

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 33

L. I. GOLOVİNA

I. M. YAGLOM

GEOMETRİDE İNDÜKSİYON

Çeviren :

Altıntaş BÜKE

İstanbul — 1968

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 33

L. I. GOLOVİNA

I. M. YAGLOM

GEOMETRİDE İNDÜKSİYON

Çeviren :

Altıntaş BÜKE

İstanbul — 1968

KUTULMUŞ MATBAASI
Sultanahmet, Yerebatan Cad. No: 35
Tel, 22 86 76 — İstanbul 1968

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod, gerek fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Savaşından sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana getirilmiştir. Bu çeşit literatürde aranan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'un bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

ÖNSÖZ

Bu *kitap* ta matematiksel indüksiyon metodunun geometri problemlerinin çözümünde nasıl kullanılacağına dair birçok örnek verilmektedir; bunlardan bazıları oldukça güçtür. Kitapta çözümleri ayrıntıları ile verilmiş 37 misâl ile sadece çözüm yolu gösterilmiş 40 problem vardır. Bunlardan bazıları okuyanın matematik cesaretini ölçmek için gerçek bir denemedir.

Birçok bölümler için orta okul cebiri ve düzlem geometri yeterlidir. Bölüm 6 için ise uzay geometriden bazı bilgiler gerektir. Zaman zaman trigonometri formülleri kullanılmıştır.

Bölümler birbirlerinden hemen hemen bağımsızdır; böylece, gerekli hazırlığı yapamamış bulunan okuyucunun herhangi bir bölümü atlaması mümkün olur. Okuyucu matematiksel indüksiyon hakkında daha esaslı bilgi edinmek isterse, bu serideki diğer bir kiap olan, I. S. Sominskii'nin yazdığı *Matematiksel İndüksiyon Metodu*'ndan faydalanabilir ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Bu yayınların 11 cisi olarak Bediz ASRAL tarafından, *Matematiksel İndüksiyon Metodu* adı ile Türkçeye çevrilmiştir (Çevirenin Notu).

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ : MATEMATİKSEL İNDÜKSİYON METODU NEDİR?

- | | |
|---|---|
| 1. «Benzer şekilde» tarzında yapılan muhake-
medeki yanılma | 1 |
| 2. Matematiksel indüksiyon metodu | 3 |
| 3. Tatbikat | 5 |

BÖLÜM 1. İNDÜKSİYON İLE HESAPLAMA

- | | |
|---|----|
| 4. Düzgün 2 ⁿ -gene ait misâller | 8 |
| 5. n -genler ve köşegenlerine ait misâller | 13 |

BÖLÜM 2. İNDÜKSİYON İLE İSPAT

- | | |
|--|----|
| 6. Parçalara ayırma | 20 |
| 7. Haritalar | 27 |
| 8. Çok yüzlüler | 32 |
| 9. Harita boyama problemleri | 33 |
| 10. Normal haritalar | 35 |
| 11. Haritaların regüler boyanması | 38 |
| 12. Beş renk teoremi | 44 |
| 13. Volynskii teoremi | 46 |

BÖLÜM 3. İNDÜKSİYON İLE ÇİZİM

- | | |
|--|----|
| 14. Verilen şartlar altında çokgenlerin çizimi ... | 58 |
| 15. Bir doğru parçasının bölümü | 68 |

VIII

BÖLÜM 4. İNDÜKSİYON METODU İLE GEOMETRİK YERLERİN BELİRLENMESİ

16. Alanların toplamalarını gerektiren problemler	71
17. Uzaklıkların karelerini gerektiren problemler	76

BÖLÜM 5. İNDÜKSİYONLA TARİFLER

18. Ağırlık merkezi ve çokgenlerin kenarortayları	81
19. Euler daireleri	87
20. Steiner daireleri	92
21. Merkezî noktalar ve merkezî daireler	97
22. Lineer elemanlar	99

BÖLÜM 6. BOYUT SAYISI ÜZERİNE İNDÜKSİYON

23. Değişik boyutlu uzaylar	101
24. Boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak hesaplama	105
25. Boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak yapılan ispatlar	109
26. Adî indüksiyon yardımı ile ispat	113
27. Yarım - doğrular ve yarım - uzaylar	122
28. Kürelerin içine sokulabilen çokgenler	127
29. Geometrik yerlerin belirlenmesi	131
30. Boyut sayısı üzerine indüksiyon ile yapılan tarifler	135

Giriş : Matematiksel İndüksiyon Metodu Nedir?

1. «BENZER ŞEKİLDE» TARZINDA YAPILAN MUHAKEMEDEKİ YANILMA.

İndüksiyon özel bir önermeden genel hale giden bir muhakeme şeklidir. Burada özel önermenin doğruluğundan genel halin doğru olduğu sonucu elde edilir. *Matematiksel indüksiyon metodu*, matematik ispatta özel bir metoddur; öyle ki, özel müşahedelere dayanarak, tekabül eden genel halde elde edilecek sonuçları bulmayı mümkün kılar. Bu metoddaki fikir, misallerle çok daha iyi anlatılabilir. Onun için aşağıdaki misali incelemekle işe başlayalım :

MİSAL 1. İlk n tane tek sayının

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM. Bu toplamı $S(n)$ ile gösterir, ve $n = 1, 2, 3, 4, 5$ alırsak,

$$S(1) = 1$$

$$S(2) = 1 + 3 = 4$$

$$S(3) = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$S(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

buluruz. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için ilk n tane tek sayının toplamının n^2 ye eşit olduğunu görürüz. Bundan hemen her n için bunun

doğru olduğu sonucunu mu çıkaralım? Hayır, «benzer şekilde» diyerek elde edilen böyle bir sonuç yalnız olabilir.

«Benzer şekilde» ile varılan yalnız sonuçlara dair bir kaç misal verelim.

Önce $2^{2^n} + 1$ şeklindeki sayıları göz önüne alalım. $n = 0, 1, 2, 3$ ve 4 için elde edilen $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ sayıları asaldır. Onyedinci yüzyılın meşhur Fransız matematikçilerinden Pierre Fermat bu şekildeki *bütün* sayıların asal olduklarını tahmin ediyordu. Fakat onsekizinci yüzyılda başka bir büyük matematikçi Leonhard Euler ⁽¹⁾

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

nin çarpanlara ayrılabilen bir sayı olduğunu buldu.

Aynı tipten başka bir misal verelim. «Yüksek Matematik» in kurucularından biri olan meşhur Alman matematikçisi G. W. Leibniz, her pozitif tam n sayısı için $n^3 - n$ sayısının 3 ile, $n^5 - n$ sayısının 5 ile, $n^7 - n$ sayısının 7 ile bölünebildiğini ispat etti. Buna dayanarak her k tek sayısı ve her n tabii sayısı için $n^k - n$ 'nin k ile bölünebileceğini tahmin etti; fakat gene kendisi $2^9 - 2 = 510$ un 9 ile bölünemediğini gösterdi.

Tanınmış Sovyet matematikçisi D. A. Grave de bir kere aynı tip bir hataya düştü. Her p asal sayısı için $2^{p-1} - 1$ sayısının p^2 ile bölünemediğini tahmin ediyordu. Bunun binden küçük bütün asal sayılar için doğru olduğunu, deneyerek buldu. Fakat $2^{1092} - 1$ sayısının $(1093)^2$ ile bölünebildiği görülür (1093 sayısı asaldır); yani Grave'in tahmini yanlıştır.

Çok inandırıcı başka bir misal verelim. $991 \cdot n^2 + 1$ ifadesinde n yerine sırasıyla 1, 2, 3, ... sayılarını koyarsak, bu iş için

⁽¹⁾ İsviçreli bir matematikçi olan Leonhard Euler (1707-1783) 20 yaşında iken St. Petersburg Akademisine üye olmuştu.

günler veya seneler de harcasak, hiç bir zaman tam kare olan bir sayı elde edemeyiz. Bununla beraber, bu şekildeki bütün sayılar tam kare değildir dersek yanılmış oluruz. Gerçekten bir müddet sonra $991n^2 + 1$ şeklindeki sayılar da kare ihtiva ederler, fakat $991n^2 + 1$ sayısının bir tam kare olduğu en küçük n değeri çok büyüktür :

$$n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$$

dir.

Bütün bu misaller okuyucuya bir uyarma olmalı ve bilinmiyen sonuçların benzetme ile elde edilemeyeceğini göstermelidir.

2. MATEMATİKSEL İNDÜKSİYON METODU

Şimdi tekrar misal 1 deki ilk n tek sayının toplamının hesabı problemine dönelim. Evvelce gördüklerimize göre, n 'nin pek çok değeri için gerçekleşek de

$$S(n) = n^2 \quad (1)$$

formülünü gene de ispat etmiş olamayacağımız aşikârdır. Zira daima gözönüne almadığımız bir n değeri için formülün doğru olmaması tehlikesi mevcuttur. (1) formülünün bütün n ler için doğru olduğuna emin olmak için, (1) formülünün doğru olduğu n değerlerinden hareket edip tabii sayılar dizisi boyunca ilerlersek, hiç bir zaman, ondan sonra artık formülün doğru olmayacağı bir n değerine ulaşamayacağımızı ispat etmek lâzımdır.

O halde, herhangi bir n sayısı için formülümüzün doğru olduğunu farzedip, $n + 1$ sayısı için de doğru olacağını ispat etmeğe çalışalım.

Yani,

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

olduğunu farzedelim ve

$$S(n+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$$

i hesaplıyalım. Hipotezimize göre bu eşitliğin ikinci tarafındaki toplamın ilk n terimi n^2 ye eşittir; buna göre

$$S(n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

dir.

Ohalde $S(n) = n^2$ formülünün bir n tabii sayısı için doğru olduğunu kabulederek, onu hemen takib eden $(n+1)$ sayısı için de gerçekleşeceğini gösterebiliriz. Fakat daha önce bu formülün $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için doğru olduğunu ispat etmeliyiz. Bunun neticesi olarak 5 i hemen takib eden $n = 6$ için ve buradan da $n = 7$ için, $n = 8$ için ve $n = 9, \dots$ v.s. için de doğru olur. Böylece terimlerinin sayısı ne olursa olsun formülümüze gösterilmiş gözü ile bakılır. Bu ispat tarzına *matematiksel induksiyon metodu* denir.

Görülüyor ki *matematiksel induksiyon metodunda* ispat, aşağıdaki iki kısımdan teşekkül etmektedir :-

1. *İddianın, mânayı haiz olduğu, küçük bir n_0 tabii sayısı için doğru olduğu ispat edilir.*⁽¹⁾

2. *İddia, $n \geq n_0$ olan bir tabii sayı için doğru ise, onu hemen takib eden $n+1$ sayısı için de doğru olacağı gösterilir.*

Böyle bir ispat ile iddianın $n \geq n_0$ olan bütün tabii sayılar için doğru olduğu gösterilmiş olur.

Daha önce bir çok misalle, ispatın ikinci kısmının gerekli olduğuna kanaat getirmiştik. Bununla beraber yalnız ikinci kısmın ispatı da yeter değildir; zira öyle olabilir ki, iddia, n nin hiç bir değeri için doğru olmayabilir. Meselâ, iddia herhangi bir n sayısının ondan sonra gelen sayıya eşit olduğu ise,

⁽¹⁾ Bu değer her zaman 1 olması icap etmeyeceği aşîkârdır; meselâ n kenarlı bir çokgenin bir özeliğine ait bir iddia, yalnız $n \geq 3$ için bir mânayı haizdir.

yani $n = n + 1$ olduğu ise, bu eşitliğin her iki yanına 1 ilâve ederek $n + 1 = n + 2$ buluruz. Yani $n + 1$ de kendisinden son-ra gelene eşittir. Buradan, aşikâr olarak bu iddianın bütün n ler için doğru olduğu sonucu çıkmaz; gerçekten hiç bir n için bu doğru değildir.

Matematiksel induksiyon metodunu kullanırken yukarki şemayı tam olarak kullanmak mecburiyetinde değiliz. Meselâ bazan problemi söylerken iddianın $n - 1$ ve n gibi *ardarda ge-len iki* sayı için doğru olduğunu farzedebiliriz, ve iddianın $n + 1$ için de doğru olduğunu ispat ederiz; bu halde birinci adımda iddiayı n 'nin ilk *iki* değeri için, meselâ $n = 1$ ve $n = 2$ için gerçeklemek lâzımdır (aşağıdaki misal 16, 17, 18 e baki-niz). Bazan, ikinci adımda iddianın n den *küçük bütün* k tabii sayıları için doğru olduğu kabul edilerek n 'nin bu değeri için de doğru olduğu gösterilir (aşağıda misal 7, 8, 9, 15 e bakınız).

3. TATBİKAT

Matematiksel induksiyon metodunun tatbikatına dair da-ha çok misal gözönüne alalım. Elde ettiğimiz formüller iler-de kullanılacaktır.

MİSAL 2. ilk n tabii sayının toplamı $S_1(n)$ ile gösteril-diğine göre, bunun $n(n + 1)/2$, yani,

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM. 1. $S_1(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ dir.

2. $S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

olduğunu farzedelim. Buna göre

$$\begin{aligned}
S_1(n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

MİSAL 3. İlk n tabii sayının karelerinin toplamı olan $S_2(n)$ nin $n(n+1)(2n+1)/6$ olduğunu, yani

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

olduğunu gösteriniz.

$$\text{ÇÖZÜM. 1. } S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \text{ dir.}$$

$$2. S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu farzederek

$$\begin{aligned}
S_2(n+1) &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2,
\end{aligned}$$

ve bunun neticesi olarak

$$S_2(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

bulunur.

Problem 1. İlk n tabii sayının küblerinin toplamı $S_3(n)$ in $n^2(n+1)^2/4$ olduğunu; yani,

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (4)$$

olduğunu gösteriniz.

MİSAL 4.

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (5)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 1. $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ tür.

2. Eğer

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

ise,

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n + n(n+1) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

dür.

Problem 2. (2) ve (3) formüllerinden (5) eşitliğini elde ediniz.

Yol gösterme: İlk önce

$$\begin{aligned} &0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Sayı kavramı ile sıkı bir bağlantısı bulunduğuundan Matematiksel induksiyon metodu aritmetik, cebir ve sayılar teorisinde pek çok yerde kullanılır. Önsözde bahsedilen İ. S. Sominskii'nin yazdığı kitapçıkta bu tip pek çok ilgi çekici misaller vardır. Fakat tam sayı kavramı matematikte temeldir ve tam sayıların özelliklerini inceliyen sayılar teorisine münhasır değildir. Matematiksel induksiyon metodu matematiğin bir çok dallarında kullanılır. Geometride, bu metodun nadiren güzel tatbikatına raslanır.

1. İndüksiyon ile Hesaplama

Sayılar teorisi ve cebirde olduğu gibi geometride de, matematiksel indüksiyon metodunun en tabii tatbik yeri, hesaplama problemlerinin çözümündedir. Bir çok örnek görelim.

4. DÜZGÜN 2^n - GENLERE AİT MİSALLER.

MİSAL 5. Yarı çapı R olan bir daire içine çizilen düzgün 2^n - genin a_{2^n} kenar uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM 1. $n = 2$ için düzgün 2^n - gen bir karedir. Kenar uzunluğu

$$a_4 = R\sqrt{2}$$

dir. Bundan başka $a_{2^{n+1}}$ in değeri a_{2^n} den aşağıdaki formül ⁽¹⁾ kullanılarak hesaplanabilir :

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

Bundan, düzgün bir 8 - genin kenar uzunluğu için

$$a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} ;$$

düzgün bir 16 - genin kenar uzunluğu için

$$a_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} ;$$

düzgün bir 32 - genin kenar uzunluğu için de

$$a_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

⁽¹⁾ Pitagor teoreminin tatbiki ile elde edilir.

buluruz. Böylece, $n \geq 2$ için daire içine çizilen düzgün bir 2^n genin kenar uzunluğunun

$$a_{2^n} = R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{(n-2) \text{ defa}}} \quad (6)$$

olduğunu farzedebiliriz.

2. Dairenin içine çizilen düzgün 2^n -genin kenar uzunluğunun (6) formülü ile verildiğini farzedelim. Bu halde formülle göre

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}} &= \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - R^2 \frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ defa}}}{4}}} \\ &= R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ defa}}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da (6) formülünün bütün n ler için doğru olduğu neticesi elde edilir.

(6) formülünden, yarıçapı R olan bir dairenin $C = 2\pi R$ çevresinin, 2^n - genin çevresine eşit olan

$$2^n a_{2^n} = 2^n R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ defa}}}$$

ifadesinin n sonsuz büyüdüğü zamanki limitine eşit olacağı görülür. Buna göre

$$2\pi R = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n R \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ defa}}}$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ defa} \text{ yani } [(n-1)-1] \text{ defa}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-1) \text{ defa}}}$$

dir.

Problem 3. (6) formülünü kullanarak π nin

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots}$$

ifadesinin, paydadaki çarpanların (kare köklerin) sayısı sonsuz büyüdüğü zamanki limitine eşit olduğunu gösteriniz (VIETA FORMÜLLERİ) ⁽¹⁾. Çarpanların teşkili kaidesi yazılan ilk üç terimden görülmektedir.

Yol gösterme. S_{2^n} , yarıçapı R olan bir daire içine çizilen 2^n -genin alanı ve h_{2^n} de apoteminin uzunluğu ⁽²⁾ olsun. Buna göre

$$h_{2^n} = \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}$$

olduğundan, (6) formülünden

$$h_{2^n} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-2) \text{ defa}}}$$

elde edilir. O halde

$$S_{2^n} = \frac{1}{2} (2^n a_{2^n}) h_{2^n} = 2^{n-1} a_{2^n} h_{2^n} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{n-2} R^2 \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{(n-3) \text{ defa}}} \\ &= 2^{n-2} R a_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

dir ($n \geq 3$ farzedilmelidir). Benzer şekilde

⁽¹⁾ F. Vieta (1540-1603), meşhur bir Fransız matematikçisi-dir. Bugün kullanılan cebir sembollerinden bir çoğunu bulanlardan birisidir.

⁽²⁾ Merkezden, kenarlarından birine indirilen dikin uzunluğu.

$$S_{2^{n+1}} = 2^{n-1} R a_{2^n} \quad (**)$$

dur. (*) ve (**) dan

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}} = \frac{2^{n-1} a_{2^n} h_{2^n}}{2^{n-1} R a_{2^n}} = \frac{h_{2^n}}{R} = \cos \frac{180^\circ}{2^n}$$

ve buradan da

$$\frac{S_4}{S_{2^n}} = \frac{S_4}{S_8} \cdot \frac{S_8}{S_{16}} \cdot \dots \cdot \frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}} = \cos \frac{180^\circ}{4} \cos \frac{180^\circ}{8} \dots \cos \frac{180^\circ}{2^{n-1}}$$

bulunur.

$$S_4 = 2R^2 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \pi R^2$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4}{S_{2^n}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$$

eşitliği ve $\frac{2}{\pi}$ nin

$$\cos 45^\circ \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ}{4} \dots$$

ifadesinin limiti olduğu görülür. Geriye

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

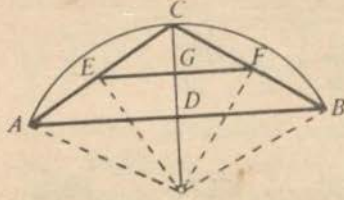
formülünün tatbiki kalır.

MİSAL 6. P çevresi verilmiş, düzgün bir 2^n -genin içine ve dışına çizilen dairelerin yarıçaplarını hesaplamak için formüller bulunuz.

$$\text{ÇÖZÜM 1. } r_2 = \frac{P}{8}, \quad R_2 = \frac{P\sqrt{2}}{8} \text{ dir.}$$

2. Çevresi P olan düzgün bir 2^n -genin içine ve dışına çizilen dairelerin yarıçapları r_n ve R_n bilindiğine göre, çevresi aynı olan düzgün 2^{n+1} -genin içine ve dışına çizilen dairelerin yarıçapları r_{n+1} ve R_{n+1} i hesaplayalım. AB , çevresi P olan düzgün

2^n -genin bir kenarı, O merkezi, C , AB yayının orta noktası,



Şek. 1

D de AB kordonunun orta noktası olsun (Şek. 1). Bundan başka, EF , sırasıyla AC ve BC doğru parçalarının orta noktalarını birleştiren doğru, ve G de EF doğru parçasının orta noktası olsun.

$$\begin{aligned}\angle EOF &= \angle EOC + \angle FOC \\ &= \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC \\ &= \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

olduğundan, EF , yarıçapı OE olan dairenin içine çizilen düzgün 2^{n+1} -genin kenarına eşittir. Bu 2^{n+1} -genin çevresi

$$2^{n+1}EF = 2^{n+1}\frac{AB}{2} = 2^n AB$$

yani gene P ye eşittir.

Buna göre

$$r_{n+1} = OG \quad \text{ve} \quad R_{n+1} = OE$$

dir. Fakat

$$r_n = OD \quad \text{ve} \quad R_n = OC$$

dir. Bundan başka $OC - OG = OG - OD$ olduğu aşikârdır. O halde

$$R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$$

dir. Bundan derhal

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

elde edilir.

OEC dik üçgeninden

$$OE^2 = OC \cdot OG$$

veya

$$R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$$

elde edilir. O halde

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

dir.

Demek ki aranılan bağıntılar

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad \text{ve} \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

dir.

Şimdi

$$r_2, R_2, r_3, R_3, \dots, r_n, R_n, \dots$$

dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin terimleri çevresi P olan bir dairenin yarıçapına, yani, $\frac{P}{2\pi}$ ye yaklaşır. Özel olarak, $P = 2$

için bu limit $\frac{1}{\pi}$ dir ve

$$r_2 = \frac{1}{4} \quad \text{ve} \quad R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

elde ederiz. $r_1 = 0$ ve $R_1 = \frac{1}{2}$ vazederek aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz :

Bir seri

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}+1}{8}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+4}{8}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+4+\sqrt{2}+1}{16}, \dots$$

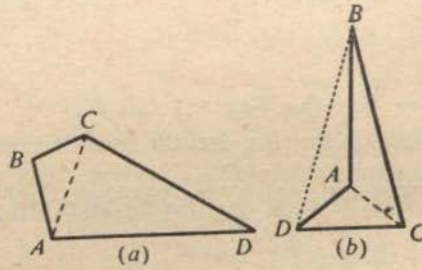
terimlerinden meydana gelmişse, ilk iki terimi 0 ve $\frac{1}{2}$ ise ve diğer terimleri önceki ikisinin sırasıyla aritmetik ve geometrik ortalaması ise, bu serinin terimleri $\frac{1}{\pi}$ ye yaklaşır.

5. n - GENLER VE KÖŞEĞENLERİNE AİT MİSALLER

MİSAL 7. Bir n - genin (konveks olmayabilir!) iç açıları-
nın toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM. 1. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 2.90° dir. Ohalde her dörtgen iki üçgene ayrılabilir; bir dörtgenin iç açılarının toplamı 4.90° dir (Şek. 2).

2. $k < n$ olmak üzere, herhangi bir k -genin iç açılarının toplamının $2.(k-2).90^\circ$ olduğunu gösterdiğimizizi farzedelim, ve $A_1 A_2 \dots A_n$ n -genini gözönüne alalım.



Şek. 2

Önce, üçten fazla kenarı olan her çokgenin, kenar sayısı daha az olan iki çokgene parçalıyan bir köşegeninin ⁽¹⁾ bulunduğunu gösterelim (konveks bir çokgen için bu aşikârdır). A, B, C , çokgenin yanyana üç köşesi olsun. B köşesinden, çokgenin ABC iç açısını dolduracak şekilde, mümkün olan bütün yarım doğruları çizelim; ve bu yarım doğrulardan her birini çokgenin çevresini kesinceye kadar uzatalım. İki hal mümkündür:

1. Hal. Bütün yarım doğrular çokgenin aynı bir kenarını keserler (Şek. 3 a). Bu halde AC köşegeni n -genimizi bir $(n-1)$ -gen ve bir üçgene ayırır.

2. Hal. Bütün yarım doğrular çokgenin aynı kenarını kesmezler (Şek. 3 b). Bu halde yarım doğrulardan bir tanesi, bir

⁽¹⁾ Yalnız konveks olmıyan bir çokgenin köşegeninin onu kesebileceğine, veya tamamiyle çokgenin dışında kalabileceğine dikkat etmeliyiz (Şek. 2 b deki BD köşegeninde olduğu gibi).

çizilemez); bir dörtgen için bu sayının iki olacağı aşikârdır (Şek. 2 a, b ye bakınız).

2. $k < n$ olan her k -genin kesişmiyen köşegenlerle (bölme metoduna bağlı olmadan) $k - 2$ tane üçgene bölünebildiğini farzedelim. Bir $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geninin herhangi bir üçgenlere bölünmesini gözönüne alalım. $A_1 A_k$ bu bölünmenin köşegenlerinden biri olsun; bu köşegen $A_1 A_2 \dots A_n$ n -genini bir $A_1 A_2 \dots A_k$ k -geni ile bir $A_1 A_k A_{k+1} \dots A_n$ $(n - k + 2)$ -genine ayırır. $k < n$ için olan faraziyemize göre, bölünme ile elde edilen üçgenlerin toplam sayısı

$$(k - 2) + [(n - k + 2) - 2] = n - 2$$

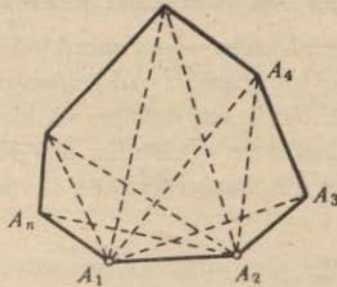
olacaktır. Böylece iddia her n için ispat edilmiş olur.

Problem 4. Bir n -geni üçgenlere bölmek için lâzım olan kesişmiyen köşegenlerin N sayısını belirleyiniz.

Yol gösterme : n -genin N köşegen ve n kenarı, $n - 2$ tane üçgenin kenarları olacaktır (Misal 8 e bakınız); ohalde

$$2N + n = 3(n - 2), N = n - 3 \text{ tür.}$$

MİSAL 9. Bir konveks n -geni kesişmeyen köşegenler yardımı ile üçgenlere ayırma usullerinin $P(n)$ sayısını hesaplama metodunu belirtiniz.



Şek. 4

ÇÖZÜM. 1. Bir üçgen için bu aşikâr olarak 1 dir.

$$P(3) = 1.$$

2. $k < n$ olmak üzere bütün $P(k)$ sayılarının belirlendiğini farzedelim; bu takdirde $P(n)$ i bulalım. Bunun için $A_1 A_2 \dots A_n$ konveks n -genini gözönüne alalım (Şek. 4). Böyle bir üçgenlere par-

çalamada $A_1 A_2$ kenarı elde edilen üçgenlerden birinin bir kenarı, ve bu üçgenin üçüncü köşesi de geriye kalan $A_3, \dots, A_n$ noktalarından biri olacaktır. n -genin üçgenlere parçalanmalarında, bu köşenin A_3 noktası olması hallerinin sayısı, $A_1 A_3 A_4 \dots A_n$, $(n-1)$ -geninin bu şekilde üçgenlere parçalanmalarının sayısına eşittir; yani $P(n-1)$ dir. Adı geçen köşenin A_4 ile çakışması halinde n -genin üçgenlere parçalanışının sayısı ise, $A_1 A_4 A_5 \dots A_n$ $(n-2)$ -geninin parçalanışlarının sayısına, yani $P(n-2) = P(n-2) P(3)$ e eşittir. Bu köşenin A_5 ile çakıştığı hallerin sayısı ise $P(n-3) P(4)$ dür, zira $A_1 A_5 \dots A_n$, $(n-3)$ -geninin her parçalanışının, $A_2 A_3 A_4 A_5$ dörtgeninin her bir parçalanışı ile ayrı ayrı bileşimi alınmalıdır. Böylece devam ederek aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz :

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) P(3) + P(n-3) P(4) + \dots + P(3) P(n-2) + P(n-1) \quad (7)$$

Bu formülü arka arkaya kullanmak suretiyle

$$P(4) = P(3) + P(3) = 2$$

$$P(5) = P(4) + P(3) P(3) + P(4) = 5$$

$$P(6) = P(5) + P(4) P(3) + P(3) P(4) + P(5) = 14$$

$$P(7) = P(6) + P(5) P(3) + P(4) P(4) + P(3) P(5) + P(6) = 42$$

$$P(8) = P(7) + P(6) P(3) + P(5) P(4) + P(4) P(5) +$$

$$P(3) P(6) + P(7) = 132,$$

v.s. eşitliklerini elde ederiz.

İhtar ⁽¹⁾. (7) formülünü kullanarak, her n için

⁽¹⁾ A. M. Yaglom ve I. M. Yaglom'un *Nonelementary Problems in Elementary Exposition*, Vol 1 (San Francisco : Holden-Day Inc.) adlı kitabındaki Prob. 51 (b) nin çözümüne bakınız.

$$P(n) = \frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}$$

olduğunu ispat etmek mümkündür.

Problem 5. Konveks bir n -gen, üçer üçer bir noktada kesişmiyen bütün köşegenleri yardımı ile kaç parçaya bölünebilir?

Yol gösterme: A_1A_n köşegeni, $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ konveks $(n+1)$ -genini $A_1A_2 \dots A_n$ n -geni ile $A_1A_nA_{n+1}$ üçgenine ayırır. $A_1A_2 \dots A_n$ n -geninin, köşegenlerinin ayırdığı parçalarının sayısı $F(n)$ 'i bildiğimizi farzederek, A_{n+1} köşesini katmakla elde edeceğimiz parçaların sayısını bulabiliriz. Bu sayı, A_{n+1} köşesinden geçen köşegenler üzerinde geriye kalan köşegenlerin ayırdığı parçaların sayısından bir fazladır. A_{n+1} köşesinden $n+1-3$, yani $n-2$ köşegen geçer, ve her köşegenin bölündüğü parçaların sayısı, onu kesen köşegenlerin sayısından bir fazladır.

$A_{n+1}A_2$ köşegeni $1+(n-2)$ parçaya ayrılır ;

$A_{n+1}A_3$ köşegeni $1+2(n-2)-2$ veya $1+2(n-3)$ parçaya ayrılır;

$A_{n+1}A_4$ köşegeni $1+3(n-2)-3(2)$ veya $1+3(n-4)$ parçaya ayrılır; böylece devam edilir.

Ohalde

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + 1 + [1 + (n-2)] + [1 + 2(n-3)] + \dots \\ &\quad + \underbrace{[1 + (n-3)2] + [1 + (n-2)1]}_{n-2 \text{ köşegen}} \\ &= F(n) + 1 + (n-2) + 1(n-2) + 2(n-3) + \dots \\ &\quad + \underbrace{(n-3)2 + (n-2)1}_{n-2 \text{ terim}} \end{aligned}$$

bulunur. Girişteki (2) ve (5) formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= F(n) + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} - 1 \end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitlikte sırasıyla $F(n)$, $F(n-1)$, ..., $F(4)$ ün değerlerini yerine koyup, girişteki (2), (3) ve (4) formüllerini de kullanarak

$$F(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

eşitliğini elde ederiz.

2. İndüksiyon ile İspat

Bundan evvelki bölümde elde edilen neticelerden bazıları, geometri teoremlerinin ispatında faydalanılan matematik indüksiyon metodunun kullanılışına misal olarak düşünülebilir. Meselâ, misal 7 nin ifadesi aşağıdaki gibi söylenebilir: Bir n -genin açılarının toplamının $(n-2) \cdot 180^\circ$ ye eşit olduğunu gösteriniz. Misal 8 de ise, birbirleri ile kesişmiyen köşegenlerinin bir n -geni $(n-2)$ tane üçgene ayırdıkları gösterilmiştir. Bu bölümde, bu tipten daha başka misaller gözönüne alacağız.

6. PARÇALARA AYIRMA

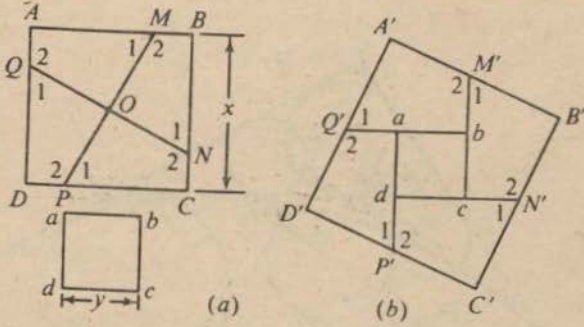
MİSAL 10. n tane kare verildiğine göre bunları o şekilde parçalamak mümkündür ki, bu parçalar tekrar birleştirilerek yeni bir kare elde edilebilsin.

İspat. 1. $n = 1$ için iddiamızı ispat lâzım değildir. İddiamızın $n = 2$ için doğru olduğunu gösterelim. Verilen $ABCD$ ve $abcd$ karelerinin kenarlarına sırasıyla x ve y diyelim. $x \geq y$ olsun. $ABCD$ karesinin x ile gösterdiğimiz kenarları üzerinde

$$AM = BN = CP = DQ = (x + y)/2$$

parçalarını ayıralım (Şek. 5 a). Bu kareyi MP ve NQ doğruları ile keselim. Bu doğruların karenin merkezi O da, aralarında bir dik açı meydana gelecek şekilde kesiştikleri ve kareyi birbirine denk dört parçaya ayırdıkları kolayca görülebilir. Bu parçaları ikinci kare etrafında Şek. 5 b de görüldüğü gibi birleştirelim. Elde edilen şekil de bir karedir. Çünkü M', N', P'

ve Q' noktalarındaki açılar birbirlerini bütünlerler, A', B', C', D' deki açılar diktir ve $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$ dır.



