu"'] & \\
K_\nu^\times \arrow[ur, "\mathsf{Art}_{K_\nu}"'] & &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı aracılığıyla, K_ν'nün "Weil formunda"

$$\mathsf{Art}_{K_\nu} : K_\nu^\times \xrightarrow{\sim} W^{\mathrm{ab}}_{K_\nu}$$

yerel Artin karşılıklılık ilkesinin,

$$\rho^{\mathrm{ab}}_\nu \circ \mathsf{Art}_{K_\nu} : K_\nu^\times \to \mathbb{C}^\times$$

yerel Hecke karakteri[3] için atadığımız yerel Hecke L-faktörü ile yerel Hecke ε-faktörünü sırasıyla $L^{\mathrm{Hecke}}(s;\rho^{\mathrm{ab}}_\nu \circ \mathsf{Art}_{K_\nu})$ ve $\varepsilon^{\mathrm{Hecke}}(s;\rho^{\mathrm{ab}}_\nu \circ \mathsf{Art}_{K_\nu},\psi_\nu)$ ile göstermek

[3] yani $\mathrm{GL}(1,K_\nu) = K_\nu^\times$ grubunun makul π_ν temsilleri

kaydı ile,

$$L^{\text{Artin}-\text{Weil}}(s;\rho_\nu) = L^{\text{Hecke}}(s;\lambda^{(1)}_{K_\nu}(\rho_\nu))$$

ve

$$\varepsilon^{\text{Artin}-\text{Weil}}(s;\rho_\nu,\psi_\nu) = \varepsilon^{\text{Hecke}}(s;\lambda^{(1)}_{K_\nu}(\rho_\nu))$$

eşitliklerini sağlayan (="doğallık" şartlarını sağlayan)

$$\lambda^{(1)}_{K_\nu}(\rho_\nu) = \rho^{\text{ab}}_\nu \circ \mathsf{Art}_{K_\nu}$$

kuralıyla tanımlı

$$\mathcal{G}_1(K_\nu) := \left\{\begin{matrix} WA_{K_\nu} \quad \text{Weil-Arthur} \\ \text{grubunun kompleks} \\ \text{1-boy. } \rho_\nu \text{ temsilleri}\end{matrix}\right\}_{/\sim} \xrightarrow{\lambda^{(1)}_{K_\nu}} \left\{\begin{matrix} \mathrm{GL}(1,K_\nu) = K_\nu^\times \\ \text{grubunun makul} \\ \pi_\nu \text{ temsilleri}\end{matrix}\right\}_{/\sim} =: \mathcal{A}_1(K_\nu)$$

bijektif eşlemesine denk olduğunu göstermek mümkündür. Böylece, K_ν üzerinde tanımlı "Weil formunda" yerel Artin karşılıklılık ilkesinin yeni bir ifadesini elde etmiş olduk.

2.4 $\mathrm{GL}(n)$ grubu için yerel Langlands karşılıklılık ilkesi

Öte yandan,

$$\mathrm{GL}(n,K_\nu) = \{M \in K_\nu^{n\times n} \mid \det(M) \neq 0\}$$

gibi, katsayıları K_ν yerel cismine ait matris gruplarının π_ν makul temsillerini Harish-Chandra'nın geliştirdiği harmonik analiz metodlarını kullanarak inşa edebiliyoruz, ve $\mathrm{GL}(n,K_\nu)$ matris grubunun böyle bir π_ν makul temsiline de birer yerel L-faktörü $L(s;\pi_\nu)$ ve $\varepsilon(s;\pi_\nu,\psi_\nu)$ yerel ε-faktörü atayabiliyoruz.

