

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı: 34

I. M. YAGLOM

**GEOMETRİK
TRANSFORMASYONLAR**

Çeviren:

Vehbi Kemâl Güney

İSTANBUL — 1969

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı: 34

I. M. YAGLOM

**GEOMETRİK
TRANSFORMASYONLAR**

Çeviren:

Vehbi Kemâl Güney

İSTANBUL — 1969

KUTULMUŞ MATEBAASI
Yerebatan Caddesi No. 35
Tel: 22 86 76, İstanbul 1969

YAZARIN ÖNSÖZÜ

Üç kısımdan ibaret olan bu eser elemanter geometriye ayrılmış bulunmaktadır. Özellikle 19. yüzyılda bu geometride geniş ölçüde materyal toplanmıştır. Çemberler, üçgenler, çokgenler v.s. şekillere ait bir çok güzel ve umulmayan teoremler hep aynı yüzyılda isbat edilmiştir. Üçgen geometrisi ve dörtyüzlü cismin geometrisi gibi kendisine has geniş konusu, problemleri ve çözüm metodları bulunan kısımlar elemanter geometrinin bünyesinde gene bu devirde gelişmiş bulunmaktadır.

Bu kitabın gayesi okuyucuya yabancı bulunduğu birtakım yeni teoremleri tanımak değildir. Kanımıza göre yukarıda söylenen, elemanter geometriye ayrılmış özel bir eserin meydana getirilmesini zorunlu kılmaz. Çünkü bir ortaokul ve lise programının sınırlarını aşan elemanter geometri teoremlerinin birçoğu özellikle tecessüsünü tatmin için olup ayrıca bir yerde kullanılmaz ve matematiğin gelişme sınırının dışında kalır. Ancak, müşahas teoremlere ek olarak, elemanter geometri bilimin bu dalındaki ilerlemenin esasını teşkil eden iki önemli genel fikri de kapsar. Önemi geometrinin geniş sınırlarını da aşan bu iki fikirden biri tümdengelim metodu ile geometrinin aksiyomatik temeli, diğeri de geometrik transformasyonlar ve geometrinin grup teorisi esaslarıdır. Bu fikirler öklit geometrisi dışındaki geometrinin gelişmesinde çok önemli rol oynamıştır. Bu iki mühim fikirden biri olan geometrinin grup teorisi esası, bu kitabın temel gayesidir.

Kitabın karakteri hakkında birkaç söz daha söyleyelim. Böyle bir kitapta bir kısım okuyucuların sağlayacağı faydaları oldukça geniş bir okuyucu kütlesinin yararlarına feda etmek

IV

gerekir. Yazar bu kitapta, iyi yetişmiş okuyucunun avantajlarını feda etmekte, kuvvetli isbatlar ve lojik kesinlik yerine basitlik ve berraklık teminine çalışmaktadır. Bu sebeple, örnek olarak, kitapta genel bir geometrik transformasyon kavramı tarif edilmektedir. Çünkü sezisle açık olduğu belli olan tarif terimleri bu işte tecrübesiz okuyucuların her zaman güçlük çekmelerine sebep olur. Aynı sebeple yönlü açılar kullanmaktan çekinmek gerektiği gibi yönlü doğru parçalarının tanıtılmasını da ikinci bölüme ertelemek icap etmiştir. Bu hüküm, esas metin ve problemlerin çözümündeki bir kısım teoremlerin eksik sayılabileceği gerçeğinin zararına rağmen geçerlidir. Kanaatimize göre bu koşullar içinde iyi hazırlanmış okuyucu muhakemesini geliştirirken matematik kesinliğin az olması da az hazırlanmış okuyucuyu rahatsız etmeyecektir.

Aynı düşünüş terminolojik tercihte de önemli bir rol oynadı. Yazar, kendi öğrencilik tecrübelerinden edindiği kanaata göre, alışılmamış birçok terimin kullanılması bir kitabın güçlüğünü daha da artırır düşüncesiyle kullanılan terimlerin sayısında ekönomi yolunu tercih etmiştir. Bazı hallerde kullanılması belki de daha uygun bir kısım terimler, iyi hazırlanmış okuyucunun menfaatleri feda edilmek suretiyle, kullanılmıştır.

Problemler okuyucuya teorik kısımlara ne dereceye kadar hâkim olduğunu anlamak fırsatını vermektedir. Kitaptaki bütün problemlerin sırasıyla çözülmesi icap etmemekle beraber her gruptan en az bir (tercihan birçok) problemin çözülmesi tavsiye edilir. Ayrıca eser, bu şekilde hareket edildiği takdirde okuyucunun muhtevadan birşey kaybetmesini önleyecek bir yapıdadır. Bir problemi çözdükten veya çözmeye çalıştıktan sonra cevaplar kısmındaki çözümle karşılamak yerinde olur.

Kitabın metniyle ilgili problemlerin formüle edilişi ve çözümler elemanter geometrinin ana prensiplerini kullanmakta ve bu geometride kullanılan transformasyonları uygulamaktadır. Kitapta neticelerden daha çok metodlara önem ve-

rilmiştir. Bu sebeple belli bir problemin ayrı metotlarla çözümlerini karşılaştırmak gibi öğretici bir gaye güdülmüş ve aynı problem birkaç yerde tekrar edilmiştir.

Bu ciltte birçok çizim problemleri vardır. Bunların çözümünde «en basit» bir çizimi sonuna kadar götürmek yerine yazar bu problemlerin karakter bakımından lojik bir ilgi yaratacak nitelikte olmaları üzerinde durmaktadır.

Üç boyutlu geometrinin teoremlerine gene bu kitapta temas edilmemiştir. Bu sınırlama, kitabın vermek istediği esas fikirler üzerinde sakıncalı bir tesir yaratmaz. Uzay geometri problemlerinin bazılarını koymak belki ilgiyi arttırabilirdi. Fakat kitaba konmuş olan diğer problemler öğretici ve aydınlatıcı olup bu gayeyi de gerçekleştirmektedirler.

İ. M. YAGLOM

Bu Yayınlar Hakkında

Matematığın kendi değeri yanında, fizik kimya ve dolayısıyla mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hatta sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek, için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde arınan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunu olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp konuları yukarıki prensiplere

uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sagduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İ Ç İ N D E K İ L E R

Konu :	Sayfa
Başlangıç	
Geometri nedir	1
BİRİNCİ FASIL	
YERDEĞİŞTİRMELER	9
1 — Öteleme	9
2 — Simetri (yarı dönme) ve dönme . . .	15
İKİNCİ FASIL	
SİMETRİ	38
1 — Yansıma ve kayarak yansıma . . .	38
(Kaymış simetri)	
2 — Doğrudan doğruya veya ters olarak eş şekiller. Düzlem izometrinin çeşitleri .	59
CEVAPLAR	72
BİRİNCİ FASIL	
YERDEĞİŞTİRMELER	72
İKİNCİ FASIL	
SİMETRİ	104

B A Ş L A N G I Ç

Geometri Nedir?

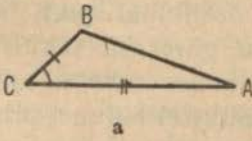
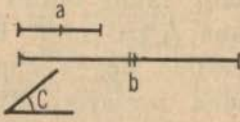
A. P. Kiselyov'un Hayşkul Geometri kitabının birinci sahifesinde nokta, çizgi, yüzey ve cismin tarifi ile (bunların uzayda meydana getirdiği topluluğa (yığın) Geometrik şekil denir) şeklindeki ifadesinden hemen sonra Geometri şöyle tarif edilmektedir: (Geometri, Geometrik şekillerin özelliklerini inceleyen bir ilimdir). Böyle bir tarif ile bu mukaddemenin başındaki soruya Hayşkul Geometri kitaplarında cevap verilmiş olduğu intibai hasıl olmakta ve artık bununla daha fazla meşgul olunmasına lüzum kalmadığı zannedilmektedir.

Fakat problemin mahiyetinin basit olduğunu zannettiren bu intiba yanlıştır. Kiselyov'un tarifine yanlış denemezse de bu tarif biraz eksiktir, (özelik) kelimesi pek umumi mahiyette olup hiç bir suretle şekillerin bütün özellikleri Geometride incelenmez. Böylece meselâ geometride bir üçgenin beyaz kâğıda veya kara tahtaya çizilmesinin, üçgenin rengi geometrinin bir konusu olmamak itibariyle, ehemmiyeti yoktur. Geometrinin yukarıda tarif edilen mânada geometrik şekillerin özeliğini tetkik ettiği ve rengin kâğıdın bir özeliği olup şeklin kendi özeliği olmadığı şeklinde bir cevap verilirse bu doğrudur. Bununla beraber bu da tatminkâr olmayan bir cevap hissini verebilir. Daha ikna edici bir cevap aranır ise şekillerin hangi özelliklerinin geometrinin konusu olduğuna dair kesin bir matematiksel tarif yapılmalıdır. Ancak böyle bir tarif de bu güne kadar yapılamamıştır. Geometride bu tatmin edilememe hissi, tahtaya çizilmiş bir üçgenin bir köşesinin neden herhangi bir doğ-

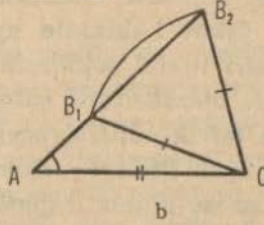
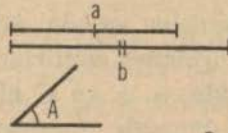
ruya, meselâ tahtanın bir kenarına değil de bu köşe karşısındaki kenara olan uzaklığı üzerinde çalışıldığı izah edilmek istenince daha da hakim olur.

Tarifin açıklanmasına ve takdime devam etmeden şu ciheti kaydetmek gerekir ki ders kitabı bu eksikliğinden dolayı tenkit edilemez. Kiselyov'un tarifi belki de geometri çalışmasının ilk safhasında verebilecek yegâne tariftir. Geometri tarihinin bundan 4000 yıldan da evvel başladığını ve takdimi bu kitabın esas gayelerinin biri olan ilmî tarifi bundan ancak 80 yıl önce 1872 de Alman Matematikçisi F. Klein tarafından verilmiş olduğunu söylemek kâfidir. Matematikçiler geometrinin kesin ve tam bir tarifine ihtiyaç olduğunu iyice kavrayamadan Lobachevsky, Öklid Geometrisinden ayrı bir geometrinin kurulmasına lüzum hissetti. Ancak bu yeni geometri kurulduktan sonradır ki muhtelif geometriler mevcut olamayacağı hakkındaki sezîse dayanan (intüitive) geometrik şekiller fikrinin çok geniş olan geometri ilmine temel teşkil edemiyeceği anlaşılmıştır.

Şimdi geometride şekillerin kesin olarak hangi özelliklerinin aydınlatacağı meselesine dönelim. Gördüğümüz gibi geometri, şekillerin bütün özelliklerini değil, bir kısmını inceler. Bu özelliklerin kesin tarifinden evvel geometriyi ancak şekillerin geometrik özelliklerinden bahseden bir ilim olarak tarif edebiliriz. Kiselyov'un tarifine yapılan bu ekleme tarifi tamamlamaz. Şimdi soru, (Geometrik özellikler nelerdir?) cevap ise (Geometrinin incelediği özelliklerdir.) şeklini almaktadır. Böylece geometriyi şekillerin geometrik özelliklerini inceliyen bir ilim ve geometrik özellikleri de geometride incelenen özellikler şeklinde tarif ederek bir fasid daire üzerinde dolaşmış durmuş oluyoruz. Bu fasid daireden kurtulmak için geometrik özellikleri geometri kelimesini kullanmadan tarif etmeliyiz. Şekillerin geometrik özelliklerinin neler olduğu sorusunu cevaplandırmak için çok iyi bilinmekte olan şu teoremi hatırlıyalım: a ve b kenarları ile bu iki kenar arasındaki C açısı verilen üçgen'in çiziminde bir ve ancak bir çözüm vardır. Şekil (1 a) buna karşılık a ve b kenarları ile A açısı verildiği zaman bir üçgen'in çiziminde iki çözüm elde edilir. Şekil (1 b)

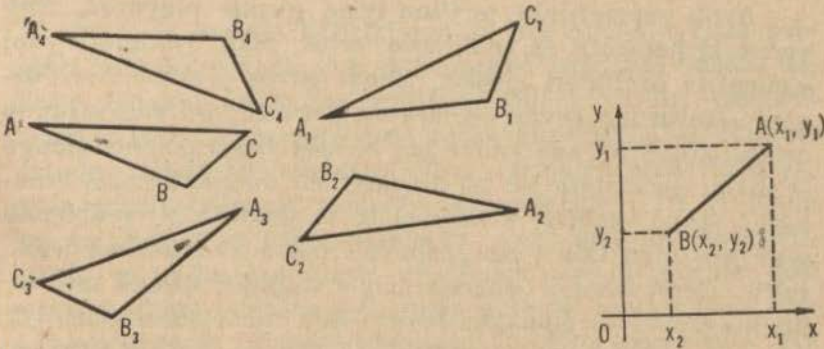


Şekil 1a



Şekil 1b

Birinci çizim probleminin «bir ve ancak bir çözümü vardır» şeklindeki hükmü, ikinci bir düşünüş tarzına göre doğru olmayabilir. a ve b kenarları ile bunlar arasındaki C açısı verilen üçgen hakikatte bir tane değil, sonsuz sayıdadır. Şekil (2) Yani problemimizin bir değil sonsuz çözümü vardır. O halde ancak bir çözüm vardır iddiasının manası nedir?



Şekil 2,3

a ve b kenarları ile bunlar arasındaki C açısı verilen üçgen ancak bir tane olarak çizilebilir iddiasından bu elemanlarla çizilecek bütün üçgen'lerin birbirine eşit olduğu manası çıkarılır. Bu sebeple iki kenar ve bunlar arasındaki

açı ile sonsuz sayıda üçgen çizilebilir fakat bütün bu üçgenler birbirine eşittirler demek daha doğru olur. Böylece geometride a , b ve C elemanları verilen üçgen ancak bir tanedir demekle bunların birbirinden pozisyon itibariyle farklı fakat hakikatte aynı olduğunu ifade etmiş oluruz. Geometri ilmini şekillerin geometrik özelliklerini inceleyen bir ilim olarak tarif edince aynı özellikteki şekil ile birbirinden tefrik edilemeyecektir. Buna göre eşit şekiller kesin olarak aynı özeliğe sahip olacak, buna mukabil eşit olmayanların ise muhtelif geometrik özellikleri bulunacaktır. Aksi halde şekiller birbirinden ayrılamaz.

Şimdi geometrik özelliklerin istenilen tarifini verebiliriz: «Şekillerin geometrik özellikleri, bütün eşit şekillerde ortak olan özelliklere denir.» Şimdi geometride neden bir üçgen'in köşesinin yazı tahtasının bir kenarına olan mesafesinden bahsedilmediği sorusuna kesin bir cevap verebiliriz. Bütün eşit üçgen'ler için bu mesafe aynı olmayacağından bu uzaklık geometrik bir özellik değildir. Buna mukabil bir üçgen'in yüksekliği geometrik bir özelliktir. Zira eşit bütün üçgen'lerin karşılıklı yükseklikleri aynıdır.

Artık geometrinin tarifine iyice girmiş oluyoruz. Biliyoruz ki geometri eş şekillerde ortak olan özellikleri yani geometrik özellikleri inceler. Şimdi iş «eş şekiller neye denir?» sorusuna cevap vermekten ibarettir. Bu son sorunun ortaya atılışı buraya kadar hiç bir şey başarılmamış olduğu intibasını yaratabilir ve bu da okuyucu üzerinde hayal kırıklığına sebep olabilir. Zira yapılan iş şimdilik bir problemin yine güç olan ikinci bir probleme dönüştürülmesinden ibarettir. Gerçi durum tamamen böyle değildir. Çünkü iki şeklin ne zaman eş oldukları sorusu asla cevaplandırılması güç bir soru sayılamaz. Müellifin kitabı bu soruya tam manasiyle tatmin edici bir cevap vermektedir. Müellif, eş iki şekli: «uzayda biri diğərinin üzerine konduğu zaman bütün kısımları birbiriyle çakışan iki şekle eş şekiller denir.» diye tarif etmektedir. Bu demektir ki eş şekiller, uygun bir hareket neticesinde birbiriyle çakışabilen şekillerdir. Şu halde şekillerin geometrik özellikleri yani bütün eş şekillerde aynı

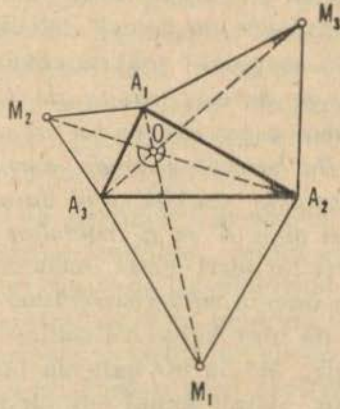
olan özellikler, bir hareket neticesinde değişmeyen özelliklerdir. Neticede geometrinin tarifi olarak: «*Geometri, şekillerin bir hareket neticesinde değişmeyen özelliklerini inceleyen bir ilimdir.*» şeklinde bir tarif verebiliriz. Şimdilik bu tarif ile yetinmek mümkündür. Hakikatte bu konuda ileride söyle-necek söz olacaktır.

Kılı kırk yaran bir tenkitçi bu tarifile de tatmin edilemeyebilir ve bir hareketle ne demek istediğimizi sorabilir. Böyle bir soruya da aşağıdaki şekilde cevap vermek mümkündür: *İzometri veya hareket adıyla da tanınan geometrik bir dönüşüm, düzlemin veya uzayın her A noktasını bir A' noktasına götürür. Bu hareket sonunda esas şeklin A ve B gibi iki noktası arasındaki uzaklık yeni durumdaki şeklin A ve B nin karşılıkları olan A' ve B' noktaları arasındaki uzaklığa eşit kalır.* Gerçi bu tarif biraz mücerrettir fakat geometride oynayacağı önemli rolü göz önünde tutarak izometri özelliklerini sezışle de olsa kabul ve bütün inceliklerini tetkike devam edeceğiz. Böyle bir çalışma bu kitabın birinci cildinin esas konusu olarak kabul edilmiştir. Bu cildin sonunda düzlemin mümkün olan bütün hareketlerinin bir sayımı yapılmakta ve bu da izometrinin daha basit anlaşılabilir bir tarifine bizi götürmektedir.

Şunu da önemle hatırlatalım ki izometrilere, yalnız geometri anlamının kesin olarak bilinmesi istenince önemli değildir. İzometrinin ayrıca pratik bir önemi vardır. Geometrideki esas rolü geometri problemlerinin çözülmesi, özellikle çizimler yapılırken meydana çıkar. İzometrilere üzerinde yapılan çalışmalar aynı zamanda bir çok geometri problemlerinin çözümüne uygulanabilecek genel metotlar kazandırmakta ve başka metotlarla çözülmesi ayrı bir güçlük gösteren nitelikte onların bir gurup halinde incelenmesini temin etmektedir. Örnek olarak şu üç çizim problemini göz önüne alalım:

- (a) Verilen üç M_1, M_2, M_3 noktası kenarları üzerine ve dışarıya doğru çizilecek üç eşkenar üçgenin birer köşesi olmak üzere bir üçgen çiziniz.