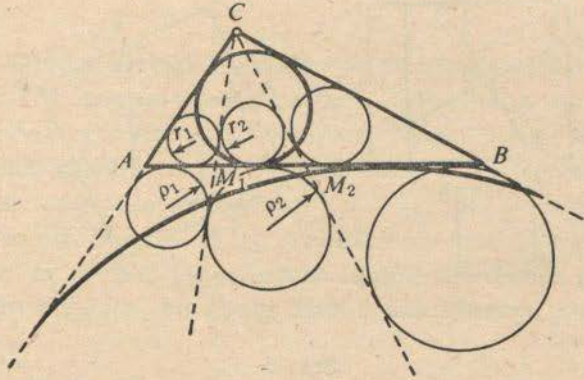
Sek. 5

2. İddiamızın n tane kare için ispat edilmiş olduğunu farzedelim ve $n + 1$ tane $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$ kareleri verilsin. Bu karelerden herhangi iki tanesini seçelim. Bunlara K_n ve K_{n+1} diyelim. 1. paragrafta görüldüğü üzere bunlardan birisini parçalara ayırıp, bu parçaları diğeri etrafına yerleştirerek yeni bir K' karesi elde ederiz. Bundan sonra, faraziyemize göre $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K'$ karelerini, tekrar birleştirmekle yeni bir kare elde edebileceğimiz parçalara ayırabiliriz.

MİSAL 11. Bir ABC üçgeni verilsin. Bunun C köşesinden çizilen $n - 1$ tane $CM_1, CM_2, \dots, CM_{n-1}$ doğruları üçgeni daha küçük, $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_{n-1}CB$ üçgenlerine ayırsınlar. $r_1, r_2, \dots, r_n$ ve $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sırasıyla bu üçgenlerin içine çizilen dairelerin ve C deki açılarının içinde kalan dıştan teğet dairelerinin yarı çapları olsunlar (Şek. 6 a ya. bakınız). r ve ρ da ABC üçgeninin iç ve C açısı içindeki dıştan teğet dairelerinin yarı çapları olsunlar.

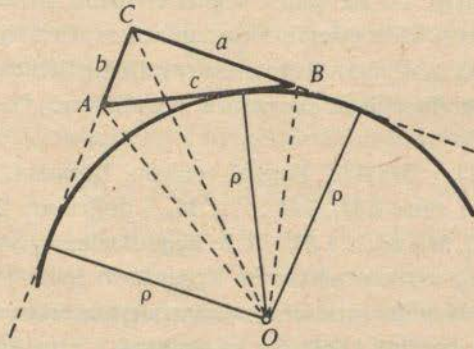
$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$$

olduğunu gösteriniz.



Şek. 6 a

İspat. ABC üçgeninin alanını $S(ABC)$ ile, çevresinin yarısını da s ile gösterelim. $S(ABC) = sr$ olduğu aşikârdır. Diğer



Şek. 6 b

tarafından üçgenin dışına çizilen dairenin merkezi O ise (Şek. 6 b), bu takdirde

$$\begin{aligned} S(ABC) &= S(OAC) + S(OCB) - S(OAB) \\ &= \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} a\rho - \frac{1}{2} c\rho \\ &= \frac{1}{2} (b+a-c) \rho \\ &= (s - c) \rho \end{aligned}$$

dur; buna göre

$$sr = (s - c) \rho \quad \text{ve} \quad \frac{r}{\rho} = \frac{s - c}{s}$$

elde edilir. Bundan başka, trigonometriden bildiğimize göre

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

ve

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

dir. Ohalde

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \times \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{s-c}{s}$$

ve

$$\frac{s-c}{s} = \frac{r}{\rho}$$

olduğundan

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{\rho} \quad (8)$$

elde edilir.

Bu ihtarı yaptıktan sonra teoremin ispatına dönelim.

1. $n = 1$ için ispat edilecek bir şey yoktur. İddiamızın $n = 2$ için doğru olduğunu görelim. Bu halde CM doğru ABC üçgenini, ACM ve CMB gibi daha küçük iki üçgene ayırır. (8) formülüne göre

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMB}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ - CMA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ &= \frac{r}{\rho} \end{aligned}$$

dur.

2. İddiamızın $n - 1$ doğru için ispat edilmiş olduğunu farzedelim. ABC üçgenini $n + 1$ tane daha küçük $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$ üçgenine parçalıyan $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$ gibi n tane doğru verilmiş olsun. Bu üçgenlerden ACM_1 ve M_1CM_2 gibi iki tanesini alalım. Paragraf 1 de gördüğümüze göre

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}}$$

dir; burada r_{12} ve ρ_{12} , ACM_2 üçgeninin içine çizilen ve C açısı içinde dıştan teğet çizilen dairelerin yarıçaplarıdır. Fakat faraziyemiz n tane $ACM_2, M_2CM_3, \dots, M_nCB$ üçgenleri için doğru olduğundan

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

eşitliği ve bunun neticesi olarak

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \frac{r_3}{\rho_3} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} \cdot \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = \frac{r}{\rho}$$

elde edilir.

Problem 6. CM ve CM' doğruları ABC üçgenini farklı iki şekilde ACM , CMB ve ACM' , $CM'B$ üçgenlerine ayırırlar; bu üçgenlerin içlerine çizilen dairelerin yarıçapları sırasıyla r_1, r_2 ve r_1', r_2' olsun. $r_1 = r_1'$ ise $r_2 = r_2'$ olacağını ve üçgenlerin C köşelerindeki açılarının içinde kalan dıştan teğet dairelerin yarıçapları arasında da benzer bağıntıların bulunacağını gösteriniz.

Yol gösterme : Misal 11 deki notasyonu kullanarak, önce

$$\frac{r}{\rho} = 1 - \frac{2r}{h} \quad \text{ve} \quad \frac{\rho}{r} = 1 + \frac{2\rho}{h}$$

deşliklerini gösteriniz (h , C köşesindeki yüksekliktir). Bunlardan derhal

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h} = \left(1 - \frac{2r_1'}{h}\right) \left(1 - \frac{2r_2'}{h}\right)$$

ve

$$\left(1 + \frac{2\rho_1}{h}\right) \left(1 + \frac{2\rho_2}{h}\right) = 1 + \frac{2\rho}{h} = \left(1 + \frac{2\rho_1'}{h}\right) \left(1 + \frac{2\rho_2'}{h}\right)$$

elde edilir.

Problem 7. $R_1, R_2, \dots, R_n$ ve R sırasıyla $ACM_1, M_1CM_2, \dots, M_nCB$ ve ABC üçgenlerinin dışına çizilen dairelerin yarıçapları olduklarına göre, Misal 11 deki notasyonu kullanarak

$$\frac{r_1 + \rho_1}{R_1} + \frac{r_2 + \rho_2}{R_2} + \dots + \frac{r_n + \rho_n}{R_n} = \frac{r + \rho}{R}$$

olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme :

$$S(ABC) = s \cdot r = (s - c) \rho = \frac{abc}{4R}$$

ve

$$S(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan derhal

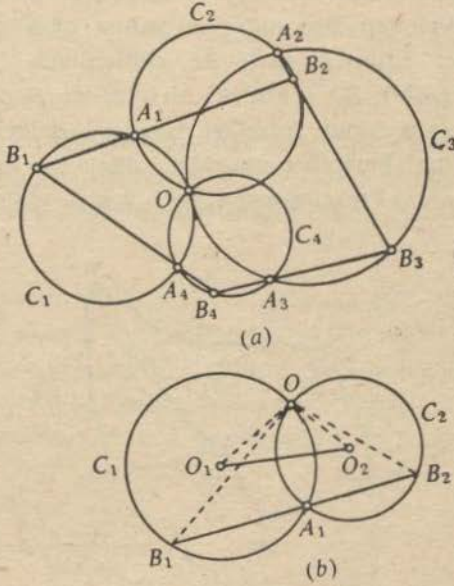
$$\begin{aligned} \frac{r + \rho}{2R} &= \frac{\frac{S(ABC)}{s} + \frac{S(ABC)}{s-c}}{\frac{abc}{2S(ABC)}} \\ &= \frac{(a+b)[c^2 - (a-b)^2]}{2abc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \end{aligned}$$

ve kosinüs bağıntısı kullanılarak

$$= \cos CAB + \cos CBA$$

elde edilir.

Problem 8. O noktasında kesişen n tane $C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesi verilmiş olsun. C_1 ve C_2, C_2 ve $C_3, \dots, C_n$ ve C_1 dairelerinin ikinci kesiştikleri noktalar sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_n$ olsunlar (Şek. 7 a). B_1, C_1 dairesi üzerinde O dan ve A_1 den farklı olan herhangi seçilmiş bir nokta olsun. $B_1 A_1$ kirişini çizelim. Bu C_2 dairesini B_2 noktasında kessin; $B_2 A_2$ kirişi de C_3 dairesini B_3 noktasında kessin. Böylece devam edelim. (Eğer B_2 noktası A_2 ile çakışırsa A_2 den geçen kiriş yerine C_2 dairesinin teğetini çizeriz). En son C_1 dairesi üzerinde elde edilecek olan B_{n+1} noktasının B_1 ile çakışacağını gösteriniz.



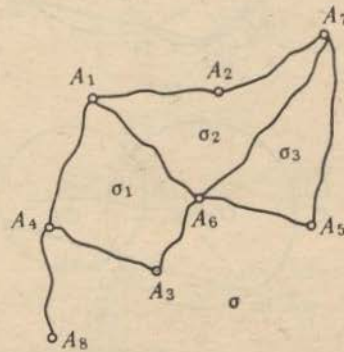
Şek. 7

Yol gösterme: İlk önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispat ediniz: Onoktasında kesişen C_1 ve C_2 dairelerinin merkezleri O_1 ve O_2 olsun. B_1B_2 de A_1 noktasından geçen ve bu iki daireyi diğer noktalarda kesen kiriş olsun (Şek. 7b'ye bakınız); B_1B_2 ve O_1O_2 doğru parçaları O noktasından aynı açı altında görülür. Bundan sonra bu teoremi üç daire için yapınız. Sonra da $n-1$ tane daire için doğru olduğunu farzedip n tane $C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesinin alındığı halde gösteriniz. B_{n-1} noktasındaki kirişi çiziniz ve bunun C_{n-1} ve C_n ile kesim noktalarını gösteriniz. $n-1$ tane $C_1, \dots, C_{n-1}$ dairesine indüksiyon faraziyesini tatbik ediniz.

7. HARİTALAR.

Düzlemde, $A_1, A_2, \dots, A_p$ noktalarını birleştiren ve başka ortak noktaları bulunmayan bir takım çizgilerden meydana gelen bir ağ verildiğini ve bu çizgiler ağının «tek bir parça»

teşkil ettiklerini farzedelim; yani, $A_1, \dots, A_p$ noktalarının her hangi birinden bir diğerine yalnız ağı'n çizgileri üzerinde hareket edilmek şartı ile gidilebilsin. (Bu *tek bağımlılık* özeliğidir). Bu şekildeki bir çizgiler ağına bir *harita*, verilen noktalara onun *köşeleri*, komşu köşeleri birleştiren eğri parçalarına haritanın sınırları, düzlemde bu sınırların ayırdığı parçalara (tabii sonsuz dış bölge de dahil) haritanın



Şek. 8

memleketleri diyeceğiz. Buna göre şek 8 de $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ haritanın köşeleri; $A_1A_2, A_2A_7, A_1A_6, A_6A_7, A_4A_1, A_4A_3, A_3A_6, A_6A_5, A_5A_7, A_4A_8$ sınırları; ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bölgeleri ile σ sonsuz dış bölgesi de memleketleridir.

MİSAL 12. (EULER TEOREMİ). Herhangi bir haritada ⁽¹⁾ memleketlerin sayısını s ile sınırların sayısını l ile, köşelerin sayısını p ile gösterdiğimizize göre

$$s + p = l + 2$$

dir.

İspat. Bu teoremi sınırlar sayısı l üzerinde indüksiyon yaparak ispat edelim.

⁽¹⁾ Her haritanın en az bir köşesinin bulunduğu farzedilmektedir.

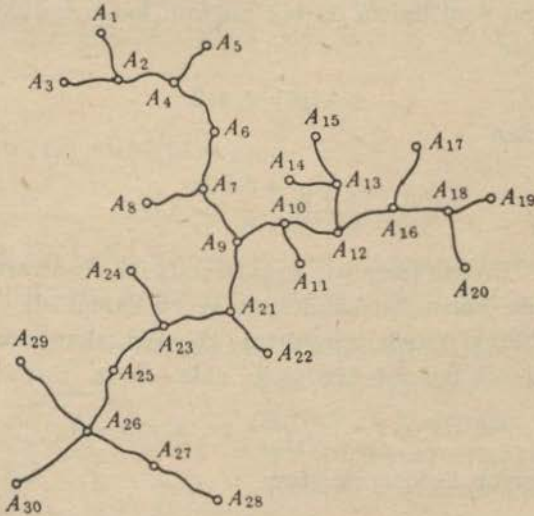
1. $l = 0$ olsun; ohalde $s = 1$ ve $p = 1$ olmalıdır. Bu takdirde

$$s + p = l + 2$$

dir.

2. Sınırlarının sayısı n olan her hangi bir harita için teoremin doğru olduğunu farzedelim ve $l = n + 1$ tane sınırı, s memleketi, p köşesi olan bir harita gözönüne alalım. İki hal mümkündür.

Hal 1. Haritanın iki köşesi arasında memleketler boyunca giderek bu iki noktayı birleştiren yalnız bir yol vardır. (Haritanın tek bağımlı olduğu düşünülürse, daima bu şekilde en az bir yol vardır.) Bu halde harita basit bir kapalı çevre ihtiva etmez, ve bundan ötürü Şek. 9 da gösterilen biçimde olup bu



Şek. 9

harita için $s = 1$ dir. Böyle bir harita için, yalnız bir sınırın sonunda bulunan en az bir köşe bulunabileceğini göstereceğiz.

(Şek. 9 da A_1 köşesi böyle bir köşedir. Böyle bir köşeye *uç* denir.) Gerçekten, haritada gelişi güzel bir köşe seçelim. Eğer bu köşe bir uç değilse, bu köşede son bulan en az iki sınır vardır. Bu sınırlardan biri boyunca giderek ikinci bir köşeye varalım. Bu köşe de bir uç değilse, başka bir sınırın son noktasıdır. Bu sınır boyunca diğer son noktaya gidelim, ve böylece devam edelim. Haritada kapalı hiç bir yol bulunmadığı hipotezine göre daha önce gözönüne alınan köşelerden hiçbirine dönemeyiz, ve haritada yalnız sonlu sayıda köşe bulunduğundan sonunda uç olan bir köşeye gelmeliyiz. Bu köşeyi ve bunda biten basit sınırı çıkarırsak yeni bir harita elde ederiz. Bunda

$$l' = l - 1 = n, \quad s' = s, \quad p' = p - 1$$

dir. Tabii bu yeni harita da tek bağımlı kalır. İndüksiyon hipotezine göre

$$s' + p' = l' + 2$$

dir ve bundan

$$s + p = l + 2$$

elde edilir.

Hal 2. Birden fazla yol ile birleşmiş iki köşe vardır (Şek. 8). Bu halde, harita bu köşelerden geçen kapalı bir yol ihtiva eder. Bu yoldaki sınırlardan birini (köşeleri çıkarmadan) çıkarırsak yeni, tek bağımlı bir harita elde ederiz. Burada

$$l' = l - 1 = n, \quad p' = p, \quad s' = s - 1$$

dir. İndüksiyon hipotezine göre

$$s' + p' = l' + 2$$

dir. Buradan

$$s + p = l + 2$$

elde edilir.

MİSAL 13. Haritada üç taneden daha az sınırın birleştiği noktalar bulunmuyorsa (yani, harita Şek. 8 deki A_2, A_3, A_5, A_8 noktaları gibi noktalar veya A_4A_8 gibi sınırlar ihtiva etmiyorsa), bu takdirde haritada sınırları beşten fazla olmıyan, en az bir tane memleket vardır.

İspat. Haritanın p tane köşesinden her birinde en az üç sınır kesiştiği için, $3p$, sınırların sayısının iki katı olan $2l$ den büyük olamaz (her sınır iki köşeyi birleştirdiğinden l sayısının iki katı alınmıştır); ohalde

$$p \leq \frac{2}{3} l \quad (9)$$

dir. Şimdi de haritadaki s tane memlekettten her birinin altıdan daha az sayıda sınırı olmadığını farzedelim. Bu takdirde $6s$, sınırların sayısının iki katını geçemez (her sınır iki memleketi ayırdığından, sayının iki katı alınır); ohalde

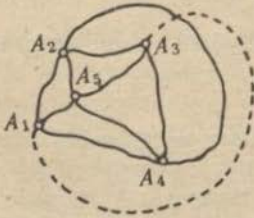
$$s \leq \frac{1}{3} l \quad (10)$$

dir. (9) ve (10) eşitsizliklerinden

$$s + p \leq \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} l = l$$

elde edilir. Bu Euler teoremi ile çelişir. Onun için her memleketin altıdan daha az sınırı bulunamayacağı hipotezi yanlıştır.

Problem 9. Düzlemde beş nokta verilmiş olsun. Bu noktalardan herhangi bir çifti, diğerleri ile kesişmiyen çizgilerle birleştirmenin mümkün olamayacağını gösteriniz (Şek. 10).



Şek. 10

Yol gösterme : Bütün bu noktaların problemdeki şartlar gerçekleşecek şekilde birleştirilebildiğini farzedelim. Bu takdirde 5

köşe, $\frac{5.4}{2} = 10$ sınır ve dolayısıyla 7 memleket ihtiva eden bir harita elde ederiz (Euler teoremi!). Böyle bir haritanın imkânsızlığı (10) eşitsizliğine götüren muhakeme tarzına benzer düşüncelerden çıkar ⁽¹⁾.

8. ÇOKYÜZLÜLER.

Problem 10. (ÇOKYÜZLÜLER İÇİN EULER TEOREMİ). Konveks bir çokyüzlünün köşelerinin sayısı p , kenarlarının sayısı l ve yüzlerinin sayısı s olduğuna göre

$$s + p = l + 2$$

eşitliğini gösteriniz.

Yol gösterme: Çokyüzlüyü, yarıçapı yeter derecede büyük olan bir küre içine yerleştiriniz. Çokyüzlünün bütün noktalarını, (çokyüzlünün içinde kaldığını farzettığımız) kürenin merkezinden, küre yüzeyi üzerine izdüşürünüz. Bu suretle kürenin yüzeyi üzerinde bir harita elde edilir. Kürenin yüzeyi üzerinde bulunan ve fakat haritanın sınırları üzerinde bulunmayan herhangi bir nokta alınır. Haritayı, bu noktadan geçen yarıçapın diğer ucundaki teğet düzlem üzerine, (bu nokta merkez olmak üzere) izdüşürünüz. (stereografik izdüşüm). Bu şekilde elde edilen düzlem haritaya Euler teoremini tatbik ediniz.

Problem 11. Her çokyüzlünün bir üçgen, bir dörtgen veya bir beşgen olan enaz bir yüzü olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: Misal 13 e bakınız.

Problem 12. Yedi kenarlı bir çokyüzlü olamayacağını gösteriniz.

⁽¹⁾ Okuyucu Euler teoreminin haritalara tatbikine ait diğer örnekleri E. B. Dynkin ve V. A. Uspenskii'nin *Çokrenk Problemler* isimli kitabında bulabilir. [Bu kitap türkçeye A. R. Özbek ve M. A. Özkan tarafından çevrilmiş ve bu yayınların 2. si olarak basılmıştır (Çevirenin notu)]

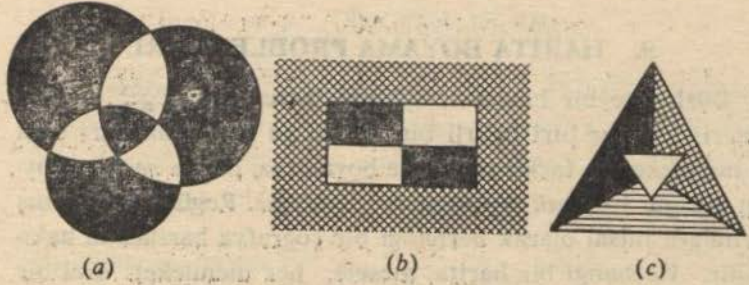
Yol gösterme: Euler teoremini tatbik ediniz.

İhtar. Euler teoreminin çokyüzlülere tatbikine ait diğer misalleri, meselâ, R. Courant ve H. Robbins'in *What is Mathematics? (Matematik nedir?)* adlı kitabında bulabilirsiniz (New York: Oxford University Press, 1941).

9. HARİTA BOYAMA PROBLEMLERİ.

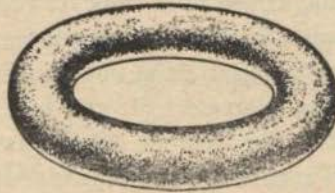
Düzlemde bir harita verildiğini farzedelim. Eğer memleketlerinden her biri belirli bir renkle ve ortak sınırları olan iki memleket de farklı renklerle boyanırsa, harita *regüler* (uygun, düzgün) olarak *boyanmıştır* diyeceğiz. Regüler boyanmış haritalara misal olarak herhangi bir coğrafya haritasına bakılabilir. Herhangi bir harita, meselâ, her memleket özel bir renkle boyanmak suretiyle *regüler* olarak boyanabilir. Fakat bu şekildeki bir boyama ekonomik değildir. Tabii olarak şu soru akla gelir: Verilen bir haritayı *regüler* olarak boyamak için gerekli olan boya sayısının *minimumu* nedir? Meselâ Şek. 11 a da görülen haritayı iki renkle *regüler* olarak boyamanın mümkün olduğu aşikârdır; Şek. 11 b de görülen haritayı *regüler* boyamak için üç renge ihtiyaç vardır; Şek. 11 c de görülen harita ise yalnız dört renk kullanılarak *regüler* boyanabilir. Şu da söylenebilir, hiç kimse dört renk ile *regüler* boyanamayan bir harita bulamaz. Sanıldığına göre tanınmış Alman matematikçisi Möbius, yüz yıldan daha önce bu hususa ilk işaret eden olmuştur. O zamandan beri bir çok büyük matematikçi bu *dört - renk problemi*ni çözmek için uğraştılar. Yani ya herhangi bir haritayı *regüler* boyamak için dört rengin kâfi olduğunu ispata veya boyamak için dört rengin yetmediği bir harita örneği bulmaya uğraştılar, fakat bugüne kadar ne birini ne ötekini göstermeğe hiç kimse muvaffak olamadı. Bununla beraber şu tesbit edildi, herhangi bir haritayı *regüler* olarak boyamak için *beş* renk yeter (aşağıda misal 17 ye bakınız). Bir haritanın iki renkle (Misal 15) veya üç renkle (Misal 16) bo-

yanması için şartları tesbit etmek zor değildir. Bir haritanın dört renkle regüler boyanması için gerek ve yeter bir şarta da işaret edelim (Misal 18); fakat, tabii, bu şart herhangi bir haritaya uygun mudur? veya bu şarta uymıyan haritalar mevcut mudur? sualleri cevapsız kalmıştır.



Şek. 11

Şu da kayda değer: düzlemden daha karışık görünen bazı yüzeyler için harita boyama problemi tam olarak çözülmüştür. Böylece, meselâ bir tor üzerinde herhangi bir haritanın regüler boyanması için yedi rengin yettiği, fakat bazı haritalarda regüler boyama için altı rengin kâfi gelmediği görülür.



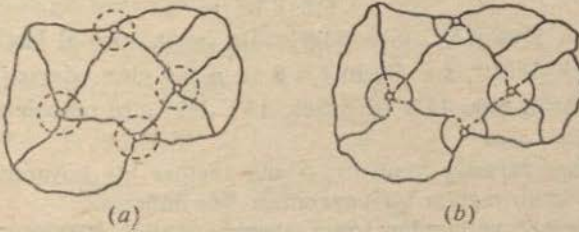
Şek. 12

Bundan böyle ayırmaya yaramıyan sınırların, yani her iki tarafında aynı memleketin uzandığı sınırların (Şek. 8 deki A_4A_8 sınırı gibi) bulunmadıklarını farzedeceğiz. Aksi takdirde

regüler boyama probleminin ifadesi mânâyı haiz olmaz. Aynı zamanda haritada yalnız iki sınırın kesiştiği köşelerin de bulunmadıklarını farzedelim (Şek. 8 deki A_2 köşesi gibi). Çünkü böyle köşeler lüzumsuz olacaktır. Diğer bir deyimle her köşede en az üç sınırın kesiştiği haritaları gözönüne alalım. Yani misal 13 deki şartlara uyan haritaları düşünelim. Bu suretle misal 13 de elde ettiğimiz sonucu derhal tatbik edebiliriz. Bu bize haritamızda yalnız bir tane sonsuz bölge bulunduğunu, yani «sonsuzla uzanan» sınırlar bulunmadığını da kabul etmek imkânını sağlar. Bu son şartı almanın aşağıda elde edilecek neticelerden hiç birini değiştirmeyeceği gösterilebilir.

10. NORMAL HARİTALAR.

Her köşesinde tam üç sınırın kesiştiği haritalara *normal haritalar* diyeceğiz. Herhangi bir S haritasının verilmiş olduğunu farzedelim (Şek. 13 a daki gibi). Bu haritada üçten fazla sınırın kesiştiği köşelerden her birinin etrafına küçük bir daire çizelim. Bu dairenin çevrelediği bölgeyi, bu köşenin etrafındaki memleketlerden birine katalım. Bu suretle aynı sayıda memleket ihtiva eden normal bir S' haritası elde ederiz (Şek.



Şek. 13

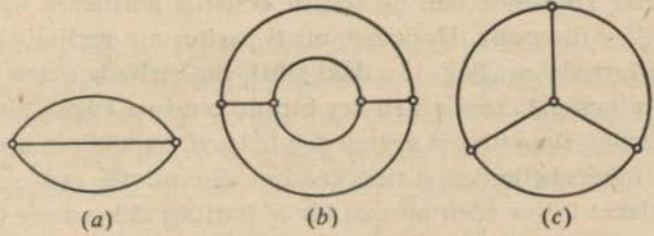
13 b deki gibi); S' haritasının herhangi regüler bir boyanmasından, aynı sayıda renk kullanarak, kolayca S haritasının

regüler bir boyanması elde edilir ⁽¹⁾. Buna göre bütün haritalar için dört-renk problemi, normal haritalar için dört-renk problemi ile eşdeğerdir. O halde dikkatimizi normal haritalara çevirmeliyiz.

Şimdi en basit normal haritalardan birkaçının inşasını görelim ⁽²⁾. Normal bir haritada p köşelerin, l sınırların, s de memleketlerin sayısı olsun. Buna göre $2l = 3p$ (yukarda Mîsal 13 e bakınız), ve $p = \frac{2}{3} l$ dir. Bundan başka Euler teoremi-ne göre $s + p = l + 2$ dir; Ohalde

$$s = (l - p) + 2 = \frac{l}{3} + 2$$

dir; ve buradan $s \geq 2$ bulunur. Fakat $s = 2$ için $l = 0$ buluruz; böyle bir haritanın mevcut olamayacağı ise aşîkârdır. $s = 3$ ko-



Şek. 14

yalım, $l = 3$ ve $p = 2$ elde ederiz. Bu basit normal harita Şek. 14 a daki gibidir. $s = 4$ için $l = 6$ ve $p = 4$ elde ederiz. Bu halde haritanın Şek. 14 b veya Şek. 14 c deki gibi olacağını göste-

⁽¹⁾ Aksi faraziye yanlıştır. S nin regüler bir boyanmasından daima S' nin regüler bir boyanması elde edilemez.

⁽²⁾ Burada ve bundan sonra, «benzer şekilde düzenlenmiş» haritalar arasında fark gözetmiyeceğiz (Şek. 11 c ve 23 a da gösterildiği üzere); yani bu haritalarda memleketler ve sınırlar o şekilde numaralanabilir ki, her iki haritada aynı numarayı taşıyan memleketler, aynı numaralı sınırlar tarafından ayrılırlar.

receğiz. Gerçekten k_2 iki köşeli memleketlerin sayısını, k_3 üç köşeli memleketlerin sayısını, k_4 dört köşeli memleketlerin sayısını gösterebiliriz ($p' = 4$ olduğundan, haritada, dörtten daha fazla köşesi olan memleket yoktur). O halde

$$k_2 + k_3 + k_4 = s = 4$$

ve

$$2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 2l = 12$$

dir (yukarıda Misal 13'e bakınız). Son eşitliğe göre k_3 ün çift olacağı aşikârdır. $k_2 + k_3 + k_4$ toplamı 4'e eşittir. Terimleri azalan sıraya göre alırsak $2 + 2 + 0$, $2 + 1 + 1$, $3 + 1 + 0$ veya $4 + 0 + 0$ şeklinde yazabiliriz. Bu hallerden her birini inceliyelim.

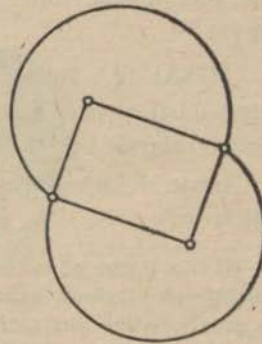
k ların değerlerinden ikisi 2'ye, biri sıfıra eşit ise, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$ halinde $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 10$ olur. Bu hal imkânsızdır, çünkü $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 12$ olmalıdır; $k_2 = 2$, $k_3 = 0$, $k_4 = 2$ için $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 12$ dir. Bu hal Şek. 14 b de gösterilen haritaya tekabül eden haldir; $k_2 = 0$, $k_3 = 2$, $k_4 = 2$ için $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 14 > 12$ dir.

Şayet k nın değerlerinden birisi 2, diğer ikisi 1 ise, k_3 çift olduğundan, yalnız $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$ alabiliriz, bu hal için $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 12$ dir. Böyle bir harita mevcuttur, fakat normal değildir (Şek. 15).

k ların değerlerinden birisi 3, diğer biri 1 ise, k_3 çift olduğundan, sıfıra eşit olmalıdır; bu halde

$$2k_2 + 4k_4 \neq 12 \text{ dir.}$$

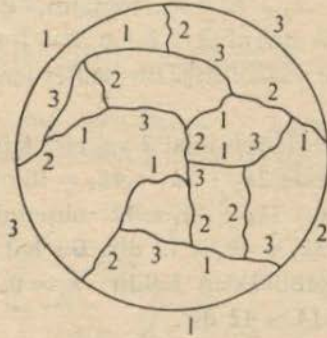
En son, k lardan biri 4 geriye kalanların değerleri sıfır hallerinden yalnız $k_2 = k_4 = 0$, $k_3 = 4$ için $2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 12$ dir. Tekabül eden harita Şek. 14 c de görülen şekildedir.



Şek. 15

11. HARİTALARIN REGÜLER BOYANMASI

Bazan haritaların yalnız memleketlerini değil, sınırlarını da boyarız; böyle yapıldığı zaman sınırlar için kullandığımız renkleri 1, 2, 3, ... rakamları ile göstereceğiz. Eğer aynı bir köşede birleşen sınırlar farklı numaralar taşıyorlarsa, haritanın sınırlarının numaralanması regülerdir diyeceğiz. (Meselâ, şekil 16 ya bakınız). Şuna işaret edelim ki, bir haritanın köşelerinin



Şek. 16

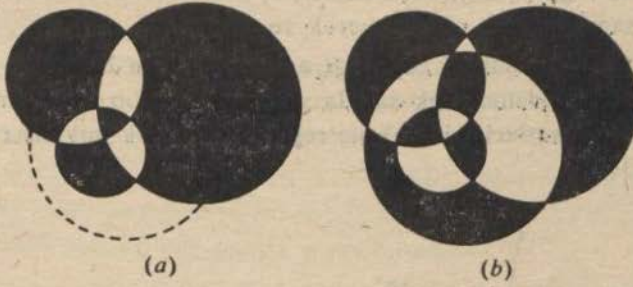
numaralanması probleminde komşu köşelere, yani aynı sınır üzerinde bulunan köşelere, farklı numaralar vermek, haritanın memleketlerinin regüler boyanması problemi ile ilgilidir ⁽¹⁾.

MİSAL 14. Düzlemde n tane daire verilmiş olsun. Bu daireleri nasıl alırsak alalım meydana gelen haritanın iki renkle regüler olarak boyanabileceğini gösteriniz.

İspat. 1. $n = 1$ ise istenilenin daima temin edilebileceği aşikârdır.

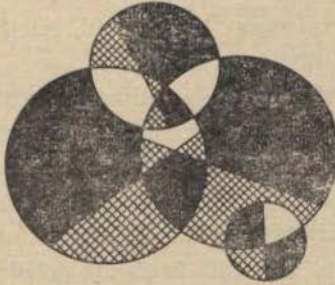
(1) Bu ilgiyi görmek için, meselâ E. B. Dynkin ve V. A. Us-penskii'nin kitabına bakınız. (Türkçeye *Çok Renk Problemleri* adı ile çevrilmiştir. Bu serinin 2. kitabıdır). Okuyan orada aşağıda verilen teoremlerin değişik ispatlarını bulacaktır.

2. İstenilenin n daireden meydana gelmiş herhangi bir haritada temin edilebildiğini, ve düzlemde $n + 1$ tane daire verildiğini farzedelim. Bunlardan birini kaldırırsak, faraziyemize göre, iki renkle meselâ beyaz ve siyah ile regüler olarak boyanabilen bir harita elde ederiz (Şek. 17 a). Şimdi, yeniden çıkardığımız daireyi ilâve edelim, ve onun bir tarafında (meselâ içinde) her parçanın rengini değiştirelim (yani siyahları beyaz, beyazları siyah yapalım); bu şekilde elde ettiğimiz haritanın da iki renkle regüler boyandığını kolayca görebiliriz (Şek. 17 b).



Şek. 17

Problem 13. Düzlemde, içlerine birer kırık çizilmiş, n tane daire verelim. Bu daireler ve kırıklerden meydana gelen haritanın 3 renk ile regüler boyanabileceğini gösteriniz (Şek. 18).



Şek. 18

Yol gösterme. n daire ve onların kirişlerinden meydana gelen haritanın α, β, γ gibi üç renk ile regüler olarak boyandığını farzedelim. $(n+1)$ inci daireyi çiziniz ve bu dairenin içinde ve teka-bül eden kirişin bir tarafında kalan memleketlerin renklerini

$$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha$$

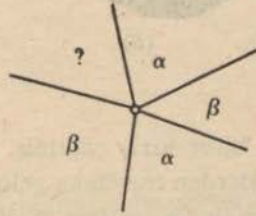
şemasına göre değiştiriniz, dairenin içinde fakat kirişin diğer tarafında kalan memleketlerin renklerini de

$$\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \beta$$

şemasına göre değiştiriniz.