Bu durumda, her $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ için, "doğallık" şartlarını sağlayan, $n = 1$ durumunda K_ν üzerinde tanımlı "Weil formunda" yerel Artin karşılıklılık ilkesini veren, biricik

$$\mathcal{G}_n(K_\nu) := \left\{\begin{matrix} WA_{K_\nu} \quad \text{Weil-Arthur} \\ \text{grubunun kompleks} \\ n\text{-boy. } \rho_\nu \text{ temsilleri}\end{matrix}\right\}_{/\sim} \xrightarrow{\lambda^{(n)}_{K_\nu}} \left\{\begin{matrix} \mathrm{GL}(n,K_\nu) \text{ grubunun} \\ \text{makul } \pi_\nu \text{ temsilleri}\end{matrix}\right\}_{/\sim} =: \mathcal{A}_n(K_\nu)$$

eşlemesinin varlığını sorgulamamız[4] yerinde olacaktır. Bu $\lambda^{(n)}_{K_\nu}$ eşlemesine *K_ν üzerine $\mathrm{GL}(n)$ grubu için yerel Langlands karşılıklılık ilkesi* denir. Tannaka dualite teoremi ve her $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ için bu $\lambda^{(n)}_{K_\nu}$ eşlemesinin "doğallık" şartlarını sağlaması nedeniyle, $\{\lambda^{(n)}_{K_\nu}\}_n$ eşlemeler ailesini K_ν üzerine yerel abelyen-olmayan karşılıklılık ilkesi olarak düşünmek yerindedir.

---

[4] K_ν cisminin karakteristiği $p > 0$ durumunda bu eşlemenin ispatını Laumon-Rapoport-Stuhler üçlüsü, karakteristik 0 durumunda ise eşlemenin ispatını bağımsız olarak Harris-Taylor, Henniart, ve Scholze yapmıştır.

2.5 $\mathrm{GL}(n)$ grubu için küresel Langlands karşılıklılık ilkesi

K küresel cismi üzerinde $\mathrm{GL}(n)$ *grubu için küresel Langlands karşılıklılık ilkesini* ifade etmek için, L_K ile gösterilen, *K küresel cisminin otomorfik Langlands grubu* olarak adlandırılan, ve belli özellikleri olan ve şartları sağlayan, örneğin:

- $L_K^{\mathrm{ab}} = W_K^{\mathrm{ab}}$;
- Her ν için sabitlenen
$$K \hookrightarrow K_\nu$$
gömmesinin
$$WA_{K_\nu} \hookrightarrow L_K$$
injektif topolojik grup homomorfizmasını belirlemesi

gibi, "hipotetik" bir topolojik grubun varlığının kabul edilmesi[5]durumunda, bu kez L_K topolojik grubunun n-boyutlu

$$\rho : L_K \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

kompleks ve sürekli temsilleri ve bu temsillere atadığımız $L^{\mathrm{Artin-Weil}}(s;\rho)$ küresel Artin-Weil L-fonksiyonları ve $\varepsilon^{\mathrm{Artin-Weil}}(s;\rho)$ küresel Artin-Weil ε-faktörleri çalışılmalıdır.

Öte yandan,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K) = \{M \in \mathbb{A}_K^{n\times n} \mid \det(M) \in \mathbb{A}_K^\times\}$$

gibi, katsayıları K küresel cisminin $\mathbb{A}_K$ adel halkasına ait matris gruplarının π makul temsillerini ise Harish-Chandra'nın harmonik analiz metodlarını genelleştirerek inşa edebiliyoruz, ve $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K)$ matris grubunun böyle bir π makul temsiline de bir Godement-Jacquet L-fonksiyonu $L^{\mathrm{GJ}}(s;\pi)$ ve $\varepsilon^{\mathrm{GJ}}(s;\pi)$ Godement-Jacquet ε-faktörü atayabiliyoruz.

Bu durumda, *K küresel cismi üzerinde* $\mathrm{GL}(n)$ *grubu için küresel Langlands karşılıklılık ilkesini*, belli "doğallık" şartlarını sağlayan, $n = 1$ durumunda da K üzerinde tanımlı "Weil formunda" küresel Artin karşılıklılık ilkesini veren, biricik

$$\mathcal{G}_n(K) := \left\{\begin{array}{l} L_K \text{ otomorf. Langlands} \\ \text{grubunun kompleks } n\text{-} \\ \text{boyutlu } \rho \text{ temsilleri} \end{array}\right\}_{/\sim} \xrightarrow{\lambda_K^{(n)}} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K) \text{ grubunun} \\ \text{otomorfik } \pi \text{ temsilleri} \end{array}\right\}_{/\sim} =: \mathcal{A}_n(K)$$

eşlemesinin varlığı problemi[6] olarak düşünmekteyiz.