- (b) Verilen üç M_1, M_2, M_3 noktası kenarları üzerine ve dışarıya doğru çizilecek üç karenin merkezleri olmak şartıyla bir üçgen çiziniz.
- (c) Kenarlarının orta noktaları verilen bir yedigeni çiziniz.



Şekil 4 a

Bu üç problem âlelade okul kitaplarında birbirinden ayrı ve oldukça güç üç problem olarak ele alınır. Birincisini çözmek için evvelâ A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 doğrularının (Şekil 4 a) aynı bir O noktasından geçtiğini ve herhangi ikisi arasında 120 derecelik bir açı bulunduğunu göstermek suretile O noktasını bulmak ve ondan sonra da sırasıyla :

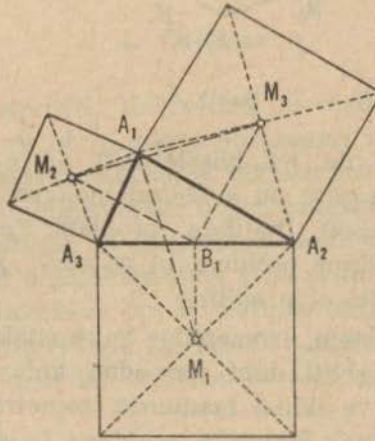
$$OA_1 + OA_2 = OM_3; OA_2 + OA_3 = OM_1 \text{ ve } OA_3 + OA_1 = OM_2 \quad (1)$$

bağıntılarının varlığını göstererek bu bağıntılardan OA_1, OA_2 ve OA_3 ü geometrik olarak elde etmek mümkündür. Meselâ OA_1 için: $OA_1 = 1/2(OM_2 + OM_3 - OM_1)$ bulunur. Bundan sonra da OM_1 doğrusu O dan itibaren uzatılarak üzerinde OA_1 uzunluğu işaretlenirse A_1 noktası bulunmuş olur.

Yol gösterme: (1) deki eşitliklerden herhangi birini, meselâ birincisini, ispat etmek için $A_1OA_2M_3$ dörtgeninin karşılıklı açılarından ikisini 60 ve 120 derece olduğuna ;

OA_1 i gören çevre açısı A ise OA_2 yi gören çevre açısının $60 - A$ ve OM_3 ü gören çevre açısının $60 + A$ olduğuna dikkat etmek ve bu uzunluklardan herbirinin karşısındaki açının sinüsüne oranının bu dörtgen dışına çizilen dairenin çapına eşit olduğundan faydalanmak mümkündür.

İkinci problemi çözmek için B_1 noktası A_2A_3 ün ortası olmak üzere; $M_2B_1 \perp M_3B_1$ ve $M_2B_1 = M_3B_1$ olduğunu göerek B_1 noktasını tayin etmek kâfidir.

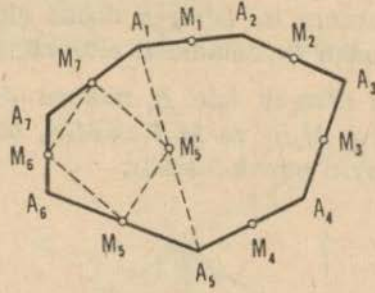


Şekil 4 b

Üçüncü problemin çözümüne gelince: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ yedigeninde A_1A_5 köşegeninin ortası olan M_5' noktasının $M_5M_6M_7M_5'$ paralelkenarının bir köşesi olacağı düşünülerek bu nokta çizimle bulunabilir. Bu M_5' noktası elde edilince problem, kenarlarının ortaları verilen bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgeninin çizimi problemine götürülmüş olur. Aynı muhakeme ile çizime devam edilerek problem gittikçe basitleştirilir.

Bu üç problemin çözümleri oldukça sun'i olup her birinde bir takım yardımcı çizimlere başvurmak icap etmekte ve üçü de büyük buluş kabiliyetine ihtiyaç göstermektedir. İzometrilere, bu problemleri ve daha genel olan aşağıdaki şu problemi çizim yolu ile çözmeye çok elverişlidir.

n kenarlı bir çok-genin kenarlarını taban olarak kabul eden ve üçgenin dışına doğru çizilmiş olan ikizkenar üç-



Şekil 4 c

genlerin köşeleri ile bu köşelerdeki $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ açıları verildiğine göre bu n kenarlı çokgeni çiziniz. [$n=3$ ve $a_1=a_2=a_3=60$ halinde problem (a); $n=3$ ve $a_1=a_2=a_3=90$ halinde problem (b) ve $n=7, a_2=\dots=a_7=180^\circ$ halinde problem (c) elde edilir.]

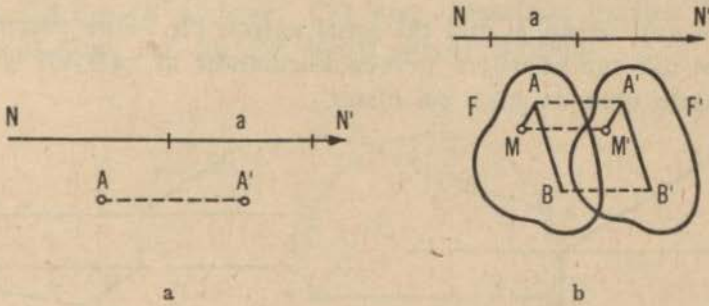
Bu genel problem, izometrilere hakkındaki teoremlerden istifade edilerek şekil dahi çizmeden kolayca çözülebilir. Okuyucu, birinci ve ikinci fasıllarda izometrilere yardımı ile çözülebilecek bir çok geometri problemi bulacaktır.

BİRİNCİ FASIL

YERDEĞİŞTİRMELER

1. Öteleme

Düzlemde bir NN' doğrultusu (ucunda ok bulunan bir doğru) seçelim ve bir a doğru parçasının verilmiş olduğunu farzedelim. Düzlemin herhangi bir noktası A , NN' doğrultusunda a uzunluğundaki bir doğru parçası AA' olsun. (Şekil 5 a). Bu takdirde A' noktası A noktasının NN' doğrultusunda a kadar ötelenmesinden elde edilmiştir, denir. Böyle bir öteleme neticesinde bir F şeklinin bütün noktaları aynı doğrultu ve mesafeyi alarak bir F' şekline dönüşürler. Kısaca F' şekli F den bir öteleme ile elde edilmiştir, denir.

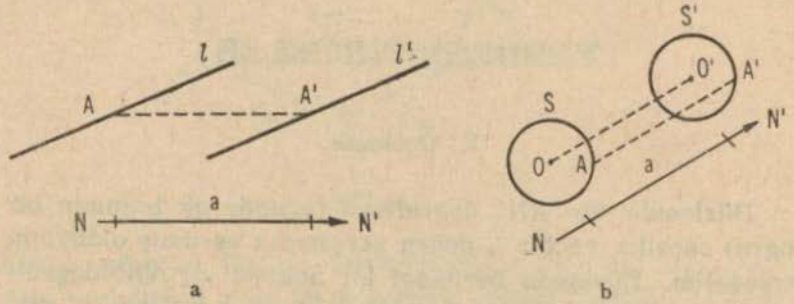


Şekil 5

F şeklinin bütün noktaları NN' doğrultusunda a kadar bir mesafeye taşındığı zaman her iki şeklin karşılıklı noktalarını birleştiren doğru parçaları birbirlerine aynı yönde paralel ve eşittirler. F' şeklinin F durumuna getirilmesi

halinde de aynı şeyler söylenebilir. Ancak bu defa F' şeklinin bütün noktaları evvelki yönün tersi yönünde ötele-
nirler.

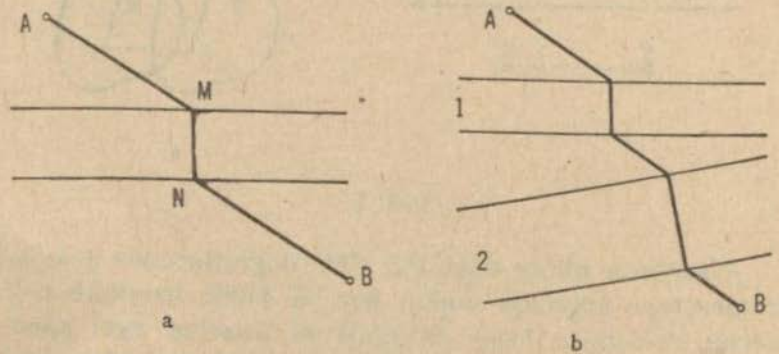
Öteleme, bir l doğrusunu kendisine paralel bir l' doğrusuna ve bir S çemberini kendisine eşit bir S' çemberine dönüştürür.



Şekil 6

1. S_1 ve S_2 gibi iki çember ve bir l doğrusu veriliyor. Bu doğruya paralel öyle bir doğru çizersiniz ki ikinci doğrunun verilen iki çemberi kestigi noktalar arasındaki uzunluk a kadar olsun.

2. (a) A ve B gibi iki şehri ayıran bir nehir üzerinde sahile dik bir köprüyü nerede kurmalıdır ki $AMNB$ yolu mümkün olan en kısa yol olsun.



Şekil 7

(b) Aynı problemi A ve B köyleri arasında bir kaç nehir bulunması halinde çözüünüz.

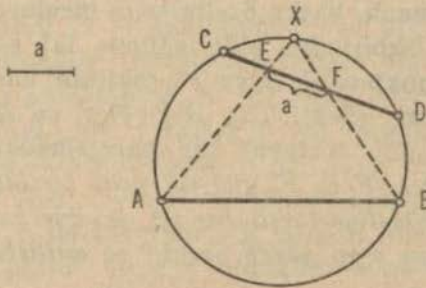
3. (a) Verilen iki l_1 ve l_2 doğrusuna olan uzaklıkları toplamı bir a uzunluğuna eşit M noktalarının geometrik yerini bulunuz.

(b) Verilen iki l_1 ve l_2 doğrusuna olan uzaklıkları farkı sabit bir a uzunluğuna eşit M noktalarının geometrik yerini bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninin AB, BC, CA kenarlarının ortaları sırası ile D, E, F olsun. ADF, BDE ve CEF üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırası ile O_1, O_2, O_3 ve aynı üçgenlerin içine çizilen çemberlerin merkezleri Q_1, Q_2, Q_3 olduğuna göre $O_1O_2O_3$ ve $Q_1Q_2Q_3$ üçgenlerinin eşit olduğunu isbat ediniz.

5. Bir $ABCD$ dörtgeninde MN bimediani (karşılıklı iki kenarın ortalarını birleştiren doğru) ortalamadığı kenarların toplamı yarısına eşitse bu dörtgenin bir yamuk olduğunu isbat ediniz.

6. Bir çemberin AB ve CD gibi iki kirişi göz önüne alınıyor. Bu çember üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki XA ve XB kirişleri CD kirişi üzerinde verilen bir a uzunluğuna eşit bir EF doğru parçası ayırsın.



Şekil 8

7. (a) A ve B noktalarında kesişen S_1 ve S_2 gibi iki çember veriliyor. A dan öyle bir l doğrusu çizin ki bu

doğrunun S_1 ve S_2 yi yeniden kestiği noktalar sırası ile M_1 ve M_2 olduğuna göre $M_1M_2=a$ olsun. (a verilmiş bir uzunluktur;)

(b) Verilen bir üçgene eş olmak ve kenarları verilen üç noktadan geçmek üzere bir üçgen çiziniz.

8. S_1 ve S_2 gibi iki çember veriliyor. Öyle bir l doğrusu çiziniz ki:

(a) bu l doğrusu verilen bir l_1 doğrusuna paralel olsun ve S_1, S_2 çemberleri l üzerinde eşit kirişler ayırsın.

(b) l doğrusu verilen l_1 doğrusuna paralel olsun ve S_1 ve S_2 den ayırdığı kirişlerin toplamı (veya farkı) verilen bir a uzunluğuna eşit olsun.

c) Aranan doğru verilen bir A noktasından geçsin ve S_1 ve S_2 çemberleri bu doğru üzerinde eşit kirişler ayırsın.

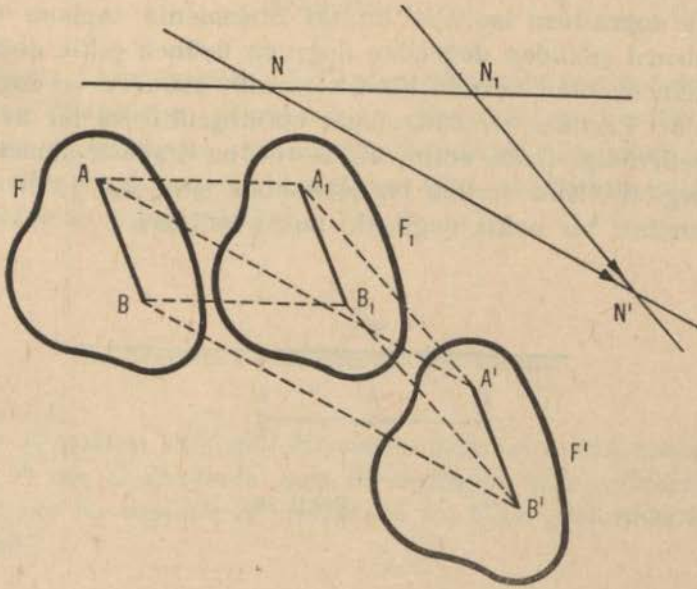
Öteleme, düzlemin her A noktasını bir A' noktasına götüren bir dönüşüm (transformasyon) örneğidir. Bu dönüşüm, başlangıçta tarifini yaptığımız izometri (hareket) anlamında kullanılmıştır. Böyle bir ötelemede hiç bir nokta sabit kalmaz.

Gerçi bir öteleme sonuncunda yerini değiştirmeyen doğrular da vardır. Meselâ öteleme doğrultusuna paralel bütün doğrular öteleme sonunda ilk durumları ile çakışık kalırlar.

Şimdi ötelemenin başka özelliklerini inceleyelim. F ve F' bir öteleme ile birbirinden elde edilmiş iki şekil olsunlar. F şeklinin iki noktası A, B ve F' şeklinin karşılıklı noktaları A', B' olsun. (Şekil 5 b) $AA' \parallel BB'$ ve $AA' = BB'$ olduğundan $AA'BB'$ dörtgeni bir paralelkenardır. Böylece diyebiliriz ki eğer F ve F' gibi iki şekil bir öteleme ile birbirinden elde edilebiliyorlarsa her iki şekilde karşılıklı doğru parçaları birbirine aynı yönde paralel ve eşittirler.

Karşıt olarak eğer F şeklinin iki noktasını birleştiren doğru parçası F' şeklinin karşılıklı noktalarını birleştiren doğru parçasına aynı yönde paralel ve eşitse F ve F' şekilleri birbirinden bir öteleme ile elde edilebilir. (Şekil 5 b)

Şimdi bir öteleme yerine birbiri ardısıra iki ötelemeden çıkacak sonucu inceleyelim. Birinci öteleme bir F şeklini F_1 e ve ikinci öteleme F_1 şeklini F' ye dönüştürsün.

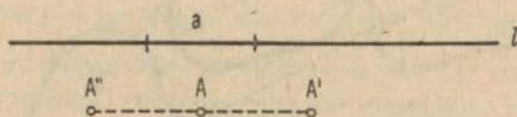


Şekil 9

İsbat edelim ki F şeklinden F' ye tek bir öteleme ile geçmek mümkündür. Hakikaten birinci öteleme F şeklinin bir AB doğru parçasını F_1 in bir A_1B_1 doğrusuna dönüştürürse $AB \parallel A_1B_1$ ve $AB = A_1B_1$ ve yönler aynıdır. Aynı muhakeme ile ikinci öteleme A_1B_1 i $A'B'$ ye dönüştürür ve $A_1B_1 \parallel A'B'$; $A_1B_1 = A'B'$ ve yönler aynı olur. Bu iki nedenden F ve F' de bulunan AB ve $A'B'$ doğru parçalarının aynı yönde paralel ve eşit oldukları sonucuna varılır. Bu da bize F i F' ye dönüştüren bir ötelemenin varlığını gösterir. Böylece herhangi ardışık iki ötelemenin yerine bir tek öteleme yapılabileceği isbatlanmış oldu.

Bu son ifade başka türlü de formüle edilebilir. Mekanikte müteaddit deplasmanların (yer değiştirmesi) yerine

tek bir deplasman ikame edilmesine «deplasmanların toplanması» denir. Aynı anlamda biz de «dönüşümlerin toplamı»*ndan bahsedeceğiz. Bu toplamın terimleri ayrı ayrı ötelemeler olacaktır. Meselâ NN_1 birinci ötelemenin uzunluğu ve doğrultusu ve N_1N' de ikinci ötelemenin uzunluk ve doğrultusu ise NN' bu iki ötelemenin toplamı olan ve birinci şekilden doğrudan doğruya üçüncü şekle geçişi sağlayacak olan üçüncü bir ötelemenin uzunluk ve doğrultusu olur. Pratikte bir ötelemenin bir doğrultu ve bir uzunlukla belirtildiği ifade edilmekte ise de bu ifade tamamen doğru değildir. Zira verilen bir A noktası için $AA' \parallel l$ ve $AA' = a$ şartları bir nokta değil, iki nokta belirtir.

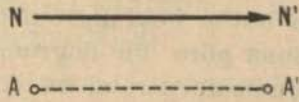


Şekil 10

Bu ifadeyi daha açık hale koymak için l üzerindeki yönlerden biri pozitif kabul edilir. (Bu yön bir ok ile gösterilebilir.) Buna göre a uzunluğu pozitif veya negatif olur. Böylece şekil 10 daki iki A' ve A'' noktası farklı iki ötelemeye (işaret bakımından) tekabül ederler. Bu suretle bir doğru üzerinde yönlü doğru parçaları kullanmak fikri kendiliğinden doğmakta ; doğru parçaları pozitif veya negatif olabilmektedir.

Öteleme, yönlenmiş bir tek NN' doğru parçası ile de karakterize edilebilir. Bu halde ötelemenin hem doğrultusu hem de büyüklüğü aynı zamanda ifade edilmiş olur.

* Matematik literatüründe «dönüşümlerin çarpımı» deyimini sık sık aynı anlamda kullanılır.