MİSAL 15. (İKİ RENK TEOREMİ). Bir haritanın, iki renk ile regüler boyanabilmesi için, her köşede kesişen sınırların sayısının çift olması gerek ve yeterdir.

İspat. Bu şartın *gerekliği* aşikârdır. Zira haritanın herhangi bir köşesinde tek sayıda sınır kesişse, bu köşe etrafındaki memleketleri iki renk ile regüler boyamak imkânsız olur (Şek. 19).



Şek. 19



Şek. 20

Şartın *yeterliliğini* ispat etmek için, haritanın sınırlarının sayısı üzerinde indüksiyon yapalım.

1. İki sınırlı bir harita için iddia aşikârdır (Şek. 20).

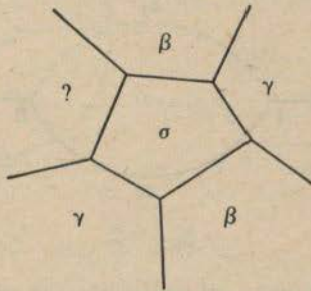
2. Sınırlarının toplam sayısı n i geçmeyen ve her köşesinde kesişen sınırların sayısı çift olan, herhangi bir harita için teoremin doğru olduğunu farzedelim. Bu şarta uyan ve $n+1$ sınırı olan bir S haritası verilsin. S haritasının herhangi bir A köşesinden başlayıp, bir sınır üzerinde gelişigüzel bir doğrultuda hareket edelim. Harita üzerinde sonlu sayıda köşe bulun-

duğundan, en sonunda daha önceki köşelerden birine geliriz (ayırmağa yaramıyan sınırları olmadığından haritanın uçları yoktur). Böylece, haritanın bazı sınırlarından meydana gelen, kendi kendisini kesmiyen bir kapalı eğri buluruz. Bu eğriyi çıkarmakla daha az sınırı olan, fakat gene her köşesinde çift sayıda sınır kesişen bir S' haritası elde ederiz. (Çünkü S haritasının her köşesinden çift sayıda sınır, 0 veya 2 tane, çıkarılmıştır). İndüksiyon faraziyesine göre S' haritası iki renkle regüler boyanabilir.

Şimdi eğer çıkardığımız eğriyi tekrar ilâve eder ve bunun bir tarafında (meselâ içinde) her rengi diğeri ile değiştirirsek, S haritasının bir regüler boyanmasını elde ederiz.

MİSAL 16. (ÜÇ RENK TEOREMİ). Normal bir haritanın üç renk ile regüler boyanabilmesi için gerek ve yeter şart, memleketlerinin çift sayıda sınırı olmasıdır.

İspat. Bu şekilde ifade edilen şartın gerekliliği aşikârdır; zira haritada sınırlarının sayısı tek olan σ gibi bir memleket bulunsa idi, σ ve ona bitişik memleketleri üç renk ile regüler boyamak mümkün olamazdı (Şek. 21).



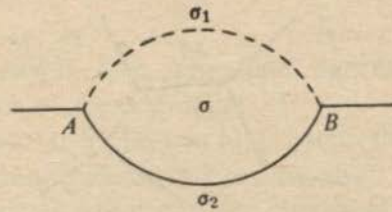
Şek. 21

Şartın yeterliğini ispat için, haritadaki memleketlerin sayısı n üzerinde indüksiyon yapalım.

1. 3 memleketi olan normal bir harita için (Şek. 14 *a* ya bakınız) iddiamız aşikârdır. Şek. 14 *b* de gösterilen 4 memleketli haritanın üç renk ile regüler boyanabileceği kolayca görülebilir. (Bunu temin için «iç» memleket ile en dıştaki bölgeyi aynı renk ile boyamak yeter). Şek. 14 *c* de görülen normal harita, her memlekette çift sayıda sınır olması şartına uymaz. Ohalde 3 veya 4 memleketi bulunan ve her memleketin sınırlarının sayısı çift olan normal haritalar üç renk ile regüler boyanabilir.

2. Teoremin, her memleketinin sınır sayısı çift olan, ve toplam memleketlerinin sayısı $n - 1$ veya n olan herhangi bir normal harita için doğru olduğunu farzedelim. Aynı şartlara uyan fakat $n + 1$ tane memleket ihtiva eden normal bir S haritası gözönüne alalım. Misal 13 de gördüğümüz üzere, bu şekildedeki S haritası, sınırlarının sayısı 5 i geçmiyen σ gibi bir memleket ihtiva eder. Buna göre σ nın ya iki veya dört sınırı vardır. Bu hallerin her birini tetkik edelim.

Hal 1. σ nın iki sınırı olsun. A ve B bu memleketin köşeleri, σ_1 ve σ_2 de komşu olan memleketler olsunlar (Şek. 22).

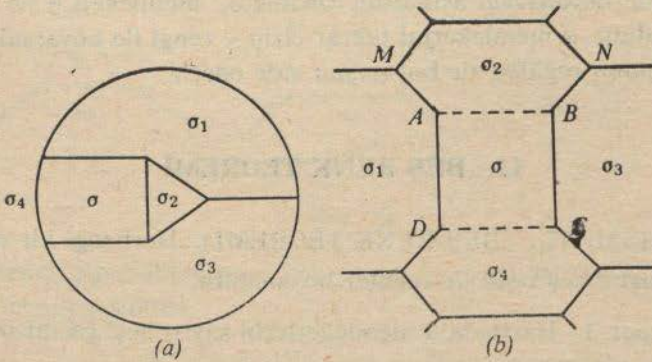


Şek. 22

σ_1 ve σ memleketleri arasındaki sınırı kaldırırsak yeni bir S' haritası elde ederiz. Bu da normaldir; zira A ve B noktaları artık köşe değildirler (bu haritanın lüzumsuz köşelerinin bulunmadığını kabul etmiştik), ve geriye kalan köşelerin her birin-

deki kesişen sınır sayısı aynı kalır. S' haritasının her memleketinde de çift sayıda sınır vardır; çünkü σ_1 ve σ_2 memleketlerinin sınır sayısı 2 eksilir, diğer memleketlerinki ise değişmez. S' haritasındaki memleketlerin sayısı n olduğundan, indüksiyon faraziyesine göre, S' nü α, β, γ gibi üç renk ile regüler boyamak mümkün olur. $\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma$ ve $\sigma_2' = \sigma_2$ memleketlerinin renklerinin sırasıyla α ve β olduğunu farzedelim. σ memleketini yeniden çizip γ ile boyarsak S haritasının bir regüler boyanışını elde ederiz.

Hal 2. σ nın dört sınırı olsun. σ nın, birbirine karşı olan iki sınırına komşu iki memleketin ortak bir sınırı olduğunu (Şekil 23 a) veya bunların çakıştıklarını farzedelim (Şek. 14 b deki σ_2 nin yerine, Şek 23 a daki σ yı koymak suretiyle elde edilen Şek. 14 b deki σ_3 memleketi gibi). Bundan başka bu hallerde σ ya komşu olan diğer iki memleketin ne ortak bir sınırı bulunabilir ve ne de çakışabilirler. Bu iki memleket σ_2 ve σ_4 olsun (Şek. 23 b). AB ve CD sınırlarını kaldırarak σ_2 ve σ_4



Şek. 23

memleketlerini σ ile birleştirelim. Bu suretle bir S' haritası elde ederiz. S' haritasının da normal olduğu, ve bu haritadaki memleketlerin de sınırlarının sayısının çift olacağı aşikârdır.

Gerçekten, eğer σ_1 in sınırlarının sayısı $2k_1$, σ_2 nin sınırlarının sayısı $2k_2$, σ_3 ünkiler $2k_3$ ve σ_4 ünkiler de $2k_4$ ise $\sigma' = \sigma + \sigma_2 + \sigma_4$ memleketinin sınırlarının sayısı $2k_2 + 2k_4 - 4$, $\sigma_1' = \sigma_1$ memleketinin sınırlarının sayısı $2k_1 - 2$, $\sigma_3' = \sigma_3$ memleketinin sınırlarının sayısı $2k_3 - 2$ olacak, halbuki geri kalan diğer memleketlerin her birinin sınırlarının sayısı değişmeyecektir (σ_1 ve σ_3 memleketlerinin çakıştığı halde, bu memleketin S' haritasındaki sınırlarının sayısı, S haritasındaki sınırlarının sayısından 4 eksiktir.)

S' haritasında $n - 1$ tane memleket olduğundan, indüksiyon faraziyesine göre S' nü α , β ve γ gibi üç renk ile regüler boyamak mümkündür. Bu halde σ_1' ve σ_3' memleketlerinin aynı renk ile boyanabileceğini gösterelim (σ_3' ile σ_1' çakışır larsa bu iddia aşikârdır). Gerçekten, σ' memleketinin α rengi ile, σ_1' memleketinin de β rengi ile boyandığını farzedelim. Sınırın MN parçası boyunca ($2k_2 - 3$) tek sayısı kadar memleket σ' ne komşu olacağından, bunların ardaşık olarak $\gamma, \beta, \gamma, \beta, \dots, \gamma$ şeklinde boyanacağı aşikârdır. Ohalde σ_3' memleketi β ile boyanmalıdır. σ memleketini tekrar çizip γ rengi ile boyarsak, S haritasının regüler bir boyanışını elde ederiz.

12. BEŞ RENK TEOREMİ

MİSAL 17. (BEŞ RENK TEOREMİ). Herhangi bir normal harita beş renk ile regüler boyanabilir.

İspat. 1. Haritadaki memleketlerin sayısı beşi geçmiyorsa iddia aşikârdır.

2. Teoremin $n - 1$ veya n memleket ihtiva eden herhangi bir normal harita için doğru olduğunu farzedelim ve $n + 1$ tane memleketi olan bir S haritasını gözönüne alalım. S haritasında, sınırlarının sayısı 5 i geçmiyen en az bir σ memleketinin

bulunacağını misal 13 de görmüştük. Mümkün olabilen bütün halleri gözönüne alalım.

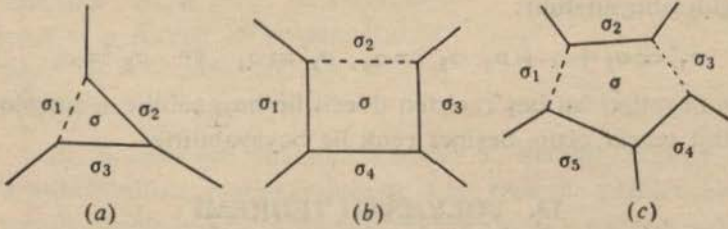
Hal 1. σ nın iki sınırı olsun (Şek. 22 ye bakınız). σ_1 ve σ_2 , σ ya komşu memleketler olsunlar. σ_1 memleketini σ ile birleştirelim, n memleketi olan normal bir S' haritası elde ederiz.

İndüksiyon faraziyesine göre S' beş renk ile regüler boyanabilir.

$$\sigma_1' = \sigma + \sigma_1 \quad \text{ve} \quad \sigma_2' = \sigma_2$$

memleketleri bu renklerden ikisi ile boyanacaklardır. σ memleketini tekrar çizersek, onu da geriye kalan üç renkten herhangi birisi ile boyayabiliriz.

Hal 2. σ nın üç sınırı olsun (Şek. 24 a). σ_1 ile σ yı birleş-



Şek. 24

tirelim. Eğer elde edilen S' haritası beş renk ile boyanabilirse, σ memleketini de

$$\sigma_1' = \sigma + \sigma_1, \quad \sigma_2' = \sigma_2 \quad \text{ve} \quad \sigma_3' = \sigma_3$$

memleketlerini boyamakta kullanılmayan iki renkten biri ile boyayabiliriz.

Hal 3. σ nın dört sınırı olsun (Şek. 24 b). Birbirleri ile çakışmayan ve σ ya komşu olan iki memleket bulmak mümkün-

dür (Misal 16 ya bakınız). σ yı bu memleketlerden biri ile, meselâ σ_2 ile birleştirelim. n memleket ihtiva eden bir S' haritası elde ederiz. İndüksiyon faraziyesine göre S' beş renk ile regüler boyanabilir.

$$\sigma_1' = \sigma_1, \sigma_2' = \sigma_2 + \sigma, \sigma_3' = \sigma_3 \text{ ve } \sigma_4' = \sigma_4$$

memleketleri bu beş renkten herhangi dördü ile boyanır. (Eğer σ_1' ve σ_3' çakışarlarsa veya aynı renkte iseler, bunlar dörtten daha az renkte olabilir). σ memleketini yeniden çizip, onu da beşinci renk ile boyayabiliriz.

Hal 4. σ nın beş sınırı olsun (Şek 24 c). Misal 16 da olduğu gibi, σ ya komşu olan memleketlerden ikisini öyle seçebiliriz ki, bunlar çakışmasın ve ortak sınırları bulunmasın. Bu memleketler σ_1 ve σ_3 olsun. Bu memleketlerin her ikisini de σ ile birleştirecek, $n - 1$ memleketli bir S' normal haritası elde ederiz. İndüksiyon faraziyesine göre S' haritası beş renk ile regüler boyanabilir.

$$\sigma_1' = \sigma_1 + \sigma + \sigma_3, \sigma_2' = \sigma_2, \sigma_4' = \sigma_4 \text{ ve } \sigma_5' = \sigma_5$$

memleketleri bu beş renkten dördü ile boyanabilir. σ memleketini tekrar çizip, beşinci renk ile boyayabiliriz.

13. VOLYNSKİİ TEOREMİ

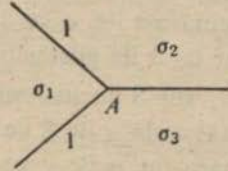
MİSAL 18. (VOLYNSKİİ TEOREMİ). (1) Normal bir harita yalnız sınırları üç rakam ile regüler olarak numaralanabildiği zaman (ve ancak bu halde), dört renk ile regüler boyanabilir (2).

(1) V. V. Volynskii (1923 - 1943) bir Sovyet matematikçisidir.

(2) Volynskii teoreminin daha önce P. G. Tait tarafından bulunduğu görülür (Scientific Papers, Cambridge, 1898 - 1900, Cilt 1. S. 408 - 411 ve Cilt 2 S. 85 - 98). König, Tait'in bu teoremini (Graphentheorie, Chelsea Publishing Co., New-York, 1950, S. 202) de referans olarak almıştır. W. W. R. Ball tarafından Mathematical Recreations and Essays de bazı tafsilat verilmiştir.

İspat. A. Eğer bir normal harita dört renk ile regüler boyanabilirse, sınırları da üç rakam ile regüler numaralanabilir.

S normal haritasının α , β , γ ve δ renkleri ile regüler boyandığını farzedelim. α ve β veya γ ve δ ile boyanmış memleketler arasındaki sınırları 1 rakamı ile, α ve γ veya β ve δ renkleri ile boyanmış memleketler arasındaki sınırları 2 rakamı ile, α ve δ veya β ve γ ile boyanmış memleketler arasındaki sınırları da 3 rakamı ile işaretliyelim. Sınırların bu şekilde numaralanmaları normaldir. Gerçekten, iki sınır aynı numarayı taşıyorlarsa bir A köşesinde kesişirler (Meselâ, Şek. 25 deki 1 rakamı). Ohalde σ_1 memleketinden aynı numarayı taşıyan sınırlarla ayrılan σ_2 ve σ_3 memleketleri aynı renkli olmalıdırlar (çünkü, eğer misalimizde σ_1 , α rengi ile boyanmış ise σ_2 ve σ_3 β rengi ile boyanmalıdır); fakat bu mümkün değildir, zira σ_2 ve σ_3 ün ortak bir sınırı vardır.

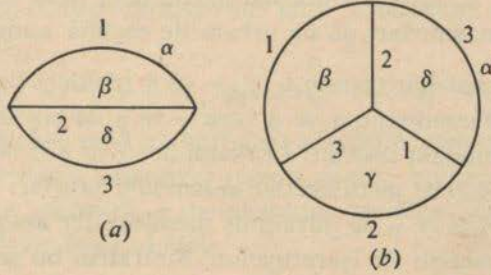


Şek. 25

B. Normal bir haritanın sınırları üç rakamla regüler numaralanabilirse, memleketleri de dört renk ile regüler boyanabilir. Bunu ispat için memleketlerin sayısı n üzerine indüksiyon yapacağız.

1. Üç memleketi olan basit bir normal haritanın sınırları (Şek. 14 a ya bakınız), 1, 2, 3 rakamları ile (rakamların bir permütasyonu gözönüne alınmazsa) yalnız bir şekilde numaralanabilir. Bu haritayı Şek. 26 a da gösterilen şekilde boyayalım. α ve β ile boyanmış memleketlerin arasındaki sınır 1 nu-

H. S. M. Coxeter bunu yeniden gözden geçirmiştir (New-York: The Macmillan Company, 1960). Tait ispatın anahtarı olan fikri vermiş, fakat tafsillâta girişmemiştir. Ball da her ne kadar daha çok tafsillât vermiş ise de meseleyi tamamlamamıştır. Öyle görülmüyorki Volynskii, Tait'in çalışmasından habersizdi.



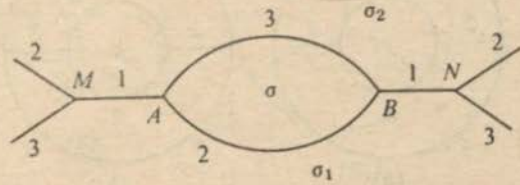
Şek. 26

marası ile, β ve δ ile boyanmış memleketler arasındaki sınır 2 numarası ile, α ve δ ile boyanan memleketlerin arasındaki sınır da 3 ile gösterilsin.

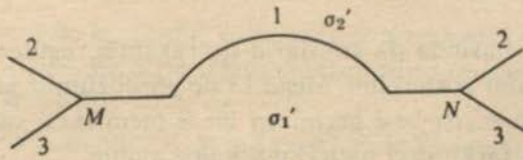
Bir S haritasının, dört $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ renkleriyle bir regüler boyanışında α ile β ve γ ile δ renkleri arasındaki her sınır 1 numarasını, α ile γ ve β ile δ renkleri arasındaki her sınır 2 numarasını, α ile δ ve β ile γ renkleri arasındaki her sınır 3 numarasını taşırsa, bu boyamaya *kabul edilebilir* denir. Üç memleketli basit bir normal haritanın dört renkle kabul edilebilir regüler boyanabileceğini gördük. Bunun dört memleketli normal bir harita için de yapılabileceğini gösterelim (Şek. 14 b, c). Şek. 14 c de görülen haritanın sınırları, (rakamların bir permutasyonu farkı ile) 1, 2, 3 rakamları ile, yalnız bir şekilde regüler numaralanabilir. Bu haritanın Şek. 26 b de gösterilen boyanması kabul edilebilirdir. Şek. 14 b de görülen harita sınırlarının ise, iki farklı şekilde numaralanması yapılabilir (Şek. 27 a). Bu haritanın Şek. 27 a, b deki boyanmaları da kabul edilebilirdir.

2. $n - 1$ veya n tane memleketi olan herhangi bir normal haritanın, sınırlarının üç rakamla regüler numaralandığını ve dört renk ile kabul edilebilen bir regüler boyamasının mevcut olduğunu farzedelim; ve $n + 1$ tane memleketi bulunan normal

zedelim ve σ memleketini bir noktaya indirelim; bu takdirde AB , BC ve AC sınırları görünmez olacaklardır. A , B ve C nok-

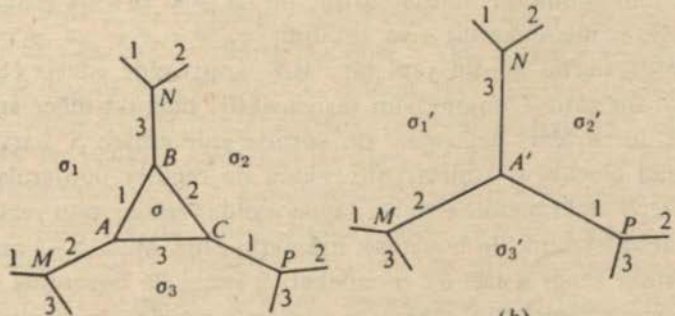


(a)

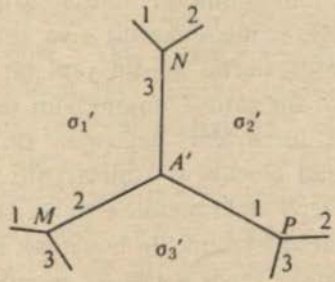


(b)

Şek. 28



(a)



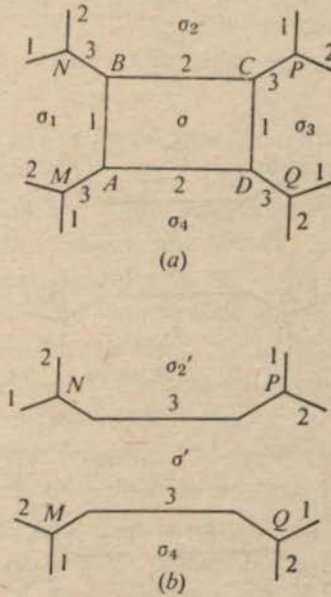
(b)

Şek. 29

talari da bir $A = B = C = A'$ köşesinde çıkışacaklardır (Şek. 29 b). Diğer sınırların numaralanması gibi, MA' , NA' ve PA' (önceden MA , NB ve PC) sınırlarının numaralanması da aynı kalacaktır. Bu suretle sınırları regüler olarak numaralanmış

bir S' normal haritası elde ederiz. S' haritasındaki memleketlerin sayısı n olduğundan dört renk ile regüler boyanabilir; eğer σ_1' memleketi α rengi ile boyanırsa, σ_2' memleketi δ rengi ile ve σ_3' memleketi de γ rengi ile boyanacaktır. σ memleketini tekrar meydana getirir ve β ile boyarsak, S haritasının kabul edilebilen bir boyanmasını elde ederiz.

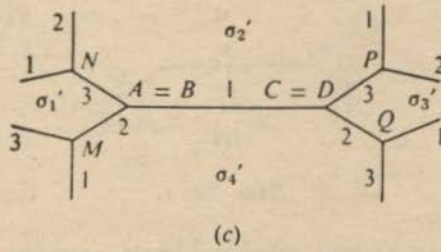
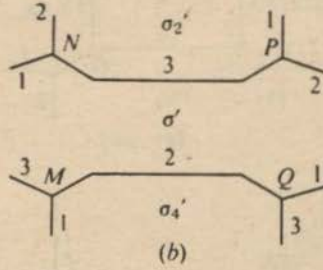
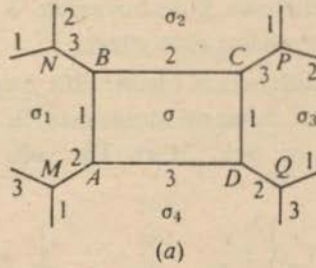
Hal 3. σ nın dört sınırı olsun. Bu halde σ memleketini çevreleyen sınırların numaralanmasında iki farklı yol mümkündür (Şek. 30 a ve Şek. 31 a). İlk yolu gözönüne alalım



Şek. 30

(Şek. 30 a). σ ya komşu olan ve ortak sınırları olmayan iki memleket bulmak daima mümkündür (Misal 16 ya bakınız). Birbirlerine nazaran aksi yönlerde bulunan her iki σ_1, σ_3 ve σ_2, σ_4 memleket çifti, sınırların numaralanması bakımından

benzer olduklarından, bu çiftlerden birinin, meselâ σ_1 ve σ_3 ün ortak sınırları bulunmıyan memleketler olduklarını farzedebiliriz. σ_1 ve σ_3 memleketlerinin her ikisini de σ ile birleştirelim



Şek. 31

ve yeni NP ve MQ sınırlarını 3 ile numaralıyalım (Şek. 30 b). Bu şekilde elde edilen S' haritası normal ve sınırları regüler

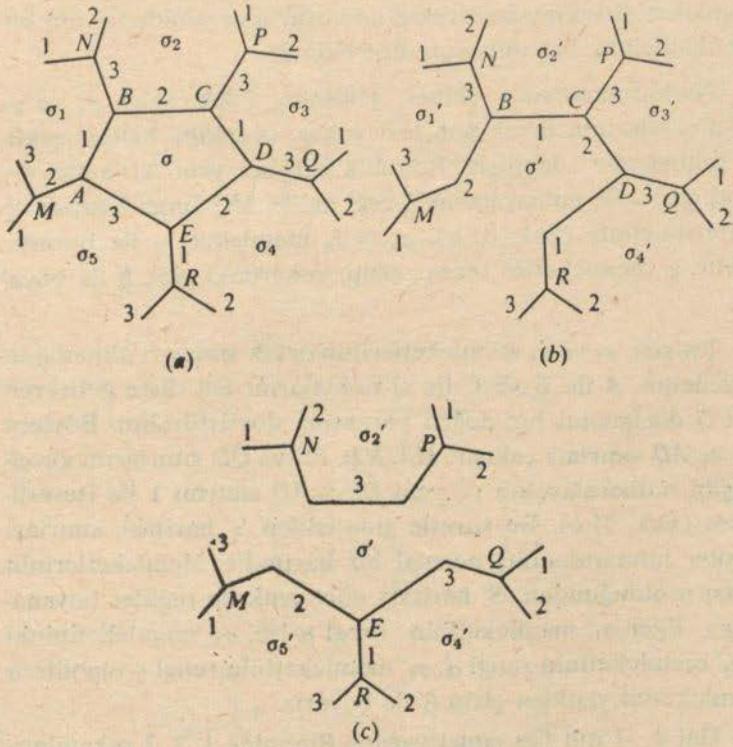
numaralanmış olacaktır. S' haritasındaki memleket sayısı $n - 1$ olduğundan, S' nü dört renk ile regüler boyamak mümkündür; eğer $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma$ memleketi α rengi ile boyanmış ise, $\sigma_2' = \sigma_2$ ve $\sigma_4' = \sigma_4$ memleketleri de δ ile boyanabilir. σ memleketini tekrar ayırarak β ile boyarız ve yeniden S nin bir kabuledilebilir boyanmasını elde ederiz.

Numaralanmanın ikinci şeklinde (Şek. 31 a), σ_1 ve σ_3 memleketlerinin ortak sınırları yoksa, öncekine benzer şekilde muhakeme edebiliriz. Bununla beraber yeni NP sınırı evvelki gibi 3 ile numaralanabileceği halde, MQ sınırı 2 sayısı ile gösterilmelidir (Şek. 31 b). $\sigma_4' = \sigma_4$ memleketi γ ile boyanacaktır. σ memleketini tekrar çizip, yukardaki gibi, β ile boyarız.

En son, σ_2 ve σ_4 memleketlerinin ortak sınırları olmadığını farzedelim. A ile B ve C ile D noktalarını üst-üste getirerek $ABCD$ dörtgenini bir doğru parçasına dönüştürelim. Böylece BC ve AD sınırları çakışır. MA , NB , PC ve QD sınırlarını evvelki gibi numaralayalım ve yeni $BC = AD$ sınırını 1 ile işaretliyelim (Şek. 31 c). Bu suretle elde edilen S' haritası, sınırları regüler numaralanmış normal bir haritadır. Memleketlerinin sayısı n olduğundan, S' haritası dört renk ile regüler boyanabilir: Eğer σ_1' memleketinin rengi α ise, σ_2' memleketininki δ , σ_3' memleketinin rengi α , σ_4' memleketinin rengi γ olabilir. σ memleketini yeniden çizip β ile boyarız.

Hal 4. σ nın beş sınırı vardır. Bu halde 1, 2, 3 rakamlarının permütasyonları farklı olarak düşünülmezse σ memleketinin etrafındaki sınırları ancak bir şekilde numaralamak mümkün olur (Şek. 32 a). İlk önce σ_5 memleketinin σ_2 veya σ_3 ile çakışmadığı ve onlarla ortak sınırının bulunmadığı hali göz önüne alalım. σ_5 memleketini σ ile birleştirelim, yeni MB sınırını 2 sayısı ile RD sınırını 1 sayısı ile işaretliyelim ve BC sınırının numarasını 1 olarak, CD sınırının numarasını 2 olarak değiştirelim. Bu suretle sınırları regüler numaralanmış bir S'

normal haritası elde ederiz (Şek. 32 b). S' deki memleketlerin sayısı n olduğundan, onu dört renk ile regüler boyamak mümkündür. Eğer $\sigma' = \sigma + \sigma_5$ memleketi α ile boyanmış ise σ_2' ve



Şek. 32

σ_4' memleketleri β ile, σ_1' ve σ_3' memleketleri γ ile boyanır. σ memleketini tekrar çizip, onu da δ ile boyarız.

Eğer σ_5 memleketi σ_2 ye bitişik ise veya onunla çakışırsa, σ_1 ve σ_3 memleketlerinin ne ortak sınırları mevcuttur ne de çakışırlar; eğer σ_5 memleketi σ_3 ile bitişik ise veya çakışıyorsa, σ_2 ve σ_4 memleketleri ne çakışırlar, ne de ortak sınırları

vardır. Sınırların numaralanması bahis konusu oldukça, bu hallerden her biri, birbirine benzer olduğundan σ_1 ve σ_3 memleketlerinin ne çakışıp ne de ortak sınırlarının bulunmadığı hali gözönüne almak yetiştir. Bu memleketlerin her ikisini de σ ile birleştirelim, yeni NP sınırını 3 numarası ile, ME sınırını 2 numarası ile, EQ sınırını da 3 numarası ile gösterelim. Sınırları regüler numaralanmış bir S' normal haritası elde ederiz (Şek. 32 c). Memleketlerinin sayısı $n - 1$ olduğundan, S' haritasını dört renk ile boyamak mümkün olur. Eğer $\sigma' = \sigma + \sigma_1 + \sigma_3$ memleketi α rengi ile boyanmış ise, $\sigma_2' = \sigma_2$ ve $\sigma_4' = \sigma_4$ memleketleri δ ile, $\sigma_5' = \sigma_5$ memleketi γ ile boyanabilir. σ memleketi tekrar çizilip β rengi ile boyanır.

Henüz, herhangi bir normal haritanın ne dört renk ile regüler boyanabileceği ve ne de sınırlarının üç rakam ile regüler numaralanabileceği bilinmiyor. Yalnız aşağıdaki daha zayıf iddiayı ispat edebiliriz: Herhangi bir normal haritadaki sınırlar dört rakam ile regüler numaralanabilir.

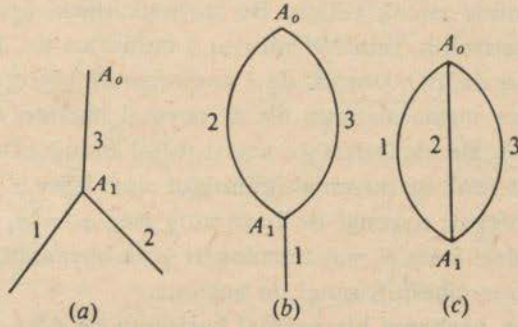
MİSAL 19. Her köşesinde üç taneden *daha fazla* sınırı kesişmeyen, herhangi bir haritanın sınırları (tek bağımlı olması icap etmez; yukarda S. 28 e bakınız) dört rakam ile regüler olarak numaralanabilir.

İspat. İspatı haritanın köşelerinin sayısı n üzerine indüksiyonla yapalım.

1. $n = 2$ ise iddia aşikârdır.

2. İddiamızın, her köşesinde üçten fazla sınırı kesişmeyen herhangi bir n köşeli harita için doğru olduğunu kabul edelim ve aynı şarta uyan $n + 1$ köşeli bir S haritası gözönüne alalım. Bu köşelerden A_0 ile göstereceğimiz bir tanesini ondan geçen sınırlar ile beraber haritadan silelim. Her köşesinde üçten fazla sınır kesişmeyen, n köşeli bir S' haritası elde ederiz. İndüksiyon faraziyesine göre, S' haritasının sınırları 1, 2, 3 ve 4 rakamları ile regüler numaralanabilir. Yeniden A_0 köşesi ve ondan geçen sınırları ilâve edelim. Üç hal olabilir :

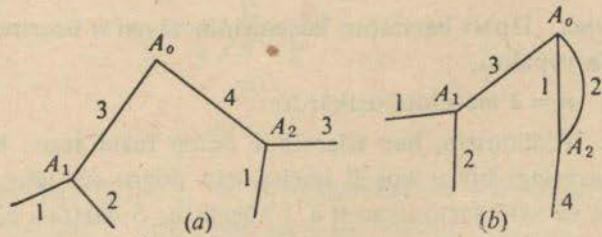
Hal 1. A_0 köşesi (bir, iki veya üç sınır ile) S' haritasının yalnız bir A_1 köşesine bağlanmıştır (Şek. 33 a, b, c). Bu halde:



Şek. 33

S' haritasının regüler numaralanmasından S haritasının bir regüler numaralanması kolayca elde edilebilir.

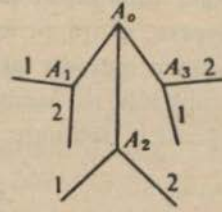
Hal 2. A_0 köşesi, S' haritasının A_1 ve A_2 gibi iki köşesi ile bağlanmıştır. Bunlardan bir tanesi iki sınırla bağlanmış da olabilir (Şek. 34 a, b). Her iki halde de S' haritasının sınırları-



Şek. 34

nın bir regüler numaralanmasından S haritasının sınırlarının bir regüler numaralanmasının elde edilebileceği kolayca görülür.