İhtar 1. Burada biz Langlands Programının önemli iki probleminden birisi olan *Karşılıklılık Ilkesi*'nin özel bir örneğini oluşturan $\mathrm{GL}(n)$ matris grubu durumundan bahsettik. Bu özel örneğin de en basit $n = 1$ hali bile Sayılar Kuramı'nın en derin neticelerinden Küresel ve Yerel Sınıf Cisim Kuramlarını vermekte olduğunu gördük.

[5] Elbette bu durumda L_K topolojik grubunun varlığı ispatlanmalıdır! Bu problem, Langlands Programının en önemli problemlerinden birisidir...

[6] K cisminin karakteristiği $p > 0$ durumunda bu eşlemenin özel bir durumunun ispatını L. Lafforgue yapmıştır.

İhtar 2. Öte yandan bu program, $\mathrm{GL}(n)$ grubu yerine *farklı indirgeyici grupları da kapsayacak genelliktedir*[7]. Detaylar için [1, 2, 4].

3 Sonsöz

Son zamanlarda, Langlands Programının Sayılar Kuramı ile Lie Grup Temsillerini birbirine bağlayan bir öngörüler ağı olmasının ötesinde, Fizik-Geometri-Topoloji üçlüsü ile de derin bağlantılar öngördüğü anlaşılmıştır, ve daha önce de (bkz. [3]) belirtildiği gibi, bu program, *"teorileri birleştiren, teoriler-üstü bir ilke"* olarak düşünülmelidir. Tüm bunların ışığında, tahmin ettiğimizden de geniş etki alanına sahip olan Langlands Programı matematiğin "topografyasını" gelecekte aydınlatacaktır... Bu yönde B. Mazur, üzerinde tefekkür edilmesi gerektiğini düşündüğüm, şu felsefi soruyu sormuştur:

> *"Matematik kaç bağlantılı bileşenden oluşmaktadır? Bu bağlantılı bileşenler nelerdir ve nasıl oluşmuşlardır? Yani, farklı matematik konularının ne kadarı, nasıl bir ilke altında, birleşik bir kuram oluşturmaktadır?"*[8]

Son olarak... Konuşmamızın başında bahsi geçen Hidra'ya geri dönersek... Herakles'in (=Herkül'ün) muazzam gayreti sonucu Hidra'yı altettiğini biliyoruz... Görünen o ki, Langlands Programında da, özellikle Fonktörsellik ve Karşılıklılık İlkelerinde, bizlerin, yani matematikçilerin, ilerleme kaydedebilmesi için bıkmadan ve usanmadan Herakles gibi üstün gayret sarfetmesi gerekmektedir!

Kaynaklar

[1] J. Arthur, *The principle of functoriality.* Mathematical challenges of the 21st century (Los Angeles, CA, 2000), Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **40** (2003), no. 1, 39–53. 6

[2] S. Bedikyan, K.İ. İkeda, *Langlands karşılıklılık ilkesi*, **İTÜ/C** Dergisi **5** (2007), 3–18. 6

[3] K. İ. İkeda, *Robert P. Langlands ve Matematiğin Büyük Birleşik Teorisi*, Sarkaç (25 Nisan 2018), <https://sarkac.org/2018/04/robert-langlands/>. 6

[4] R. P. Langlands, *Otomorfik formların bağımsız bir teorisi var mı?*, Türk Matematik Derneği 3. Tosun Terzioğlu Anma Konuşması (Sabancı Üniv. 28 Eylül 2018), <https://publications.ias.edu/sites/default/files/lecture_10.pdf>. 6

[7] K küresel cisminin karakteristiği $p > 0$ durumunda, K üzerinde tanımlı genel bir indirgeyici G cebirsel grubu için küresel Langlands karşılıklılık ilkesinin özel bir durumunun ispatını V. Lafforgue yapmıştır.

[8] B. Mazur: "To what extent Mathematics represents a unified subject and how much or why the different areas/theories can be unified?", 2018 Paul Bernays Dersleri, ETH.