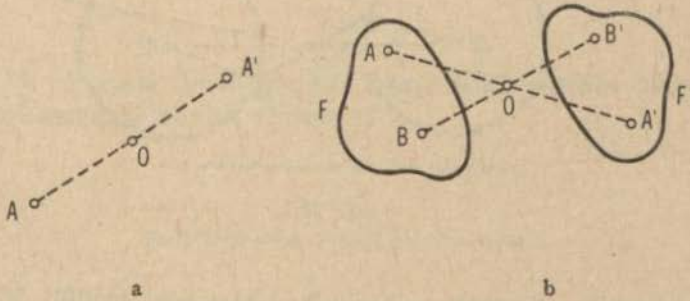


Şekil 11

Buraya kadar verilen bilgilerden düzlemde yönlü doğru parçaları (Vektörler) fikri ortaya çıkmaktadır. Vektörler mekanik ve fizikte de önemli bir rol oynar. Şu ciheti de kaydedelim ki ötelemelerin toplamı fikri vektörlerin bildiğimiz toplamı anlamındadır.

2. Simetri (Yarı dönme) ve dönme

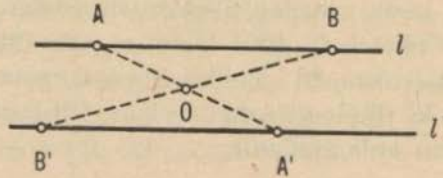
Bir O noktası AA' gibi bir doğru parçasının orta noktası ise A', A'nın O etrafında yarı dönmesinden elde edilmiştir. Veya başka bir deyimle A' noktası A'nın O ya göre simetrik' idir denir.



Şekil 12

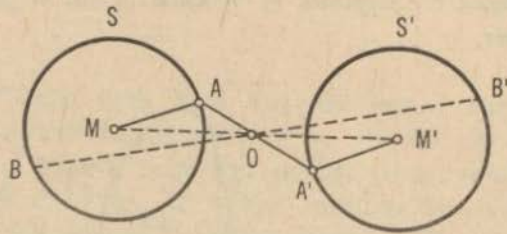
A' noktası A'nın O etrafında yarı dönmesinden elde edilmişse karşıt olarak A noktası da A' mün aynı nokta etrafında dönmesinden elde edilebilir.

Bir F şeklinin bütün noktalarının O ya göre simetrik'i bir F' şeklidir. Buna göre bir doğrunun bir O noktasına göre simetriği kendisine paralel bir doğru (Şekil 13 a) ve çemberin simetriği kendisine eşit bir çember olur (Şekil 13 b).



Şekil 13 a

Yarı çapı r olan bir çemberin simetriğinin kendisine eşit bir çember olduğunu isbat etmek için AOM ve $A'OM'$ üçgenlerinin (Şekil 13 b) birbirine eşit olduğunu isbat et-



Şekil 13 b

mek kâfidir. Bu netice bize A noktasının çizdiği M merkezli çemberin A' nün çizdiği aynı r yarıçaplı ve M' merkezli çembere dönüştüğünü gösterir.

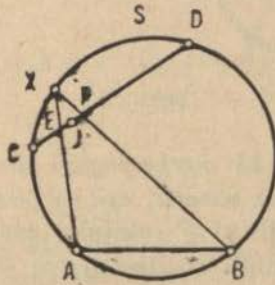
9. Verilen bir A noktasından öyle bir doğru geçiriniz ki bu doğrunun verilen bir l doğrusunu kestiği nokta ile verilen bir çemberi kestiği nokta arasında kalan kısmının ortası bu A noktası olsun.

10. S_1 ve S_2 gibi iki çemberin ortak bir A noktasından öyle bir l doğrusu geçirin ki:

(a) S_1 ve S_2 çemberleri l doğrusu üzerinde eşit kırışlar ayırsın.

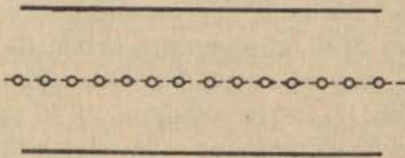
(b) S_1 ve S_2 çemberleri l doğrusu üzerinde farkları verilen bir a uzunluğuna eşit iki kırış ayırsın. (Problem 10 b nin problem 7 a nın genelleştirilmiş şekli olduğu aşikârdır).

11. Bir S çemberinin AB ve CD gibi iki kırışi ile ZD üzerinde bir J noktasını verilmiş olduğunu farzedelim. Çember üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki AX ve BX doğruları CD kırışi üzerinde ortası J olan bir EF doğru parçası ayırsın (Şekil 14)



Şekil 14

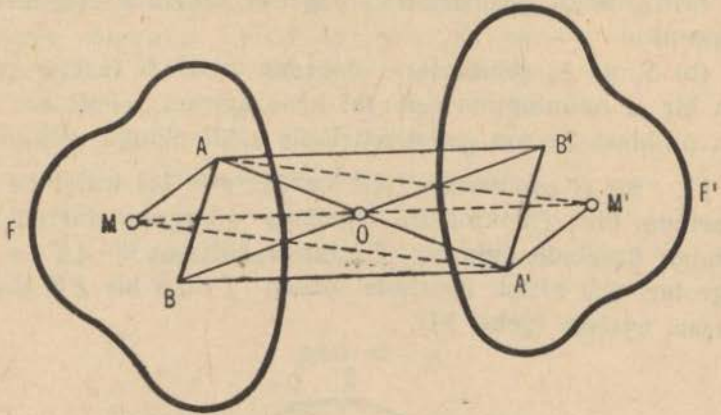
12. Paralel iki doğrunun teşkil ettiği şeridin sonsuz simetri merkezi vardır. (Şekil 15)



Şekil 15

Eğer F ve F' şekilleri birbirinin O ya göre simetrikleri ve AB ile $A'B'$ doğru parçaları bu iki şeklin karşılıklı doğ-

ru parçaları ise (Şekil 16) $AB A'B'$ dörtgeni bir paralelkenardır. (Köşegenleri birbirini ortaladığı için)

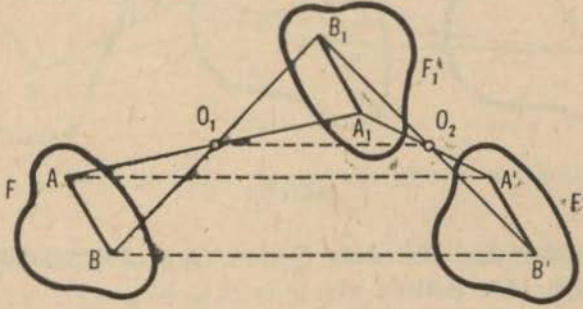


Şekil 16

Bundan anlaşılır ki *merkeze göre simetrik iki şeklin karşılıklı doğru parçaları paralel, eşit ve ters yönlüdürler*. Karşıt olarak isbat edilebilir ki F şeklinin her noktasına F' şeklinin bir noktası tekabül ettirilebilir ve F deki her doğru parçası F' deki karşılığına paralel, eşit ve ters yönlü ise bu iki şekil bir O noktasına göre birbirinin simetrik'idir. Hakikaten F ve F' de birbirinin karşılığı olan iki nokta M ve M' ; MM' nün ortası O , birbirinin karşılığı diğer iki nokta A ve A' olsun (Şekil 16) $MA \parallel M'A'$ ve $MA = M'A'$ olduğundan $AM A' M'$ dörtgeni bir paralel-kenar olur ve AA' köşegeninin ortası MM' köşegeninin ortası ile çakışır. Yani A' noktası A nın yarı dönmesinden elde edilir. A ve A' gelişi güzel karşılıklı iki nokta olduğundan F' şekli F den aynı şekilde bir yarı dönme sonunda elde edilebilir.

Şimdi F , F_1 ve F' gibi üç şekil göz önüne alalım. F in O_1 e göre simetrik'i F_1 ve F_1 in O_2 ye göre simetrik'i F' olsun. (Şekil 17) F_1 in herhangi bir doğru parçası $A_1 B_1$ ve F ve F' şekillerinin karşılıklı doğru parçaları AB ve $A'B'$ ol-

sun. Buna göre A_1B_1 ve AB doğru parçaları birbirine; A_1B_1 ve $A'B'$ doğru parçaları da birbirine eşit, paralel ve ters yönlü; Binaenaleyh AB ve $A'B'$ doğru parçaları ise eşit, paralel ve aynı yönlü olurlar. Fakat F ve F' nün karşılıklı doğru parçaları eşit, paralel ve aynı yönlü iseler F' şekli F den bir öteleme ile elde edilebilir.

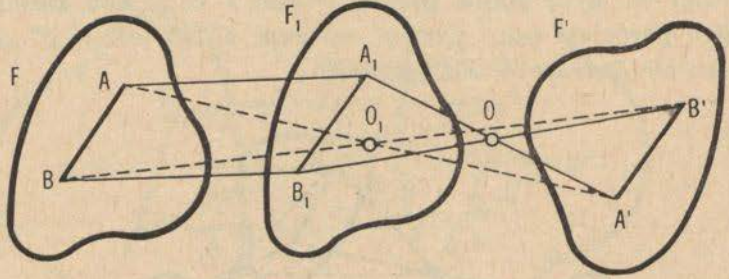


Şekil 17

Şu halde iki yarım dönmenin toplamı bir ötelemedir. Bu netice şekil 17 den kolayca görülmektedir. Hakikaten AA_1A' üçgeninde O_1O_2 doğru parçası, AA_1 ve $A'A_1$ doğru parçalarının orta noktalarını birleştirdiği için $AA' \parallel O_1O_2$ ve $AA' = 2O_1O_2$ olur. Kısaca F' nün her A' noktası F de bu noktanın karşılığı olan A noktasının O_1O_2 doğrultusunda $2O_1O_2$ kadar ötelenmesinden elde edilebilir. Aynı yoldan gidilerek bir öteleme ile O ya göre bir simetri'nin toplamının (Şekil 18) O_1 e göre bir simetri olduğunu göstermek mümkündür. Şurası da unutulmamalıdır ki evvelâ öteleme sonra simetri yerine evvelâ simetri sonra öteleme şeklinde bir dönüşüm sırası takip edilirse netice değişmez.

Şimdi mühim bir problem daha inceleyelim. O_1 , O_2 noktalarına göre ardışık iki simetri (Şekil 19: $A \rightarrow A_1 \rightarrow A'$) nin O_1 den O_2 ye doğru olan yönde $2O_1O_2$ ye eşit bir ötelemeye muadil olduğunu görürüz.

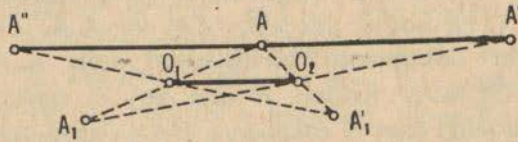
Bu iki simetri arasında bir sıra değişikliği yapılırsa (Şekil 19: $A \rightarrow A_1' \rightarrow A''$) bu iki hareketin bileşkisi olarak ay-



Şekil 18

nı mesafede fakat bu defa O_2 den O_1 e doğru olan yönde bir öteleme elde edilir.

Böylece iki simetri toplamının bu iki simetride takip edilen sıraya tâbi olduğu görülür. Genel olarak bu netice, dönüşümlerin toplamının bir özelliğidir. İki dönüşümün toplamı, genel olarak, şartların sırasına tâbidir.

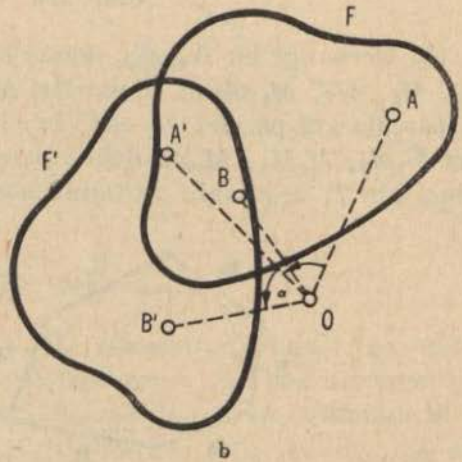
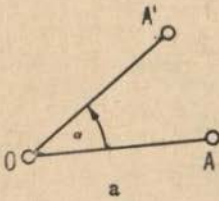


Şekil 19

İki simetrinin toplamından bahsederken simetriyi düzlemin her A noktasını A' noktastna tekabül ettiren bir dönüşüm olarak düşünmüştük. Bu dönüşümde sabit kalan yegâne noktanın O simetri merkezi olduğunu görmek güç değildir. Aynı şekilde bu dönüşümde değişmeyen doğrular da simetri merkezinden geçen doğrulardır.

13. (a) $O_1, O_2, \dots, O_n$ (n çift bir sayıdır.) noktaları aynı düzlemin noktaları ve AB de herhangi bir doğru parçası

zitif yön, saat ibrelerinin dönme yönünün tersi olsun. Düzlemin herhangi bir noktası A , $OA = OA'$ ve $\widehat{AOA'} = \alpha$ şartına uyan diğer bir noktası A' olsun. Bu takdirde A' noktası O noktası etrafında A noktasının α kadar dönmesinden veya kısaca A' noktası A dan bir dönme ile elde edilmiştir denir. (Şekil 23 a)



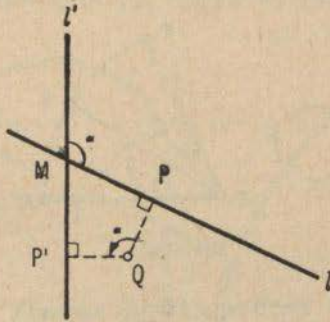
Şekil 23 a, b

Bir F şeklinin bütün noktalarının bir O noktası etrafında α açısı kadar dönmesi sonunda yeni bir F' şekli elde edilir. Bu esnada şeklin bütün noktaları aynı açı kadar dönerler.

Böylece elde edilen F' şekli, F şeklinden bir dönme sonunda elde edilmiş olur.

F' şekli F şeklinden α kadar bir dönme ile elde edilmiş ise karşıt olarak F şekli de F' den aynı yönde $360-\alpha$ kadar bir dönme ile elde edilebilir. Kısaca bu iki şeklin birinden diğerine bir dönme ile geçilebilir.

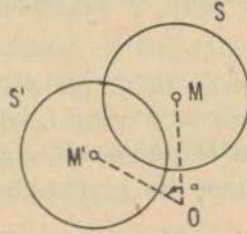
Bir l doğrusu bir O noktası etrafında bir döndürme sonunda yeni bir l' doğrusuna dönüştürülebilir. l' yi bulmak için O dan l ye çizilen dikmenin P ayağını α kadar döndürerek P' yi bulmak ve bu son noktadan OP' ye bir dikme çizmek kâfidir. (Şekil 24 a)



Şekil 24 a

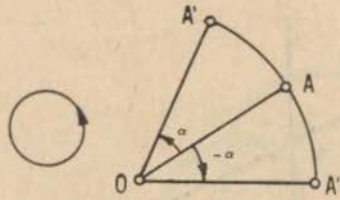
Aşikârdır ki l ve l' doğruları arasındaki α açısı dönme açısına eşittir. Bunu ispat etmek için şekildeki POP' ve lMl' açılarının kenarlarının aynı yönde birbirine dik olduklarına dikkat etmek kâfidir.

Bir S çemberinin bir O noktası etrafında döndürülmesinden bir S' çemberi elde edilir. S' çizmek için S in M merkezini dönme açısı olan α kadar döndürerek M' yi bulmak ve M' merkezli aynı yarı çaplı çemberi çizmek suretiyle ilk çemberi döndürmek mümkündür. (Şekil 24 b)



Şekil 24 b

Bir A noktası ve $OA = OA'$ şartıyla $\widehat{AOA'} = \alpha$ şartı verilir ve dönme yönü hakkında bir kayıt konmazsa A' ve A'' gibi iki nokta elde edilir. (Şekil 25)



Şekil 25

Bu iki noktadan herhangi birini seçmek için şekilde kullanılan oklardan faydalanılır. Oklarla gösterilen yönlerden biri pozitif kabul edilirse diğeri negatif olur. Diğer taraftan $\widehat{AOA'} = \alpha$ yı pozitif veya negatif olarak düşünebiliriz. Bu, A yı A' ye dönüştüren dönmenin yönüne bağlıdır. Buna göre A' ve A'' noktaları işaret bakımından farklı dönmelerden elde edilmiş olacaklardır. Bu ikili cevaptaki belirsizlikten kurtulmak ihtiyacı bizi yönlü açılar yani negatif ve pozitif açılar fikrine götürmektedir.

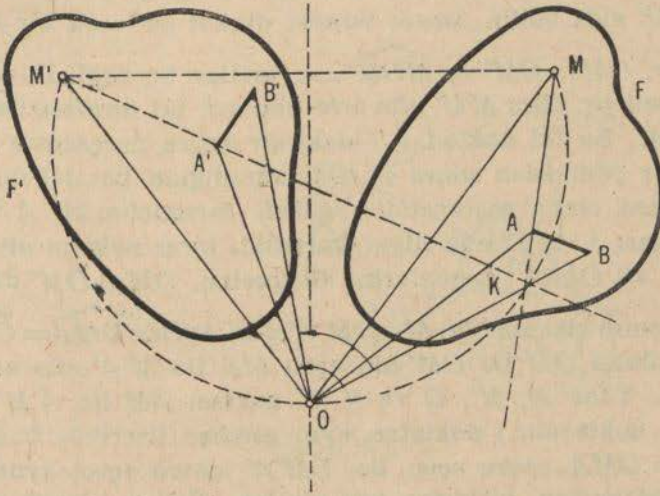
17. l_1 ve l_2 gibi iki doğru, bir A noktası ve bir α açısı verilmiş olsun. Merkezi A olan öyle bir çember çizin ki l_1 ve l_2 doğruları bu çember üzerinde merkezden α açısı ile görülen bir yay ayırsın.

18. Köşeleri verilen 3 paralel doğrunun veya verilen 3 aynı merkezli çemberin çevresi üzerinde bulunan bir eşkenar üçgen çiziniz.

19. Bir S çemberi, A ve B noktaları ve bir α açısı veriliyor. C ve D gibi öyle iki nokta bulunuz ki $CA \parallel DB$ ve CD yayı α ya eşit olsun.

20. S_1 ve S_2 çemberleri, bir A noktası ve bir α açısı veriliyor. A dan geçmek ve aralarında α kadar bir açı yapmak üzere öyle iki l_1 ve l_2 doğrusu çiziniz ki S_1 ve S_2 çemberleri bu iki doğru üzerinde eşit kırımlar ayırsın.

O merkezi ve α açısı ile verilmiş olan bir dönme bir F şeklini diğer bir F' şekline dönüştürmüş olsun. AB ve $A'B'$ de iki şeklin karşılıklı iki doğru parçası olsun. (Şekil 26)



Şekil 26

Bu takdirde OAB ve $OA'B'$ üçgenlerinin eşit oldukları aşikârdır. (İkişer kenarları ve aralarındaki açıları eşit üçgenler) AB ve $A'B'$ arasındaki açının α ya eşit olduğunu daha önce göstermiştik. Böylece F ve F' şekilleri birbirin-

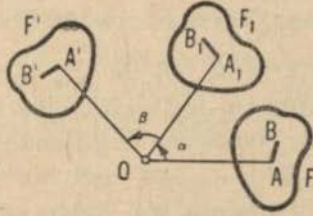
den bir dönme neticesinde elde edilmiş iseler bu iki şeklin karşılıklı doğru parçalarının aralarındaki açının dönme açısına eşit olduğu anlaşılır.