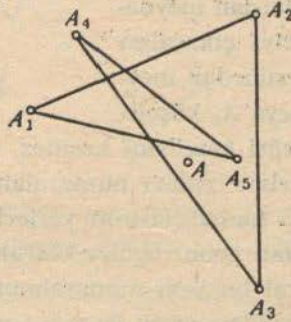
Hal 3. A_0 köşesi, S' haritasının A_1, A_2 ve A_3 gibi üç köşesi ile bağlıdır (Şek. 35). En az elverişli hal, A_1, A_2, A_3 köşelerinin her birinden S' haritasının iki sınırının geçtiği haldir. Bu halde, A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 sınırlarının her biri için iki numara seçebiliriz. Bunlar için farklı üç numaranın seçilebilmesi ancak bu üç çift idantik ise, yani S' haritasında A_1, A_2 ve A_3 köşelerindeki üç sınır çifti aynı numarayı meselâ, 1 ve 2 yi taşıyorlarsa mümkündür. Bu halde S' haritasından başlangıcı A_1 köşesinde olan ve ardaşık olarak 1 ve 3 ile numaralanmış sınırlardan meydana gelen en uzun eğriyi çıkaralım (böyle bir eğri bir tek sınırdan meydana gelmiştir ve A_2 veya A_3 köşelerinde son bulur). Bu eğri kendisini kesmez, çünkü, hipoteze göre S' haritasının sınırları regüler numaralanmıştır. Bu eğrinin sınırlarında 1 ve 3 numaralarının yerlerini değiştirelim. S' haritasının sınırlarının gene regüler olarak numaralanmış kalacağı aşikârdır. Fakat bu yeni numaralamada, S' haritasının A_1, A_2 ve A_3 köşelerinden geçen üç çift sınırı artık benzer numaralanmış değildir; ve bu halde S' haritasının sınırlarının regüler numaralanmasından S haritasının sınırlarının regüler numaralanması elde edilir.



Şek. 35

3. İndüksiyon ile Çizim

Eğer problemin şartlarında bir pozitif n sayısından bahsediliyorsa, çizim problemlerinin çözümünde de matematik indüksiyon metodu tatbik edilebilir (meselâ, n -genlerin çizimi problemleri). Aşağıda bu tipte bir çok misaller gözönüne alacağız. Bu bölümde kendisini kesen çokgenlerle (Şek. 36),



Şek. 36

diğer bir deyimle *herhangi* bir $A_1 A_2 \dots A_n$ kapalı kırık çizgisinin meydana getirdiği bir çokgene ait problemlerle meşgul olacağız.

14. VERİLEN ŞARTLAR ALTINDA ÇOKGENLERİN ÇİZİMİ

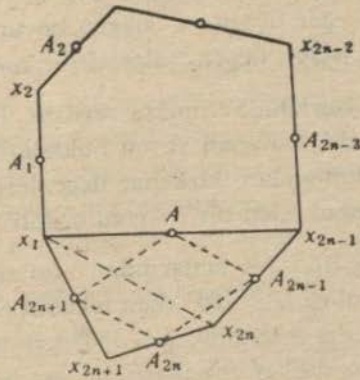
MİSAL 20. Düzlemde $2n + 1$ tane nokta verilmiş olsun. Kenarlarının orta noktaları bu noktalar olan $(2n + 1)$ -geni çiziniz.

ÇÖZÜM. 1. $n = 1$ için problem kenarlarının orta noktaları verilmiş olan bir üçgenin çizimi problemidir; ve çözümü ko-

laydır. (Verilen üç noktanın her birinden diğer iki noktayı birleştiren doğruya birer paralel çizmek kâfidir.)

2. Kenarlarının orta noktaları verilmiş bir $(2n - 1)$ -geni çizebildiğimizi farzedelim. Çizilmesi istenilen $x_1 x_2 \dots x_{2n+1}$ $(2n + 1)$ -geninin kenarlarının verilen orta noktaları $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ olsun.

$x_1 x_{2n-1} x_{2n} x_{2n+1}$ dörtgenini gözönüne alalım (Şek. 37). A_{2n-1} , A_{2n} ve A_{2n+1} noktaları $x_{2n-1} x_{2n}$, $x_{2n} x_{2n+1}$ ve $x_{2n+1} x_1$ kenarlarının orta noktalarıdır. A da dördüncü $x_1 x_{2n-1}$ kenarının orta noktası olsun. $A_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1} A$ dörtgeni bir paralelkenar olacaktır. (İspat için $x_1 x_{2n}$ doğrusunu çizmek ve $x_1 x_{2n+1} x_{2n}$ ve $x_1 x_{2n-1} x_{2n}$ üçgenlerine bakmak yeter. Zira $A_{2n} A_{2n+1}$ ve $A_{2n-1} A$ doğru parçaları kenarların orta noktalarını birleştirirler.) A_{2n-1} , A_{2n} ve A_{2n+1} noktaları verilmiş olduklarından, pa-



Şek. 37

ralem kenarın dördüncü köşesi A kolayca bulunabilir. Bu A noktası ile $A_1, A_2, \dots, A_{2n-2}$ noktaları, indüksiyon hipotezine göre çizebileceğimiz $x_1 x_2 \dots x_{2n-1}$ $(2n - 1)$ -geninin kenarlarının orta noktaları olacaktır. Geriye verilen A_{2n+1} ve A_{2n-1}

noktaları tarafından ortalanan $x_1 x_{2n+1}$ ve $x_{2n-1} x_{2n}$ doğru parçalarının çizimi kalır. (x_1 ve x_{2n-1} noktaları evvelce bulunmuştur.) A_{2n} noktası da $x_{2n} x_{2n+1}$ doğru parçasının orta noktası olmalıdır.

Eğer bir çokgen kendi kendisini kesmezse, (çokgene nazaran) iç ve dış nokta kavramından bahsedilebilir. Fakat, genel halde bu kavramın mânası yoktur; şöyleki, meselâ Şek. 36 da A noktasının çokgenin içinde veya dışında olduğunu söylemek imkânsızdır. Bunun yerine aşağıdaki tarifi vereceğiz. Herhangi bir $A_1 A_2 \dots A_n$ çokgeni verilmiş olsun. Bunun köşelerinden, belirli, meselâ $A_1, A_2, \dots, A_n$ sırasında geçecek şekilde bir *gidiş yönü* tesbit edelim. Çokgenin kenarlarından birisi, meselâ $A_1 A_2$ üzerine bir $A_1 B A_2$ üçgeni çizelim. Şayet üçgenin köşelerinden A_1, A_2, B sırasında geçecek şekildeki *gidiş yönü*, çokgen üzerinde tespit edilenin aksi yönünde ise, (biri saat ibrelerinin döndüğü yönde, diğeri aksi yönde) üçgen, çokgenin *dış tarafında* diyeceğiz; eğer üçgen ve çokgen boyunca belirlenen *gidiş yönleri* aynı iseler, üçgen, çokgenin *iç tarafında* diyeceğiz.

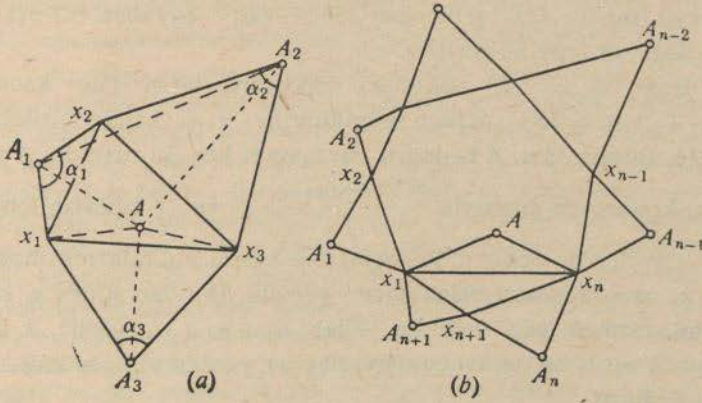
MİSAL 21. Düzlemde n nokta verilsin. Tepe noktaları bu verilen noktalarda bulunan ve bu noktalardaki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tepe açıları verilmiş olan ikizkenar üçgenlerin tabanlarını kenarlar olarak kabul eden bir n -geni çiziniz ⁽¹⁾.

ÇÖZÜM. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ açılarından bazılarını 180° den büyük alabiliriz; yalnız $\alpha < 180^\circ$ iken tekabül eden ikizkenar üçgenin, çokgenin dış tarafında, $\alpha > 180^\circ$ için ise çokgenin iç tarafında olduğuna dikkat etmeliyiz (bu son halde üçgenin tepe açısı $360^\circ - \alpha$ dır).

1. $n = 3$ olsun. Problemin bir çözümü olduğunu farzedelim. Aradığımız üçgenin köşelerini x_1, x_2, x_3 ile gösterelim. $A_1, A_2 A_3$ ün de, üçgenin kenarları üzerinde çizeceğimiz ve

(1) Bundan evvelki misal, Misal 21 in $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 180^\circ$ olan özel hali gibi düşünülebilir.

tepe açıları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olan ikizkenar üçgenlerin tepeleri olduklarını farzedelim (Şek. 38 a). Eğer düzlemi A_1 noktası etrafında α_1 açısı kadar döndürürsek x_1 köşesi x_2 köşesine dönüşür



Şek. 38

(bütün dönmelerin saat ibrelerinin aksi yönünde olduğunu kabul ediyoruz); eğer A_2 noktası etrafında α_2 açısı ile bir dönme yaparsak, x_2 köşesi x_3 köşesine gelir. Bu iki dönme ardarda yapılırsa, A_1, A_2 noktaları ve α_1, α_2 açıları yardımı ile aşağıda anlatılan şekilde çizilen A noktası etrafında $\alpha_1 + \alpha_2$ açısı ile yapılan tek bir dönme ile aynı sonucu verir: $A_1 A_2$ doğru parçası üzerine A_1 ve A_2 noktalarında sırasıyla $\frac{\alpha_1}{2}$ ve $\frac{\alpha_2}{2}$ açılarını çizelim. Bu açılarının kenarlarının A kesim noktası, $\alpha_1 + \alpha_2$ açısı ile yapılan dönmenin merkezidir ⁽¹⁾. (Şek. 38 a ya bakınız).

(1) Meselâ, I. M. Yaglom'un *Geometric Transformations* adlı eserini 1. kısmının, 1. bölümünün, 2. paragrafına bakınız. Bu kitap İngilizceye A. Shields tarafından tercüme edilmiş ve 1 kısmı, New Mathematical Library de No. 8 ile yayınlanmıştır. (Syracuse, N. Y. The L. W. Singer company, Inc; New-York: Random House, Inc; 1962).

Bu son dönmenin yapılması ile x_1 köşesi x_3 köşesine gelir. Fakat, x_3 köşesinin x_1 köşesine gelmesi için A noktası etrafında $360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ açısı ile bir dönme yapılmalıdır. Buna göre A noktası, tabanı $x_1 x_3$, tepe açısı $360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ olan bir eşkenar üçgenin tepe noktasıdır.

Eğer A ve A_3 noktaları çakışmıyorlarsa (bu ancak $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ$. k iken mümkündür) $x_1 x_3$ kenarı çizilebilir ⁽¹⁾. Bunun için, AA_3 doğru parçasının her iki ucunda, A ve A_3 noktalarında sırasıyla $\frac{360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ ve $\frac{\alpha_3}{2}$ açılarını çizelim. Evvelce bu açıların kenarlarının kesim noktalarının üçgenin x_1 ve x_3 köşeleri olacaklarını gördük. Bundan sonra x_2 köşesini çizmek güç değildir. Eğer $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ$. k ise (eğer A ve A_3 noktaları çakışıyorlarsa), problemin çözümü belirlidir.

2. Kenarları, tepe açıları verilmiş ikizkenar üçgenlerin tabanları olan n -geni çizebildiğimizi farzedelim, ve kenarları $(n+1)$ tane ikizkenar üçgenin tabanları olan $(n+1)$ -geni çizmeğe çalışalım. Öyle ki bu $n+1$ tane ikizkenar üçgenin tepeleri $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ noktaları ve tepe açıları da sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ olsun.

Aradığımız $(n+1)$ -gen $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}$ olsun (Şek. 38 b). $x_1 x_n x_{n+1}$ üçgenini alalım. 1. kısımdakine benzer şekilde $x_n x_{n+1}$ ve $x_{n+1} x_1$ kenarları üzerinde çizilen $x_n A_n x_{n+1}$ ve $x_{n+1} A_{n+1} x_1$ ikizkenar üçgenlerinin tepeleri olan A_n, A_{n+1} noktaları $x_1 x_n$ köşegeni üzerine çizilen ve tepe açısı $360^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ olan ikizkenar üçgenin A tepe noktasının bulunmasında kullanılır. Böylece problemimiz, tepeleri $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A$ ve tepe açıları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 360^\circ - (\alpha_n + \alpha_{n+1})$ olan bir $x_1 x_2 \dots x_n n$ -geninin çizilmesi problemine dönüştürülmüş olur. İndüksiyon farazyesine göre $x_1 x_2 \dots x_n n$ -geni çizilebilir ve buna göre istenilen $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} (n+1)$ -geninin çizimi de kolay olur.

(1) Burada k bir tam sayıdır.

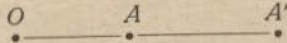
Eğer $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = 360^\circ \cdot k$ ise problemin çözümü ya mümkün değildir veya belirsizdir (neden?).

Problem 14. Düzlemde n nokta verildiğine göre, aşağıdaki şartlara uyan n -geni çiziniz: Öyle ki verilen noktalar, tabanları n -genin kenarları olan ve yan kenarlarının oranları ile tepe açıları verilmiş olan üçgenlerin tepeleri olsunlar.

Yol gösterme. Bu problem bir önceki misale benzer bir şekilde çözülebilir (önceki misal bunun özel bir halidir), yalnız verilen bir A_1 noktası etrafında verilen bir α_1 açısı ile dönme yerine α_1 açısı ile yapılan bir dönme ile merkezi aynı A_1 noktası olan ve benzerlik katsayısı, tekabül eden üçgenin kenarlarının oranına eşit olan bir merkezli benzerlik (homotetik dönüşüm) den meydana gelen bir benzerlik dönüşümü olarak düşünmeliyiz (verilen diğer noktalar için de benzer şeyler yapılır) (1). Bu şekilde iki dönüşümün bileşkesi aynı tipte üçüncü bir dönüşümdür (2). Bilhas-sa, bundan evvelki misaldeki benzer bir notasyon kullanılırsa, $x_1x_2A_1$ ve $x_2x_3A_2$ üçgenlerinin A_1 ve A_2 köşeleri yardımı ile x_1x_3 doğru parçası üzerine çizilen ve tepe açısı verilen bir açıya eşit ve yan kenarlarının oranı belli olan x_1x_3A üçgeninin A köşesini bulmak mümkün olur.

$x_1x_2x_3$ üçgeninin x_1x_3 kenarını A ve A_3 köşelerinden hareketle çizmek, meselâ, aşağıdaki şekilde yapılabilir: Merkezleri A ve A_3 olan iki benzerlik dönüşümü arka arkaya yapılırsa x_1 i kendi kendisine dönüştürür (önce x_1 , x_3 e gider sonra x_3 , x_1 e dönüşür). Fakat bu dönüşüm dizisi, merkezi, çizimi mümkün bir B noktası olan bir tek benzerlik dönüşümüne denktir. B noktası kendi kendisine dönüşeceğinden, aradığımız x_1 noktası ile çakışmalıdır. Eğer verilen tepe açılarının toplamı 360° nin bir katı, ve kenarların oranlarının çarpımı bire eşit ise, problemin çözümü ya imkânsız veya belirsizdir.

(1) Her noktanın, sabit bir O noktasına olan uzaklığını sabit bir q oranında değiştiren bir genişletme veya daraltma dönüşümüne, merkezi O ve benzerlik katsayısı q olan bir *merkezi benzerlik* denir. (Şekilde dönüşüm A yı A' e dönüştürür ve $OA' = q \cdot OA$ dır).



(2) Meselâ, S. 61 de adı geçen I. M. Yaglom'un kitabının 2. kısmının Bölüm 1 paragraf 2 sine bakınız. 2. kısım New Mathematical Library de daha sonraki numaralarda basıldı.

Daire üzerinde herhangi bir B_1 noktası alalım ve dairenin içine $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots, B_{n-1} B_n$ kenarları sırasıyla $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ doğrularına paralel olan bir $B_1 B_2 \dots B_n$ çokgenini çizelim. Bu takdirde $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$ yayları eşit olurlar zira, $A_1 B_1$ ile $A_2 B_2$ yay çifti, $A_2 B_2$ ile $A_3 B_3$ çifti... vs. daire üzerinde aksi doğrultuda yönelenmişlerdir. Onun için çift n ler için $A_1 B_1$ ve $A_n B_n$ aksi doğrultuda yönelenmişlerdir ve $A_1 B_1 B_n A_n$ dörtgeni, tabanları $A_1 A_n$ ve $B_1 B_n$ olan ikizkenar bir trapezdir (Şek. 39 a). Ohalde çokgenin aradığımız $A_1 A_n$ kenarı, $B_1 B_2 \dots B_n$ n -geninin $B_1 B_n$ kenarına paraleldir; onun için, bu halde P noktasından $B_1 B_n$ e bir paralel çizmek lâzımdır. Bundan sonra $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geninin diğer tepelerini belirlemek zor değildir. (Çizimi tamamlayınız) (1).

Tek n 'ler için $A_1 B_1$ ve $A_n B_n$ yayları, daire üzerinde aynı doğrultuyu haizdirler ve $A_1 B_1 A_n B_n$ dörtgeni, tabanları $A_1 B_n$ ve $B_1 A_n$ olan bir ikizkenar trapezdir (Şek. 39 b). Trapezin $A_1 A_n$ ve $B_1 B_n$ köşegenleri eşit olduğundan, bu halde P noktasından, verilen daireyi bilinen $B_1 B_n$ kirişine eşit bir $A_1 A_n$ kirişi boyunca kesen bir doğru çizmek lâzımdır. Yani P noktasından geçen ve verilen daire ile ortak merkezli ve $B_1 B_n$ 'e teğet olan daireye teğet doğruyu çizmek lâzımdır (Bunu gerçekleyiniz!).

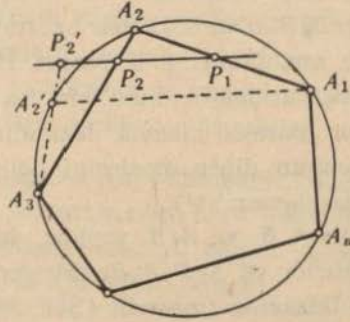
2. Bir daire içine çizilen ve k tane ardaşık kenarı, verilen k tane noktadan geçen, diğer $n - k$ kenarı da verilen doğrulara paralel olan n -genin çizimi problemini çözebildiğimizi farzedelim ve bir daire içine çizilen $k + 1$ tane bitişik $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k+1} A_{k+2}$ kenarı, verilen $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$ noktalarından

(1) P den geçen $B_1 B_n$ 'e paralel olan doğru daireyi kesmeyebilir. Daha genel olarak, her hangi bir çizim probleminde okuyucu sonucu elde etmek için yapılması icab eden her adımda, verilen şartlar yerine hangilerinin alınabileceğini iyice araştırmalıdır. Birçok hallerde şartlar öyle verilmiştir ki, bu adımı tamamlamak imkânsızdır. Bu ve bundan sonraki misâl ve temrinlerde bu araştırma okuyucuya bırakılmıştır.

Not: Sahife 64 deki şekillerin numarası Şek. 39 dur. Şek. 39 b de B_2 ve B_3 harfleri yer değiştirecektir.

geçen, geriye kalan $n - k - 1$ kenarı da verilen doğrulara paralel olan n -genin çizimi ile uğraşalım.

Problemın çözülmüş olduğunu ve istenilen $(k + 1)$ kenarı $k + 1$ noktadan geçen) n -genin çizildiğini farzedelim (Şek. 40). Bu çokgenin $A_1 A_2$ ve $A_2 A_3$ kenarlarını alalım. A_1 tepesin-



Şek. 40

den $P_1 P_2$ ye paralel bir $A_1 A_2'$ doğrusunu çizelim. A_2' bu doğrunun daire ile kesim noktası ve P_2' noktası da $A_2' A_3$ doğrusunun $P_1 P_2$ ile kesim noktası olsun.

$$\sphericalangle A_2 P_1 P_2 = \sphericalangle A_2 A_1 A_2' = \sphericalangle A_2 A_3 P_2'$$

ve

$$\sphericalangle A_2 P_2 P_1 = \sphericalangle P_2' P_2 A_3$$

olduğu için $P_1 A_2 P_2$ ve $P_2' P_2 A_3$ üçgenleri benzerdir. Buna göre,

$$\frac{P_1 P_2}{A_3 P_2} = \frac{A_2 P_2}{P_2' P_2}$$

dir ve bundan

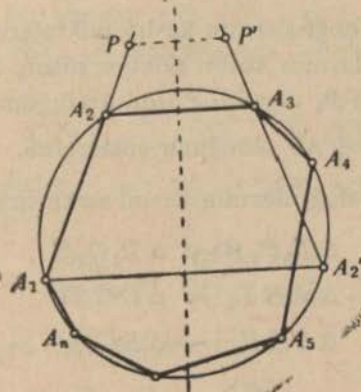
$$P_2' P_2 = \frac{A_3 P_2 \cdot A_2 P_2}{P_1 P_2}$$

elde edilir. $A_3 P_2 \cdot A_2 P_2$ çarpımı yalnız P_2 noktası ve daireye bağlı olduğundan belirlenebilir (bu çarpım A_2 ve A_3 noktala-

rının seçilişine bağlı değildir, P_2 noktası da dairenin üzerinde veya dışında olabilir!); böylece $P_2' P_2$ doğru parçasının uzunluğu bulunabilir ve dolayısıyla P_2' noktası çizilebilir. Bu şekilde k tane, bilinen $P_2', P_3, \dots, P_{k+1}$ noktalarını alırız; öyle ki $A_1 A_2' A_3 \dots A_n$ n -geninin k tane $A_2' A_3, A_3 A_4, \dots, A_{k+1} A_{k+2}$ ardışık kenarı bu noktalardan geçsin, ve diğer $n - k$ kenarı, $A_{k+2} A_{k+3}, \dots, A_n A_1, A_1 A_2'$ de bilinen doğrulara paralel olsun. İndüksiyon hipotezine göre $A_1 A_2' A_3 \dots A_n$ n -genini çizebiliriz, bundan sonra istenilen $A_1 A_2 \dots A_n$ n -genini çizmek kolaydır.

Problem 15. Verilen bir dairenin içine, (ardışık olmaları icab etmiyen) k tane kenarı verilen doğrulara paralel olan n -genin çizimi.

Yol gösterme. Çizimi istenilen çokgenin $A_1 A_2$ kenarı P noktasından geçsin ve $A_2 A_3$ kenarı da l doğrusuna paralel olsun (Şek. 41). P' , dairenin, l doğrusuna dik olan çapına göre P noktasının simetriği ve A_2' de, $P' A_3$ doğrusunun daireyi kestiği nokta olsun. $A_1 A_2' A_3 \dots A_n$ n -geninde $A_1 A_2'$ kenarı verilen l doğrusuna paralel olur ve $A_2' A_3$ kenarı da bilinen P' noktasından geçer. Bu işlem uygun sayıda tekrarlandıktan sonra bundan evvelki, ardışık k kenarı, verilen noktalardan geçen, diğer $n - k$ kenarı da verilen doğrulara paralel olan n -genin çizimi problemi elde edilir.

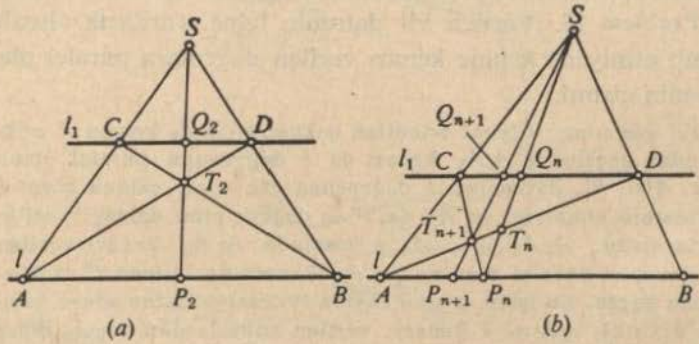


Şek. 41

15. BİR DOĞRU PARÇASININ BÖLÜMÜ

MİSAL 23. l ve l_1 gibi iki paralel doğru verildiğine göre, yalnız bir cedvel kullanarak, l doğrusu üzerindeki AB doğru parçasını n eşit parçaya bölmek.

ÇÖZÜM. 1. $n = 2$ olsun. Düzlemin, l ve l_1 doğruları üzerinde bulunmayan herhangi bir noktası S olsun. S noktasını A ve B noktaları ile birleştirelim (Şek. 42 a). C ve D l_1 doğru-



Şek. 42

su ile AS ve BS doğrularının kesim noktaları olsunlar. T_2 de AD ve BC doğrularının kesim noktası olsun. ST_2 ve l nin kesiştikleri noktaya P_2 diyelim P_2 nin aradığımız nokta olduğunu, yani $AP_2 = \frac{1}{2} AB$ olduğunu gösterelim.

Q_2 , l_1 ve ST_2 doğrularının kesim noktasını göstereyim

$$\Delta T_2 P_2 B \sim \Delta T_2 Q_2 C ,$$

$$\Delta A B T_2 \sim \Delta D C T_2 ,$$

$$\Delta S A P_2 \sim \Delta S C Q_2 ,$$

ve

$$\Delta S A B \sim \Delta S C D$$

olduğu kolayca görülebilir; buradan

$$\frac{P_2 B}{Q_2 C} = \frac{T_2 B}{T_2 C} = \frac{AB}{CD}$$

ve

$$\frac{P_2 A}{Q_2 C} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD},$$

dolayısıyla

$$\frac{P_2 B}{Q_2 C} = \frac{P_2 A}{Q_2 C}$$

elde edilir. Buna göre $P_2 A = P_2 B$ ve $AP_2 = \frac{1}{2} AB$ dir.

2. Yalnız bir cedvel kullanarak, AB üzerinde $AP_n = \frac{1}{n} AB$ olacak şekilde bir P_n noktası bulabildiğimizi farzedelim. l ve l_1 üzerinde bulunmayan herhangi bir S noktası seçelim ve T_n ile Q_n de SP_n nin sırasıyla AD ve l_1 ile kesim noktaları olsunlar (Şek. 42 b). AD ve CP_n nin kesiştikleri T_{n+1} noktasını S ile birleştirelim, ST_{n+1} in l_1 ve l doğruları ile kesim noktalarını Q_{n+1} ve P_{n+1} ile gösterelim. Aradığımız noktanın P_{n+1} olduğunu yani $AP_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, bir yandan $CQ_{n+1} T_{n+1}$ ve $P_n P_{n+1} T_{n+1}$, öteyandan $CT_{n+1} D$ ve $P_n T_{n+1} A$ üçgenlerinin benzerliklerinden

$$\frac{P_{n+1} P_n}{C Q_{n+1}} = \frac{P_n T_{n+1}}{C T_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD} \quad (11)$$

elde edilir; gene SAP_{n+1} ve SCQ_{n+1} ; SAB ve SCD üçgenlerinin benzerliklerinden

$$\frac{AP_{n+1}}{CQ_{n+1}} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} \quad (12)$$

elde edilir. (11) ve (12) eşitliklerinden

$$\frac{P_{n+1} P_n}{AP_{n+1}} = \frac{AP_n}{AB},$$

veya $P_{n+1}P_n = AP_n - AP_{n+1}$ ve $AP_n = \frac{1}{n} AB$ olduğundan

$$\frac{\frac{1}{n} AB - AP_{n+1}}{AP_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} AB}{AB},$$

$$\frac{1}{n} AB - AP_{n+1} = \frac{1}{n} AP_{n+1}$$

ve en son olarak

$$AP_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$$

elde edilir.

$P'_{n+1}, P''_{n+1}, \dots$ bölüm noktalarını bulmak için aynı metodu kullanarak

$$P_{n+1}P'_{n+1} = \frac{1}{n} P_{n+1}B, \quad P'_{n+1}P''_{n+1} = \frac{1}{n-1} P'B, \dots \text{v.s}$$

doğru parçaları çizilir.

Problem 16. Sabit bir a açıklığına haiz bir pergel ve bir cedvel kullanarak, uzunluğu $\frac{1}{n}a$ olan bir doğru parçasını çizmek.

Yol gösterme. Yarı çapı a olan bir daire üzerinde, düzgün bir altıgenin tepeleri olan $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ noktalarını işaretliyelim. OA_n yarı çapı üzerinde $OB_n = \frac{1}{n} OA_n = \frac{a}{n}$ olacak şekilde bir B_n noktasını işaretleyebildiğimizi farzedelim. (Burada her hangi bir m ve $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $A_{6m+k} = A_k$ olduğunu kabul ediyoruz; $B_1 = A_1$ dir.) B_{n+1} , OA_{n+1} ve BA_{n+2} doğrularının kesim noktası olsun; buna göre $OB_{n+1} = \frac{a}{n+1}$ dir.

4. İndüksiyon Metodu ile Geometrik Yerlerin Belirtilmesi

Bu bölümde indüksiyon metodu ile bir çok geometrik yer tayini problemleri ile meşgul olacağız.

16. ALANLARIN TOPLAMLARINI GEREKTİREN PROBLEMLER

ABC üçgeninin alanını $S(ABC)$ ile gösterelim.

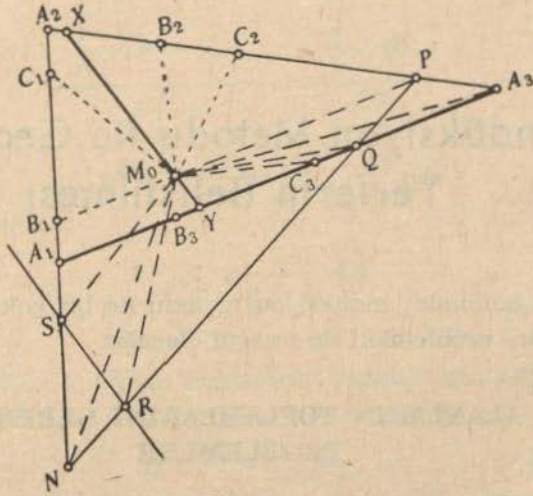
MİSAL 24. $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ doğru parçaları, $A_1A_2\dots A_n$ konveks n -geninin kenarları üzerinde bulunsunlar. Çokgenin içersinde bulunan ve $MB_1C_1, MB_2C_2, \dots, MB_nC_n$ üçgenlerinin alanları toplamı sabit olan M noktalarının geometrik yerini bulunuz. (Bu toplam, M_0 çokgenin içersinde sabit bir nokta olduğuna göre $S(M_0B_1C_1) + S(M_0B_2C_2) + \dots + S(M_0B_nC_n)$ toplamına eşittir).

ÇÖZÜM. 1. $n = 3$ olsun (Şek. 43 a). $A_1A_2A_3$ üçgeninin A_3A_2 ve A_3A_1 kenarları üzerinde $A_3P = B_2C_2$ ve $A_3Q = B_3C_3$ doğru parçalarını alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} S(M_0B_2C_2) + S(M_0B_3C_3) &= S(M_0PA_3) + S(M_0QA_3) \\ &= S(PQA_3) + S(M_0PQ), \end{aligned}$$

ve bunun neticesi olarak

$$\begin{aligned} S(M_0B_1C_1) + S(M_0B_2C_2) + S(M_0B_3C_3) \\ = S(PQA_3) + [S(M_0B_1C_1) + S(M_0PQ)] \end{aligned}$$



Şek. 43 a

elde edilir ⁽¹⁾. Benzer şekilde

$$S(MB_1 C_1) + S(MB_2 C_2) + S(MB_3 C_3) \\ = S(PQA_3) + [S(MB_1 C_1) + S(MPQ)]$$

dür. Görülüyorki istenen geometrik yer

$$S(MB_1 C_1) + S(MPQ) = S(M_0 B_1 C_1) + S(M_0 PQ)$$

şartı ile tarif edilir.

Şimdi $A_1 A_2$ ve PQ doğrularının kesim noktası N olsun. (Bu doğrular paralel iseler, aradığımız geometrik yer, bu doğru-lara paralel olan bir doğru parçasıdır.) $A_2 NP$ açısının kenar-ları üzerinde $NR = PQ$ ve $NS = B_1 C_1$ doğru parçalarını ala-lım; ohalde

(1) Burada, M_0 noktasının, $A_1 A_2 PQ$ dörtgeni içersinde kal-dığını farzediyoruz; eğer aksi olsa idi muhakeme tarzı biraz farklı olurdu.

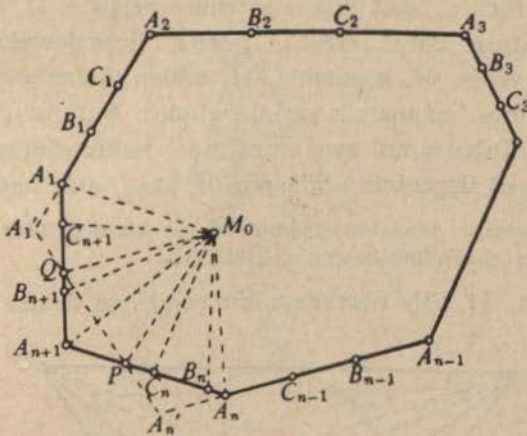
$$\begin{aligned} S(M_0 B_1 C_1) + S(M_0 PQ) &= S(M_0 NS) + S(M_0 NR) \\ &= S(NRS) + S(M_0 RS) , \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$S(MB_1 C_1) + S(MPQ) = S(NRS) + S(MRS)$$

bulunur. Buna göre aradığımız geometrik yer, üçgenin içerisinde bulunan ve $S(MRS) = S(M_0 RS)$ eşitliğine uyan noktalardan meydana gelir; yani M_0 dan geçen ve RS doğrusuna paralel olan doğru üzerindeki XY doğru parçasıdır ⁽¹⁾.

2. Bir n -gen için aranılan geometrik yerin bir doğru parçası (tabii M_0 noktasından geçen) olduğunu bildiğimizi farzedelim. Şimdi bir $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ ($n+1$) - genini alalım; kenarları üzerinde $B_1 C_1, B_2 C_2, \dots, B_n C_n, B_{n+1} C_{n+1}$ doğru parçaları verilmiş olsun ve M_0 da, ($n+1$) - genin iç noktası



Şek. 43 b

olsun (Şek. 43 b). $A_1 A_{n+1} A_n$ açısının kenarları üzerinde A_{n+1} noktasından itibaren

$$A_{n+1} P = B_n C_n \quad \text{ve} \quad A_{n+1} Q = B_{n+1} C_{n+1}$$

(1) İndüksiyonu $n=2$ hali ile başlatabiliriz. Bu halde n -gen yalnız iki kenarı bulunan bir açıdan ibaret olacaktır.

parçalarını alalım. Böylece

$$\begin{aligned} S(MB_n C_n) + S(MB_{n+1} C_{n+1}) &= S(MA_{n+1} P) + S(MA_{n+1} Q) \\ &= S(A_{n+1} PQ) + S(MPQ) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre M noktalarının aradığımız geometrik yeri için

$$\begin{aligned} S(MB_1 C_1) + S(MB_2 C_2) + \dots + S(MB_{n-1} C_{n-1}) + S(MPQ) \\ = S(M_0 B_1 C_1) + S(M_0 B_2 C_2) + \dots + S(M_0 B_{n-1} C_{n-1}) + S(M_0 PQ) \end{aligned}$$

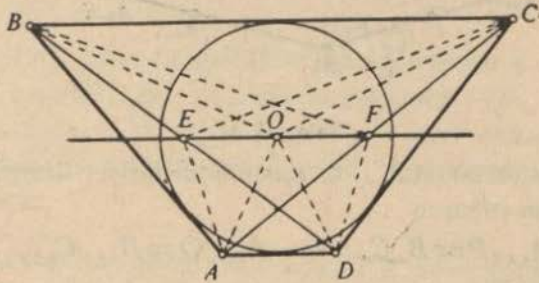
dür. Ohalde, indüksiyon hipotezine göre aranılan geometrik yer, M_0 noktasından geçen bir doğru parçasıdır.

Bu problemin çözüm metodundan faydalanılarak, bu geometrik yeri çizmek için bir metod bulmak kolaydır.

Problem 17. n tane $l_1, l_2, \dots, l_n$ doğrusu ve her birinin üzerinde $B_1 C_1, B_2 C_2, \dots, B_n C_n$ doğru parçaları verilsin, M_0 da sabit bir nokta olsun. $BM_1 C_1, MB_2 C_2, \dots, MB_n C_n$ üçgenlerinin cebrik toplamı, M yerine M_0 koymakla elde edilen toplama eşit olan, M noktalarının geometrik yerini bulunuz. Burada M ve M_0 noktaları l_i doğrusunun aynı tarafında bulunurlarsa $MB_i C_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) üçgeninin alanı pozitif, aksi halde negatiftir.

Yol gösterme. Aranılan geometrik yer bir doğrudur; ispat misal 24 ün çözümüne benzer şekildedir.

Problem 18. Bir dörtkenar bir çemberin dışına çizilmiş-



Şek. 44

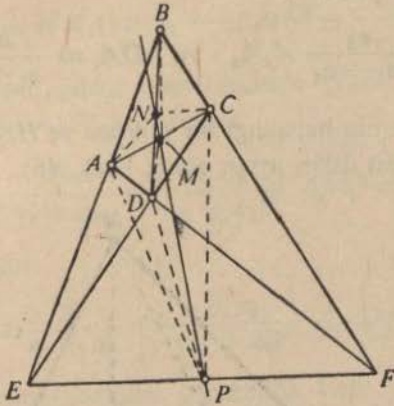
se köşegenlerinin orta noktaları ile çemberin merkezinin aynı bir doğru üzerinde bulunduğunu gösteriniz (Şek. 44).

Yol gösterme. Şek. 44 den

$$\begin{aligned} S(BCE) + S(ADE) &= S(BCF) + S(ADF) \\ &= S(BCO) + S(ADO) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

elde edilir. Burada S dörtkenarın alanıdır. Buradan misal 24 ün sonucuna (veya problem 17 ye) göre E, F ve O noktaları aynı bir doğru üzerinde bulunurlar.

Problem 19. Bir konveks dörtkenarın köşegenlerinin orta noktalarını birleştiren doğrunun, karşı kenarların kesim noktalarını birleştiren doğru parçasını ortaladığını gösteriniz (dörtkenar, bir paralelkenar veya bir yamuk olmamalıdır). (Şek. 45).



Şek. 45

Yol gösterme. S dörtkenarın alanı, $(P, EF$ doğru parçasının orta noktası) olduğuna göre Şek. 45 den

$$\begin{aligned} S(ABM) + S(CDM) &= S(ABN) + S(CDN) \\ &= S(ABP) - S(CDP) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde Prob. 17 nin sonucuna göre M, N ve P noktaları aynı doğru üzerinde bulunurlar.

17. UZAKLIKLARIN KARELERİNİ GEREKTİREN PROBLEMLER

MİSAL 25. $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n tane nokta ve n tane de $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayısı (pozitif veya negatif) verilsin.

$$a_1 \cdot MA_1^2 + a_2 \cdot MA_2^2 + \dots + a_n \cdot MA_n^2$$

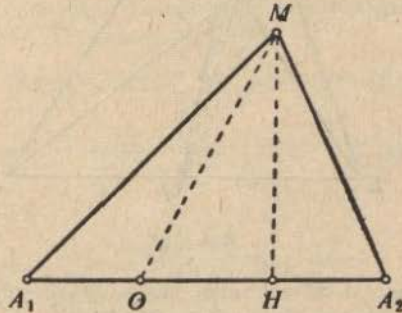
toplamı bir sabit olan, M noktalarının geometrik yerini bulunuz.

ÇÖZÜM. 1. Özel olarak $n = 2$ olsun. Önce a_1 ve a_2 sayılarının her ikisinin de pozitif olduğunu farzedelim.

A_1A_2 doğru parçası üzerinde, onu $\frac{a_2}{a_1}$ oranında bölen bir O noktası alalım, yani

$$A_1O = \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2 \quad \text{ve} \quad OA_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} A_1A_2$$

olsun. M düzlemin herhangi bir noktası ve H, M den A_1A_2 doğrusuna indirilen dikin ayağı olsun (Şek. 46).



Şek. 46

Buna göre

$$MA_1^2 = MO^2 + A_1O^2 \pm 2A_1O \cdot OH$$

$$MA_2^2 = MO^2 + OA_2^2 \mp 2OA_2 \cdot OH$$

elde edilir. Bu eşitliklerden ilkinin OA_2 , ikincisini A_1O ile çarpıp elde edilen sonucu terim terim toplayalım,

$$\begin{aligned} MA_1^2 \cdot OA_2 + MA_2^2 \cdot A_1O \\ = MO^2(OA_2 + A_1O) + A_1O^2 \cdot OA_2 + OA_2 \cdot A_1O \\ = MO^2 \cdot A_1A_2 + A_1O \cdot OA_2 \cdot A_1A_2 \end{aligned}$$

buluruz.

Şimdi A_1O ve OA_2 nin değerlerini yerlerine koyalım :

$$\begin{aligned} MA_1^2 \frac{a_1 \cdot A_1A_2}{a_1 + a_2} + MA_2^2 \frac{a_2 \cdot A_1A_2}{a_1 + a_2} \\ = MO^2 \cdot A_1A_2 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2^3, \end{aligned}$$

veya

$$a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 = (a_1 + a_2) MO^2 + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} A_1A_2^3$$

elde edilir. Buna göre, eğer hipoteze göre bir sabit olan $a_1 MA_1^2 + a_2 MA_2^2 = R^2$ vazedersen

$$MO^2 = \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^3 = \text{Sabit}$$

olur. O halde, eğer

$$K \equiv \frac{R^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} A_1A_2^3 > 0$$

ise, M noktalarının aranan geometrik yeri, merkezi O yarı çapı $\sqrt{K}$ olan bir çemberdir; eğer $K = 0$ ise aranan geometrik yer yalnız O noktasından ibarettir; en son, eğer $K < 0$ ise aranan geometrik yerin hiç bir noktası yoktur.

a_1 ve a_2 nin her ikisinin de negatif olduğu hal kolayca evvelki hale irca edilir. Eğer $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ ve $a_1 + a_2 \neq 0$ (meselâ $a_1 + a_2 > 0$) ise, O noktası, A_1A_2 doğru parçasının uzantısı üzerinde A_2 noktasının sağına doğru ve

$$A_2O = \left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right| \quad \text{ve} \quad A_1O = \left| \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right|$$

olacak şekilde alınmalıdır. Hesabın diğer kısımları yukarıda yapılandan farklı değildir.

Son olarak, eğer $a_1 + a_2 = 0$, yani $a_1 = -a_2$ ise problemi-miz aşağıdaki şekli alır: Verilen iki A_1 ve A_2 noktasından uzaklıklarının karelerinin farkı sabit olan M noktalarının geometrik yerini bulunuz. M noktasından A_1A_2 doğrusuna indirilen dikin ayağı H olsun (Şek. 46); bu takdirde

$$MA_1^2 = MH^2 + A_1H^2, \quad MA_2^2 = MH^2 + HA_2^2,$$

ve bunun sonucu olarak,

$$MA_1^2 - MA_2^2 = A_1H^2 - HA_2^2 \quad \text{dir.}$$

Eğer

$$MA_1^2 - MA_2^2 = R^2 \quad \text{ise,} \quad A_1H - H_2G = R^2/A_1A_2 \quad \text{olur.}$$

Böylece H noktası tamamen belirlenmiş olur; buradan, bu halde aranılan geometrik yerin H noktasından geçen ve A_1A_2 ye dik olan bir doğru olduğu görülür.

2. Verilen n nokta için tekabül eden geometrik yerin $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ ise bir çember, eğer $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ise bir doğru olduğunu gösterdiğimizizi farzedelim. Şimdi de $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ gibi $n + 1$ nokta ve $n + 1$ tane $a_1, \dots, a_{n+1}$ sayısı gözönüne alalım. $a_n + a_{n+1} \neq 0$ olduğunu farzedelim. (Eğer $a_n + a_{n+1} = 0$ ise, bu sayı çifti yerine a_{n-1} ve a_{n+1} sayılarını veya a_{n-1} ile a_n sayı çiftini alırız; eğer $a_n + a_{n+1} = 0$, $a_{n-1} + a_{n+1} = 0$ ve $a_{n-1} + a_n = 0$ eşitliklerinin hepsi birden doğru ise $a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = 0$ dır ve bu halde indüksiyon hipotezini doğrudan doğruya tatbik ederiz; çünkü problem $n - 2$ tane $A_1, \dots, A_{n-2}$ noktası ve $n - 2$ tane $a_1, \dots, a_{n-2}$ sayısı olan hale dönüşmüş olur).

Kısım 1 deki gibi, A, A_{n+1} doğru parçası üzerinde bir O

4. İndüksiyon Metodu ile Geometrik Yerlerin Belirtilmesi 79

noktası bulmamız mümkün olduğunu görebiliriz, öyle ki, düzlemin herhangi bir M noktası için

$$a_n M A_n^2 + a_{n+1} M A_{n+1}^2 = (a_n + a_{n+1}) M O^2 + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} A_n A_{n+1}^2$$

olsun. Benzer şekilde, problemimiz

$$a_1 M A_1^2 + a_2 M A_2^2 + \dots + a_{n-1} M A_{n-1}^2 + (a_n + a_{n+1}) M O^2$$

toplamı sabit olan M noktalarının geometrik yerinin bulunmasına irca edilmiş olur. İndüksiyon hipotezine göre bu geometrik yer, $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \neq 0$ ise bir daire eğer $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 0$ ise bir doğrudur.

Problem 20. Verilen n noktaya olan uzaklıklarının karelerinin toplamı sabit olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Yol gösterme. Misal 25 de $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ koymak kâfidir.

Problem 21. Verilen n noktaya olan uzaklıklarının kareleri toplamı minimum olan noktayı bulunuz.

Yol gösterme. Problem 20 deki geometrik yer olan dairenin merkezini düşünelim.

Problem 22. Verilen iki noktaya olan uzaklıklarının oranı sabit olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Yol gösterme. Aranılan geometrik yerin bir noktası M ise, $AM/BM = c$ ve dolayısı ile, $AM^2 - c^2 BM^2 = 0$ dır; buna göre bu problem Misal 25 e dönüşmüş olur.

Problem 23. $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geni verilmiş olsun. Öyle M noktalarının geometrik yerini bulunuz ki, tepeleri, M noktasının verilen çokgenin kenarları üzerindeki izdüşümleri olan çokgenin alanı verilen bir S değerine eşit olsun.

Yol gösterme. Köşeleri M noktasının, $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin kenarları üzerindeki izdüşümleri olan üçgenin alanının

$$\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| S(A_1 A_2 A_3)$$

olduğunu göstermek mümkündür; burada R , $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin dışına çizilen Σ daresinin yarıçapı, d de, M noktasının Σ daresinin merkezine olan uzaklığını göstermektedir. Bundan şu netice çıkar: $n=3$ için, aranılan geometrik yer Σ ile aynı merkezli bir daire (veya böyle dairelerden bir çift) dir. Bundan başka çokgenin kenarları için indüksiyon kullanılarak, her n için aranılan geometrik yerin bir daire (veya aynı merkezli dairelerden ibaret bir çift) olduğu gösterilebilir.

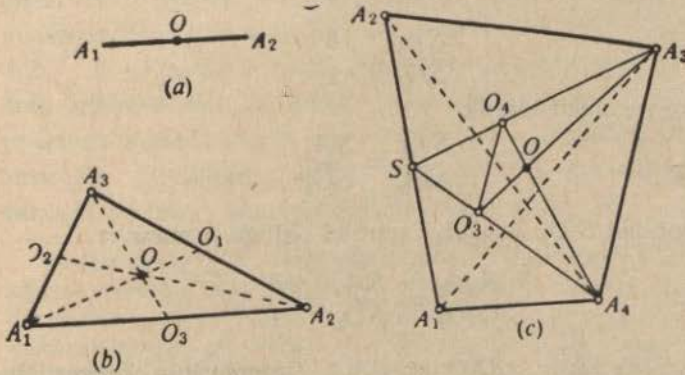
5. İndüksiyonla Tarifler

Geometride matematik indüksiyon metodunun tatbikatına ait ilgi çekici misaller, tariflerinde, « n den $n + 1$ e» gitme usulünü kullanmağı gerektiren kavramları ihtiva eden problemlerde bulunur. Bu bölümde, bu tip problemlerle meşgul olacağız.

18. AĞIRLIK MERKEZİ VE ÇOKGENLERİN KENARORTAYLARI.

MİSAL 26. Bir n -genin ağırlık merkezini ve kenarortaylarını tarif ediniz.

ÇÖZÜM. 1. Bir doğru parçasının ağırlık merkezi olarak orta noktası tarif edilir (Şek. 47 a). (Bu bölümde bir doğru parçasını 2-gen olarak kabul edeceğiz.)



Şek. 47

Buna göre $A_1A_2A_3$ üçgeninin kenar ortayları, köşelerini karşı kenarların ağırlık merkezlerine birleştiren doğrular

olarak tarif edilebilir (Şek 47 b). Biliyoruz ki, bir üçgenin kenar ortayları bir noktada kesişirler ve bu nokta onları, uzun parça köşeye doğru olmak üzere 2 : 1 oranında böler. Bir üçgenin kenar ortaylarının kesim noktasına *üçgenin ağırlık merkezi* denir.

Şimdi $A_1A_2A_3A_4$ dörtgenini alalım. Bunun her bir köşesini, geriye kalan üç köşesinin meydana getirdiği üçgenlerin O_1, O_2, O_3 ve O_4 merkezlerine birleştiren doğrulara *dörtgenin kenar ortayları* diyelim (Şek. 47 c). *Bir dörtgenin kenarortaylarının bir noktada kesiştiklerini, ve bu noktanın herbirini, büyük parça köşeye doğru olmak üzere, 3 : 1 oranında böldüğünü* ispat edelim. Gerçekten, A_1A_2 kenarının ağırlık merkezini (orta noktasını) S ile gösterelim; O_4 ve O_3 de sırasıyla $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_2A_4$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri olsunlar; ve O , dörtgenin A_3O_3 ve A_4O_4 kenar ortaylarının kesim noktası olsun. SA_3 ve SA_4 sırasıyla $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_2A_4$ üçgenlerinin kenar ortayları olduklarından

$$\frac{SA_3}{SO_4} = \frac{3}{1}$$

ve

$$\frac{SA_4}{SO_3} = \frac{3}{1}$$

ve bunun sonucu olarak

$$\frac{SA_3}{SO_4} = \frac{SA_4}{SO_3}$$

dür. Bundan O_3O_4 ün A_3A_4 e paralel olduğu sonucu ve

$$\frac{A_3A_4}{O_3O_4} = \frac{SA_3}{SO_4} = \frac{3}{1}$$

eşitliği elde edilir. OO_3O_4 ve OA_3A_4 üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{OA_4}{OO_4} = \frac{OA_3}{OO_3} = \frac{A_3A_4}{O_3O_4} = \frac{3}{1}$$

bağıntısı çıkar. Buna göre, bir dörtgenin herhangi iki komşu kenarortayının (yani iki komşu köşeden geçen kenar ortaylarının) kesim noktası herbirini $3 : 1$ oranında böler. Bundan bir dörtgenin dört kenar ortayının ortak bir O noktasında kesiştikleri ve bu noktanın herbirini $3 : 1$ oranında böldüğü sonucu elde edilir. Bir dörtgenin kenarortaylarının kesiştiği O noktasına *dörtgenin ağırlık merkezi* denir ⁽¹⁾.

2. Bütün $k < n$ ler için, k -genin kenar ortayları olarak, k -genin köşeleriyle, geri kalan diğer $k - 1$ köşenin meydana getirdiği $(k - 1)$ -genlerin ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçalarını tarif ettiğimizi ve bütün $k < n$ ler için, bir k -genin ağırlık merkezi olarak da onun bütün kenar ortaylarının kesim noktasını anladığımızı farzedelim. Bundan başka, $k < n$ iken k -genin kenar ortaylarının, kesiştikleri nokta (k -genin ağırlık merkezi) ile $(k - 1) : 1$ oranında bölündüklerini farzedelim (uzun parça köşeye yakın olmak üzere).

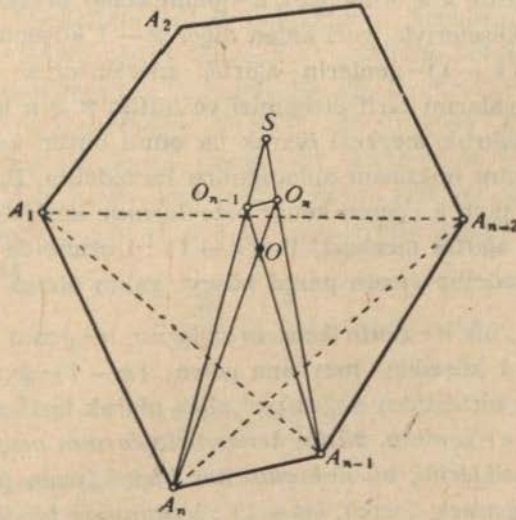
Şimdi, bir n -genin kenarortaylarını, n -genin köşelerini, diğer $n - 1$ köşeden meydana gelen $(n - 1)$ -genin ağırlık merkezine birleştiren doğru parçaları olarak tarif edelim. Bir $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geninin, bütün kenar ortaylarının ortak bir noktada kesiştiklerini, bu noktanın her birini (uzun parça köşeye doğru gelmek üzere), $(n - 1) : 1$ oranında böldüğünü göstereceğiz. Gerçekten, $A_1 A_2 \dots A_{n-2}$ $(n - 2)$ -geninin ağırlık merkezi S olsun; SA_{n-1} ve SA_n doğruları $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ ve $A_1 A_2$.

(1) Her hangi bir dörtgende, genel olarak bu nokta fizikî ağırlık merkezi ile çakışmaz. Fizikî ağırlık merkezi, verilen dörtgenin şeklinde homogen, ince bir metal tabakanın ağırlık merkezi olarak tarif edilir. Bu bölümde tarif edilen nokta için farklı bir isim seçilebilirdi. Fakat gerçekte, Misal 26'nın metodu ile tarif edilen nokta, n -genin her bir köşesine yerleştirilmiş birim ağırlıklardan meydana gelen bir sistemin fizikî ağırlık merkezidir. Meselâ B. V. Kutuzov'un, bu yayınların 19 uncu kitabı olarak Hüseyin Demir tarafından çevrilen *Geometri* (Cilt I, sahife 9 - 12) adlı eserine bakılabilir.

.. $A_{n-2} A_n$ ($n-1$)-genlerinin kenar ortayları olacaktır (Şek. 48). Eğer O_n ve O_{n-1} bu ($n-1$)-genlerin ağırlık merkezleri ise induksiyon hipotezine göre

$$\frac{SA_{n-1}}{SO_n} = \frac{SA_n}{SO_{n-1}} = \frac{n-1}{1}$$

dir. Ohalde $O_{n-1} O_n$ doğrusu $A_n A_{n-1}$ e paralel ve



Şek. 48

$$\frac{A_{n-1} A_n}{O_{n-1} O_n} = \frac{n-1}{1}$$

olur. $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geninin $O_{n-1} A_{n-1}$ ve $O_n A_n$ kenar ortaylarının kesim noktası O olsun. $OO_{n-1} O_n$ ve $OA_{n-1} A_n$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{OA_{n-1}}{OO_{n-1}} = \frac{OA_n}{OO_n} = \frac{A_{n-1} A_n}{O_{n-1} O_n} = \frac{n-1}{1}$$

elde edilir. Buna göre, bir n -genin herhangi komşu iki kenar ortayı kesim noktaları ile $(n-1) : 1$ oranında bölünür. Bundan bir n -genin bütün kenar ortaylarının ortak bir noktada kesiştikleri ve bu nokta tarafından $(n-1) : 1$ oranında bölündükleri sonucu çıkarılır.

Şimdi, bir n -genin *ağırlık merkezi* olarak, kenar ortaylarının kesim noktasını tarif edebiliriz. Artık bir $(n+1)$ -genin kenar ortaylarını, köşeleri, diğer n köşeden meydana gelen n -genlerin ağırlık merkezlerine birleştiren doğru parçaları olarak tarif edebiliriz. Matematik indüksiyon metodu, bir n -genin kenar ortay ve ağırlık merkezi tariflerini herhangi bir n için teşmil etmemize yarar.

Problem 24. $A_1A_2 \dots A_n$ n -geninde $A_2A_3 \dots A_n$ $(n-1)$ -geninin ağırlık merkezi O_1 , $A_1A_3 \dots A_n$ $(n-1)$ -geninin ağırlık merkezi $O_2 \dots$ en son $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ $(n-1)$ -geninin ağırlık merkezi O_n olsun. $O_1O_2 \dots O_n$ n -geninin verilen $A_1A_2 \dots A_n$ n -genine benzer olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme. Misal 26 daki metod yardımı ile O_1O_2 nin A_1A_2 ye paralel olduğu ve

$$\frac{O_1O_2}{A_1A_2} = \frac{1}{n-1}$$

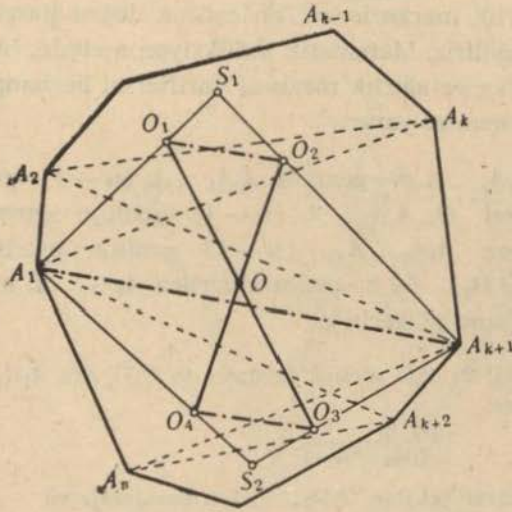
eşitliği görülür. Benzer şekilde O_2O_3 , A_2A_3 e paraleldir ve

$$\frac{O_2O_3}{A_2A_3} = \frac{1}{n-1}, \dots \text{v.s. dir.}$$

Bir n -genin, herhangi k tane köşesinden meydana gelen k -genin ağırlık merkezi ile diğer $(n-k)$ köşesinden meydana gelen $(n-k)$ -genin ağırlık merkezini birleştiren doğru parçasına n -genin k *ıncı mertebeden bir kenar ortayı* denir ($k < n$). Buna göre k *ıncı mertebeden bir kenar ortay*, aynı zamanda $(n-k)$ *ıncı mertebeden bir kenar ortaydır*. Bir n -genin misal 26 daki şekilde tarif edilen kenar ortaylarına 1 *ınci mertebeden kenar ortaylar* denilebilir.

Problem 25. Bir n -genin k ıncı mertebeden bütün kenar ortaylarının bir noktada kesiştiklerini ve bu noktanın her birini $(n-k) : k$ oranında böldüğünü gösteriniz.

Yol gösterme. $A_2 A_3 \dots A_k (k-1)$ -geni ile $A_{k+2} A_{k+3} \dots A_n (n-k-1)$ -geninin ağırlık merkezleri S_1 ve S_2 olsun. O_1 ve O_2 de $A_1 A_2 \dots A_k$ ve $A_2 A_3 \dots A_{k+1}$ k -genlerinin ağırlık merkezleri olsunlar; $A_{k+1} \dots A_n$ ve $A_{k+2} \dots A_n A_1 (n-k)$ -genlerinin ağırlık merkezlerini de O_3 ve O_4 ile gösterelim (Şek. 49). Ohalde



Şek. 49

$$\frac{O_1 S_1}{O_1 A_1} = \frac{O_2 S_1}{O_2 A_{k+1}} = \frac{1}{k-1}$$

dir ve $O_1 O_2$ doğrusu $A_1 A_{k+1}$ e paraleldir;

$$\frac{O_3 S_2}{O_3 A_{k+1}} = \frac{O_4 S_2}{O_4 A_1} = \frac{1}{n-k-1}$$

dir ve $O_3 O_4$ doğrusu $A_1 A_{k+1}$ e paraleldir. Eğer O noktası k ıncı mertebeden $O_2 O_4$ ve $O_1 O_3$ kenarortaylarının kesim noktası ise, $OO_1 O_2$ ve $OO_3 O_4$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{OO_1}{OO_3} = \frac{OO_2}{OO_4} = \frac{O_1O_2}{O_3O_4} = \frac{\frac{1}{k} A_1 A_{k+1}}{\frac{1}{n-k} A_1 A_{k+1}} = \frac{n-k}{k}$$

elde edilir.

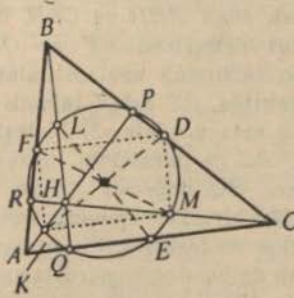
Bir n -gende, her hangi bir k için, k ıncı mertebeden kenar ortayların kesim noktasının, ağırlık merkezi ile çakıştığı gösterilebilir.

Problem 26. Problem 25 de yapılanları $n = 4$, $k = 2$ için yapınız.

Cevap. Her hangi bir dörtgende karşı kenarların orta noktalarını ve köşegenlerin orta noktalarını birleştiren doğru parçaları aynı bir noktada kesişirler; bu ortak nokta her bir doğru parçasını yarılar.

19. EULER DAİRELERİ.

Bir üçgenin kenarlarının orta noktalarından geçen daireye bu üçgenin *Euler dairesi* denir (Şek. 50). Bu dairenin bir



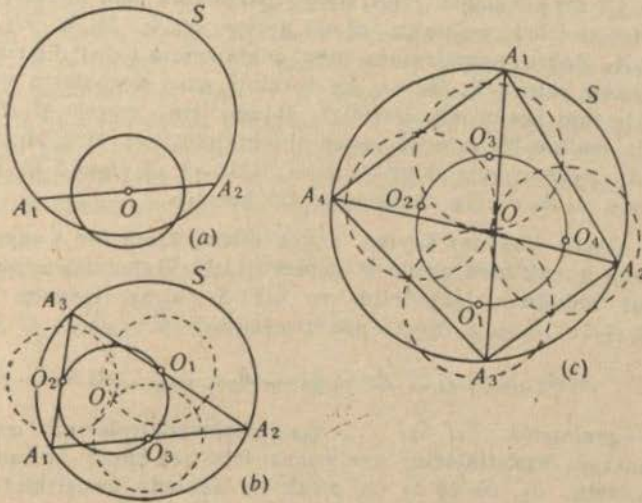
Şek. 50

çok ilgi çekici özellikleri vardır. (Meselâ, ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları olan D, E, F den başka AP, BQ, CR yüksekliklerinin P, Q, R ayaklarından ve yüksekliklerin kesiştikleri H noktası ile köşeler arasında kalan doğru parçaları-

nı yarılayan K, L, M noktalarından geçer⁽¹⁾. Bu sebepten Euler daireesine ekseriya üçgenindokuz nokta dairesi de denir). Euler daireesi ABC üçgenine benzer olan DEF üçgeninin dışına çizildiğinden ve benzerlik katsayısı $\frac{1}{2}$ olduğundan, ilk ABC üçgeninin dışına çizilen dairenin yarı çapı R ise Euler dairesinin $\frac{R}{2}$ olmalıdır. Euler daireesi kavramı bir daire içine çizilebilen her hangi bir çokgen için aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

Problem 27. 1. Yarı çapı R olan bir S dairesinin bir A_1A_2 kirişinin Euler daireesi, merkezi A_1A_2 kirişinin orta noktası olan $R/2$ yarı çaplı bir dairedir (Şek. 51 a). Bir S daireesi içine çizilen $A_1A_2A_3$ üçgeninin kenarlarının Euler daireeleri bir O ortak noktasında kesişirler. Bu nokta, bu üç Euler dairesinin merkezlerinden geçen ve yarı çapı $R/2$ olan bir dairenin merkezidir. Bu daire $A_1A_2A_3$ üçgeninin, yukarda tarif edilen, Euler dairesidir (Şek. 51 b).

(1) BH tabanları ortak olan ABH ve CBH üçgenlerinde kenarların orta noktalarını birleştiren KF ve DM doğrularının her biri BH doğrusuna ve bunun neticesi olarak birbirlerine paraleldirler. Benzer şekilde, AC ortak tabanlı ABC ve AHC üçgenlerinde kenarların orta noktalarını birleştiren FD ve KM doğrularından her biri AC ye paraleldir. Buna göre FD doğrusu KM e paralel olur. BQ doğrusu AC ye dik olduğundan $KFDM$ dörtgeni (Şek. 50) bir dikdörtgendir; ohalde FM ve DK doğru parçaları eşittirler ve birbirlerini ortalarlar. Aynı şekilde EL doğru parçasının da bu doğru parçalarına eşit olduğu ve orta noktasının, FM ve KD nin ortak orta noktası ile çakıştığı gösterilebilir. Buna göre D, E ve F noktalarından geçen Euler daireesi K, L ve M noktalarından da geçer. Bu dairenin merkezi DK, EL ve FM doğrularının ortak noktasıdır ve çapı, bu eşit doğru parçalarının uzunluklarının her hangi birine eşittir. Bundan başka K ve D noktalarının Euler dairesinin çapının uç noktaları ve $\angle KPD = 90^\circ$ olduğunu gösterdiğimizize göre, Euler daireesi P noktasından geçer; benzer şekilde Q ve R noktalarından da geçtiği görülebilir.



Şek. 51

2. Yarı çapı R olan bir S dairesinin içine çizilen bir n -genin Euler dairesinin tarif edildiğini ve bu dairenin yarı çapının $R/2$ olduğunu farzedelim. Bir S dairesi içine çizilen bir $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, $(n+1)$ -genini alalım. Bu halde $n+1$ tane $A_2 A_3 \dots A_{n+1}$, $A_1 A_3 \dots A_{n+1}$, $\dots$, $A_1 A_2 \dots A_n$ n -genlerinin Euler daireleri ortak bir noktada kesişirler; bu nokta, bahsi geçen $(n+1)$ tane Euler dairesinin merkezlerinden geçen ve yarı çapı $R/2$ olan, dairenin merkezidir. Bu daireye $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ $(n+1)$ -geninin Euler dairesi denir (Bir dörtgenin Euler dairesini gösteren Şek. 51 c ye bakınız).

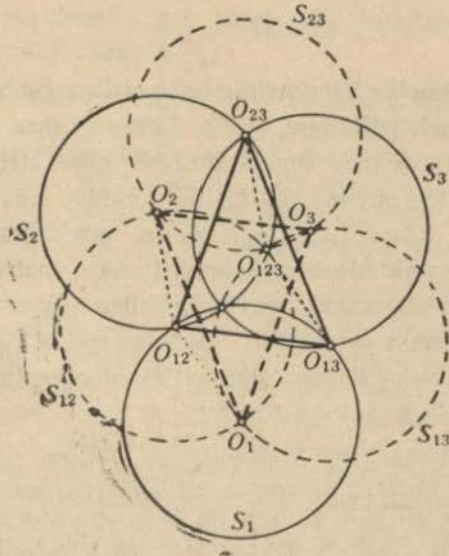
Yol gösterme. $A_1 A_2 A_3 A_4$, S dairesi içine çizilen herhangi bir dörtgen olsun. Buna göre, meselâ $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası H_4 ise, $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin Euler dairesi $H_4 A_1$, $H_4 A_2$, $H_4 A_3$ doğru parçalarının orta noktalarından geçer (yukarıya bakınız), onun için bu Euler dairesi S dairesine homotetiktir; bu homotetinin merkezi H_4 ve katsayısı

da $1/2$ dir; O halde $H_4 A_4$ doğru parçasının orta noktası da bu daire üzerinde bulunur. Şimdi geriye $H_1 A_1$, $H_2 A_2$, $H_3 A_3$ ve $H_4 A_4$ doğru parçalarının orta noktalarının çakıştıklarını göstermek kalır (H_1 , H_2 ve H_3 tekabül eden üçgenlerin yüksekliklerinin kesim noktalarıdır). Bunun için, meselâ $A_1 H_2 H_1 A_2$ dörtgeninin bir paralel kenar olduğu görülür; zira $A_1 H_2$ doğrusu $A_2 H_1$ e paralel ve $A_3 A_4$ e diktir ve $A_1 H_2 = S$ in merkezinin $A_3 A_4$ e olan uzaklığının iki katıdır.