Karşıt olarak eğer bir F şeklinin her noktasına F' nin bir noktası tekâbüle ettirilebilir ve iki şeklin karşılıklı doğru parçaları arasında hep aynı α açısı meydana gelirse (F deki herhangi bir doğru parçası seçilen yönde α kadar dönmeyen sonra F' deki karşılığına paralel olursa) bu takdirde F ve F' şekillerinden biri diğerinden bir merkez etrafında α kadar bir dönme ile elde edilebilir. Hakikaten F ve F' nün karşılıklı birer noktası M ve M' olsun. MM' ytl α açısı ile gören yayın MM' nün orta dikmesi ile kesim noktasını

O ile gösterelim. $OM = OM'$ ve $\widehat{MOM'} = \alpha$ olduğundan O merkezi etrafında α kadar bir dönme sonunda M noktasından M' elde edilir. Ancak burada dikkat edilecek bir husus vardır. $OM = OM'$ ve $\widehat{MOM'} = \alpha$ şartları bir değil iki O noktası belirtir. Zira MM' nün orta dikmesi iki taraftan da uzatılabilir. Bu iki noktadan F deki bir doğru parçasının α kadar bir dönmeyen sonra F' deki karşılığına paralel duruma getirecek olanı seçilmelidir. Şimdi farzedelim ki A ve A' noktaları F ve F' nün diğer karşılıklı birer noktası olsunlar OMA ve $OM'A'$ üçgenlerini düşünelim. $OM = OM'$ dür (O noktasının çiziminden) $MA = M'A'$ dür. Ayrıca $\widehat{OMA} = \widehat{OM'A'}$ dır. Çünkü OM ile OM' nin açısı MA ile $M'A'$ nün açısına eşittir. Yani M, M', O ve K (K noktası AM ile $A'M'$ nün kesim noktasıdır.) noktaları aynı çember üzerinde bulunurlar ve OMA çevre açısı ile $OM'A'$ çevre açısı, aynı yayı gördüklerinden, birbirine eşit olurlar. Netice olarak OMA ve $OM'A'$ üçgenleri birbirine eşit olur. Böylece O merkezi etrafında α kadar bir dönmenin F deki her A noktasını F' deki bir A' noktasına götüreceği ispat edilmiş olur.

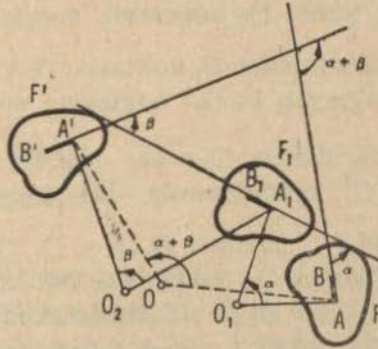
Şimdi şu soruya cevap verebiliriz: İki dönmenin toplamı nedir? Kolayca görülebilir ki bir O noktası etrafında

aynı yönde sırasıyla α ve β kadar iki dönmenin toplamı aynı nokta etrafında $\alpha + \beta$ ya eşit bir dönmedir. (Şekil 27 a)



Şekil 27 a

Şimdi genel şekli düşünelim. F_1 şekli O_1 merkezi etrafında F in α kadar dönmesinden ve F' şekli de F_1 in O_2 merkezi etrafında aynı yönde β kadar dönmesinden elde edilmiş olsun. (Şekil 27 b)



Şekil 27 b

Eğer birinci dönme F deki AB doğru parçasının F_1 deki A_1B_1 e dönüştürür ve ikinci dönme A_1B_1 i F' deki $A'B'$ ye dönüştürürse AB ve A_1B_1 doğru parçaları birbirine eşit olup aralarında α kadar; A_1B_1 ve $A'B'$ ise yine birbirine eşit olup aralarında β kadar bir açı teşkil ederler. F ve F' nün karşılıklı AB ve $A'B'$ doğru parçaları ise $\alpha + \beta$ büyük-

lüğünde bir açı meydana getirirler. Eğer $\alpha + \beta = 360^\circ$ ise iki şeklin karşılıklı doğruları birbirine paraleldir. Bundan şu netice çıkar: $\alpha + \beta \neq 360^\circ$ ise F den F' ye bir dönme ile, $\alpha + \beta = 360^\circ$ ise F den F' ye bir öteleme ile geçilir.

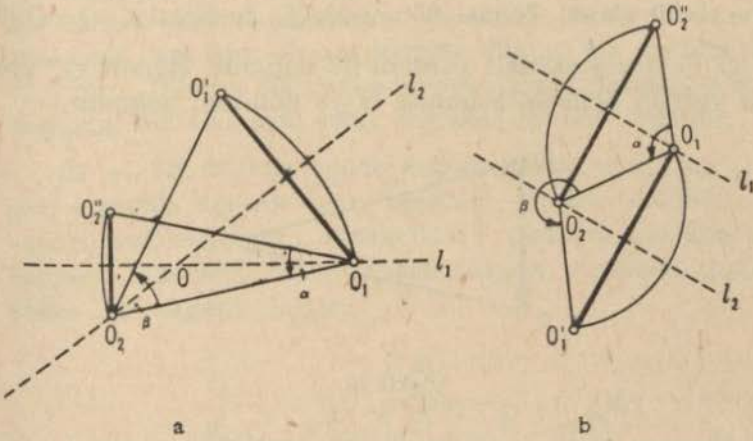
Böylece diyebiliriz ki O_1 ve O_2 merkezli α ve β gibi iki dönmenin yerine $\alpha + \beta \neq 360$ ise tek bir dönme ve $\alpha + \beta = 360$ ise bir öteleme uygulanabilir. α ya eşit bir dönme ters yönde $360 - \alpha$ ya eşit bir dönmeye eşit olduğundan isbatlanan teoremin son kısmı şöyle de ifade edilebilir: *Mutlak değerce eşit ve yönce aykırı iki dönmenin toplamı bir ötelemedir.*

Şimdi merkezleri O_1 ve O_2 olan α ve β derecelik iki dönme hareketinin yerine bu iki hareketin toplamını ifade eden bir dönmenin veya bir öteleminin nasıl yapılacağını gösterelim. Bunun için de evvelâ $\alpha + \beta \neq 360$ farzedelim. Bu takdirde iki dönmenin toplamı $\alpha + \beta$ derecelik bir dönme olur. Şimdi bu dönmenin merkezini bulalım. İki dönme hareketinin toplamı O_1 noktasını $O'_1O_2 = O_1O_2$ ve $\widehat{O_1O_2O'_1} = \beta$ şartını sağlayan bir O'_1 noktasına dönüştürür (Şekil 28 a).

Birinci dönme O_1 e yer değiştirmez. Fakat ikincisi aynı noktayı O'_1 e dönüştürür. İki dönmenin toplamı sonunda şeklin bir O_2'' noktası $O_2O_1 = O_2''O_1$ ve $\widehat{O_2''O_1O_2} = \alpha$ şartlarını sağlayan O_2 noktasına dönüşmüş olur. Burada birinci dönme O_2'' yü O_2 ye dönüştürürken ikinci dönme O_2 yi sabit bırakır. Bundan çıkacak netice şudur. Aranılan O merkezi bir yandan O_2 , O_2'' noktalarından ve bir yandan da O'_1 ve O_1 noktalarından eşit uzaklıktadır. Şu halde O noktası O_2O_2'' ve O'_1O_1 doğru parçalarının l_1 ve l_2 orta dikmelerinin kesim noktasıdır. Şekil 28 a dan aşikârdır ki, l_1 doğrusu O_1 den geçer ve $\widehat{l_1O_1O_2} = \frac{1}{2} \alpha$ dir. Aynı şekilde l_2 doğrusu O_2 den geçer ve $O_1O_2l_2 = \frac{1}{2} \beta$ dir. Bu bağıntılar

yardımı ile l_1 ve l_2 doğruları kolayca belirtilir ve aranan dönme merkezi de aynı iki doğrunun kesim noktası olur.

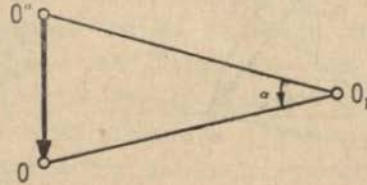
Eğer $\alpha + \beta = 360$ ise bu takdirde dönme hareketlerinin toplamına eşit olan öteleme, bu dönüşümün O_1 i O_1' ye götürmesi (veya O_2'' yü O_2 ye götürmesi) özeliğinden faydalanılarak belirtilir. Burada O_1' ve O_2'' noktaları evvelce izah ettiğimiz gibi tarif edilirler (Şekil 28 b).



Şekil 28

Bu takdirde evvelki çizimde geçen l_1 ve l_2 doğrularının birbirine paralel olduğu kolayca anlaşılır. Zira her ikisi de öteleme doğrultusuna dik ve aralarındaki uzaklık ötelemenin yarısına eşittir. İki dönme hareketinin toplamına ait teoremin isbatına benzer bir yoldan isbat edilebilir ki, bir öteleme ile bir dönmenin (veya bir dönme ile bir ötelemenin) toplamı birinci dönmenin açısına eşit, fakat başka bir merkez etrafında yeni bir dönmedir. İlk dönmenin Q merkezi ve α açısı ile ötelemenin mesafe ve doğrultusu verilmiş iken bu son dönmenin O_1 merkezinin bulunmasını okuyucuya bırakıyoruz.

Bir öteleme ile bir dönmenin toplamı hakkındaki teorem şu suretle de isbat edilebilir. Biliyoruz ki mutlak değerleri eşit, yönleri ters olan iki dönmenin toplamı bir ötelemedir. Bu hareket, bir O_2 noktasını O_2'' gibi bir noktaya dönüştürür ve $O_1O_2 = O_1O_2''$ ve $\widehat{O_2''O_1O_2} = \alpha$ (Şekil 28 b bak) eşitlikleri doğru olur. Verilen ötelemeyi iki dönmenin toplamı halinde gösterelim. Bu dönme hareketlerinden ikincisi esas dönme ile aynı merkezli ve aynı α açısı kadar, fakat ters yönlü olsun. Birinci dönmenin O_1 merkezi $O_1O = O_1O''$ ve $\widehat{O''O_1O} = \alpha$ şartları yardımı ile bulunur. Burada O'' noktası verilen öteleme sonunda O ya dönmüşen noktadır.



Şekil 29

Böylece öteleme ve dönme hareketlerinin toplamı yerine üç dönmenin uygulanabileceğini öğrenmiş oluyoruz. Ancak, bu üç dönme sonunda son ikisi birbirini yok edeceği için sonuç olarak elde O_1 etrafında tek bir dönme kalır.

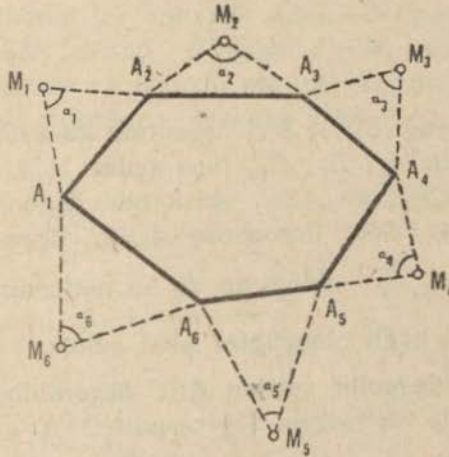
Benzer bir yoldan gidilerek bir dönme ile bir ötelemenin toplamı hakkında da teorem isbat edilebilir.

Ötelemelerin ve dönmelerin toplanması ile ilgili teoremlerin isbatlarının mukayesesi yapılacak olursa bu iki geometrik hareketin özellikleri arasında hayret verici bir benzerlik bulunur. Hatta daha geniş bir görüşle ötelemeyi özel bir dönme olarak düşünebiliriz. Öteleme ve dönmenin ikisine birden "yer değiştirmeler,, veya "özel hareketler,, denir. Bu adın verilmesinin sebebi, ikinci faslın ikinci bölümünde izah edilecektir.

Yarı dönme, dönmenin özel bir halidir ve $\alpha = 180^\circ$ ye tekabül eder. $\alpha = 360^\circ$ halinde ise başka bir özel durum elde edilir. $\alpha = 360^\circ$ ile yapılan bir dönme düzlemin her noktasını ilk durumuna getirir. Düzlemin hiç bir noktasını değiştirmeyen bu harekete ayniyet (özdeşlik, identity) denir.

Yarı dönmede olduğu gibi, bir dönme, düzlemin her A noktasını yeni bir A' noktasına dönüştüren bir hareket olarak düşünülebilir. *Bu harekette tek bir sabit nokta, dönmenin merkezi olan O noktasıdır.* ($\alpha = 360^\circ$ derece veya 360° derecenin tam katı olması halinde dönme bir ayniyet (identity) olur. Dönme bir ayniyet veya yarım dönme olmadıkça herhangi bir dönmede sabit doğrular mevcut değildir.

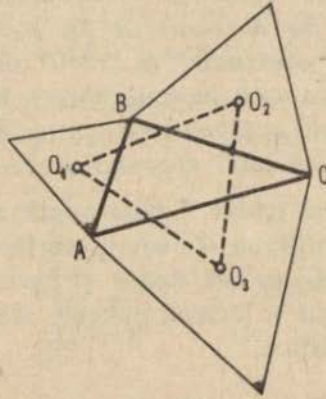
21 — Bir düzlem içinde n tane nokta ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gibi n sayıda açı veriliyor. Tepeleri, verilen noktalar; tepe açıları, verilen açılar olmak üzere çizilecek ikizkenar üçgenlerin tabanları bir n kenarlı çokgen meydana getirmek üzere bu çokgeni çiziniz.



Şekil 30

15 inci problem 21 inci problemin n in tek ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 180^\circ$ olması özel halidir.

22 (a) Herhangi bir ABC üçgeninin dışına, kenarları sırası ile bu üçgenin kenarları olmak üzere eş kenar üçgenler çiziniz. Elde edeceğimiz eşkenar üçgenlerin O_1, O_2, O_3 merkezlerinin dördüncü bir eşkenar üçgen meydana getireceğini isbatlayınız. Eşkenar üçgenlerin köşeleri verilen üçgenin dışında olmazsa bu teorem doğru kalırmı?



Şekil 31

(b) Herhangi bir ABC üçgeninin kenarları üzerine ve üçgenin dışında A_1, B_1, C_1 , tepe açıları α, β, γ olmak üzere BCA_1, ACB_1 , ve ABC_1 ikizkenar üçgenleri çiziliyor. Eğer $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ derece ise $A_1B_1C_1$ üçgeninin açıları-
nın $\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{2}$ ve $\frac{\gamma}{2}$ olduğunu ve bu neticenin ABC üçgeninin biçimine bağlı olmadığını isbat ediniz.

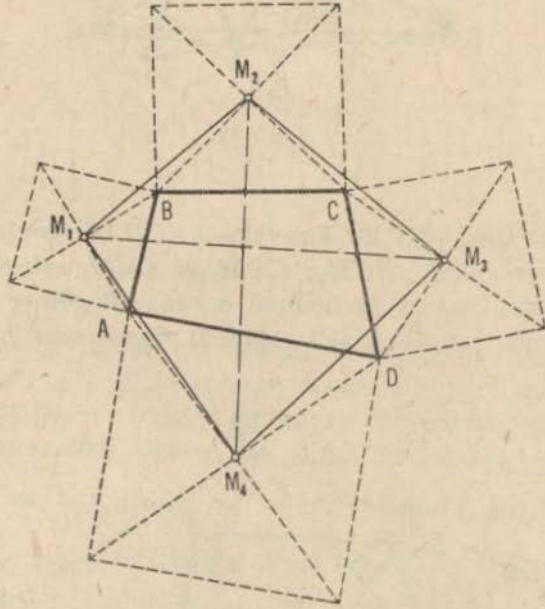
Ikizkenar üçgenler verilen ABC üçgeninin dışında çizilmediği takdirde bu teorem doğrumudur?

Problem 22 (a), problem 22 (b) nin $\alpha = \beta = \gamma$ özel halinden başka bir şey değildir.

23. Herhangi bir ABC üçgeninin kenarları üzerine A ve A_1 noktaları ile B ve B_1 noktaları sırası ile BC ve AC

kenarlara göre dörtgenin bulunduğu düzlem kısmında yer aldığına göre $M_1M_2M_3M_4$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu isbat ediniz.

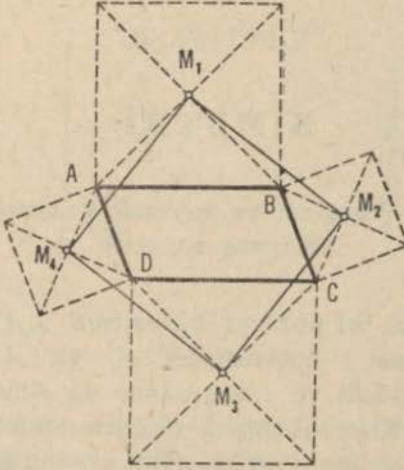
(b) Herhangi bir $ABCD$ konveks dörtgeninin kenarları üzerine ve kenarlara göre dörtgenin bulunmadığı düzlem bölgesinde dört kare çiziliyor. Bu karelerin merkezleri M_1, M_2, M_3 ve M_4 olduğuna göre $M_1M_3 = M_2M_4$ ve $M_1M_3 \perp M_2M_4$ olduğunu gösteriniz.



Şekil 33 b

(c) Bir $ABCD$ paralelkenarının kenarları üzerine ve şeklin bulunmadığı tarafa doğru kareler çiziliyor. Bu karelerin M_1, M_2, M_3, M_4 merkezlerinin bir karenin köşeleri

olduğunu isbat ediniz. Kareler şeklin içine doğru teşkil edildiği takdirde aynı iddia bahis konusu olabilir mi ?