Şimdi k kenar sayısı, $n \geq 4$ olmak üzere bir n sayısından daha küçük olan bütün k -genler için bir Euler dairesinin mevcut olduğunu farzedelim ve bir S dairesi içersine çizilen $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ ($n+1$)-genini alalım.

$$A_2 A_3 \dots A_{n+1}, \quad A_1 A_3 A_4 \dots A_{n+1}, \dots, \quad A_1 A_2 \dots A_n$$

n -genlerinin $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ Euler dairelerinin ortak bir noktada kesiştiklerini göstermek için her hangi üç tanesinin, meselâ, S_1, S_2 ve S_3 ün ortak bir noktada kesiştiklerini gös-



Şek. 52

termek yetiştir (1). S_{12} , S_{13} ve S_{23} , $A_3A_4\dots A_{n+1}$, $A_2A_4A_5\dots A_{n+1}$ ve $A_1A_4A_5\dots A_{n+1}$ ($n-1$)-genlerinin Euler daireleri ve O_{12} , O_{13} ve O_{23} bunların merkezleri olsun. Bundan başka O_1 , O_2 ve O_3 de S_1 , S_2 ve S_3 dairelerinin merkezleri ve O_{123} de, $A_4A_5\dots A_{n+1}$ ($n-2$)-geninin S_{123} Euler dairesinin merkezi olsun. Bu halde Şek. 52 yi elde ederiz. Buradan $\Delta O_1 O_2 O_3 \cong \Delta O_{23} O_{13} O_{12}$ olduğunu görmek kolaydır. (Bu üçgenlerin $O_1 O_2$ ve $O_{23} O_{13}$ kenarlarının eşitliğini göstermek için $O_1 O_2 O_{12}$ ve $O_{23} O_{13} O_{123}$ üçgenlerini almak yetiştir. Bu üçgenlerde

$$O_{12}O_1 = O_{12}O_2 = O_{123}O_{23} = O_{123}O_{13} = \frac{R}{2},$$

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_1 O_{12} O_2 &= \sphericalangle O_1 O_{12} O_{123} + \sphericalangle O_{123} O_{12} O_2 \\ &= 2 \sphericalangle O_{13} O_{12} O_{123} + 2 \sphericalangle O_{123} O_{12} O_{23} \\ &= 2 \sphericalangle O_{13} O_{12} O_{23}\end{aligned}$$

ve

$$\sphericalangle O_{23} O_{123} O_{13} = 2 \sphericalangle O_{13} O_{12} O_{23}$$

dür. Bunlar $O_{12}O_{13}O_{23}$ üçgeninin dışına çizilen dairenin aynı yayını gören merkez ve çember açıları düşünülerek yazılır. Benzer şekilde $O_1O_3 = O_{23}O_{12}$ ve $O_2O_3 = O_{13}O_{12}$ olduğu gösterilebilir). $\Delta O_1O_2O_3 \cong \Delta O_{23}O_{13}O_{12}$ olduğundan ve S_{23} , S_{13} ve S_{12} dairelerinin O_{123} ortak noktasında kesişmelerinden, S_1 , S_2 ve S_3 daireleri de ortak bir noktada kesişirler.

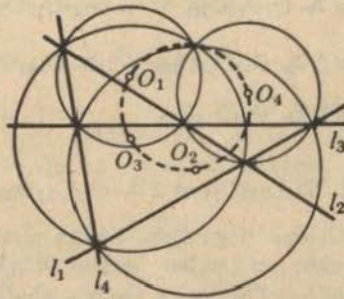
Problem 28. $A_1A_2\dots A_n$ bir S dairesinin içine çizilmiş bir n -gen olsun. Bunun ağırlık merkezinin (Misal 26 ya bak.) S in merkezi ile, n -genin Euler dairesinin merkezini birleştiren doğru parçası üzerinde bulunduğunu ve bu doğru parçasını $(n-2) : 2$ oranında böldüğünü gösteriniz (2).

(1) Zira $n \geq 5$ olmak üzere (herhangi ikisi çakışmayan) n tane daireden her hangi üçü bir noktada kesişirlerse, bütün daireler o noktada kesişirler ($n=4$ için bu doğru değildir).

(2) Bu problemin çözümü S. 63 de adı geçen I. M. Yaglom'un kitabının 2. kısmında bulunabilir (Problem 52 c nin çözümüne bakınız).

20. STEİNER DAİRELERİ. ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

MİSAL 27. 1. l_1, l_2, l_3 ve l_4 genel durumda dört doğru olsun; yani bunlardan herhangi ikisi paralel olmasın ve içlerinden seçilen herhangi üç tanesinin ortak bir noktaları bulunmasın. l_2, l_3 ve l_4 doğruları ile meydana gelen üçgenin dışına çizilen dairenin merkezi O_1 ; l_1, l_3 ve l_4 doğruları ile meydana gelen üçgenin dışına çizilen dairenin merkezi O_2 ; vs. olsun. O_1, O_2, O_3 ve O_4 noktalarından bir daire geçer. Buna l_1, l_2, l_3 ve l_4 doğrularının *Steiner dairesi* (Şek. 53) denir.



Şek. 53

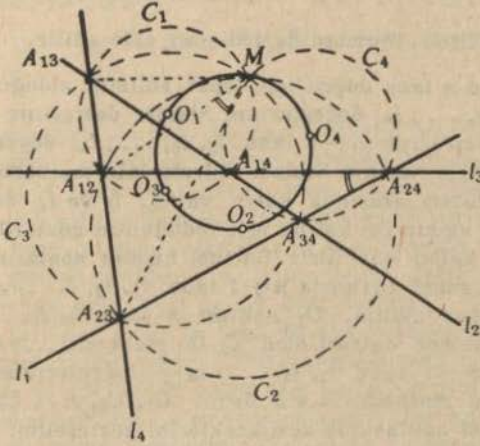
2. n tane doğrunun Steiner dairesinin tarif edilmiş olduğunu farzedelim ve $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ gibi genel durumda $n+1$ tane doğru verilmiş olsun. $l_2, l_3, \dots, l_{n+1}$ doğrularının Steiner dairesinin merkezini O_1 ile; $l_1, l_3, \dots, l_{n+1}$ doğrularının Steiner dairesinin merkezini O_2 ile; ... vs. gösterelim. Böylece elde edilen $O_1, O_2, O_3, \dots, O_{n+1}$ noktaları bir daire üzerinde bulunur. Buna $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ doğrularının *Steiner dairesi* denir.

İspat. 1. l_1, l_2, l_3 ve l_4 genel durumda dört doğru olsun

(1) İngilizce tercümesinde bu dairelere «Mean Circle» denmiştir.

(2) Bu paragraf ilk okuyuşta terkedilebilir.

(Şek. 54). l_3 ve l_4 ün kesişme noktası A_{12} l_2 ve l_4 ün kesişme noktası A_{13} ... vs. olsun. l_2 , l_3 ve l_4 doğruları ile meydana gelen üçgenin dışına çizilen C_1 dairesinin merkezine O_1 diyelim; ... böylece devam edelim. Önce C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 dairelerinin bir M



Şek. 54

noktasında kesiştiklerini gösterelim. Gerçekten, eğer M noktası C_1 ve C_2 dairelerinin (A_{12} den farklı) kesim noktası ise

$$\sphericalangle A_{13}MA_{12} = \sphericalangle A_{13}A_{14}A_{12} = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_3 \text{ arasındaki}$$

$$\sphericalangle A_{12}MA_{23} = \sphericalangle A_{12}A_{24}A_{23} = \sphericalangle l_3 \text{ ve } l_1 \text{ arasındaki}$$

dir. Bundan

$$\sphericalangle A_{13}MA_{23} = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_1 \text{ arasındaki} = \sphericalangle A_{13}A_{34}A_{23}$$

sonucu çıkar; yani, C_3 dairesi M noktasından geçer. Benzer şekilde C_4 ün de M den geçtiği gösterilir.

Şimdi O_1 , O_2 , O_3 ve O_4 noktalarının bir daire üzerinde bulunduğunu ispat edebiliriz. Aynı M noktasından geçen C_1 , C_2 ve C_3 dairelerini gözönüne alalım; C_1 ile C_3 tekrar A_{13} noktasında ve C_2 ile C_3 tekrar A_{23} noktasında kesişirler. Bunlardan

$$\sphericalangle O_1 O_3 O_2 = \sphericalangle A_{13} M A_{23} = \sphericalangle A_{13} A_{34} A_{23} \\ = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_1$$

arasındaki ⁽¹⁾ bağıntılarını elde ederiz. Benzer şekilde

$$\sphericalangle O_1 O_4 O_2 = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_1 \text{ arasındaki} = \sphericalangle O_1 O_3 O_2 \quad (1)$$

olduğunu görebiliriz. Bundan da iddiamız elde edilir.

2. İddiamızın n tane doğru için ispat edilmiş olduğunu farzedelim; $l_1, l_2, \dots, l_n$ doğrularının Steiner dairesinin üzerinde bulunan ve sırasıyla $n-1$ tane $l_2, l_3, \dots, l_n$ doğruları ile $l_1, l_3, \dots, l_n$ doğrularının Steiner dairelerinin merkezleri olan O_1 ve O_2 noktaları arasında kalan yayın, l_1 ve l_2 doğruları arasında kalan açının iki katına eşit olduğunu gösterilmiş bulunduğunu da kabul edebiliriz (birinci kısmın sonlarına bakınız). Şimdi de genel durumda $n+1$ tane $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ doğrusunu göz önüne alalım. O_1 noktası n tane $l_2, l_3, \dots, l_{n+1}$ doğrularının Steiner dairesi olan C_1 in merkezi, ...v.s olsun. O_{12} noktası, $n-1$ tane $l_3, l_4, \dots, l_{n+1}$ doğrularının Steiner dairesi G_{12} nin merkezi, ...v.s olsun. $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ dairelerinin bir M noktasında kesişeceklerini göstereyim. Gerçekten, M noktası, C_1 ve C_2 dairelerinin O_{12} noktasından farklı olan kesim noktası olsun. Bu takdirde

$$\sphericalangle O_{13} M O_{12} = \frac{1}{2} \text{ arc } O_{13} O_{12} = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_3 \text{ arasındaki}$$

$$\sphericalangle O_{12} M O_{23} = \frac{1}{2} \text{ arc } O_{12} O_{23} = \sphericalangle l_3 \text{ ve } l_1 \text{ arasındaki}$$

eşitliklerini elde ederiz ⁽¹⁾. Bundan da

$$\sphericalangle O_{13} M O_{23} = \sphericalangle l_2 \text{ ve } l_1 \text{ arasındaki} = \sphericalangle O_{13} O_{34} O_{23}$$

sonucu çıkar ⁽¹⁾. Yani C_3 dairesi M den geçer. Tamamen aynı şekilde diğer $C_4, C_5, \dots, C_{n+1}$ dairelerinin de M den geçtiğini gösterebiliriz.

C_1, C_2 ve C_3 dairelerini göz önüne alalım. O_{13} noktası C_1 ve C_3 ün ikinci kesim noktası, O_{23} de C_2 ve C_3 ün ikinci kesim noktası olsun. Bu takdirde

⁽¹⁾ Daha doğrusu bu açılar eşit veya birbirlerini bütünleyen açılardır.

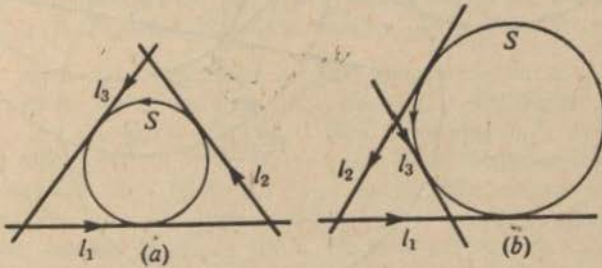
$$\begin{aligned} \angle O_1 O_2 O_3 &= \angle O_{13} M O_{23} = \angle O_{13} O_{34} O_{23} \\ &= \angle l_2 \text{ ve } l_1 \text{ in arasındaki } (1) \end{aligned}$$

dir. Tamamen benzer şekilde her hangi bir O_i noktası için ($i=4, 5, \dots, n+1$)

$$\begin{aligned} \angle O_{13} M O_{23} &= \angle l_2 \text{ ve } l_1 \text{ in arasındaki} \\ &= \angle O_{13} O_{34} O_{23} \end{aligned}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bundan da bütün $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots, O_{n+1}$ noktalarının bir daire üzerinde bulunduğu sonucunu elde ederiz.

Misal 27 deki formüllerde «dışa çizilen daireler» yerine her yerde «içe çizilen daireler» ifadesini koyabiliriz. Fakat bir üçgenin dışına çizilen daire (bütün köşelerinden geçen daire) tek olarak belirli olduğu halde içine çizilen daire (üçgenin bütün kenarlarına teğet olan daire) dört tanedir. (Üç kenardan her birine bir tane içten üç tane de dıştan teğet daire vardır.) Bu dört daireden her hangi birisi alınabileceği için bir karışıklık olabilir. Bu güçlüğü önlemek için aşağıdaki gibi hareket ederiz; *Yönlenmiş doğrular* ve daireler alalım. Her biri üzerinde hareket doğrultusunu göstermek için oklar kullanalım. Bundan başka yönlenmiş bir doğru ile yönlenmiş bir dairenin değme noktasındaki yönleri aynı ise daireye doğruya teğettir diyelim. O halde l_1, l_2 ve l_3 gibi bir noktada kesişmeyen yönlenmiş üç doğruya teğet olan *bir tek* yönlenmiş daire vardır. (Şek. 55 a, b) ve bu daire l_1, l_2, l_3 doğrularının meydana getirdiği üçgenin içine çizilen daire olacaktır.



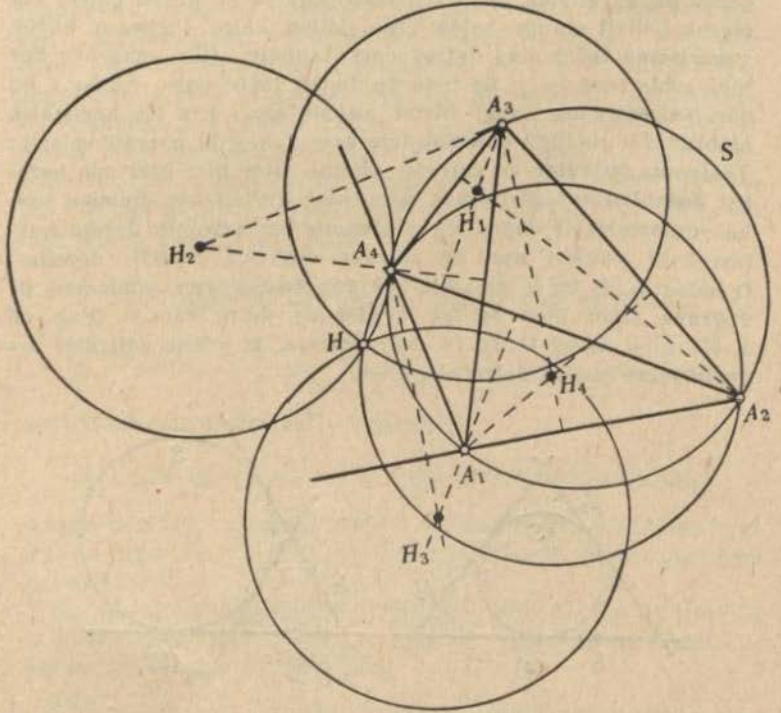
Şek. 55 a ve b

(1) Daha doğrusu bu açılar eşit veya birbirlerini bütünleyen açılardır.

Problem 29. Bir dairenin içine çizilen çokgenin ortosantrının tarifi.

1. Bir üçgenin ortosantrı, yüksekliklerinin kesim noktası olarak tarif edilir.

2. Bir S dairesi içine çizilen $A_1 A_2 \dots A_n$ n -geninin ortosantrının tarif edilmiş olduğunu ve S içine çizilmiş $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ $(n+1)$ -geninin verildiğini farzedelim. $(n+1)$ tane $A_2 A_3 \dots A_{n+1}$, $A_1 A_3 \dots A_{n+1}$, $\dots$, $A_1 A_2 \dots A_n$ çokgenlerinin ortosantrları sırasıyla $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$ olsunlar. Merkezleri $H_1, H_2, \dots, H_{n+1}$ de olan ve yarıçapları S ile aynı olan dairelerin bir H noktasında kesişecekleri ispat edilebilir. Bu noktaya $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ $(n+1)$ -geninin ortosantrı denir. (Şek. 56 da $A_1 A_2 A_3 A_4$ dörtgeninin ortosantrı gösterilmiştir).



Şek. 56

Problem 29 un çözümünü okuyucuya bırakıyoruz.

Bir daire içine çizilen çokgenlerin ortosantrilerinin bazı özellikleri üçgenlerin ortosantrilerinininkine benzer. Bu özellikleri göstermiyeceğiz; fakat (bir çokgenin ortosantrisi indüksiyon yardımı ile tarif edildiğinden) indüksiyon ile görülebilir.

21. MERKEZİ NOKTALAR VE MERKEZİ DAİRELER

Problem 30. 1. Bir birini kesen iki doğrunun kesim noktasına iki doğrunun merkezi noktası denir (Şek. 57 a).

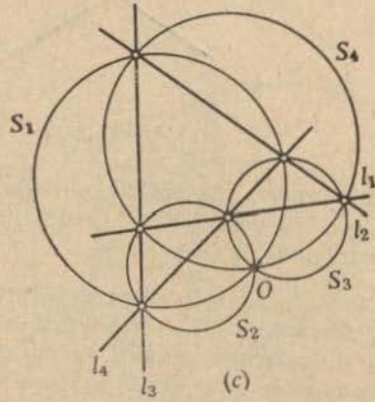
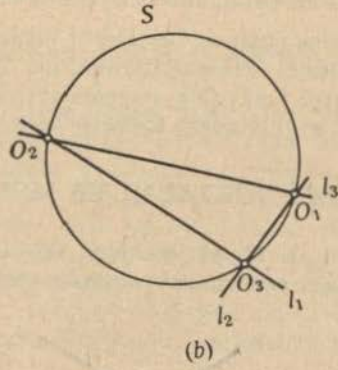


Şek. 57 a

Genel durumda üç doğrunun (Misâl 27'ye bakınız) *merkezi dairesi* diye, bu doğrulardan her çiftin merkezi noktalarından geçen daireye denir (Şek. 57 b).

Şimdi l_1, l_2, l_3 ve l_4 gibi genel durumda dört doğrunun verildiğini farzedelim. l_2, l_3, l_4 doğrularının merkezi dairesi S_1 ; l_1, l_3, l_4 doğrularının merkezi dairesi S_2 ; ... vs. olsun. S_1, S_2, S_3 ve S_4 daireleri aynı bir O noktasında kesişirler. Bu noktaya l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularının merkezi noktası denir (Şek. 57 c).

2. $2n-1$ tane doğrunun merkezi dairesiyle $2n$ tane doğrunun merkezi noktasını daha önce belirlediğimizi farzedelim ve $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ gibi $2n+1$ tane genel durumda doğru verilmiş olsun. $2n$ tane $l_2, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrularının merkezi noktası A_1 ; $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrularının merkezi noktası A_2 , ... v.s ve son olarak $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$ doğrularının merkezi noktası da A_{2n+1} olsun. Bu takdirde $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ noktaları bir daire üzerinde bulunurlar. Bu daireye $2n+1$ tane $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrularının merkezi dairesi denir.



Şek. 57 b ve c

Son olarak, $2n+2$ tane genel durumda $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ doğrularının verildiğini farzedelim. $S_1; l_2, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ doğrularının merkezî dairesi; $S_2; l_1, l_3, \dots, l_{2n+1}, l_{2n+2}$ doğrularının merkezî dairesi; ...v.s. en son S_{2n+2} de $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}$ doğrularının merkezî dairesi olsun. Bu şartlar altında $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}, S_{2n+2}$ daireleri ortak bir noktada kesişirler. Bu noktaya $2n+2$ tane $l_1, \dots, l_{2n+2}$ doğrusunun merkezî noktası denir.

Problem 31. 1. Genel durumda l_1, l_2 ve l_3 gibi üç doğru verilmiş olsun. Bu doğruların meydana getirdiği üçgenin dışına çizilen dairenin merkezine, bu üç doğrunun *merkezî noktası* denir.

Şimdi de genel durumda l_1, l_2, l_3 ve l_4 gibi dört doğru gözönüne alalım. l_2, l_3, l_4 doğrularının merkezî noktasını A_1 ile; l_1, l_3, l_4 doğrularının merkezî noktasını A_2 ile; ...v.s gösterelim. Böylece elde edilen A_1, A_2, A_3 ve A_4 noktaları bir daire üzerinde bulunurlar (yukarda Misâl 27 ye bakınız), buna l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularının *merkezî dairesi* denir.

2. Daha önceden, verilen herhangi $2n-1$ tane doğrunun merkezî noktasıyla $2n$ tane doğrunun merkezî dairesini belirlediğimizi farzedelim, ve bize genel durumda $2n+1$ tane $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrusu verilmiş olsun. $2n$ tane $l_2, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrularının merkezî dairesini S_1 ile; $l_1, l_3, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrularının merkezî dairesini S_2 ile; ...v.s; $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$ doğrularının merkezî dairesini S_{2n+1} ile gösterelim. $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$ daireleri bir noktada kesişirler, buna $2n+1$ tane $l_1, l_2, \dots, l_{2n}, l_{2n+1}$ doğrusunun *merkezî-noktası* diyeceğiz.

En son, $2n+2$ tane genel durumda $l_1, l_2, \dots, l_{2n+2}$ doğruları verilmiş olsun. $2n+1$ tane $l_2, \dots, l_{2n+2}$ doğrularının merkezî noktasını A_1 ile; $l_1, l_3, \dots, l_{2n+2}$ doğrularının merkezî noktasını A_2 ile; ...; $l_1, l_2, \dots, l_{2n+1}$ doğrularının merkezî noktasını A_{2n+2} ile gösterelim.

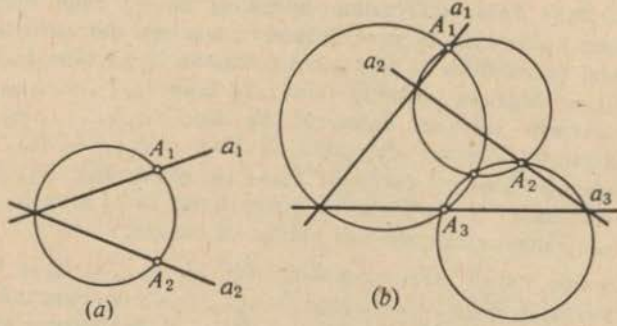
Böylece elde edilen $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$ noktaları bir daire üzerinde bulunurlar, bu daireye $2n+2$ tane $l_1, l_2, \dots, l_{2n+2}$ doğrularının *merkezî dairesi* diyeceğiz.

Yol gösterme. Buradaki iddianın ispatı tamamen problem 30 da söylenen iddianın ispatına benzer şekilde yapılır.

22. LİNEER ELEMANLAR

Bir *lineer eleman* diyince bir A noktası ile birlikte bu noktadan geçen ve doğrultusu verilmiş olan bir a doğrusunu anlıyacağız. Bir lineer eleman (A, a) sembolü ile gösterilecektir. Eğer $a_1, a_2, \dots, a_n$ doğruları genel durumda iseler (yukarda, Misâl 27 ye bakınız) ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktaları da bir daire üzerinde bulunuyorlarsa, n tane $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ lineer elemanlarına *konsiklik* denir.

Problem 32. 1. Eğer A_1 ve A_2 farklı noktalar iseler ve a_1 ile a_2 doğruları kesişiyorlarsa A_1, A_2 noktalarından ve a_1 ile a_2 nin kesiştikleri noktadan geçen daireye, (A_1, a_1) ve (A_2, a_2) lineer elemanlarının doğrultman dairesi denir; Şek. 58 a'ya bakınız. A_1, A_2, A_3 noktaları birbirinden farklı ve a_1, a_2, a_3 doğruları genel durumda olmak üzere (A_1, a_1) ve (A_2, a_2) , (A_1, a_1) ve (A_3, a_3) , ve en son (A_2, a_2) ve (A_3, a_3) gibi üç lineer eleman çifti verilmiş olsun. Bu çiftlerin doğrultman daireleri bir noktada kesişirler. Bu noktaya $(A_1, a_1), (A_2, a_2)$ ve (A_3, a_3) lineer elemanlarının doğrultman noktası denir; Şek. 58 b'ye bakınız.



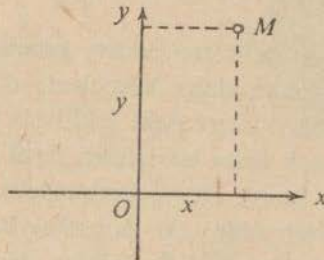
Şek. 58

2. Her hangi $2n-2$ tane konsiklik lineer elemanın doğrultman dairesinin ve $2n-1$ tane konsiklik lineer elemanın da doğrultman noktasının daha önce belirlendiğini farzedelim. $2n$ tane konsiklik lineer eleman verilmiş olsun. Bu lineer elemanlardan her $(2n-1)$ tanesinin belirlediği doğrultman noktalarını bulalım. Böylece elde edilen $2n$ tane nokta bir daire üzerinde bulunur. Buna $2n$ tane konsiklik lineer elemanın doğrultman dairesi denir. Benzer şekilde $2n+1$ tane konsiklik lineer eleman göz önüne alalım. Bunlardan her hangi $2n$ tanesinden meydana gelen parçaların her birinin doğrultman dairelerini bulalım. Böylece elde edilen $2n+1$ tane daire bir noktada kesişirler. Bu noktaya $2n+1$ tane konsiklik lineer elemanın doğrultman noktası denir.

6. Boyut Sayısı Üzerine İndüksiyon

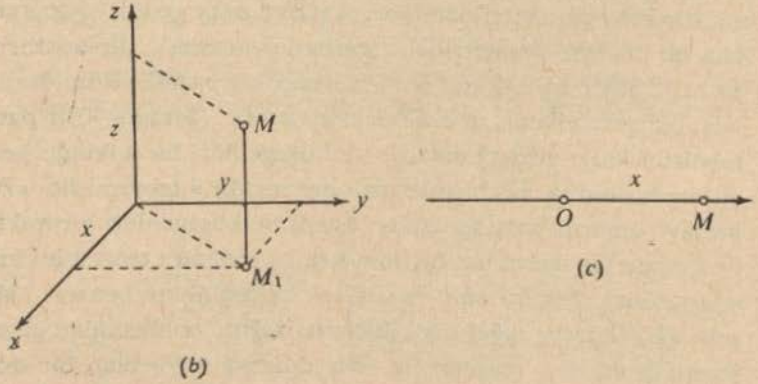
23. DEĞİŞİK BOYUTLU UZAYLAR

Bir uzay geometri dersinde ekseriya uzay geometri teoremleri ile düzlem geometrideki teoremler arasında bir benzerlik sezeriz. Şöyle ki, bir çok bakımlardan bir paralelyüzün özellikleri, bir paralelkenarın özelliklerine benzer. (Meselâ «Bir paralelyüzün karşı yüzleri denktir ve köşegenleri bu noktada kesişirler; bu nokta herbirinin orta noktasıdır.» teoremi ile «Bir paralel kenarın karşı kenarları eşittir ve köşegenleri bir noktada kesişir; bu nokta her birinin orta noktasıdır» teoremini karşılaştırınız). Bir kürenin özellikleri daireninkine benzer. (Meselâ, «Bir küreye teğet olan düzlem, değme noktasından geçen yarıçapa diktir.» teoremi ile «Bir daireye teğet olan bir doğru değme noktasından geçen yarıçapa diktir.» teoremini karşılaştırınız.) Fakat, aynı zamanda düzlem şekiller ile uzay şekillerin özellikleri arasında esaslı farklar vardır. Burada göreceğimiz en esaslı fark düzlem şekillerin iki boyutu («uzunluk» ve «genişlik») olduğu halde, uzay şekillerin üç boyutu («uzunluk», «genişlik» ve «yükseklik») vardır. Buna göre, düzlemde bir noktanın durumu, x ve y gibi iki koordinat ile tamamen belirlendiği halde (Şek. 59 a) uzayda bir noktanın



Şek. 59 a

yerini belirlemek için x , y ve z gibi üç koordinat gereklidir (Şek. 59 b). Bundan dolayı adı uzaya ekseriya *üç boyutlu*



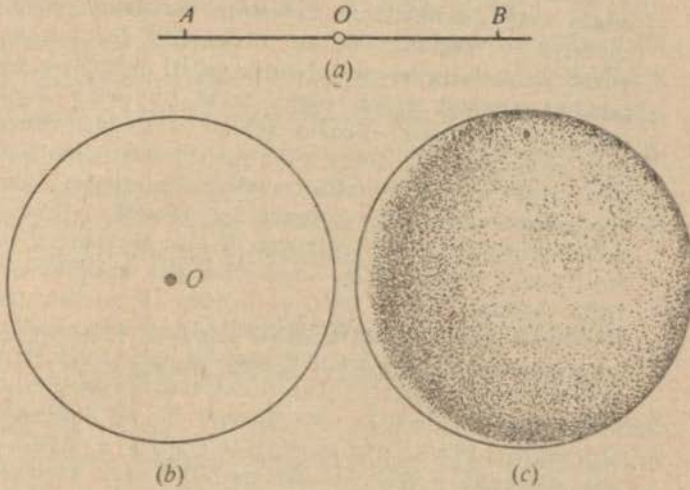
Şek. 59 b ve c

uzay, düzleme de *iki boyutlu uzay* denir. Bu terim daha da genişletilebilir. Bir doğru üzerindeki bir noktanın durumu bir tek x koordinatı ile tamamen belirlenir (Şek. 59 c); çünkü bir doğru üzerinde bütün şekillerin (doğru parçalarının) yalnız bir boyutları («uzunluk») vardır. Bu sebepten bir doğruya *bir boyutlu uzay* denir; şühalde bir uzayın boyut sayısı bir, iki veya üç olabilir.

Uzay geometrideki teoremler, genellikle düzlem geometrideki karşıtlarından daha karışıktır; düzlem şekillerin özellikleri ise bir doğru üzerindeki şekillerin (doğru parçalarının) özelliklerinden çok daha karışıktır. Aynı zamanda «üç - boyutlu» teoremlerin (yani, uzay geometrideki teoremlerin) ispatları, ekseriya karşıtı olan «iki - boyutlu» ifadenin (yani, düzlem geometrideki ifadenin) doğruluğuna dayanır. Meselâ, bir paralel yüzün köşegenlerinin ortak kesişme noktasında birbirlerini ortadıklarının ispatı bir paralel kenarın buna karşıt olan özeliği kullanılarak yapılır. Bazan da «iki - boyutlu» teo-

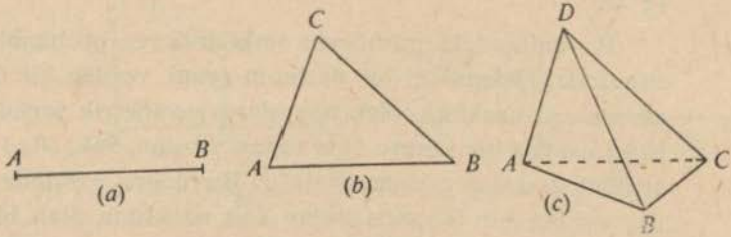
remlerin ispatları bir-boyutlu benzer teoremin ispatı esas alınarak yapılabilir. Bu bağlantılar, bazı geometrik problemlerde, *boyut sayısı üzerine indüksiyon* yapılmasını mümkün kılar. Şöyle ki, ifadenin bir-boyutluda doğru olması kullanılarak iki-boyutluya ve bundan üç-boyutlu uzaya geçilir. Buna ait misaller bu bölümde verilecektir. Boyut sayısı üzerindeki indüksiyon ekseriya adı indüksiyon ile beraber kullanılır, ve bazan adı indüksiyon onun yerine kullanılabilir (§ 26).

Bu bölümdeki misallerin tetkikinde ve problemlerin çözümünde düzlemdeki bir dairenin (yani, verilen bir O noktasından eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yerinin, (Şek. 60 *b*) uzayda bir küreye (bir topun yüzüne, Şek. 60 *c*) tekabül ettiğini hatırdan çıkarmamalıdır. Bir doğru üzerinde bu özellik, verilen bir O noktasından eşit uzaklıkta olan bir nokta çiftine tekabül eder (Şek. 60 *a*); düzlemde dairesel bir disk, uzayda içi dolu bir küreye ve bir doğru üzerinde bir doğru



Şek. 60

parçasına tekabül eder. Nihayet, düzlemdeki bir ABC üçgeni (Şek. 61 b) uzayda bir dörtyüzlüye (yani, A, B, C ve D gibi dört köşesi bulunan herhangi bir üçgen piramide Şek. 61 c) ve doğru üzerinde A ve B gibi iki «köşe» si bulunan bir AB doğru parçasına (Şek. 61 a) tekabül eder.



Şek. 61

Şunu da kaydetmeliyiz ki, düzlem geometride verilen bir teoremin uzay geometrideki karşınının ne olduğu sorusunun cevabı ekseriya tek değildir. Bazan düzlemdeki bir üçgene bir dörtyüzlü (daha fazla boyutu olan bir şekil) değil gene aynı üçgeni tekabül ettirmek uygun olur; fakat bu sefer üçgen uzayda gözönüne alınmıştır. Benzer şekilde düzlemde alınan bir doğruya uzayda ya bir doğru veya bir düzlem tekabül eder. Böylece, aynı bir iki boyutlu teoremin karşılıkları olarak farklı «üç-boyutlu» teoremler bulunabilir. Meselâ, «Düzlemde bir M noktasının, merkezi O , yarıçapı R olan bir dairenin içine çizilen düzgün bir n -genin köşelerine olan uzaklıklarının karelerinin toplamı $n(R^2 + OM^2)$ ye eşittir» teoremine uzay geometride aşağıdaki iki teorem tekabül eder: «Uzayda bir M noktasının, merkezi O , yarıçapı R olan bir daire içine çizilen düzgün bir n -genin köşelerine olan uzaklıklarının karelerinin toplamı $n(R^2 + OM^2)$ ye eşittir.» ve «Uzayda bir M noktasının merkezi O , yarıçapı R olan bir küre içine çizilen, n köşeli düzgün bir çok yüzlünün köşelerine olan uzaklıklarının karelerinin toplamı $n(R^2 + OM^2)$ ye eşittir»; bu teoremlerden her ikisi de doğrudur ve her ikisi de tekabül eden «iki boyutlu» teoremlerden boyut sayısı üzerine indüksiyon tatbik etmekle elde edilir. Burada teferruat ile daha fazla meşgul olmayacağız. «Bir boyutlu» teoremlerden «iki-boyutlu» ve «üç-boyut» lulara geçişin kar-

sılaştırmasını okuyucuya bırakıyoruz. Meselâ, aşağıdaki 29 ve 37 inci misaller birbirleri ile 35 ve 36 inci misaller de birbirleri ile karşılaştırılabilir.

Bu bölümde, boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak hesaplamalar, boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak ispatlar, boyut sayısı üzerine indüksiyon yapılarak geometrik yerlerin belirlenmesi ve boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak yapılan tarifler gözönüne alınacaktır. Boyut sayısı üzerine indüksiyon kullanılarak çözülen çizim problemleri gözönüne almadık, çünkü uzayda bir çok çizim problemleri yeter şekilde iyi tarif edilmiş değildir. Her nekad, ekseriya tekabül eden «iki-boyutlu» (düzlem) hal daha enteresan ise de, bütün hallerde «üç-boyutlu» (uzay geometrideki) ifadeler esas alınmıştır; bu hallerde, yalnız iki boyuttan, üç boyutlu hale geçilebilenler nazarı itibara alınacaklar; fakat bütün teferruat gözönüne alınmayacaktır.

Modern matematik ve fizikte n -boyutlu uzay kavramı esaslı bir rol oynar, bu uzayda bir nokta n tane koordinatı ile belirtilir; burada n herhangi bir pozitif tam sayıdır; özellikle n , üçten büyük olabilir. n -boyutlu uzayda şekillerin özellikleri ekseriya, uzayın boyut sayısını üzerine matematiksel indüksiyon yapılarak gösterilir; özel olarak bu metod ile, bu bölümde elde edilen bütün sonuçlar n -boyutlu uzaya genişletilebilir. Fakat bu iş bu kitabın sınırını aşmaktadır.

24. BOYUT SAYISI ÜZERİNE İNDÜKSİYON KULLANILARAK HESAPLAMA

MİSAL 28. «Genel durumda» olan (yani herhangi üçü ortak bir noktada kesişen, fakat herhangi dört tanesinin ortak bir noktası bulunmayan) n tane düzlem uzayı kaç parçaya ayırır?

Aşağıdaki problemler dizisini çözelim :

A. Bir doğrunun n tane nokta ile kaç parçaya ayrılacağını belirleyiniz.

ÇÖZÜM. $F_1(n)$ parçaların sayısını gösterebilir; aşikâr olarak $F_1(n) = n + 1$ dir.

B. «Genel durumda» olan (herhangi bir çifti kesişen, fakat üçer üçer ortak bir noktaları bulunmayan) n tane doğru düzlemi kaç parçaya ayırır?

ÇÖZÜM. 1. Bir doğru düzlemi iki parçaya ayırır.

2. Genel durumda olan n tane doğrunun, düzlemde ayırdığı parça sayısı $F_2(n)$ i bildiğimizi farzedelim; ve genel durumda $n + 1$ tane doğru alalım. Bu doğrulardan ilk n tanesi düzlemi $F_2(n)$ parçaya ayırır; $(n + 1)$ inci l doğrusu, verilen şartlara göre, diğer n doğruyu n farklı noktada keser; bu noktalar l doğrusunu $F_1(n) = n + 1$ parçaya ayırır. (A ya bakınız.) Buna göre, l doğrusu, düzlemin evvelce elde ettiğimiz parçalarından $n + 1$ tanesini keser; Ohalde $F_2(n)$ tane olan parça $F_1(n)$ tane daha artar. Yani

$$F_2(n + 1) = F_2(n) + F_1(n) = F_2(n) + (n + 1) \quad (13)$$

dir. (13) eşitliğinde n yerine sıra ile $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ koyalım.

$$F_2(n) = F_2(n - 1) + n,$$

$$F_2(n - 1) = F_2(n - 2) + (n - 1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_2(3) = F_2(2) + 3$$

$$F_2(2) = F_2(1) + 2$$

elde ederiz. Bütün bu eşitlikleri toplayalım; $F_2(1) = 2$ olduğundan

$$F_2(n) = F_2(1) + [n + (n - 1) + \dots + 2]$$

$$= 1 + [n + (n - 1) + \dots + 2 + 1]$$

ve son olarak

$$F_2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

bulunur. (Girişteki (2) formülüne bakınız).

C. Bu misalde başlangıçta verilen problem.

ÇÖZÜM. 1. Bir düzlem uzayı iki parçaya ayırır.

2. Genel durumda n tane düzlemin, uzayda ayıracakları parçaların sayısı $F_3(n)$ i bildiğimizi farzedelim ve genel durumda $n+1$ tane düzlem alalım. Bunlardan ilk n tanesi uzayı $F_3(n)$ parçaya ayırır; $(n+1)$ inci π düzlemi bu n düzlem ile genel durumda n tane doğru boyunca kesişir, bu doğrular onu $F_2(n) = (n^2 + n + 2)/2$ parçaya ayırır. (B kısmına bakınız). Buna göre

$$\begin{aligned} F_3(n+1) &= F_3(n) + F_2(n) \\ &= F_3(n) + \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

eşitliği elde edilir. (14) eşitliğinde n yerine $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ koyarak

$$\begin{aligned} F_3(n) &= F_3(n-1) + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2}, \\ F_3(n-1) &= F_3(n-2) + \frac{(n-2)^2 + (n-2) + 2}{2} \\ &\dots \dots \dots \\ F_3(3) &= F_3(2) + \frac{2^2 + 2 + 2}{2} \\ F_3(2) &= F_3(1) + \frac{1^2 + 1 + 2}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Bütün bu eşitlikler toplanarak

$$F_3(n) = F_3(1) + \frac{1}{2} [(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2] \\ + \frac{1}{2} [(n-1) + (n-2) + \dots + 1] + \frac{1}{2} \underbrace{[2 + \dots + 2]}_{(n-1) \text{ tane terim}}$$

elde edilir; bundan da, Girişteki (2) ve (3) eşitlikleri ve $F_2(1) = 2$ olduğu gözönüne alınarak

$$F_3(n) = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{4} + (n-1) \\ = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

bulunur.

Problem 33 İkişer ikişer kesişen n tane küre, uzayı kaç parçaya ayırır ?

Yol gösterme. Aşağıdaki problemler dizisini göz önüne alalım:

A. Bir doğru, n tane «bir boyutlu daire» ile yani n tane nokta çifti ile kaç parçaya ayrılır (Paragraf 23 e bakınız)?

Cevap. $2n$ tane nokta doğruyu $2n+1$ parçaya ayırır.

A'. Bir dairede, kendi üzerinde bulunan n tane nokta çiftinin ayırdığı parçaların sayısı $\Phi_1(n)$ i bulunuz.

Cevap. $\Phi_1(n) = 2n$.

B. Bir düzlemde, ikişer ikişer kesişen n tane dairenin ayırdığı parça sayısı $\Phi_2(n)$ 'i bulunuz.

ÇÖZÜM. Dairelerden n tanesi $(n+1)$ inci daireyi n çift noktada keserler. Bunun neticesi olarak, onu $\Phi_1(n) = 2n$ parçaya ayırırlar (A' kısmına bakınız); O halde $(n+1)$ inci daire, n dairenin düzlemde ayırdığı $\Phi_2(n)$ tane parçadan $\Phi_1(n) = 2n$ tanesi ile kesişir. Buradan

$$\Phi_2(n+1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) \\ = \Phi_2(n) + 2n$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri ve $\Phi_2(1) = 2$ olduğunu kullanarak

$$\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$$

bulunur.

B'. Bir kürenin yüzeyi, bu küre üzerinde bulunan ve ikişer ikişer kesişen dairelerle kaç parçaya ayrılır?

Cevap. $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ parçaya ayrılır.

C. İlk problem.

ÇÖZÜM. n küre $(n+1)$ inci ile n tane daire boyunca kesiştiğinden, onun yüzeyini $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ parçaya ayırırlar (B' kısmına bakınız). O halde ikişer ikişer kesişen küreler uzayı $\Phi_3(n)$ parçaya ayırırsa $(n+1)$ tane küre uzayı

$$\begin{aligned}\Phi_3(n+1) &= \Phi_3(n) + \Phi_2(n) \\ &= \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)\end{aligned}$$

parçaya ayırır. Bundan ve $\Phi_3(1) = 2$ olduğundan faydalanarak

$$\Phi_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}$$

bulunur.

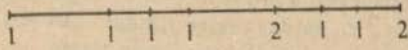
25. BOYUT SAYISI ÜZERİNE İNDÜKSİYON KULLANILARAK YAPILAN İSPATLAR

MİSAL 29. Köşeleri 1, 2, 3 ve 4 rakamları ile numaralanmış bir dört yüzlüyü daha küçük dört yüzlülere parçalıyalım. Öyle ki, bu bölünme sonunda elde edilen dörtyüzlülerden herhangi bir çiftin ya hiç ortak noktaları bulunmasın veya bir köşeleri, veya bir kenarları (bir kenarın bir parçası değil), veya bir yüzleri (bir yüzün bir parçası değil) ortak olsun. Bu şekilde elde edilen küçük dörtyüzlülerden her birinin köşelerini 1, 2, 3 ve 4 rakamları ile numaralayalım. Bundan başka, büyük dörtyüzlünün bir yüzü üzerinde bulunan bütün köşeler, o yüzün köşelerindeki rakamları kullanarak, ve büyük dörtyüzlünün bir kenarı üzerinde bulunan köşeler de, bu kenarın iki ucunun numaraları yardımı ile numaralansın. En

az bir dörtyüzlünün bütün köşelerinin farklı numaralar taşıyacağını gösteriniz.

Aşağıdaki problemler dizisini gözönüne alalım.

A. Uçları 1 ve 2 ile numaralanmış bir doğru parçası, birbirleri ile kesişmeyen, bir çok küçük parçalara bölünsün ve bu bölüm noktaları 1 veya 2 rakamları ile numaralansın (Şek. 62 a). Bu bölünmede hiç olmazsa bir doğru parçasının iki ucunun farklı rakamlarla numaralanacağını gösteriniz.



Şek. 62 a

İspat. 12 şeklinde numaralanmış doğru parçalarının sayısının tek olduğunu gösterelim; buradan, bu şekilde enaz bir doğru parçası olduğu sonucunu elde ederiz. (Çünkü sıfır çift bir sayıdır). Bölünmedeki 1'lerin sayısı k olsun, ve A , 1 ile numaralanmış doğru parçalarının uçlarının sayısı olsun. A sayısının tek olduğu aşikârdır. Çünkü 1'lerden herbiri ilk doğru parçasının bir iç noktası olduğundan bölünmede iki doğru parçasının uç noktası olur, yalnız bir tane 1 bir tek doğru parçasına aittir; o da ilk doğru parçasının ucunda olandır; Ohalde

$$A = 2k + 1$$

dir. Diğer taraftan bölünmede 11 şeklinde numaralanmış doğru parçalarının sayısını p ile, 12 şeklinde numaralanmış olanların sayısını da q ile gösterirsek, 1 ile numaralanmış uçların sayısı

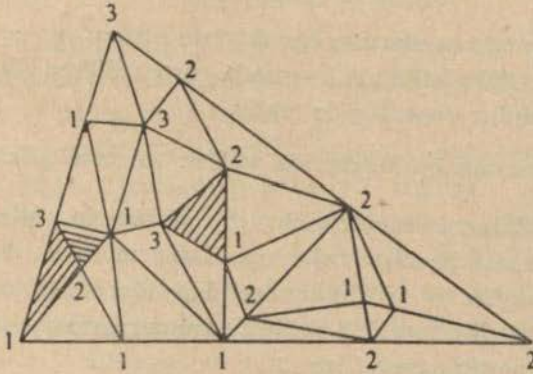
$$A = 2p + q$$

olacaktır.

$$2k + 1 = 2p + q$$

eşitliğinden q nün tek olduğu bulunur.

B. Köşeleri 1, 2 ve 3 ile numaralanmış olan bir üçgen, küçük üçgenlere aşağıdaki şekilde parçalanabilir : Bu bölünme sonucunda elde edilen üçgenlerden herhangi iki tanesinin ya hiç ortak noktası yoktur, veya ortak bir köşeleri, veya (ortak bir kenarın parçası değil, fakat) ortak bir kenarları bulunur. Parçalanma sonucunda elde edilen bütün üçgenlerin köşeleri 1, 2 ve 3 rakamları ile numaralanır. Bundan başka, büyük üçgenin herhangi bir kenarı üzerinde bulunan köşeler, bu kenarın iki ucundaki rakamlardan biri ile numaralanır (Şek. 62 b). Bu bölünmede en az bir üçgenin bütün köşelerinin farklı rakamlarla numaralanacağını gösteriniz (Şek. 62 b de taranmış olan üçgenler).



Şek. 62 b

İspat. 1, 2, 3 ile numaralanmış olan üçgenlerin sayısının tek olduğunu göstereyim. Bunun için, bu bölünmede 1, 2 şeklinde numaralanmış bütün üçgen kenarlarının sayısını A ile gösterelim. Bunlardan büyük üçgenin tamamen içinde kalanların sayısını k ile, büyük üçgenin 12 şeklinde numaralanmış kenarı üzerinde bulunanların sayısını l ile göstereyim. (Büyük üçgenin diğer iki kenarı üzerinde 1, 2 şeklinde numaralanmış parça bulunmaz.) k tane doğru parçasından her biri bölün-

medeki iki üçgene ve l tane doğru parçasından her biri de bölünmede bir tek üçgene ait olduğundan

$$A = 2k + l$$

dir.

Diğer taraftan, bölünmede köşeleri 1 2 2 veya 1 2 1 şeklinde numaralanmış üçgenlerin sayısı p , köşeleri 1 2 3 olan üçgenlerin sayısı da q olsun. p tane üçgenden herbirinin 1 2 şeklinde numaralanmış iki kenarı q tane üçgenden herbirinin de bu şekilde numaralanmış bir kenarı olacağından

$$A = 2p + q$$

dür.

$$2k + l = 2p + q$$

eşitliğinden q ve l sayılarının her ikisinin birden tek veya çift olması icab ettiği görülür. A kısmında gösterildiğine göre l sayısı tek olmalıdır; ohalde q de tektir.

C. Bu misalin başlangıcında verilen teoreme gelelim.

İspat. Bölünme ile elde edilen dörtyüzlülerin yüzlerinden 1, 2, 3 rakamları ile numaralanmış olanların sayısı A olsun. Bunlardan büyük dörtyüzlünün içersine düşenlerin sayısı k , büyük dörtyüzlünün 1, 2, 3 şeklinde numaralanmış yüzünün üzerine düşenlerin sayısı l ise

$$A = 2k + l$$

dir.

Diğer taraftan, bölünmede 1 1 2 3 veya 1 2 2 3 veya 1 2 3 3 şeklinde numaralanmış dörtyüzlülerin sayısı p , 1 2 3 4 şeklinde numaralanmış dörtyüzlülerin sayısı q olsun. Bu takdirde

$$A = 2p + q$$

olduğu aşikârdır.

$$2k + l = 2p + q$$

eşitliğinden q ve l sayılarının her ikisinin de aynı zamanda tek veya çift olacağı görülür. Fakat teoremin B de ispat edilen kısmına göre l sayısı tekdir; o halde q de tekdir.

26. ADİ İNDÜKSİYON YARDIMI İLE İSPAT

23. Paragrafta boyut sayısı üzerine yapılan indüksiyonun bazan bayağı indüksiyon yerinde kullanılabileceğine işaret etmiştik. Şimdi buna bir kaç misal verelim.

MİSAL 30. Misal 29 A da verilen teoremi, bölünmede elde edilen doğru parçalarının r sayısı üzerine indüksiyon yaparak ispat ediniz.

İspat. 1. $n = 1$ için önerme aşikârdır.

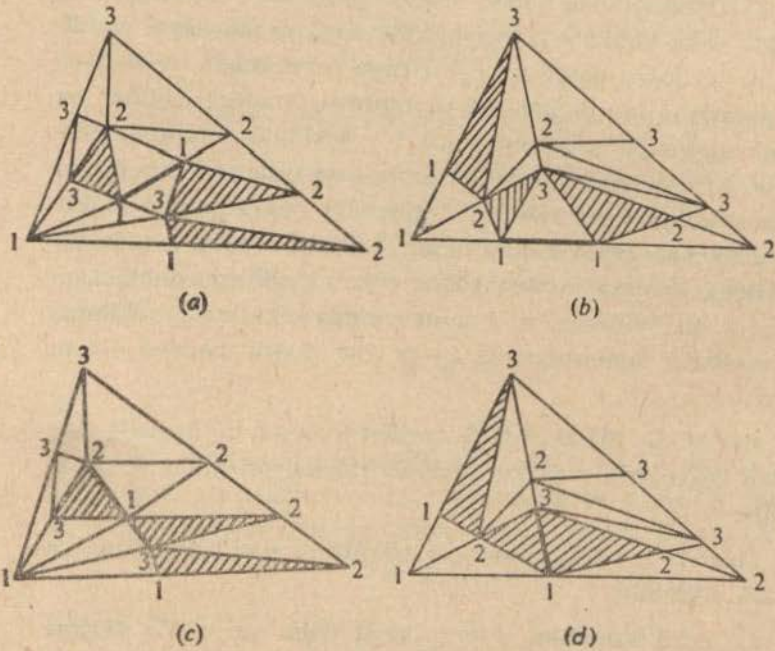
2. Önermemizin alınan doğru parçasının herhangi bir şekilde daha küçük n parçaya bölündüğü zaman ispat edildiğini ve 12 doğru parçasını $n + 1$ tane daha küçük doğru parçasına ayıran bir parçalama yaptığımızı farzedelim. Eğer bu küçük doğru parçalarının hepsi 12 şeklinde numaralanmışsa, her iki ucu da aynı rakamla numaralanmış bir doğru parçası bulabiliriz; meselâ 1 1 gibi. Bu doğru parçasını bir nokta kalacak şekilde daraltırsak, 12 doğrusunun n tane daha küçük parçaya ayrılışını elde ederiz. İndüksiyon hipotezi-ne göre bu bölünme, ve bunun sonucu olarak ilk bölünme, 12 şeklinde numaralanmış en az bir doğru parçası ihtiva eder.

MİSAL 31. Misal 29 B de verilen teoremi, bölünmede elde edilen üçgenlerin n sayısı üzerine indüksiyon yaparak ispat ediniz.

İspat 1. $n = 1$ için önerme aşikârdır; $n = 2$ için kolayca tahkik edilebilir.

2. 1 2 3 üçgeninin n tane veya daha az sayıda üçgene parçalandığı herhangi bir bölünmede önermemizin doğ-

ru olduğunu kabul edelim ve üçgeni $n + 1$ tane üçgene parçaladığımızı farzedelim. Eğer bu üçgenlerin hepsi 1 2 3 şeklinde numaralanmamış ise bazı üçgenlerin iki köşesi aynı numarayı, meselâ 1 1 kenarı ya (bu kenar büyük üçgenin içinde ise Şek. 63 a) bölünmede elde edilen üçgenlerden ikisinin kenarındır, veya (bu kenar büyük üçgenin kenarında ise Şek. 63 b) yalnız bir üçgene aittir. 1 1 doğru parçasını küçültürsek bir noktaya indirirsek 1 2 3 üçgeninin (birinci halde Şek. 63 c) $n - 1$ tane üçgene yeni bir parçalanışını, veya (ikinci halde Şek. 63 d) n tane üçgene yeni bir parçalanışını elde ederiz. İndüksiyon hipotezine göre bu parçalanışta (ve dolayısı ile ilk parçalanışta) köşeleri 1 2 3 numaralarını taşıyan en az bir üçgen vardır.



Şek. 63

Problem 34. Misal 29 C deki teoremi, parçalanıştaki dört-yüzlülerin n sayısı üzerine indüksiyon yaparak ispat ediniz.

Yol gösterme. İspat, misal 31 deki önermenin ispatının benzeridir.

Misal 29 daki teorem çok daha açık olarak verilebilir. Köşeleri 1 2 3 4 ile numaralanmış dörtyüzlüde bir «yönlenme» yapalım: şöyle ki 1, 2, 3 yüzlerinde 1 köşesinden 2 ye, ondan da 3 köşesine giden dönme, 4 köşesinden bakıldığı zaman saatin dönme yönünde görülen dörtyüzlüler ile saatin dönme yönünün aksi yönde görülen dörtyüzlüler farklı yönlerde ol-
sunlar. Buna göre aşağıdaki teorem doğrudur.

Problem 35. Misal 29 daki şartlar altında, bölünmede elde edilen 1, 2, 3, 4 şeklinde numaralanmış dörtyüzlülerden büyük dörtyüzlü ile aynı yönde olanların sayısının, aksi yönde olanların sayısından tam bir fazla olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme. Aşağıdaki problemler dizisini gözönüne alalım.

A. Misal 29 A daki şartlar altında 12 doğru parçalarından, 1 köşesinden 2 köşesine giden yönleri büyük doğru parçası ile aynı olanlarla, bu yönleri büyük doğru parçasınınaki ile ters olanları farklı kabul edelim. Birinci tipteki doğru parçalarının sayısının, ikinci tipteki doğru parçalarının sayısından bir fazla olduğunu ispat ediniz.

B. 1, 2, 3 üçgeninde (Misal 29 B ye bakınız) 1 köşesinden 2 köşesine, ondan da 3 köşesine giden yön saatin dönme yönünde ise, (veya saatin dönme yönünün aksi yönde ise) üçgen saatin dönme yönünde (veya saatin dönme yönünün aksi yönde) yönlenmiştir diyelim. Bölünmede 1 2 3 şeklinde numaralanmış olan üçgenler içersinde büyük üçgen ile aynı yönde olanların sayısının, geriye kalanların sayısından tam bir fazla olduğunu gösteriniz.

C. Bu problemin başında ifade edilen teorem.

MİSAL 32. Uzayda, herhangi dört tanesinin ortak bir noktası bulunan, n tane içi dolu küre verilmiş olsun. Bu kürelerin hepsinin kesiştiğini, yani bu kürelerin hepsine birden ait olan en az bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki problemler dizisini gözönüne alalım :

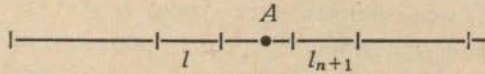
A. Bir doğru üzerinde, herhangi ikisi kesişen (iç içe giren), n tane doğru parçası verilmiş olsun. Bu doğru parçalarının birbirleri ile kesiştiklerini, yani bu doğru parçalarının hepsi üzerinde bulunan en az bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.

İspat. 1. $n = 2$ için önerme doğrudur.

2. Lâlettâyin seçilmiş, herhangi n tane doğru parçası için önermemizin ispat edilmiş olduğunu kabul edelim ve bir doğru üzerinde bulunan ve herhangi ikisi kesişen $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ gibi $n + 1$ tane doğru parçasının verildiğini farzedelim. İndüksiyon hipotezine göre n tane doğru parçası olan

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

kesişirler. Bu doğruların ortak kısmını l ile gösterelim. (Bu ortak kısmın bir nokta veya bir doğru parçası olacağı aşîkârdır.) l_{n+1} ile gösterdiğimiz doğru parçasının l 'yi kestiğini ispat edelim. Böyle olmadığını farzedelim; o zaman, l_{n+1} ile l arasında bir A noktası bulunacaktır (Şek. 64 a). Fakat



Şek. 64 a

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

doğru parçalarından her biri l yi ihtiva eder ve kabulümüze göre l_{n+1} ile kesişir; bunun neticesi olarak, A noktası bu doğru parçalarından her birinin üzerinde bulunur. Ohalde A nok-

tası l 'ye aittir. Elde edilen bu çelişme l_{n+1} ile l 'nin kesiştiğini gösterir; ortak kısımları, verilen

$$l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$$

doğru parçalarının hepsine aittir.

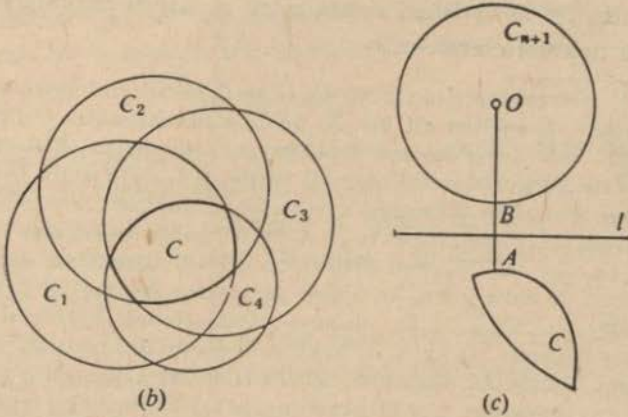
B. Düzlemde, üçer üçer kesişen, n tane dairesel disk verilmiş olsun. Bu dairesel disklerin en az bir ortak noktalarının bulunduğunu gösteriniz.

İspat : 1. $n = 3$ için önerme doğrudur.

2. Herhangi n tane dairesel disk için önermemizin ispat edildiğini kabul edelim ve düzlemde $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ gibi n tane dairesel diskin verildiğini farzedelim. İndüksiyon hipotezine göre n tane

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

dairesel diskleri kesişirler. Bunların ortak kısmını C ile gösterelim (Şek. 64 b). («Dairesel çokgen» C , bütün bir diskten veya yalnız bir tek noktadan ibaret olabilir). C şekli ile C_{n+1}



Şek. 64 b ve c

dairesel diskinin kesiştiklerini göstermeliyiz. Bunun olmadığını kabul edelim; Ohalde C_{n+1} dairesel diski ile C şeklini ayıran bir l doğrusu çizmek mümkündür. Meselâ, C_{n+1} dairesel diskinin merkezi O noktası ile C şeklinin, O ya en yakın noktası olan A noktasını birleştiren doğruya, (B noktası, OA doğru parçasının C_{n+1} dairesel diskinin çemberini kestiği nokta olmak üzere) AB doğru parçasının orta noktasından çizilen dikme böyle bir doğrudur (Şek. 64 c) ⁽¹⁾.

$C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesel disklerinden her biri C şeklini ihtiva ettiği ve kabulümüze göre her biri C_{n+1} ile kesiştiği için tabii her biri l doğrusu ile de kesişir. C_1 dairesel diskinin l doğrusunu kestiği parçayı a_1 , C_2 nin bu doğruyu kestiği parçayı a_2 , ... v.s. ile göstereyim. Böylece l doğrusu üzerinde $a_1, a_2, \dots, a_n$ gibi n tane doğru parçası elde ederiz. Bu doğru parçalarından herhangi ikisi kesişir. Gerçekten, bunlardan iki tanesini, meselâ a_1 ve a_2 yi gözönüne alalım. C şeklinin herhangi bir noktası M olsun (Ohalde M noktası C_1 ve C_2 dairesel disklerinin her ikisine de ait olacaktır). Diğer taraftan, verilen dairesel disklerden seçilen herhangi üç tanesi kesiştiği için C_1, C_2 ve C_{n+1} in ortak bir N noktası vardır. MN doğru parçasının bütününü C_1 ve C_2 dairesel disklerinin üzerinde bulunur; ohalde l doğrusu ile kesiştikleri nokta a_1 ve a_2 doğru parçalarının bir ortak noktası olacaktır.

(1) Gerçekten, l doğrusu C_{n+1} ve C şekillerini ayırmasa idi, üzerinde C şekline ait bir K noktası bulunacaktı. OAK üçgeninde, OAK açısı dar açı olacaktır; bundan başka A noktasının tarifine göre $OA = OK$ dır. O halde AK doğrusuna O noktasından indirilen dikmenin ayağı olan L noktası A ve K noktaları arasında bulunacaktır. A ve K noktalarının her ikisi de $C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesel disklerine ait olduklarından AK doğru parçası ve buna göre, bu doğru parçasının üzerindeki L noktası da bu $C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesel disklerinden herbirinin üzerinde bulunur. O halde L noktası C ye aittir. Bunun neticesi olarak $OL \geq OA$ olmalıdır. Elde edilen bu çelişme («yükseklik bir yan kenardan büyük veya ona eşit») önermemizi ispat eder.

A da verilen teoreme göre, l doğrusu üzerinde $a_1, a_2, \dots, a_n$ doğru parçalarının hepsine ait olan bir nokta vardır. Bu nokta $C_1, C_2, \dots, C_n$ dairesel disklerinin hepsinin ve bunun neticesi olarak C şeklinin bir noktası olacaktır; bu ise l doğrusunun çizilişine aykırıdır. Ohalde C_{n+1} ve C şekillerinin en az bir ortak noktaları olmalıdır; bu nokta $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ dairesel disklerinin ortak noktası olacaktır.

C. Bu misalin başında verilen teorem.

İspat. 1. $n = 4$ için önerme aşikârdır.

2. Önermemizin verilen herhangi n tane küre için ispat edilmiş olduğunu farzedelim, ve bize

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$$

gibi $n + 1$ tane küre verildiğini kabul edelim. Bunlardan

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

gibi n tanesinin arakesiti Φ ile gösterilsin (indüksiyon hipotezine göre bu arakesit mevcuttur). Tamamiyle misal 32 B de yapılabilecek şekilde, Φ_{n+1} küresi Φ ile kesişmezse, Φ_{n+1} ve Φ yi ayıran bir π düzleminin bulunacağı gösterilebilir.

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

kürelerinin π düzlemi ile arakesitleri olan şekiller dairelerdir ve herhangi üç tanesi birbirleri ile kesişir. Buna göre π düzlemi üzerinde bütün bu dairelere ve bunun neticesi olarak Φ ye ait olan bir nokta vardır. Fakat bu π düzleminin tarifi ile bir çelişme teşkil eder.

Misal 32 deki teorem, boyut sayısı üzerinde indüksiyon yapılacak yerde, doğrudan doğruya şekillerin sayısı üzerinde indüksiyon yapmakla da ispat edilebilir.

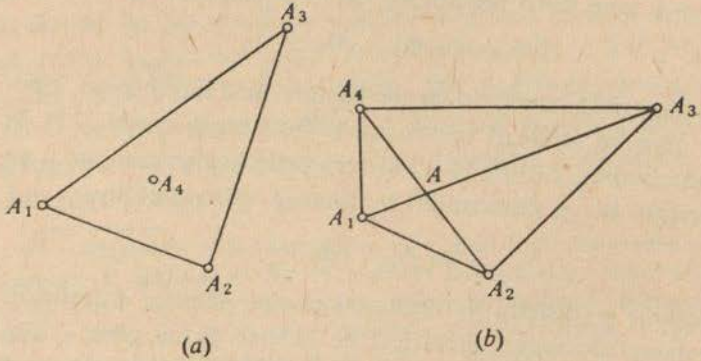
MİSAL 33. Misal 32 B deki teoremi dairesel disklerin sayısı üzerinde indüksiyon yaparak ispat ediniz.

İspat. «Dairesel çokgenler» yani, sonlu sayıda daireysel disklerin kesişimleri ile elde edilen şekiller için benzer teoremi ispat edelim. Bundan, özel hal olarak, bizim ilk önermemiz bulunur.

1. $n = 3$ için önerme aşikârdır.

Üçer üçer kesişen C_1, C_2, C_3 ve C_4 gibi dört tane daireysel çokgenin verildiğini farzedelim. C_2, C_3 ve C_4 şekillerinin ortak bir noktasını A_1 ile, C_1, C_3 ve C_4 şekillerinin ortak bir noktasını A_2 ile, ..., v.s. gösterelim. İki hal mümkündür.

(a) A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarından bir tanesi, meselâ A_4 , diğer üç noktanın meydana getirdiği üçgene aittir (Şek. 65 a). Ohalde, $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin tamamı C_4 de bulunduğuundan, A_4 noktası da C_4 e ait olacaktır; bunun sonucu olarak A_4 noktası C_1, C_2, C_3, C_4 , şekillerinin ortak bir noktası olacaktır.



Şek. 65

(b) A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarından hiç birisi, geriye kalan diğer noktaların meydana getirdikleri üçgene ait değildir. Bu halde $A_1 A_2 A_3 A_4$ (konveks) dörtgeninin (Şek. 65 b) köşegenlerinin A kesim noktası, $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_4$, $A_1 A_3 A_4$ ve $A_2 A_3 A_4$ üç-

genlerinin ortak noktası ve bunun sonucu olarak C_1, C_2, C_3, C_4 şekillerinin ortak noktası olacaktır.

2. Önermemizin n tane dairesel çokgen için ispat edilmiş olduğunu farzedelim. $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ gibi $n + 1$ tane dairesel çokgeni gözönüne alalım. C_n ve C_{n+1} şekillerinin arakesiti C olsun (aşikâr olarak C de bir dairesel çokgendir). $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C$ şekillerinin üçer üçer kesiştiklerini gösterelim. Gerçekten, eğer C alınan üç şekilden biri değilse gözönüne alınan bu üç şekil hipoteze göre kesişirler. Şimdi, bir tanesi C olmak üzere, bu şekillerden herhangi üç tanesini, meselâ C_1, C_2 ve C yi alalım. C_1, C_2, C_n, C_{n+1} şekilleri üçer üçer kesişeceklerinden, 1. kısma göre bu dört şeklin bir ortak noktası vardır; ve bu nokta C_1, C_2 ve C nin de bir ortak noktası olacaktır. $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}, C$ şekilleri üçer üçer kesiştiklerinden, indüksiyon hipotezine göre, bu şekillerin hepsinin bir ortak noktası vardır; ve bu nokta $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1}$ şekillerinin ortak noktası olacaktır.

Problem 36. Misal 32 C de verilen teoremi, kürelerin sayısı olan n üzerinde indüksiyon yaparak ispat ediniz.

Yol gösterme. Tekabül eden teoremi «küresel çok yüzlüler» yani, sonlu sayıda kürenin kesişmesinden meydana gelen şekiller için ispat ediniz. Bu teoremin ispatı misal 33 deki önermenin ispatına benzer şekildedir.