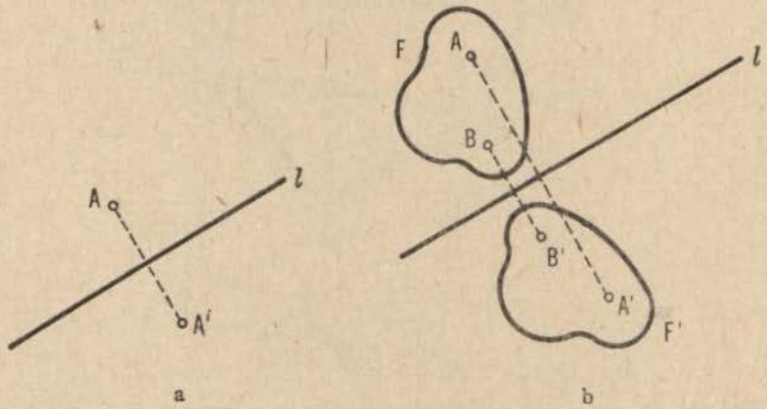
Şekil 33 c

İKİNCİ FASIL

SİMETRİ

1. Yansıma ve kayarak yansıma (Kaymış simetri)

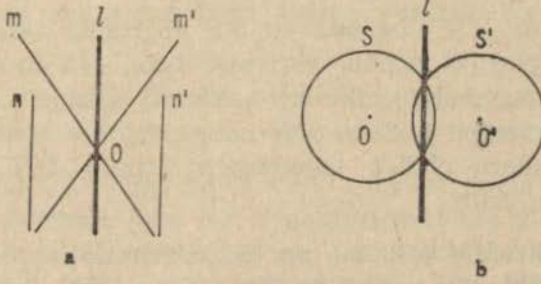
A ve A' gibi iki noktayı birleştiren AA' doğru parçasının orta dikmesi l doğrusu ise A' ye A nın simetriği (yansımış görüntüsü) ve l doğrusuna da simetri eksenini denir. Eğer A' noktası A nın l ye göre simetriği ise karşıt olarak A noktası da A' nün aynı eksene göre simetriğidir. (Şekil 34 a ve b)



Şekil 34

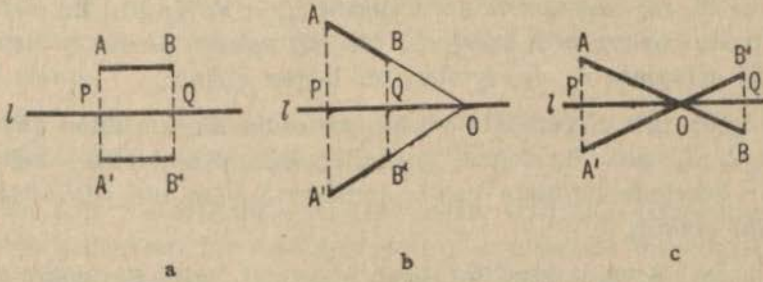
Herhangi bir doğrunun bir l doğrusuna göre simetriği gene bir doğru; eksenini bir O noktasında kesen bir doğrunun simetriği aynı noktadan geçen bir doğru ve eksene

paralel bir doğrunun simetrigi kendisine paralel bir doğrudur. Bunun gibi, bir çemberin simetrigi kendisine eş bir çemberdir.



Şekil 35

Bunu isbat etmek için meselâ her AB doğru parçasının kendi simetrigi olan $A'B'$ ye eş olduğunu göstermek kâfidir. Böylece meselâ (şekil 36 a) ya bakılacak olursa $AB = PQ = A'B'$; 36 b ve 36 c ye göre de $AB = A'B'$ elde edilir. Çünkü $\triangle AOP = \triangle A'OP$, $\triangle BOQ = \triangle B'OQ$ ve bu sebeple $OA = OA'$ ve $OB = OB'$ dır. Bundan şu sonuca varılır: Bir O noktasından r kadar uzakta olan noktaların simetriklerinin geometrik yeri, O nun simetrigi olan O' noktası merkez ve r yarı çap olmak üzere bir çemberdir.

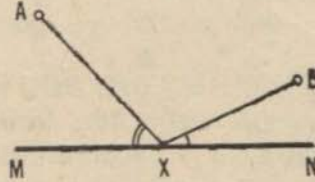


Şekil 36

25. (a) Bir MN doğrusu ve bu doğrunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. MN üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki AX ve BX doğruları MN ile $\widehat{AXM} = \widehat{BXN}$ şartına uygun açılar yapsın.

(b) Bir MN doğrusu ve bu doğrunun aynı tarafında S_1 ve S_2 gibi iki çember verilmiş olsun. MN üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki bu noktadan birinci çembere çizilen teğetlerden birinin MN ile yaptığı açı aynı noktadan ikinci çembere çizilen teğetlerden birinin MN ile yaptığı açıya eşit olsun.

(c) Bir MN doğrusu ve bu doğrunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. MN üzerinde öyle X noktası bulunuz ki AX ve BX doğru parçalarından birinin MN ile yaptığı açı diğerinin aynı doğru ile yaptığı açının iki katı olsun ($\widehat{AXM} = 2\widehat{BXN}$).



Şekil 37

26. (a) Aynı noktadan geçen l_1 , l_2 ve l_3 gibi üç doğru ile bunlardan biri üzerinde bir A noktası verilmiş olsun. Açı ortayları l_1 , l_2 , l_3 olan bir üçgen çiziniz.

(b) Bir S çemberi ve bu çemberin merkezinden geçen l_1 , l_2 , l_3 gibi üç doğru verilmiş olsun. Köşeleri bu doğrular üzerinde bulunan ve iç çemberi S olan bir ABC üçgenini çiziniz.

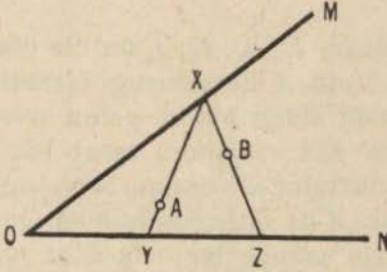
(c) Aynı noktadan geçen l_1 , l_2 , l_3 gibi üç doğru ve bunlardan biri üzerinde bir A_1 noktası veriliyor. A_1 noktası

BC kenarının orta noktası ve l_1, l_2, l_3 doğruları üçgenin kenarlarının orta dikmeleri olacak şekilde bir ABC üçgenini çiziniz.

27. (a) Bir üçgenin AB tabanı, bu kenara ait yüksekliği ve taban açılarının farkı olan γ verilmiş iken üçgeni çiziniz.

(b) Bir üçgenin iki kenarı ve bu kenarların üçüncü kenarla yaptığı açılarının farkı verilmiş iken üçgeni çiziniz.

28. Bir MON açısı ve A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. OM üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki Y ve Z noktaları sırası ile XA ve XB nin ON ile kesim noktaları olduğuna göre, XYZ üçgeni $XY = XZ$ olacak şekilde ikizkenar olsun.



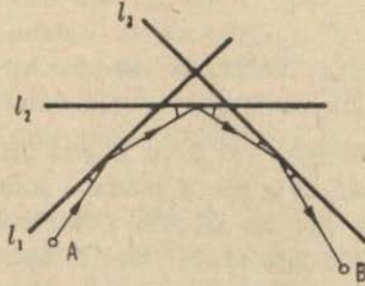
Şekil 38

29. (a) Kenarlarının uzunlukları verilen öyle bir dörtgen çiziniz ki bu dörtgenin AC köşegeni A açısının açı ortayı olsun.

(b) AB ve AD kenarları ile B ve D deki açıları verilen bir teğetler dörtgenini çiziniz.

30. (a) Bir bilârdö topu bir doğru üzerinde hareketle bilârdö masasının bir kenarına çarpıyor ve başka bir doğru üzerinde yansıyor. Her iki doğrunun masanın çarpılan kenarı ile eşit açılar yaptığı da ayrıca biliniyor.

A ve B noktaları, kenarları $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ olan n kenarlı bilârdó masanın iki noktası olsun. A noktasında bulunan topun ardışık n çarpmadan sonra B den geçmesi için ilk doğrultu ne olmalıdır? ($n=3$ hali için şekil 39 a bak).



Şekil 39

(b) n in 4 olduğu, l_1, l_2, l_3, l_4 ün bir dikdörtgen meydana getirdiği ve B nin A ile çakıştığı farzediliyor. Bu takdirde bilârdó topunun aldığı bütün yolun dikdörtgenin köşegenleri toplamına eşit olduğunu isbat ediniz. (Yani bu netice A nın masa üzerindeki yerine bağlı değildir.) Şayet top son durum olan A da durmazsa dik-dörtgenin bütün kenarları üzerinde aynı şekilde bir defa daha yansıyarak nihayet A da duracağını isbat ediniz.

31. (a) Bir l doğrusu ve bu doğrunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. l üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki $XA + XB = a$ olsun. (a verilen bir uzunluktur.)

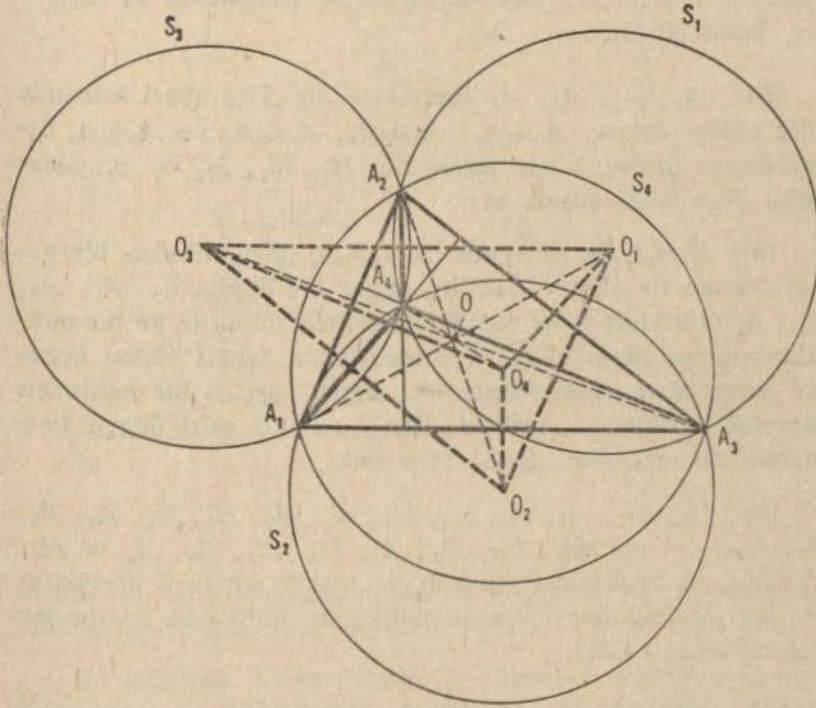
(b) Bir l doğrusu ve bu doğrunun ayrı taraflarında A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. Doğru üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki $XA - XB = a$ olsun. (a verilen bir uzunluktur.)

Not: 39'uncu problemin b ve a kısımları 26 ncı problemin a ve c kısımlarının genelleşmiş şeklidir.

32. (a) Bir ABC üçgeni ve bu üçgenin yüksekliklerinin kesim noktası olan H noktası göz önüne alınıyor. H ın kenarlara göre simetriklerinin üçgenin çevrel çemberi üzerinde bulunduğunu isbat ediniz.

(b) Bir üçgenin ortosantrının kenarlara göre simetrikleri olan H_1, H_2 ve H_3 verildiğine göre bu üçgeni çiziniz.

33. A_4 noktası $A_1A_2A_3$ üçgeninin ortosantrı olacak şekilde düzlemin A_1, A_2, A_3, A_4 gibi dört noktası verilmiş olsun. $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4, A_2A_3A_4$ üçgenlerinin çevrel çemberleri sırası ile S_4, S_3, S_2 ve S_1 ve bu çemberlerin merkezleri O_4, O_3, O_2, O_1 olduğuna göre:



Şekil 40

(a) A_1 noktası $A_2A_3A_4$ üçgeninin, A_2 noktası $A_1A_3A_4$ üçgeninin ve A_3 noktası $A_1A_2A_4$ üçgeninin ortosantrları olduğunu isbat ediniz.

(b) S_1, S_2, S_3 ve S_4 çemberlerinin birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

(c) $O_1O_2O_3O_4$ dörtgeni $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeninden bir O noktası etrafında yapılacak bir yarım dönmeden elde edilebilir. Başka bir deyim ile eğer A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarından herbiri diğer üçü tarafından meydana gelen üçgenin ortosantrı ise bu noktalardan herbirini diğer üçünün teşkil ettiği üçgenin çevrel çemberinin merkezine birleştiren üç doğru parçası aynı O noktasından geçerler ve yarı dönme merkezi olan bu O noktası üç doğru parçasının da ortasıdır, isbat ediniz.

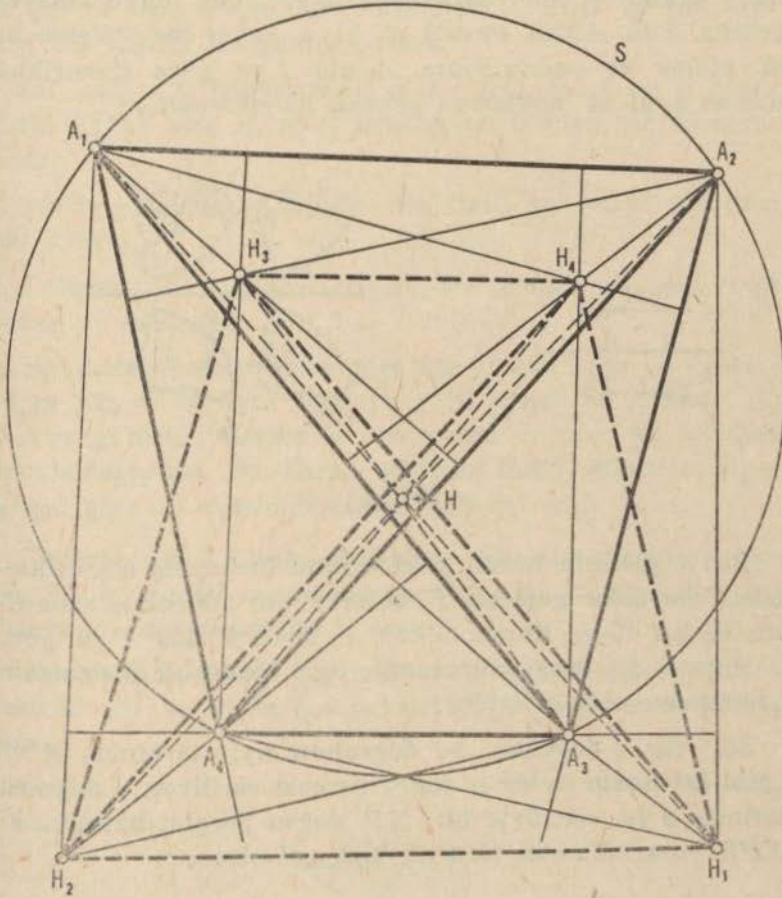
34. A_1, A_2, A_3, A_4 noktaları bir S çemberi üzerinde dört nokta olsun. $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4$ ve $A_2A_3A_4$ üçgenlerinin ortosantrları sırası ile H_4, H_3, H_2 ve H_1 olduğuna göre isbat ediniz ki:

(a) $H_1H_2H_3H_4$ dörtgeni $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeninden bir yarım dönme ile elde edilebilir. Diğer bir deyim ile A_1, A_2, A_3, A_4 noktaları aynı çember üzerinde bulunur ve bu noktalardan her birini diğer üçü tarafından teşkil edilen üçgenin ortosantrına birleştiren dört doğru parçası bir noktadan geçerler ve dönme merkezi olan bu nokta dört doğru parçasının da ortasıdır. (Şekil 41 e bak)

(b) $H_3, H_4, A_1, A_2; H_2, H_4, A_1, A_3; H_2, H_3, A_2, A_4; H_2, H_4, A_2, A_3; H_1, H_3, A_2, A_4; H_1, H_2, A_3, A_4$ ve H_1, H_2, H_3, H_4 noktaları yardımı ile teşkil edilen 7 dörtgenin her biri bir çember içine çizilebilir ve bütün bu çemberler S çemberine eşittir.

35. İki den fazla simetri ekseni bulunan bir poligonun bütün eksenlerinin aynı noktadan geçtiğini isbat ediniz.

Bir A noktasının bir l doğrultusuna göre simetriki A_1

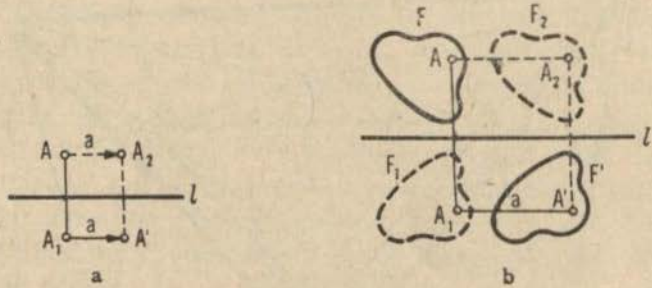


Şekil 41

olsun. A_1 in l doğrultusunda ve a kadar ötelenmesinden elde edilen noktaya A' diyelim. (Şekil 42 a ve b ye bak)

Bu takdirde A' ye A nın l eksenı boyunca a kadar ötelenmiş simetriki veya kaymış görüntüsü adı verilir. Başka bir deyimle bir *ötelenmiş simetri*, bir l doğrusuna göre

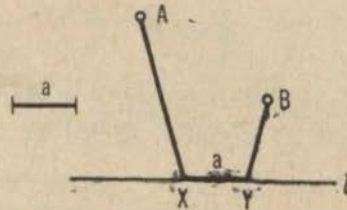
simetri ile l doğrultusunda bir ötelemenin toplamıdır. (Bu toplamda sıranın önemi yoktur. Şekil 42 a dan bunu kolayca görürüz. Zira A dan evvelâ A_2 yi a kadar bir öteleme ile elde etmek ve ondan sonra A_2 nin l ye göre simetrikini bularak aynı A' noktasına gelmek mümkündür.)



Şekil 42

Bir F şeklinin bütün noktalarının ötelenmiş simetriklerinden meydana gelecek F' şekli F nin ötelenmiş simetrikidir (Şekil 42-b). Karşıt olarak F şekli F' den l ye göre bir simetri ile l doğrultusunda ters yönde bir ötelemenin toplamından elde edilebilir.

36. Bir l doğrusu, bu doğrunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta ve bir a doğru parçası veriliyor. l doğrusu üzerinde a ya eşit öyle bir XY doğru parçası bulunuz ki $AXYB$ yolu mümkün olan en kısa yol olsun.



Şekil 27 a

37. (a) AB , CD kenarları ile $AD + BC$ ve A köşesinin CD ye olan d uzaklığı verilen ve $\widehat{C} = \widehat{D}$ şartını sağlayan bir $ABCD$ dörtgenini çiziniz.

(b) AB , CD kenarları ile $AD + BC$ ve A ve B köşelerinin CD ye olan d_1 ve d_2 uzaklıkları bilinen bir dörtgeni çiziniz.

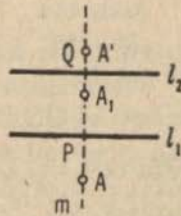
Şimdi simetrilerin toplamı ile ilgili aşağıdaki teorileri ispat edelim.

Teorem — 1: *Aynı doğruya göre ardışık iki simetrisinin toplamı bir özdeşliktir.*

Hakikaten l doğrusuna göre bir simetri A yı A' (Şekil-34 a ya bk) ye ve aynı doğruya göre ikinci bir simetri A' yı A ya götürür. Kısaca A noktasının durumu bu hareket sonunda değişmez. Bu teorem şöyle de ifade edilebilir: *Aynı doğruya göre iki simetri birbirini götürür.*

Teorem — 2: *Paralel doğrulara göre iki simetrisinin toplamı, bu iki paralel arasındaki uzaklığın iki katına eşit ve paralellere dik doğrultuda bir ötelemedir.*

Düzlemin herhangi bir noktası A , bu noktanın l_1 e göre simetrik A_1 ve A_1 in l_1 e paralel l_2 ye göre simetrik A' olsun.