Problem 37. Bir düzlemde, herhangi ikisinin uzaklığı 1 den büyük olmıyan $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n tane nokta verilsin. Bu noktaların hepsinin yarı çapı $1/\sqrt{3}$ olan bir daire içinde bulunacağını gösteriniz (Young teoremi) ⁽¹⁾.

Yol gösterme. Önce bu noktalardan seçilen herhangi üç tanesinin yarıçapı $1/\sqrt{3}$ olan bir daire içersinde bulunacağını ispat ediniz. Sonra bu noktalardan her biri merkez olmak üzere yarı çapı $1/\sqrt{3}$ olan daireyi çizin; ve bu dairelerin üçer üçer

(1) Young, 19 uncu yüzyılda yaşamış bir İngiliz Matematikçisidir.

kesişeceklerini görünüz. Misal 32 B nin sonucuna göre var olduğunu bildiğimiz, bütün bu dairelerin ortak noktası, verilen noktaların içinde bulunduğu, yarı çapı $1/\sqrt{3}$ olan dairenin merkezi olacaktır.

Problem 38. Uzayda, herhangi ikisinin uzaklığı 1 den büyük olmıyan $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n tane nokta verilmiş olsun. Bu noktaların hepsinin yarı çapı $\sqrt{6}/4$ olan bir kürenin içinde bulunduğunu gösteriniz.

Yol gösterme. İspat, Problem 37 nin çözümünün benzeridir.

27. YARIM DOĞRULAR VE YARIM UZAYLAR

MİSAL 34. Bütün uzayı dolduracak şekilde sonlu sayıda yarım - uzaylar ⁽¹⁾ gözönüne alalım. Bunlar içersinden, bütün uzayı dolduracak şekilde dört (veya daha az) yarım - uzay seçmenin mümkün olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki problem dizisini göz önüne alalım :

A. Bütün doğru sonlu sayıda yarım - doğrularla örtülmüştür. Doğruyu tamamen örtecek şekilde iki yarım - doğru seçmek mümkün olduğunu gösteriniz.

İspat. Sola doğru uzanan yarım doğruların köşelerinden hepsinin en sağında bulunanı A olsun; B de sağa doğru uzanan yarım - doğruların köşelerinden en solda olanı olsun. Doğrunun tamamen yarım doğrularla örtülmüş olduğunu kabul ettiğimize göre B noktası A nın sağında olamaz, ve köşeleri A ve B olan yarım doğrular, doğruyu tamamiyle örterler.

B. Bütün düzlem, n sonlu bir sayı olmak üzere, n tane yarım - düzlem ⁽²⁾ ile örtülebilir. Düzlemi tamamiyle örtecek

(1) Bir düzlemin bir tarafında kalan uzay parçasına *yarım - uzay* denir.

(2) Düzlemin, bir doğrunun yalnız bir tarafında kalan kısmına *yarım - düzlem* denir.

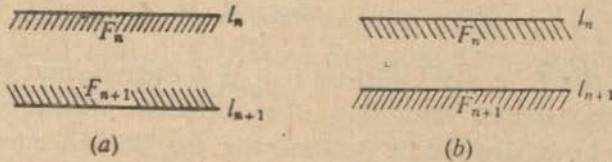
şekilde iki veya üç yarım - düzlem seçmek mümkün olduğunu gösteriniz.

İspat. Yarım düzlemlerin sayısı n üzerinde indüksiyon yapalım.

1. $n = 3$ için önerme aşikârdır.

2. n tane yarım - düzlem için önermemizin doğru olduğunu, ve $F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}$ gibi düzlemi tamamiyle örten $(n + 1)$ tane yarım düzlemin verildiğini farzedelim. Bu yarım düzlemlerin sınırlarını $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ ile gösterelim. İki hal olabilir:

Hal 1. l_{n+1} doğrusu verilen yarım - düzlemlerden birisinin tamamiyle içinde kalır. Bu F_n olsun. l_n ve l_{n+1} doğruları paralel olacaktır. Eğer F_n ve F_{n+1} yarım - düzlemleri sınırlarının farklı taraflarında bulunurlarsa (Şek. 66 a), bu takdirde F_n ve F_{n+1} yarım düzlemleri, düzlemi tamamiyle örterler. Aksi halde bu



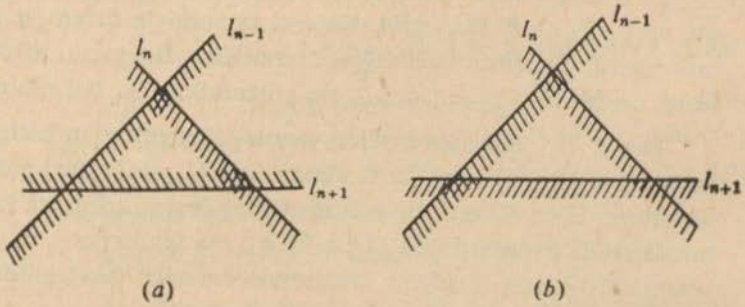
Şek. 66

yarım düzlemlerden biri diğerinin tamamen içinde kalır. (Meselâ, F_{n+1} yarım - düzlemi F_n içinde bulunur; Şek. 66 b). Bu halde teorem indüksiyon hipotezine göre doğrudur, zira bu halde n tane yarım düzlem (bizim halimizde $F_1, F_2, \dots, F_n$) bütün düzlemi tamamen örterler.

Hal 2. l_{n+1} doğrusu $F_1, F_2, \dots, F_n$ yarım - düzlemlerinden hiç birisi içersinde bulunmaz. Ohalde bu doğru bu yarım - düzlemler tarafından tamamiyle örtülür ve yarım düzlemler, onu $m \leq n$ olmak üzere, m tane yarım doğru boyunca keserler. Bu yarım - doğrular l_{n+1} doğrusunu tamamiyle örterler. A kısmında ise bu yarım - doğrulardan ikisinin doğruyu tamamiyle ör-

tecek şekilde seçilebileceğini görmüştük. Bu yarım doğrulara tekabül eden yarım - düzlemler F_{n-1} ve F_n olsun. F_{n-1} , F_n ve F_{n+1} yarım düzlemlerinin birbirlerine göre durumları gözönüne alınarak mümkün olan iki hali ayrı ayrı inceliyelim.

(a) F_{n+1} yarım düzlemi, l_{n-1} ve l_n doğrularının arakesit noktasını ihtiva eder (Şek. 67 a). Bu halde F_{n-1} , F_n ve F_{n+1} yarım düzlemleri, düzlemi tamamiyle örterler.



Şek. 67

(b) F_{n+1} yarım düzlemi l_{n-1} ve l_n doğrularının kesiştikleri noktayı ihtiva etmez (Şek. 67 b). Bu halde düzlem $F_1, F_2, \dots, F_n$ yarım - düzlemleri ile örtülmüştür. Ohalde induksiyon hipotezine göre teorem doğrudur.

C. Başlangıçtaki teorem.

İspat. İspat, verilen yarım - uzayların sayısı n üzerinde induksiyon ile yapılabilir.

1. $n = 4$ için önerme aşikârdır.

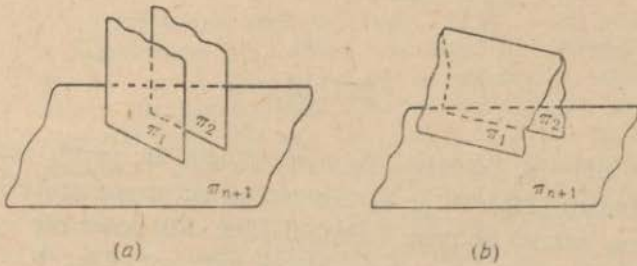
2. Önermemizin n tane yarım - uzay için doğru olduğunu, ve bize $n + 1$ tane $V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1}$ yarım - uzaylarının verildiğini farzedelim. Bu yarım - uzayların sınırlarını sırası ile $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}$ ile gösterelim. İki hal olabilir.

Hal 1. π_{n+1} düzlemi tamamen $V_1, V_2, \dots, V_n$ yarım - uzaylarından bir tanesi, meselâ V_n içinde bulunur. Bu halde π_{n+1} ve π_n düzlemleri paraleldir. Eğer V_{n+1} ve V_n yarım düzlemleri sınırlarının zıt taraflarında bulunuyorlarsa bütün uzayı tamamen doldururlar. Aksi halde bu iki yarım - uzaydan birisi tamamen öbürünün içinde bulunur, ve teorem induksiyon hipotezine göre doğru olur.

Hal 2. π_{n+1} düzlemi $V_1, V_2, \dots, V_n$ yarım - uzaylarından hiç birisinin içinde bulunmaz. Ohalde bu yarım - uzaylar tarafından tamamen örtülür ve bunlar π_{n+1} düzlemini, $m \leq n$ olmak üzere, $F_1, F_2, \dots, F_m$ yarım düzlemlerinde keserler. B kısımdaki neticeye göre, bu yarım - düzlemler içersinde iki veya üç tanesini, düzlemi tamamiyle örtecek şekilde seçmek mümkündür (Şek. 66a ve Şek. 67a).

Mümkün olan bütün halleri ayrı ayrı inceleyelim.

(a) π_{n+1} düzlemini iki yarım - düzlem örter (Şek 66a), bunlara F_1 ve F_2 diyelim. Bunlara tekabül eden π_1 ve π_2 düzlemleri paraleldirler (Şek 68 a). Bu halde bütün uzayı V_1 ve V_2 yarım uzayları doldurur.

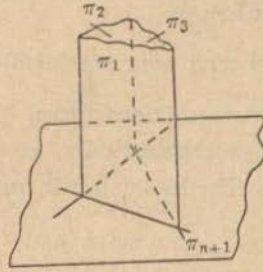


Şek. 68 a ve b

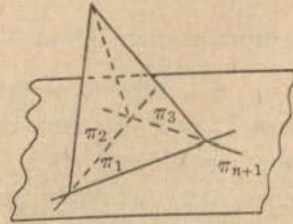
(b) π_{n+1} düzlemi F_1 ve F_2 ile gösterilen iki yarım - düzlem ile örtülür. Fakat bunlara tekabül eden π_1 ve π_2 düzlem-

leri kesişir (Şek 68 b). Eğer V_{n+1} yarım -uzayı π_1 ve π_2 düzlemlerinin kesiştikleri doğruyu ihtiva ederse V_1, V_2 , ve V_{n+1} yarım -uzayları, uzayı tamamen doldururlar. Aksi halde V_{n+1} yarım -uzayı V_1 ve V_2 yarım -uzayları tarafından örtülür ve induksiyon hipotezine göre teorem doğrudur.

(c) π_{n+1} düzlemi F_1, F_2 ve F_3 ile gösterilen üç yarım düzlem ile örtülsün (Şek 67 a), ve π_3 düzlemi π_1 ve π_2 düzlemlerinin kesiştikleri doğruya paralel olsun (tekabül eden düzlemler bir «prizma» meydana getirir. Şek 68 c ye bakınız). Bu halde V_1, V_2 ve V_3 yarım -uzayları, uzayı tamamen doldurur.



(c)



(d)

Şek. 68 c ve d

(d) π_{n+1} düzlemi F_1, F_2 ve F_3 gibi üç yarım -düzlem tarafından örtülsün ve π_3 düzlemi π_1 ve π_2 nin arakesit doğrusuna paralel olmasın (tekabül eden düzlemler bir «piramid» meydana getirirler; Şek 68 d ye bakınız). Eğer V_{n+1} yarım -uzayı F_1, F_2 ve F_3 düzlemlerinin arakesit noktasını ihtiva ederse, V_1, V_2, V_3 ve V_{n+1} yarım -uzayları uzayı tamamen doldururlar; aksi halde V_{n+1} yarım -uzayı V_1, V_2 ve V_3 yarım uzayları tarafından örtülür ve induksiyon faraziyesine göre teorem doğru olur.

Problem 39. Uzayda, içlerinden seçilen herhangi bir çiftin belirttiği açı, geniş açı olmak üzere dörtten fazla sayıda yarım-doğru bulunamayacağını gösteriniz.

Yol gösterme. Uzayda, içlerinden seçilen her hangi bir çiftin belirttiği açı geniş açı olacak şekilde, sonlu bir yarım-doğru sistemi verildiğini farzedelim. Bu sistemin maksimal olduğunu kabul edelim; yani bunlardan her biri ile geniş açı teşkil eden başka bir yarım-doğru bulunmasın. Her yarım doğruya uç noktasında dik olan düzlemi ve bu düzlem tarafından sınırlanan, bu düzleme göre yarım-doğru ile aynı tarafta bulunan yarım-uzayı gözönüne alalım. Yarım-doğru sistemi maksimal olduğundan, bu yarım-uzaylar uzayı tamamen doldururlar. Misal 34 de elde edilen sonuca göre önermemiz doğrudur.

28. KÜRELERİN İÇİNE SOKULABİLEN ÇOKGENLER

MİSAL 35. Öyle bir C_3 sayısı bulunabileceğini gösteriniz ki, uzayda herhangi bir $A_1 A_2 \dots A_n$ çokgeninin, hiçbirinin uzunluğu 1 den büyük olmıyan kenarları (büyüklük veya doğrultuları değiştirilmeden) yeniden o şekilde sıralanabilir ki, böylece elde edilen yeni çokgen, yarı çapı C_3 olan bir küre içine sığdırılabilir.

Önce problemin «bir - boyutlu» ve «iki - boyutlu» uzaylardaki benzerlerini gözönüne alalım.

A. Bir doğru üzerinde, $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$ doğru parçalarının hiç birinin uzunluğu 1 i geçmemek şartı ile $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n tane nokta verilsin. (n sayısına ve noktaların durumlarına bağlı olmıyan) öyle bir C_1 sayısı bulunabileceğini gösteriniz ki, $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$ doğru parçaları, bulundukları doğru üzerinde yeniden o şekilde düzenlenebilir ki, meydana gelen $B_1 B_2 \dots B_n B_1$ «kırık çizgi» sinin her bir doğru parçası, büyüklük ve doğrultusu ile $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n A_1$ «kırık çizgi» sinin bir doğru parçası ile çakışsın ve yeni elde edilen kırık çizgi tamamen uzunluğu $2 C_1$ olan bir doğru parçasının içinde kalsın.

İspat. $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ «kırık çizgi» sindeki $A_i A_{i+1}$ doğru parçasının a_i uzunluğuna, A_{i+1} noktası A_i nin sağında ise pozitif, solunda ise negatif işareti verelim ($i = 1, 2, \dots, n$; kolayca

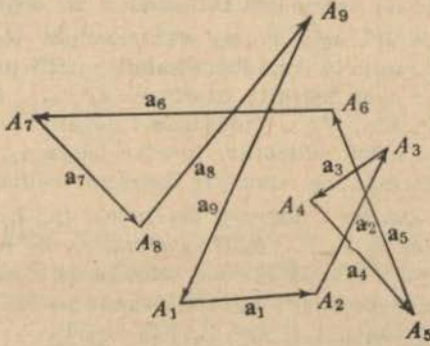
anlaşılabacağı gibi A_{n+1} noktası A_1 ile gösterilir). (Bütün bu noktaların üzerinde bulunduğu doğrunun yatay olduğunu kabul edelim.) A_1A_3 doğru parçasının uzunluğunun $a_1 + a_2$ (kabulümüzüne göre bu sayı pozitif veya negatif olabilir), A_1A_4 doğru parçasının uzunluğunun $a_1 + a_2 + a_3, \dots$ v.s., A_1A_{n-1} doğru parçasının uzunluğunun $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ ve $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 0$ (bu A_1A_1 doğru parçasının uzunluğudur.) olduğu aşikârdır. $B_1B_2 \dots B_nB_1$ kırık çizgisindeki her doğru parçası ilk $A_1A_2 \dots A_nA_1$ kırık çizgisindeki bir doğru parçasına eşit olduğundan, teoreminin ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ gibi mutlak değerleri 1 den büyük olmayan ve toplamları sıfır olan n tane pozitif ve negatif sayı verilsin. Bu sayıların sırasının $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}$ ($i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n$ sayıları $1, 2, \dots, n-1, n$ in bir permütasyonudur) gibi öyle değiştirilebileceğini gösteriniz ki $a_{i_1}, a_{i_1} + a_{i_2}, a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3}, \dots, a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{n-1}}$ toplamlarından her birinin mutlak değeri bir C_1 sayısını geçmesin (bu C_1 sayısı ne $a_1, a_2, \dots, a_n$ dizisine ne de n sayısına bağlı değildir).

C_1 in 1 e eşit alınabileceğini gösterelim. $a_1, a_2, \dots, a_n$ dizisindeki pozitif sayılar $a_1', a_2', \dots, a_p'$ ve negatif sayılar da $a_1'', a_2'', \dots, a_q''$ ($p+q=n$) olsunlar. Pozitif sayılardan, toplamaları 1 i geçmeyen ilk k tanesini ($k \leq p$) (meselâ, yalnız ilk sayı a_1' i) alalım; sonra bunlara $a_1'', a_2'', \dots, a_l''$ ($l \leq q$) negatif sayılarını ilâve edelim; öyle ki seçilen bütün sayıların toplamı negatif olsun. Fakat mutlak değerce 1 den daha büyük olmasın. Bunlara tekrar söylenen özellikleri haiz pozitif sayıları ilâve edelim ve böylece bir negatif, bir pozitif sayı grupları almak suretiyle verilen sayıları tüketinceye kadar devam edelim. Bu şekilde elde edilen $a_1^* = a_1', a_2^* = a_2', \dots, a_k^* = a_k', a_{k+1}^* = a_1'', a_{k+2}^* = a_2'', \dots, a_{k+l}^* = a_l'', \dots$ dizisi istenilen özelliği haizdir.

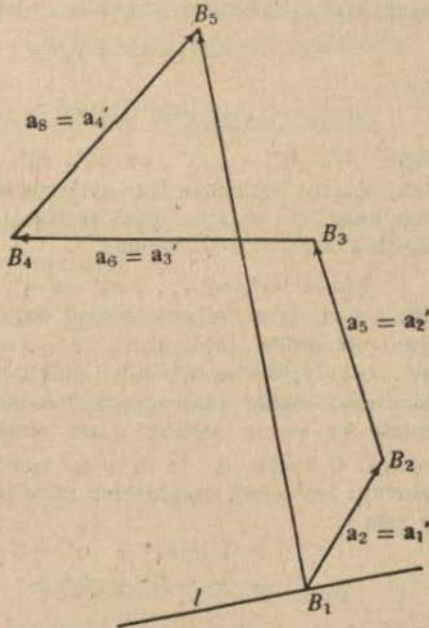
B. Düzlemde kenarlarının uzunluğu 1 den büyük olmayan (konveks veya kendi kendisini kesen) $A_1A_2 \dots A_n$ çokgeni verilsin (Şek. 69 a). (Çokgene bağlı olmayan) öyle bir C_2 sayısı verilebileceğini gösteriniz ki, çokgenin kenarları, doğrultu ve büyüklükleri değiştirilmeden kaydırıldığında elde edilen $B_1B_2 \dots B_n$ çokgeninin tamamı yarı çapı C_2 olan bir çemberin içinde kalsın.

İspat. C_2 nin $\sqrt{5}$ olarak alınabileceğini gösterelim. $A_1 A_2 \dots A_n$



Şek. 69 a

çokgeninin kenarlarının yönlenmiş doğru parçaları, yani vektörler olduklarını kabul edelim. Bu vektörleri $a_1, a_2, \dots, a_n$ ile gösterelim. Bu vektörlerin içinden $a_1', a_2', \dots, a_s'$ gibi bir takımını, $B_1 B_{s+1}$ vektör toplamı mümkün olan en büyük uzunlukta olacak şekilde seçelim (Şek 69 b). Bu $a_1', a_2', \dots, a_s'$ vektörlerinden her birinin $B_1 B_{s+1}$ toplamı üzerindeki izdüşümlerinin doğrultusu $B_1 B_{s+1}$ in doğrultusunun aynıdır (eğer bu vektörlerden her hangi birinin doğrultusu zıt olsa idi bunu çıkarmakla toplam uzunluğu



Şek. 69 b

büyültebilirdik). Tersine olarak, geriye kalan $a_1'', a_2'', \dots, a_{n-s}''$ vektörlerinin $\overline{B_1 B_{s+1}}$ üzerindeki izdüşümleri zıt doğrultudadır. Başka bir deyimle $a_1', a_2', \dots, a_s'$ vektörlerinin $\overline{A_1 A_{s+1}}$ doğrultusundaki $a_1', a_2', \dots, a_s'$ izdüşümleri pozitif ($0 \leq a_i' \leq 1$, $i=1, \dots, s$), ve aynı doğrultu üzerinde $a_1'', \dots, a_{n-s}''$ vektörlerinin $a_1'', a_2'', \dots, a_{n-s}''$ izdüşümleri negatif ($-1 \leq a_j'' \leq 0$, $j=1, 2, \dots, n-s$) kabul edilebilir. Bundan başka $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektörlerinin, üzerinde bir «pozitif» doğrultu seçilmiş bulunan ve $B_1 B_{s+1}$ e dik olan bir l doğrusu üzerindeki (pozitif veya negatif) izdüşümlerini $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ile gösterelim. $\beta_1' + \beta_2' + \dots + \beta_s' = 0$ ve $\beta_1'' + \beta_2'' + \dots + \beta_{n-s}'' = 0$ olduğu aşikardır (burada a_1' vektörünün izdüşümü β_1' , a_1'' vektörünün izdüşümü β_1'' , .. vs. dir); bundan başka $|\beta_1'| \leq 1$, $|\beta_2'| \leq 1, \dots, |\beta_s'| \leq 1$ ve $|\beta_1''| \leq 1$, $|\beta_2''| \leq 1, \dots, |\beta_{n-s}''| \leq 1$ dir. A kısmındaki sonuca göre, $\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_s'$ ve $\beta_1'', \beta_2'', \dots, \beta_{n-s}''$ sayılarının sıraları o şekilde düzenlenebilir ki, her hangi bir v için aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklensinler:

$$-1 \leq \beta_1' + \beta_2' + \dots + \beta_v' \leq 1$$

ve

$$-1 \leq \beta_1'' + \beta_2'' + \dots + \beta_v'' \leq 1.$$

Eğer $\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_s'$ ve $\beta_1'', \beta_2'', \dots, \beta_{n-s}''$ sayılarının sıralanmalarını bozmadan bu sayıların hepsini bir dizide toplarsak her hangi bir k için, yeni seride ilk k tane terimin toplamı mutlak değerce 2 yi aşamaz.

Şimdi $a_1', a_2', \dots, a_s'$ ve $a_1'', a_2'', \dots, a_{n-s}''$ sayılarını, ilk k teriminin toplamı mutlak değerce 1 i aşmayacak şekilde yeni bir seride toplayalım. A kısmında gördüğümüze göre $a_1', a_2', \dots, a_s'$ ve $a_1'', a_2'', \dots, a_{n-s}''$ alt serilerinin sıralanmalarını bozmadan bunu yapmak mümkündür. Bizim vektörlerimizin bu seriye tekabül eden sıralanmaları $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ olsun. O halde a_k^* ve β_k^* , a_k^* nın sırasıyla $\overline{B_1 B_{s+1}}$ ve l üzerindeki izdüşümü olduklarına göre ($k=1, 2, \dots, n$) herhangi bir v için

$$-1 \leq a_1^* + a_2^* + \dots + a_v^* \leq 1.$$

$$-2 \leq \beta_1^* + \beta_2^* + \dots + \beta_v^* \leq 2$$

dir. $a_1^*, a_2^*, \dots, a_v^*$ ($v=1, \dots, n$) vektörlerinin toplamı ile teşkil olunan kırık çizginin $\overline{B_1 B_{s+1}}$ ve l doğruları üzerindeki izdüşümleri sı-

rasıyla $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_n^*$ ve $\beta_1^* + \beta_2^* + \dots + \beta_n^*$ eşit olduklarından, bu vektör toplamının uzunluğunu c_v ile gösterirsek

$$c_v^2 = (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_n^*)^2 + (\beta_1^* + \beta_2^* + \dots + \beta_n^*)^2$$

dir, yani

$$c_v^2 \leq 5, \quad c_v \leq \sqrt{5}$$

dir. Yani kırık çizginin herhangi bir köşesinin A_1 noktasından uzaklığının $\sqrt{5}$ i geçmeyeceğini bulduk; ohalde yeni çokgenin tamamı yarı çapı $\sqrt{5}$ olan bir çemberin içinde kalır.

C. Bu misalin başlangıcında söylenen teorem.

Yol gösterme: C_3 ün $\sqrt{21}$ olarak alınabileceğini gösteriniz. Bu halde sonuç, benzer şekilde B kısmından faydalanılarak elde edilir; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sayıları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörlerinin $B_1 B_{s+1}$ vektörüne dik olan π düzlemi üzerindeki izdüşümleri olacaktır.

29. GEOMETRİK YERLERİN BELİRLENMESİ

MİSAL 36. Uzayda verilmiş n tane $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktasına uzaklıklarının karelerinin toplamı sabit (d^2 ye eşit) olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Aşağıdaki problem dizisini gözönüne alalım :

A. Bir doğru üzerinde n tane $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktası verilmiş olsun. d verilmiş bir sayı olduğuna göre, doğrunun öyle bir M noktasını bulunuz ki

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = d^2$$

olsun.

ÇÖZÜM. Doğrumuzu bir koordinat eksenini olarak alalım; $A_1, \dots, A_n$ noktalarının koordinatları sırasıyla $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve aranılan M noktasının koordinatı da x olsun. Buna göre $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ doğru parçalarının yönlenmiş uzunlukları $(x - a_1), (x - a_2), \dots, (x - a_n)$ e eşit olacaktır;

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2.$$

dir.

$$\begin{aligned} & (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2 \\ &= x^2 - 2a_1x + a_1^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2 + \dots + x^2 - 2a_nx + a_n^2 \\ &= nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &= n \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &\quad - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}, \end{aligned}$$

veya A yı koordinatı $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$ olan nokta olarak alırsak

$$\begin{aligned} MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 \\ &= n \cdot MA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &\quad - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}. \end{aligned} \quad (15)$$

dir.

$$n \cdot MA^2 = d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n},$$

$$MA = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \right]}$$

dir. Genellikle bu eşitlik (eğer kök işareti altındaki ifade pozitif ise), problemin şartlarına uygun iki tane M noktası belirtir (her biri A noktasının bir tarafında bulunur).

B. Düzlemde verilmiş n tane $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktasından uzaklıklarının kareleri toplamı sabit (d^2 ye eşit olan) noktaların geometrik yerini bulunuz.

ÇÖZÜM. ⁽¹⁾ Düzlemde bir dik koordinat sistemi seçelim ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktalarının x - ve y - eksenleri üzerindeki izdüşümlerini sırasıyla $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ ve $A''_1, A''_2, \dots, A''_n$ ile gösterelim. M noktasının koordinat eksenleri üzerindeki izdüşümleri M' ve M'' olsun. Bu halde

$$\begin{aligned} MA_1^2 &= M'A_1'^2 + M''A_1''^2, \\ MA_2^2 &= M'A_2'^2 + M''A_2''^2, \\ &\dots\dots\dots \\ MA_n^2 &= M'A_n'^2 + M''A_n''^2, \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 \\ &= (M'A_1'^2 + M'A_2'^2 + \dots + M'A_n'^2) \\ &\quad + (M''A_1''^2 + M''A_2''^2 + \dots + M''A_n''^2) \end{aligned}$$

dir. Fakat (15) eşitliğine ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ sayılarının $A_1, A_2, \dots, A_n$ noktalarının apsisi ve ordinatları olduklarına ve A' ile A'' , sırasıyla x - ve y - ekseninde koordinatları

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \quad \text{ve} \quad (b_1 + b_2 + \dots + b_n)/n$$

olan noktaları gösterdiklerine göre

$$\begin{aligned} M'A_1'^2 + M'A_2'^2 + \dots + M'A_n'^2 \\ &= n \cdot M'A'^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &\quad - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M''A_1''^2 + M''A_2''^2 + \dots + M''A_n''^2 \\ &= n \cdot M''A''^2 + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &\quad - \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{n}, \end{aligned}$$

dir. O halde

(1) Bu problemin başka bir çözümü evvelce verilmiştir (Problem 20 ye bakınız.)

$$\begin{aligned}
 & MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 \\
 &= n \cdot MA^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\
 &\quad + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\
 &\quad - \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \\
 &\quad - \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{n},
 \end{aligned} \quad (16)$$

dir; burada A , düzlemin koordinat eksenleri üzerindeki izdüşümleri sırasıyla A' ve A'' olan noktasını göstermektedir. Bundan

$$\begin{aligned}
 n \cdot MA^2 &= d^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\
 &\quad - (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\
 &\quad + \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} \\
 &\quad + \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{n}
 \end{aligned} \quad (17)$$

bulunur. Böylece Q , (17) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeyi gösterdiğine göre

$$MA = \sqrt{\frac{Q}{n}},$$

dir. Yani aradığımız geometrik yer, $Q > 0$ ise yarıçapı $\sqrt{Q/n}$ olan bir daire, $Q = 0$ ise bir tek A noktasıdır; ve eğer $Q < 0$ ise böyle bir nokta yoktur.

C. Bu misalin başlangıcında verilen teorem.

Yol gösterme: Koordinat eksenleri x -, y - ve z - eksenleri olan üç boyutlu bir karteziyen koordinat sistemi alınız. Bütün noktaların xy -düzlemi ve z -ekseni üzerindeki izdüşümlerini alınız; sonra (15) ve (16) eşitliklerini kullanınız.

30. BOYUT SAYISI ÜZERİNE İNDÜKSİYON İLE YAPILAN TARİFLER

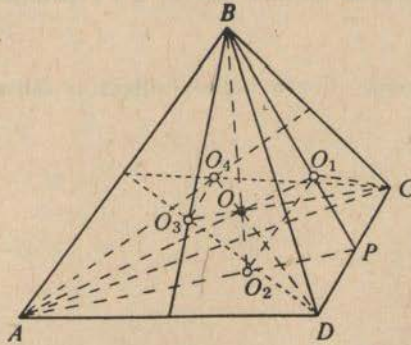
MİSAL 37. Bir dört yüzlünün ortaylarını ve ağırlık merkezini tarif ediniz.

A. Bir doğru parçasının ağırlık merkezi, orta noktasıdır.

B. Bir üçgenin kenar ortayı, herhangi bir köşesini karşılarındaki kenarın ağırlık merkezine birleştiren doğru parçasıdır. Biliyoruz ki bir üçgenin kenar ortayları bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir.

C. Bir dört yüzlünün ortayı herhangi bir köşesini karşılarındaki yüzün ağırlık merkezine birleştiren doğru parçasıdır.

Bir dört yüzlünün ortaylarının aynı bir noktada kesiştiklerini göstereyim. Bir $ABCD$ dört yüzlüsü alalım (Şek



Şek. 70

70), DBC , ACD , ABD ve ABC üçgenlerinin ağırlık merkezleri sırasıyla O_1 , O_2 , O_3 ve O_4 olsunlar. BO_1 ve AO_2 doğruları, CD doğru parçasının orta noktası olan P noktasında kesiştiklerinden AO_1 ve BO_2 doğruları O_{12} gibi bir noktada kesişirler. Benzer

şekilde AO_1 ile CO_3 , AO_1 ile DO_4 , BO_2 ile CO_3 , BO_2 ile DO_4 , CO_3 ile DO_4 sırasıyla O_{13} , O_{14} , O_{23} , O_{24} ve O_{34} gibi birer noktada kesişirler. Bu noktaların hepsinin çakıştıklarını (Şekildeki O noktası) gösterelim. Aksi halde, meselâ O_{12} ve O_{13} ün çakışmadıklarını farzedelim; bu takdirde AO_1 , BO_2 ve CO_3 doğrularının hepsi bir π düzleminde ($O_{12}O_{13}O_{23}$ düzlemi) bulunurlar. DO_4 doğrusu da AO_1 , BO_2 ve CO_3 doğrularının her üçü ile kesiştiği için o da aynı düzlemde olmalıdır. Yani dört yüzünün dört köşesi bir π düzlemi içinde bulunur. Bu ise olamaz. O halde O_{12} ve O_{13} noktaları çakışmalıdır. Aynı şekilde geri kalan diğer O_{14} , O_{23} , O_{24} ve O_{34} noktaları da bu noktaya ile çakışırlar.

Bir dört yüzünün ortaylarının kesiştikleri noktaya *dört yüzünün ağırlık merkezi* denir.

Problem 40. Ağırlık merkezinin her bir ortayı uzun parçası köşe tarafında olmak üzere, 3 : 1 oranında böldüğünü gösteriniz.

Yol gösterme: Üçgen halini kullanınız (Misal 26 ya bak).

Düzeltilme : Sahife 77, satır 4 ün, aşağıdaki şekilde düzeltilmesi rica olunur :

$$= MO^2 (OA_2 + A_1O) + A_1O^2 \cdot OA_2 + OA_2^2 \cdot A_1O$$

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanığın Matematiğe Bazı Tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergelle Yapılan Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant Denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — Matematiksel İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvelle Yapılan Çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş (550 Krş.)
- 16 — Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (600 Krş.)
- 17 — Çeşitli Geometrilere (750 Krş.)
- 18 — İndirgemeli Diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
- 22 — Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (400Krş.)
- 23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
- 24 — Matematiksel Sonsuz (100 Krş.)
- 25 — Sayılar ve Şekiller (850 Krş.)
- 26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen Şekiller (300 Krş.)
- 27 — Oyunlar Teorisine Giriş (300 Krş.)
- 28 — İhtimaliyet ve İnfomasyon (750 Krş.)
- 29 — Matematik ve Akla Yakın Muhakeme. I. Cilt 1. Kısım (750 Krş.)
- 30 — Matematik ve Akla Yakın Muhakeme. I. Cilt 2. Kısım (750 Krş.)
- 31 — Matematik ve Akla Yakın Muhakeme. II. Cilt (Basılmaktadır.)
- 32 — Gök Mekaniği (10 Lira.)
- 33 — Geometride İndüksiyon (5 Lira.)

Matematik Derneğinin adresi :

*Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü
Vezneciler - İstanbul*

Flatı : 5 Lira