Sekil 44 a

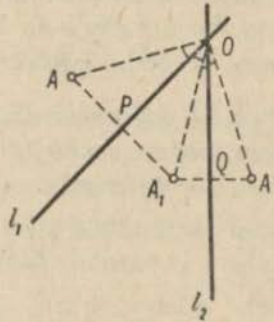
Bu takdirde $l_1 \perp AA_1$, $l_2 \perp A_1A'$ ve bu sebeple A ve A_1 noktaları ile A' noktası l_1 ve l_2 ye dik aynı m doğrusu

üzerinde bulunurlar. m nin l_1 ve l_2 ile kesim noktaları P ve Q ise $PA_1 = AP$ ve $QA' = A_1Q$ olur. Öte yandan Şekil 44— a ya göre:

$AA' = AP + PA_1 + A_1Q + QA' = 2PA_1 + 2A_1Q = 2PQ$ elde edilir Birinci teorem ikincinin $PQ = O$ özel halinden başka bir şey değildir.

Teorem — 3: Kesişen iki doğruya göre iki simetrinin toplamı, dönme merkezi bu doğruların kesim noktası ve dönme açısı bu doğrular arasındaki açının iki katı kadar olan bir dönmedir.

Düzlemin herhangi bir noktası A , A nın l_1 e göre simetrikisi A_1 ve A_1 in l_2 ye göre simetrikisi A' ve l_1, l_2 doğrularının kesim noktası O olsun.



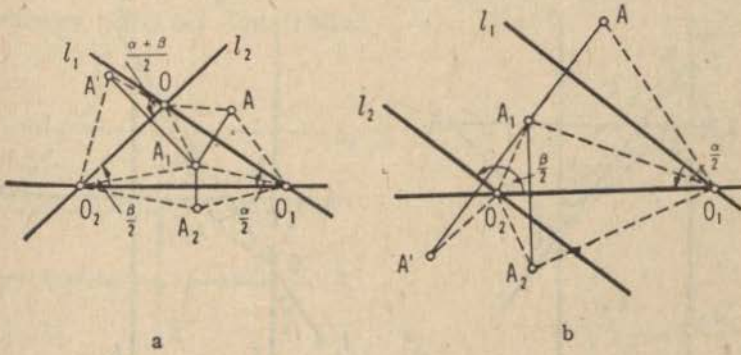
Şekil 44 b

AA_1 ve A_1A' nın l_1 ve l_2 ile kesim noktaları sırasıyla P ve Q ise $\triangle AOP \cong \triangle A_1OP$ ve $\triangle A_1OQ \cong \triangle AOQ$ bulunur. Bunun neticesi olarak da $OA = OA_1 = OA'$ ve $\widehat{AOP} = \widehat{POA_1}$, $\widehat{A_1OQ} = \widehat{QOA'}$ elde edilir. Bu da:

$\widehat{AOA'} = \widehat{AOP} + \widehat{POA_1} + \widehat{A_1OQ} + \widehat{QOA'} = 2\widehat{POA_1} + 2\widehat{A_1OQ} = 2\widehat{POQ}$ yü verir. Böylece $OA = OA'$ ve $\widehat{AOA'} = 2\widehat{POQ}$ olduğu bulunmuş olur.

İkinci ve üçüncü teoremler iki dönmenin veya bir dönme ile bir ötelemenin toplamı ile ilgili teoremleri kolayca ispatlamaya yarar.

Meselâ O_1 ve O_2 merkezli α ve β kadar iki dönmenin toplamının bulunması istenmiş olsun. Üçüncü teoreme göre ilk dönmenin yerine l_1 ve O_1O_2 ye göre iki simetrisinin toplamı alınabilir. Burada l_1 doğrusu O_1 den geçmekte ve $\widehat{l_1O_1O_2} = \frac{1}{2} \alpha$ dir. Aynı şekilde ikinci dönmenin yerine, l_2 doğrusu O_2 den geçen bir doğru olmak üzere, O_1O_2 ve l_2 ye göre iki simetrisinin toplamını almak mümkündür. Bu takdirde de $\widehat{O_1O_2l_2} = \frac{1}{2} \beta$ dir.

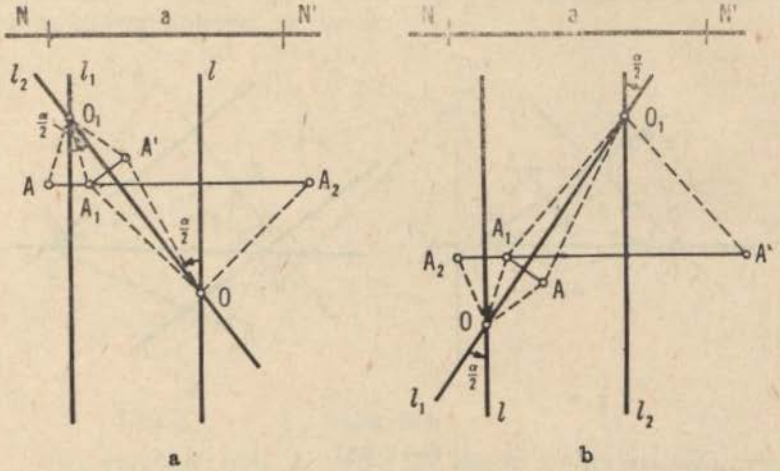


Şekil 45

Böylece iki dönmenin toplamı l_1 , O_1O_2 , O_1O_2 ve l_2 ye göre dört simetrisinin toplamı haline konabilir. Ancak bu dört simetriden ikincisi ile üçüncüsü birbirini birinci teorem gereğince yok eder. Böylece l_1 , O_1O_2 , O_1O_2 ve O_2 ye göre dört simetrisinin toplamını l_1 ve l_2 nin kesişim noktası O ise ikinci teoreme göre bu iki simetrisinin toplamı merkezi O ve dönme açısı $2 \widehat{l_1OO_2}$ olan bir dönmedir. Şekil 45-a dan $2 \widehat{l_1O_1O_2} = \alpha$ ve $2 \widehat{O_1O_2l_2} = \beta$ olduğu kolayca görülebilir. (l_1OO_2 açısı O_1O_2O üçgeninin dış açısıdır.)

Eğer l_1 ve l_2 doğruları paralel ise (Şekil 45-b den kolayca görülür ki bu hal $\widehat{l_1 O_1 O_2} + \widehat{O_1 O_2 l_2} = 180^\circ$ yani $\alpha + \beta = 360^\circ$ olunca mümkündür) bu takdirde ikinci teoreme göre l_1 ve l_2 ye göre iki simetrisinin toplamı bir öteleme olur.

Şimdi NN' doğrultusunda a kadar bir öteleme ile bir O merkezi etrafında α kadar bir dönmenin toplamını bulalım. Burada verilen öteleme yerine O dan geçen ve NN' ye dik olan bir l doğrusu ile bu doğrudan $a/2$ kadar mesafede gene NN' ye dik bir l_1 doğrusuna göre iki simetrisinin toplamını alabiliriz. (Şekil 46 a)



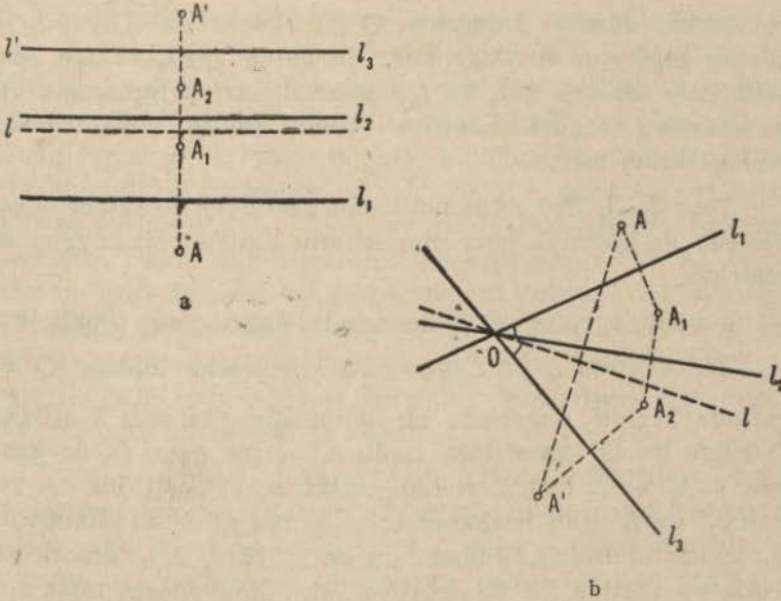
Şekil 46

O etrafındaki dönmeyi de l ye göre bir simetri ile l_2 ye göre bir simetrisinin toplamı haline koyabiliriz. Burada l_2 doğrusu O dan geçen ve $l O l_2 = \frac{\alpha}{2}$ şartını sağlayan bir doğrudur. Böylece bir öteleme ile bir dönmenin toplamı l_1 , l ve l_2 gibi dört doğruya göre dört simetrisinin toplamına çevrilmiş olur. Bu dört simetriden ortadaki ikisi birinci

teoreme göre birbirini yokeder. Sonuç olarak l_1 ve l_2 ye göre iki simetri kalır ve bu da üçüncü teoreme göre l_1 ile l_2 nin kesiştiği O_1 noktası etrafında $2 \cdot \widehat{l_1 O_1 l_2} = 2 \cdot \widehat{l O_1 l_2} = \alpha$ değerinde bir dönmedir.

Benzer surette Q etrafında α kadar bir dönme ile NN' doğrultusunda α kadar bir ötelemenin toplamı aynı α açısı değerinde bir dönmedir. Bu dönmenin O_1 merkezini bulmak için O dan $l \perp NN'$ ve $\widehat{l_1 O l} = \frac{\alpha}{2}$ şartlarına uygun l ve l_1 doğruları geçirilir. Bundan sonra da l den $\alpha/2$ kadar uzaklıkta l ye paralel bir l_2 doğrusu çizilir. l_1 ile l_2 nin kesiştiği nokta aranan O_1 noktasıdır. (Şekil 46 b)

Teorem 4. Paralel üç doğruya veya bir noktada kesişen üç doğruya göre alınan simetrilerin toplamı tek bir doğruya göre bir simetridir.



Şekil 47

Önce l_1 , l_2 ve l_3 ün paralel olduklarını farzedelim. (Şekil 47 a)

İkinci teoreme göre l_1 ve l_2 ye göre iki simetrisinin toplamı bu iki doğruya dik doğrultuda ve paraleller arasındaki uzaklığın iki katına eşit bir ötelemedir. Bu öteleme l_1 ve l_2 ye aynı uzaklıkta paralel l ve l' gibi iki doğruya göre alınacak iki simetrisinin toplamıyla aynı sonucu verir. Şimdi l' nün bir l_3 poğrusu ile çakıştığını farzederek üç simetrisinin toplamı yerine l , l' ve l_3 doğrularına göre simetriler toplamını alalım. Birinci teoreme göre bu simetrilere son ikisi birbirini yokeder ve elde l ye göre bir simetri kalır.

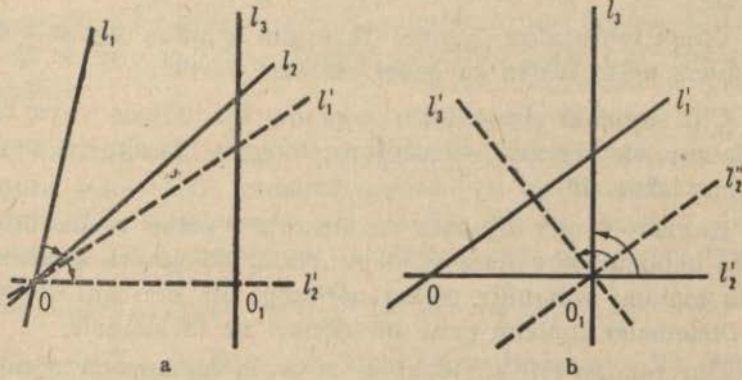
Şimdi de l_1 , l_2 ve l_3 bir O noktasında kesiştiklerini farzedelim. (Şekil 47 b) Üçüncü teoreme göre l_1 ve l_2 ye göre iki simetrisinin toplamı O etrafında $2 \cdot \widehat{l_1 O l_2}$ ye eşit bir dönmedir ve bu dönme l ve l_3 e göre iki simetrisinin toplamı ile çakışiktır. Burada l doğrusu O dan geçen ve $\widehat{l O l_3} = \widehat{l_1 O l_2}$ şartını sağlayau bir doğrudur. Şu halde l_1 , l_2 ve l_3 e göre simetriler toplamı l , l_3 ve l_3 e göre simetriler toplamına veya sadece l ye göre simetriye (çünkü son iki simetri birbirini götürür) eşittir.

Teorem 5. Üçü aynı noktadan geçmiyen ve ikişer ikişer kesişen üç doğruya göre simetrilerin toplamı bir kaymış simetridir.

l_1 ve l_2 doğruları O da kesişen iki doğru olsun (Şekil 48 a)

Bu takdirde l_1 ve l_2 ye göre simetrisinin toplamı O etrafında $2 \cdot \widehat{l_1 O l_2}$ değerinde bir dönmedir (Teorem 3 e bak). O halde bu iki simetrisinin toplamı yerine gene O da kesişen ve l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açıya eşit bir açı yapan l_1' ve l_2' gibi herhangi iki doğruya göre iki simetrisinin toplamını alabiliriz. Bunun için de l_2' yü $l_2' \perp l_3$ olacak şekilde ve verilen ilk üç doğruya göre simetrilerin toplamını da l_1' , l_2' ve l_3 e göre simetrilerin toplamı olarak veya başka bir ifadeyle l_1' ye göre bir simetri ile l_2' ve l_3 ün

kesiştigi O_1 noktası etrafında bir yarı dönmenin toplamı halinde düşünebiliriz.



Şekil 48

Şimdi birbirine dik l_2' ve l_3 e göre simetrilerin toplamını gene O_1 de kesişen ve birbirine dik olan l_2'' ve l_3' doğrularına göre iki simetrinin toplamı haline koyalım. Burada $l_2'' // l_1'$ (Şekil 48'b) dır ve l_2'' ve l_3' ye göre simetrilerin toplamı bir yarı dönme olduğundan bu dönüşüm mümkündür. Bu takdirde l_1' , l_2' ve l_3 e göre simetrilerin toplamı yerine l_1' , l_2'' ve l_3' ye göre simetrilerin toplamı alınabilir. Fakat ikinci teoreme göre paralel l_1' ve l_2'' doğrularına göre iki simetri yerine bu iki doğruya dik l_3' doğrultusunda bir öteleme alınabilir. Şu halde l_1' , l_2'' ve l_3' ye göre alınacak simetriler toplamı, l_3' doğrultusunda bir öteleme ile gene bu doğruya göre bir simetrinin toplamına yani kaymış bir simetriye eşittir.

l_1 ile l_2 paralel oldukları ve l_2 ile l_3 doğruları bir O noktasında kesiştikleri takdirde ispat tamamen aynı şekilde yapılır. (Bu takdirde ilk iş l_2 ve l_3 e göre simetrinin toplamını aynı O noktasında kesişen ve $l_2' \perp l_1$ şartını sağlayacak l_2' ve l_3' doğrularına göre simetrilerin toplamına çevirmek, sonra da l_1 ve l_2' ye göre simetrilerin toplamını O_1

da kesişen ve $l_2'' = l_3'$ özelliğindeki birbirine dik l_1' ve l_2'' doğrularına göre simetrilerin toplamına dönüştürmek lâzımdır.)

İkinci teoremden beşinci teoremin sonuna kadar elde ettiğimiz neticelerden şu genel teoreme varılır:

Çift sayıdaki simetrilerin toplamı bir dönme veya bir öteleme; tek sayıdaki simetrilerin toplamı bir simetri veya kaymış simetridir.

Hakikaten çift sayıdaki simetrilerin toplamı yerine ikinci ve üçüncü teoremlere göre bir takım dönme ve ötelemelerin toplamı alınabilir. Fakat herhangi bir sayıdaki dönme ve ötelemeler toplamı gene bir dönme ve ötelemedir.

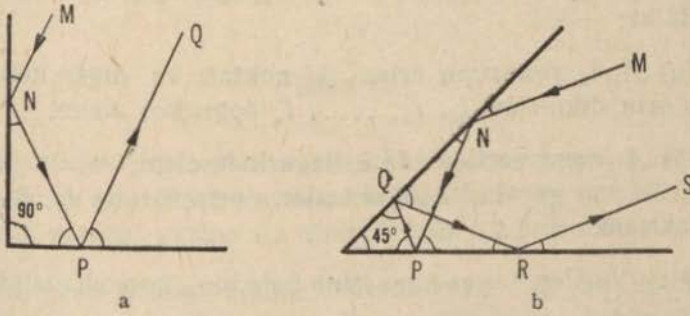
Öte yandan çift sayıdaki simetrilerin toplamı bir dönme veya bir öteleme olduğundan tek sayıdaki simetrilerin toplamı bir dönme veya öteleme ile bir simetrinin toplamına dönüştürülebilir. İkinci ve üçüncü teoremlere göre de bir dönme veya bir öteleme yerine iki simetrinin toplamını almak mümkündür. Böylece tek sayıda simetriler toplamı kullanılabileceği görülür. Bu netice 4 ncü ve 5 inci teoremlerden çıkarılabilir.

Şunu da ilâve edelim ki çift sayıda simetrilerin toplamı, genel olarak, bir dönmedir. Toplamın bir ötelemeye müncer olması hali istisnai bir durumdur. (l_1 ve l_2 doğrularına göre alınan iki simetrinin toplamı ancak l_1/l_2 özel halinde bir ötelemedir. α ve β değerindeki iki dönmenin toplamı da ancak $\alpha + \beta = 360^\circ$ özel halinde bir ötelemedir.) Benzer surette muhakeme edilerek tek sayıda simetrilerin toplamı genel olarak bir kaymış simetridir. Burada tek sayıdaki simetriler toplamı bir simetriden ibaret kalması hali istisnai hal kabul edilmelidir. (Meselâ l_1, l_2, l_3 gibi üç doğruya göre simetriler toplamı ancak bu üç doğrunun birbirine paralel veya üçünün aynı noktadan geçmesi halinde bir simetri olabilir.)

Simetri veya kaymış simetri, düzlemin bir A noktasını yeni bir A' noktasına götüren transformasyonlardır. Gerek simetri ve gerekse kaymış simetri ayrı ayrı birer izometri-

den başka bir şey değildir. Bir l doğrusuna göre simetrisinin sabit noktaları bu eksen üzerindeki noktalar olduğu gibi bir simetride sabit olan doğrular da gene l doğrusunun kendisi veya buna dik olan doğrulardır. Kaymış simetrisinin yegâne sabit doğrusu eksen olan l dir. Kaymış simetride asla sabit nokta bulunmaz.

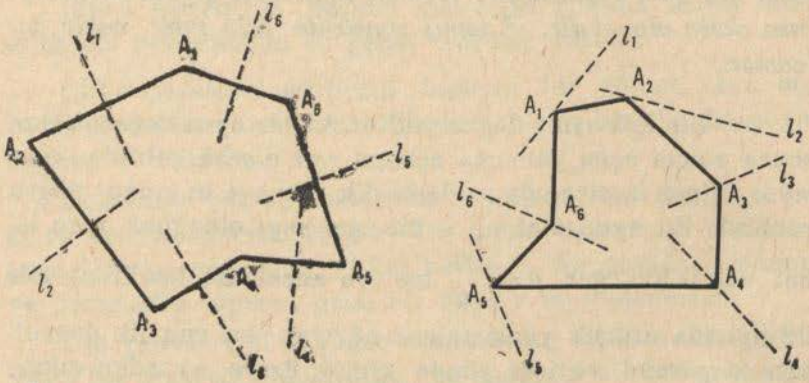
38. Bir ışık ışını doğru şeklindeki bir aynaya çarptıktan sonra gelme açısı yansıma açısına eşit olacak şekilde yansıyor. Şimdi aralarında α derecelik bir açı bulunan doğru şeklinde iki ayna alalım. n bir tam sayı olduğuna göre isbat ediniz ki eğer $\alpha = \frac{90}{n}$ ise (ve ancak bu takdirde) her iki aynada ardışık yansımalara uğriyan bu ışın ilk doğrultusuna paralel ve ters yönde olmak üzere aynadan çıkar. ($n = 1$ ve $\alpha = 90$ için şekil 49 a ya ve $n = 2$ ve $\alpha = 45$ için de şekil 49 b ye bak.)



Şekil 49

39. Bir düzlem içinde $l_1, l_2, \dots, l_n$ gibi n doğru veriliyor. $A_1A_2 \dots A_n$ çokgenini o şekilde çizin ki: (a) yukardaki doğrular n kenarlarının kenar orta dikmeleri olsun. (b) verilen doğrular bu çokgenin köşe açılarının iç veya dış ortayları olsun. (Şekil 50 a ve b ye bak)

n nin tek veya çift olduğuna göre problemi inceleyiniz ve hangi halde çözümün mümkün olmayacağını ve hangi halde de cevabın belirsiz olacağını bulunuz.



Şekil 50

40. Bir düzlem içinde bir M noktası ve $l_2, l_3, \dots, l_n$ gibi $n-1$ doğru veriliyor. Öyle bir $A_1A_2\dots A_n$ çokgeni (n gen) çiziniz ki:

(a) A_1A_2 kenarının ortası M noktası ve diğer kenarlarının orta dikmeleri $l_2, l_3, \dots, l_n$ doğruları olsun.

(b) A_1 açısı verilen bir α değerinde olsun ve bu açının ortayı M den geçsin ve diğer açılarının ortayları da $l_2, l_3, \dots, l_n$ ile çakışsın.

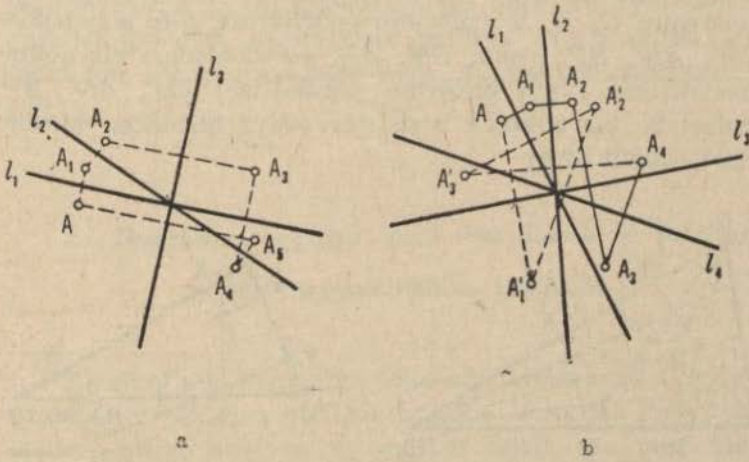
41. Verilen bir çember içine öyle bir n kenarlı çiziniz ki:

(a) Bu n kenarlıının kenarları verilen n doğruya paralel olsun.

(b) A_1A_n kenarı verilen bir noktadan geçsin ve diğer kenarlar verilen $n-1$ doğruya paralel olsun.

42. (a) Bir noktadan geçen ve üçü bir düzlemde bulunan l_1, l_2, l_3 gibi üç doğru verilmiş olsun. Düzlemin her-

hangibir A noktasının l_1 e göre simetrik olan A_1 alınıyor. Sonra A_1 in l_2 ye göre A_2 simetrik ve nihayet A_2 nin l_3 e göre A_3 simetrik çiziliyor. Bu A_3 noktasının verilen doğru-
lara göre aynı sıra dahilinde simetrikleri alınarak A_6 nok-
tası elde ediliyor. Son A_6 noktasının A ile çakıştığını gös-
teriniz. (Şekil 51 a)



Şekil 51

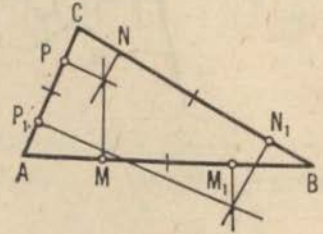
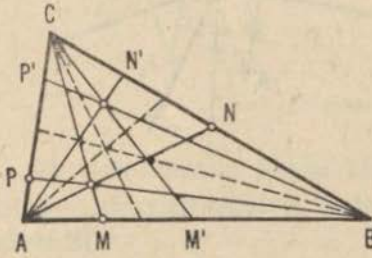
Üç doğru yerine bir noktadan geçen n doğru verilmesi halinde bu problemin sonucu bu şekilde kalır mı? (Bu takdirde 6 simetri yerine $2n$ simetri bahis konusudur).

(b) Bir düzlem içinde bulunan ve üçü bir noktadan geçen l_1, l_2, l_3 doğruları veriliyor. Düzlemin herhangi bir A noktasının l_1 e göre simetrisi A_1 , A_1 in l_2 ye göre simetrisi A_2 ve A_2 nin l_3 e göre simetrisi A_3 olsun. İsbat ediniz ki bu simetride l_1, l_2, l_3 sırası yerine l_3, l_2, l_1 sırası takip edilirse gene aynı A_3 noktası bulunur.

(c) Bir düzlem içinde bulunan ve dördü bir noktadan geçen l_1, l_2, l_3, l_4 doğruları veriliyor. Düzlemin herhangi

bir A noktasının bu doğrulara göre evvelâ 42. (a) daki sıra takip edilerek sonra aynı noktanın l_3, l_4, l_1, l_2 sırası takip edilerek simetrikleri alınıyor. Her iki sıra sonunda aynı A_4 noktasının elde edileceğini ispat ediniz. (Şekil 51 b)

43. (a) Bir ABC üçgeninin AB, BC, CA kenarları üzerinde sırasıyla M, N, P noktaları alınıyor. CM, AN, BP doğrularının C, A, B açılarının ortaylarına göre simetrikleri CM', AN', BP' olsun. CM, AN, BP doğruları bir noktada kesişirlerse (veya birbirine paralel ise) CM', AN', BP' doğruları da bir noktada kesişirler (veya birbirine paralel olurlar). (Şekil 52 a)



Şekil 52

(b) Bir ABC üçgeninin AB, BC, CA kenarları üzerinde sırasıyla M, N, P noktaları alınıyor. Bu noktaların üzerindeki bulundukları kenarların ortalarına göre simetrikleri M_1, N_1, P_1 olsun. M, N, P noktalarından AB, BC, CA ya çizilen dikmeler bir noktadan geçerse M_1, N_1, P_1 den aynı doğrulara çizilen dikmeler de bir noktadan geçer. (Şekil 52 b).

44. l_1, l_2, l_3 bir düzlemin herhangi üç doğrusu olsun.

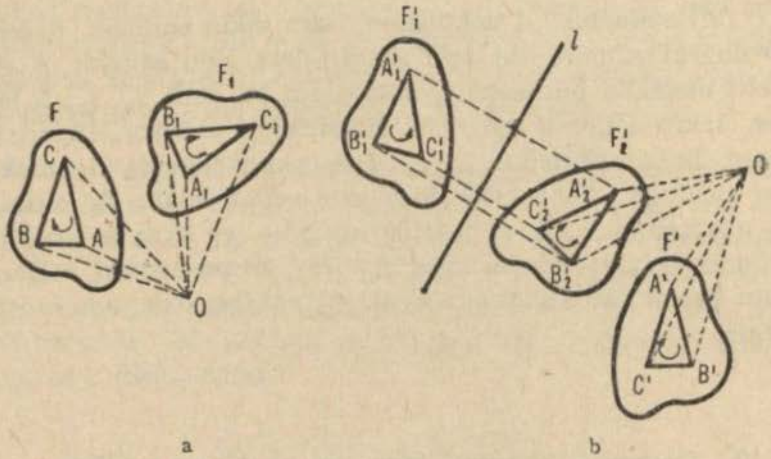
Düzlemin bir A noktasının, sıra takip edilmek üzere, bu doğrulara göre iki defa simetrikleri elde ediliyor. 6 simetri sonunda bulunan A_6 noktasının bu defa l_2, l_3, l_1 sırası takip edilerek iki defa simetrikleri alınıyor. Bundan sonra ilk A noktasının l_2, l_3, l_1 sırasıyla iki defa simetrikleri çiziliyor. Bu 6 simetriden elde edilen nokta A_6' olsun. A_6 noktasının l_1, l_2, l_3 doğrularına göre ve aynı sıra takip edilerek iki defa simetrikleri çizilirse 12 nci simetri neticesinin her iki sıra sonunda aynı A_{12} noktası olduğunu isbat ediniz.

2. Doğrudan doğruya veya ters olarak eş şekiller.

Düzlem izometrinin çeşitleri.

Kizelyof'un Elemanter Geometri kitabındaki tarife göre uzayda iki şekilden biri bir hareket sonunda diğeriyle çakıştırılabilirse bunlara eş şekiller denir. Bu tarif Kizelyof'un geometri kitabında bütün konularda esas tutulmuştur. Gerçi tarif düzlem geometri derslerinin başlangıcında şüphe uyandırabilecek bir niteliktedir. Zira düzlem geometri, bir düzlem içindeki şekillerin özelliklerini inceler. Halbuki eş şekiller tarifi uzayda hareket eden şekiller içindir. Şu halde esas tarifi düzlem geometri ile hiçbir ilgisi olmayıp uzay geometri ile ilgilidir. Buna göre düzlemde eş iki şekil deyince, uzayda değil, düzlem içinde bir hareketle birbirleriyle çakışan şekilleri anlıyacağız. Böyle bir tarifde uzay geometri fikri bulunmayacaktır. Fakat eş şekillerin bu tarifi de esas tarife tam olarak uymamaktadır.

Hakikatte düzlemde eş şekil çiftleri iki tiptir. Eş iki şekilden birini içinde bulunduğu düzlemden ayırmaksızın diğeriyle çakıştırabiliriz (Şekil 53 a daki F ve F_1 şekilleri O etrafında bir dönmeden sonra birbiriyle çakıştırılabilirler.)



Şekil 53

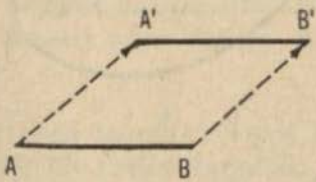
F' ve F_1' şekilleri ise bunlardan biri düzleminden ayrılarak altüst edildikten ve O etrafında döndürülüp F_n' durumuna getirildikten sonra bir simetri sonunda F'_1 ile çakıştırılırlar. (şekil 53 b ye bak). F_1' nün düzlem bir hareket sonunda F' ile çakıştırılması mümkün değildir. Hakikaten F_1' şeklinin A_1', B_1', C_1' gibi üç noktasını ve F' şeklinde bunların karşılıkları olan A', B', C' noktalarını düşünelim. $A'B'C'$ ve $A_1'B_1'C_1'$ üçgenlerine ters yönlü üçgenler denmektedir. $A'B'C'$ üçgeninde A' dan B' ye ve B' den C' ye olan hareket yönü saat ibrelerinin hareket yönüdür. Halbuki $A_1'B_1'C_1'$ üçgeninde A_1' dan B_1' ye ve B_1' den C_1' hareket yönü saat ibrelerinin hareket yönünün tersidir. F_1' şeklinin düzlemi içindeki herhangi bir hareket sonunda $A_1'B_1'C_1'$ üçgeninin yönünün değişmeyeceğinin aşikâr olduğu cihetle bu üçgeni $A'B'C'$ üçgeniyle düzlem bir hareket sonunda çakıştıramayız. Fakat F_1' şeklini bir kenarı etrafında katlarsak bunun için de F_1' nün bir l doğrusuna göre simetrik olan F_2' yü elde ederek bunu kullanmak mümkündür, bu takdirde F_2' yü düzlem içindeki bir hareket sonunda F' ile çakıştırmak

güç olmaz. O zaman O etrafında bir dönme hareketi kâfidir. (Şekil 53 b ye bak.)

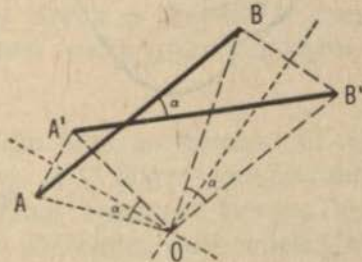
Düzlem bir hareketle çakışan eş şekillere doğrudan doğruya eş şekiller; tamamen düzlem bir hareketle çakışamıyan eş şekillere de ters olarak eş şekiller denir. Buraya kadar verilen bilgiden F ve F' gibi iki şeklin hangi şartlarla doğrudan doğruya ve hangi şartlarla ters eş şekiller olduğuna karar vermek mümkündür: F in A, B, C gibi üç noktasını ve F' de bunların karşılıkları olan A', B', C' noktalarını almâk ve ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin yönlerinin aynı veya ters olduklarını araştırmak kâfidir. Eş şekillerin doğrudan doğruya veya ters eş şekiller olmasının önemi olmadığı hallerde bu tabirleri kullanmadan iki şekle sadece eş şekiller diyeceğiz.

Böylece iki geometrik şekilden biri tamamen bir düzlem hareket sonunda diğeriyle çakıştırılabilirse bunlara doğrudan doğruya eş şekiller adı verilir. Şimdi iki mühim teorem ispat edelim.

Teorem 1. Bir düzlemin doğrudan doğruya eş iki şekli bir dönme veya bir öteleme yardımıyla birbiriyle çakıştırılabilir.



a



b

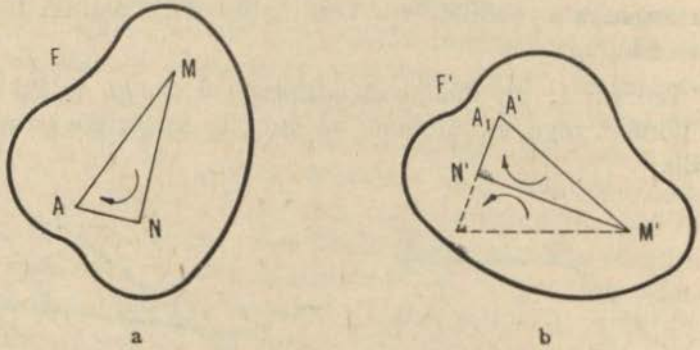
Şekil 54

Evvelâ aynı düzlemde AB ve $A'B'$ gibi iki eşit doğru parçasının bir dönme veya bir öteleme sonunda birbiriyle

çakıştırılabileceğini ispat edelim. Hakikaten AB ve $A'B'$ doğru parçaları eşit, paralel ve aynı yönlü iseler (Şekil 54 a) bu takdirde AB yi bir öteleme sonunda gene $A'B'$ ile çakıştırmak mümkündür. Bu ötelemenin büyüklüğü ve doğrultusu AA' doğru parçasıyla belirtilir. Eğer AB ve $A'B'$ doğruları bir α açısı yaparlarsa (Şekil 54 b) bu takdirde AB doğru parçası α kadar bir dönme sonunda $A'B'$ ile çakıştırılabilir.

Bu dönmenin merkezi AA' ve BB' doğru parçalarının orta dikmelerinin kesiştiği O noktasıdır.

Şimdi doğrudan doğruya eş iki F ve F' şekli düşünelim. (Şekil 55 a, b) F nin herhangi iki noktası M ve N ve bunların F' deki karşılıkları M' ve N' olsun. $MN = M'N'$ olduğundan bu iki doğru parçasını çakıştıracak bir dönme veya bir öteleme mevcuttur. İddia ediyoruz ki F in bütün



Şekil 55

noktalarının F' de birer karşılığı vardır. Yani birinci şeklin her A noktasına ikincinin bir A' noktası karşı gelir. Şimdi bir an için A nın bir dönme veya bir öteleme sonundaki durumu A_1 olsun. İsbat edeceğiz ki A_1 noktası A' ile çakışır. Hipoteze göre F ve F' eş olduklarından

$AM = A'M$, $AN = A'N$ ve $AM = A_1M$, $AN = A_1N$ dir.

Bundan $\triangle A'MN = \triangle A_1MN$ sonucuna varılır. Bu iki üçgenin MN kenarları ortak olduğundan üçgenler ya çakışık veya MN ye göre birbirinin simetrikidirler. Şimdi iş sonuncu ha-

lin mümkün olamayacağını ispattan ibarettir. $\triangle AMN$ ve

$\triangle A'MN$ üçgenleri, F ve F' nün doğrudan doğruya eş şekiller

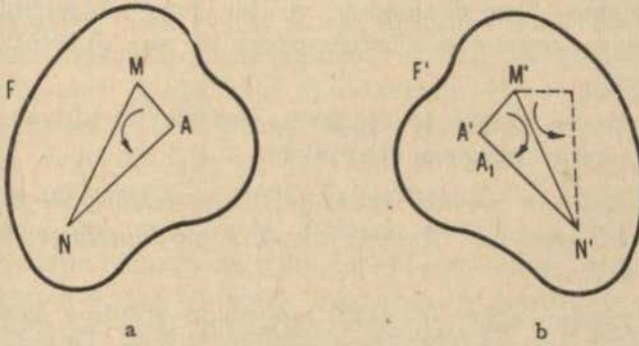
farzedilmesi dolayısıyla, aynı yönlüdürler. $\triangle AMN$ ve $\triangle A_1MN$ üçgenleri ise bir dönme veya bir öteleme sonunda çakışabilen şekiller olduğundan onlar da aynı yönlüdür. Bu sebeple $\triangle A'MN$ ve $\triangle A_1MN$ üçgenleri ters yönlü eş şekiller olurlar. Bu da gösterir ki üçgenler çakışık yani A_1 noktası A' dan başka bir şey değildir.

Eğer F ve F' şekilleri bir O noktası etrafında bir dönme ile çakıştırılabilirlerse O ya iki şeklin dönme merkezi denir. Bu O noktasını bulmak için birinci şekilde karşılıklı A, B noktalarını ve diğerinde bunların karşılıkları olan A' ve B' yi almak ve ondan sonra AA' nün ve BB' nün ortadikmelerinin O kesim noktasını bulmak yeter.

Teorem 2. Bir düzlemin ters olarak eş iki şekli kaymış bir simetri veya sadece bir simetri yardımıyla çakıştırılabilir.

İkinci teoremin ispatı birincinin isbatına benzer. İlk iş olarak iki şeklin karşılıklı AB ve $A'B'$ doğru parçalarının birinden diğerine belirli bir l eksenı etrafında kaymış bir simetriden veya l ye göre adi bir simetriden geçilebileceğini gösterelim. Sonucun böyle olacağını ve kaymış simetri veya simetri ekseninin l olduğunu farzedelim. $A'B'$ doğru parçasını A'' noktası A ile çakışacak şekilde $A''B''$ durumuna getirelim. (Şekil — 56 ya bak.) AB nin l eksenine göre simetriği olan A_1B_1 doğru parçası $A''B''$ ye paralel olaca-

İkinci teoremin isbatının sonuç kısmı birinci teoremin isbatının son kısmının hemen hemen aynıdır. F ve F' ters olarak eş iki şekil; M, N ve M', N' de bu iki şeklin karşılıklı iki çift noktası olsunlar (Şekil 57). Bu takdirde MN yi $M'N'$ ile çakıştırarak bir kaymış simetri veya simetri vardır. Şimdi F şeklinin bütünü ile F' ile çakıştırılmasını sağlayacak bir kaymış simetrinin veya simetrinin varlığını gösterelim. Yani F nin bir A noktasını kaymış simetrideki



Şekil 57

veya bayağı simetrideki aldığı son A_1 durumunun F' de A nın karşılığı olan A' den başka bir şey olmayacağını gösterelim. Hakikaten F ve F' eş şekiller olduğundan

$\triangle A'M'N' = \triangle AMN$ olduğu gibi $\triangle A_1M'N'$ şekli de $\triangle AMN$ den bir kaymış simetri veya simetri sonunda elde edildiğinden

$\triangle A_1M'N' \cong \triangle AMN$ dir. O halde $\triangle A_1M'N'$ üçgeni $\triangle A'M'N'$ üçgeni ile ya çakışıktır veya $M'N'$ kenarı bu iki üçgende ortak olmak üzere üçgenler $M'N'$ ye göre birbirinin simetrikdirlere. Fakat bu üçgenler birbirinin simetrigi olamaz. Çünkü her ikisi de aynı yönlüdürler. Bunu F ve F' şekillerinin ters yönde eş şekiller olarak verilmiş olmasından biliyoruz.

Bunun sonucu olarak $A'M'N'$ ve AMN üçgenleri ters yönlü olduğu gibi $A_1M'N'$ ve AMN üçgenleri de ters yönlü olur. (Çünkü simetri veya kaymış simetri üçgenlerin yönlerini değiştirir) Şu halde $A_1M'N'$ üçgeni $A'M'N'$ üçgeni ile çakışır. Böylece ikinci teoremin isbatı tamamlanmış olur.

Doğrudan doğruya eş şekilleri birbiriyle çakıştıran izometrilere doğru izometrilere (veya yer değiştirmeler); ters yönde eş şekilleri çakıştıran izometrilere de ters izometrilere denir. Birinci ve ikinci teoremler bir doğru izometrinin öteleme veya dönmeden ve bir ters izometrinin de simetri veya kaymış simetriden başka bir şey olmadıklarını ifade eder.

Birinci ve ikinci teoremlerin neticelerini birleştirerek aşağıdaki genel teoreme varabiliriz :

Bir düzlemin birbirine eş iki şekli bir öteleme, bir dönme, bir simetri veya bir kaymış simetri yardımıyla birbiriyle çakıştırılabilir.

Öte yandan eğer iki şekil doğrudan doğruya eş iseler genel olarak bu şekiller bir dönme ile çakıştırılabilir. Doğrudan doğruya eş şekillerin öteleme ile çakıştırılmaları haline az rastlanır. Eğer şekiller ters yönde eş ise bu takdirde kaymış simetri yardımıyla çakışma hali daha genel olup normal simetri nadirdir.

Öteleme ve dönme, kesişen veya paralel iki doğruya göre simetrilere toplamı olarak; bir doğruya göre simetri veya kaymış simetri ise doğruya göre simetri ile bir noktaya göre simetrisinin toplamı olarak gösterilebilir. Şu halde sonuç şu şekilde formüle edilebilir:

Bir düzlemin eş iki şekli l_1 ve l_2 doğrularına göre iki simetrisinin veya bir l doğrusuyla bir O noktasına göre iki simetrisinin toplamı yardımıyla birbiriyle çakıştırılabilir.

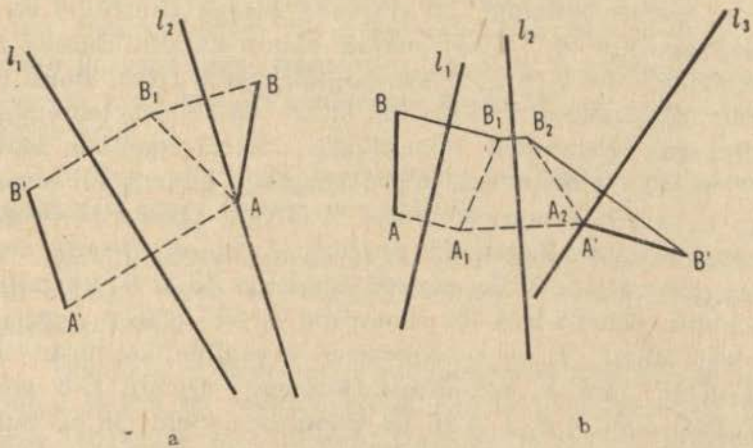
Eğer $l_1 // l_2$ ise bir öteleme ile ve O noktası l üzerinde ise yalnız bir doğruya göre simetri ile şekilleri çakıştırmak mümkündür.

Birinci ve ikinci teoremler simetrilerin toplamından da çıkarılabilir. Hakikaten birinci teoremin isbatı şu esasa dayanır: AB ve $A'B'$ gibi iki eşit doğru parçası bir dönme veya bir öteleme yardımıyla birbirine çakıştırılabilir. Fakat AB ve $A'B'$ doğrularının ardı sıra l_2 ve l_1 e göre birer simetri sonunda çakıştırılabileceği de aşikârdır. Bunun için l_1 i AA' nün orta dikmesi (Eğer A' noktası A ile çakışırsa A dan geçen herhangi bir doğru l_1 olarak alınabilir) ve l_2 B_1AB açısının açısı ortayı olarak almak kâfidir. Burada B_1 noktası B' nün l_1 e göre simetridir (Şekil 58 a). Bunu bu fasıla başlarken gördüğümüz ikinci ve üçüncü teoremleri kullanarak göstermek mümkündür. İkinci teoremin isbatı AB ve $A'B'$ gibi iki eşit doğru parçasını kaymış bir simetridir veya bir simetri sonunda birbiriyle çakıştırılabileceği esasına dayanır. Fakat AB doğrusu l_1, l_2, l_3 gibi üç doğruya göre alınacak üç simetri sonunda da $A'B'$ ile çakıştırılabilir. Bunun için iki simetrinin eksenini olan l_1 doğrusu rastgele alınıp l_2 ve l_3 doğruları o şekilde seçilir ki bu doğrulara göre iki simetrinin toplamı, AB nin l_1 e göre simetridir olan A_1B_1 i $A'B'$ ile çakıştırın (Şekil 58 b). Bundan sonraki iş gene bu fasıldaki 4. cü ve 5. ci teoremleri kullanmaktan ibarettir.

Karşıt olarak izometrilere ilgili, daha doğrusu izometrilere ilişkin toplanması ile ilgili bütün teoremler birinci ve ikinci teoremlerden çıkarılabilir. Böylece birinci teorem doğru-
dan doğruya eş iki şeklin birinden diğerine bir dönme veya bir öteleme ile geçilebileceğini isbat eder. Fakat F ve F' gibi iki şekil iki veya genel olarak çift sayıda simetriden sonra birbiriyle çakıştırılabilirlerse bunlar doğrudan doğruya eş şekillerdirler. (Çünkü tek bir simetri bir üçgenin yönünü değiştirdiği halde iki simetri bu yönü sabit tutar).

Şu halde F' şekli F den bir dönme veya bir öteleme sonunda elde edilebilir yani iki simetrinin (daha genel olarak çift sayıda simetrilerin) toplamı bir dönme veya bir öte-

lemedir. Benzer bir şekilde muhakeme ederek gösterilebilir ki üç simetrisinin (veya genel olarak tek sayıda simetrilerin) toplamı kaymış bir simetri veya bir simetridir. Birinci teoremden iki dönmenin toplamının bir dönme veya bir öteleme olduğu ve iki kaymış simetri toplamının bir dönme veya öteleme olduğu neticesi de çıkar.



Şekil 58

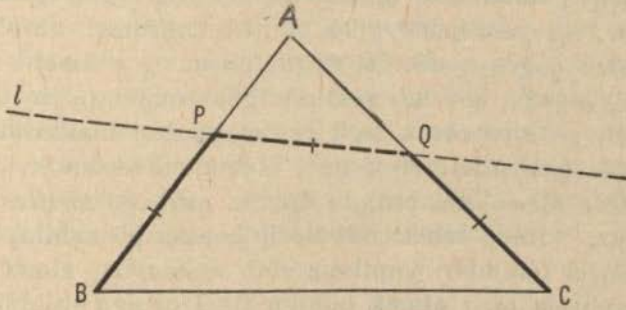
45. l_1 ve l_2 gibi iki doğru ile sırasıyla bu doğrular üzerinde A ve B gibi iki nokta verilmiş olsun. l_1 i X de, l_2 yi Y de kesen ve $AX = BY$ şartını gerçekliyen öyle bir m doğrusu çiziniz ki:

- Bu doğru verilen bir n doğrusuna paralel olsun.
- m doğrusu verilen bir M noktasından geçsin.
- XY doğru parçası verilen bir a uzunluğunda olsun.
- XY doğru parçası verilen bir r doğrusu tarafından iki eşit kısma bölünsün.

46. l_1, l_2, l_3 gibi üç doğru ve bunlar üzerinde sırasıyla A, B, C noktaları verilmiş olsun. l_1, l_2, l_3 doğrularını sıra-

sıyla X , Y , Z noktalarında kesen öyle bir doğru çiziniz ki $AX = BY = CZ$ olsun.

47. Bir ABC üçgeni verilmiş olsun. AB ve AC kenarlarını P ve Q de kesen öyle bir l doğrusu çizin ki $BP = PQ = QC$ olsun. (Şekil 59).



Şekil 59

Birinci ve ikinci teoremler düzlem izometrilere tarif için bir temel olarak kullanılabilirler. Hakikaten geometride izometriden söz ederken bir şeklin bir durumdan diğer bir duruma getirilmesinin yalnız sonucuyla ilgilenilir. Fakat bu hareketin biçimiyle ilgilenmeyiz. Hareket esnasında şeklin noktalarının çizdiği eğriler (yörüngeler) veya bu noktaların hızları burada önemli değildir. Birinci ve ikinci teoremlere göre eş şekiller öteleme, dönme, simetri veya kaymış simetri sonucunda karşılaştırılabileceklerinden geometride denebilir ki düzlem izometrilere hepsi bu dört çeşit izometriden ibarettir. Buna göre geometrinin öteleme, dönme, simetri ve kaymış simetri neticesinde değişmeyen şekillerin özelliğini inceliyen bir bilim olduğu söylenebilir.

Matematikte ve genel olarak tabiat bilimlerinde iki tip tarifile karşılaşılır: Yeni bir anlam, bu anlamda bulunması gerekli özellikler sıralanarak tarif edilebilir. Böylece mesele paralel doğruları bir düzlem içinde bulunan ve ne kadar

uzatılırsa uzatılsın birbirini kesmiyen doğrular olarak; bir aritmetik diziyi ardışık iki elemanı arasındaki fark sabit olan bir dizi olarak ve bir buhar makinasını da ısı enerjisini mekanik enerjiye çeviren bir cihaz olarak tarif edebiliriz. Bu gibi tariflere *niteleyici tarifler* denir. Diğer bir tarif şekli de yeni bir şeyin özelliklerini ifade etmek yerine doğru-
dan doğruya onun nasıl kurulacağını (bina edileceğini) göstermektir. Bu yeni şekle göre paralel doğruları bir düzlem içinde aynı doğruya dik iki doğru çizmek; aritmetik diziyi $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ şeklinde göstermek (a ya dizinin ilk terimi ve d ye ortak fark denir); buhar makinasını nasıl yapılacağını niteliyerek tarif etmek mümkündür. Bu gibi tariflere *tümevarım yoluyla* (*sentez yoluyla*) *tarifler* adını veriyoruz. Burada tabiat bilimlerinin esas görevinin, evvelce niteliyici tanımları yapılmış olan anlamları, şimdi tümevarım yoluyla tarif etmek olduğu fikri ortaya atılabilir. Bu takdirde bir buhar makinası yaratmak problemi, niteleyici tarifler yani ısı enerjisini mekanik enerjiye çeviren bir cihaz olarak onu tanımlatmakla başlamak ondan sonra tümevarım yoluyla bir tarif bulmak yani makineyi yapmak şeklinde düşünülebilir. Niteleyici tarifleri yapılmış şeylerin tümevarım yoluyla tariflerinin yapılamaması yani o şeyin var olmaması haline tabiatla rastlamak mümkündür.

Bir izometrinin şeklin noktaları arasındaki mesafeleri değiştirmiyen bir transformasyon olarak tarifi tipik bir niteleyici tariftir. İzometrilere teorisinde esas problem ise izometrinin tümevarım yoluyla bir tarifini bulmak yani bütün düzlem izometrilere sayıp sıralamaktır. Bu bölümde 1 inci ve 2 inci teoremler yardımıyla çözülen işte bu problemdir.

Karşıt olarak bir anlamın tarifi tümevarım yoluyla verilmişken yeni şeyin özelliklerini incelemekte fayda sağlamak üzere basit bir niteleyici tarif bulmak çok defa uygundur. Bu bölümde bu çeşit misallere de rastladık. Ötelemenin tümevarım yoluyla verilen tarifinden sonra bu transformas-

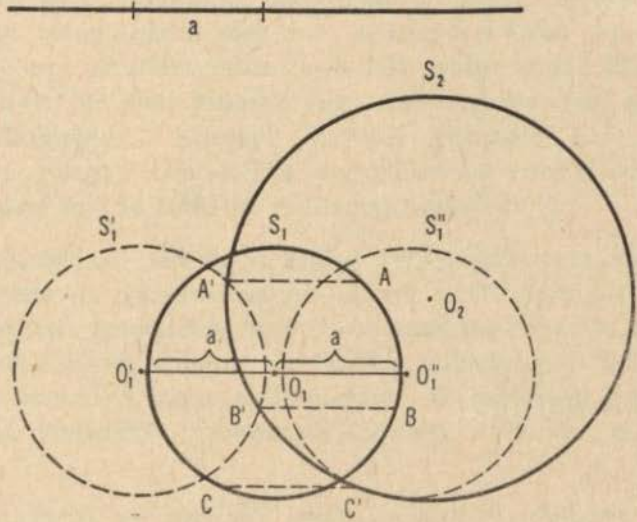
yonun niteleyici tarifini de verdik. Misâl olarak bir ötelemenin her AB doğru parçasını kendisine eşit, paralel ve aynı yönlü bir $A'B'$ doğrusuna dönüştüren düzlem bir transformasyon olduğunu gördük. Bu tarif iki ötelemenin toplamından ne çeşit bir transformasyon çıkacağı problemini çözmek için çok önemlidir. Bu çözümde tümevarım yoluyla tarifi (öteleme için) pek az faydası vardır. Aynı yolu takip ederek diyebiliriz ki iki dönmenin toplamının sonucu olan transformasyonu bulmak probleminin çözümü dönmenin niteleyici tarifine dayanır. Buna misâl olarak da dönmenin bir AB doğru parçasını kendisine eşit ve onunla α kadar bir açı yapan bir $A'B'$ doğru parçası durumuna getiren bir transformasyon olduğunu görmüştük. Okuyucu bu kitapta bu hususlarda çeşitli misâller bulacaktır.

Cevaplar

BİRİNCİ FASIL

YERDEĞİŞTİRMELER

1. S_1 çemberi l doğrultusunda a kadar ötelenerek S_1' durumuna getirilir. S_1' nün S_2 ile kesim noktaları A' ve B' olsun (Şekil 60). A' ve B' den l ye çizilen paraleller problemin çözümünü açıkça ortaya koyar. (Şekil 60 daki AA' ve BB' doğru parçalarının herbiri ötelemenin uzaklığını veren a ya eşittirler.) Eğer S_1 çemberi l doğrultusunda fakat bu defa ters yönde a kadar ötelenerek S_1'' durumuna getirilirse yeniden iki cevap daha bulunur.

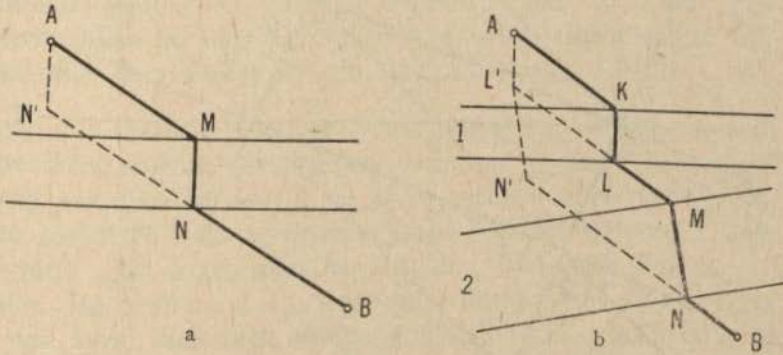


Şekil 60

S_1' ve S_1'' çemberlerinin S_2 ile olan ortak noktalarının sayısına göre problemi sonsuz 4, 3, 2, 1 veya 0

çözümü bulunabilir. Şekil 60 daki duruma göre üç çözüm vardır.

2. (a) Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim ve MN doğru parçasını M noktası A ya gelecek şekilde bir öteleme sonunda AN' durumuna getirelim (Şekil 61 a). Bu takdirde $AM = N'N$ ve $AM + NB = N'N + NB$ olur. Buna göre $AMNB$ yolunun en kısa olması için N' , N ve B noktalarının aynı doğru üzerinde bulunması icab ettiği anlaşılır. Şu halde problem şu çizimle çözülür: A dan nehrin doğrultusuna dik, genişliğine eşit bir AN' dikmesi çizilir. N' ile B birleştirilir. $N'B$ nin B ye yakın kıyıyı kestiği nokta N ise köprünün N de kurulması gerekir.

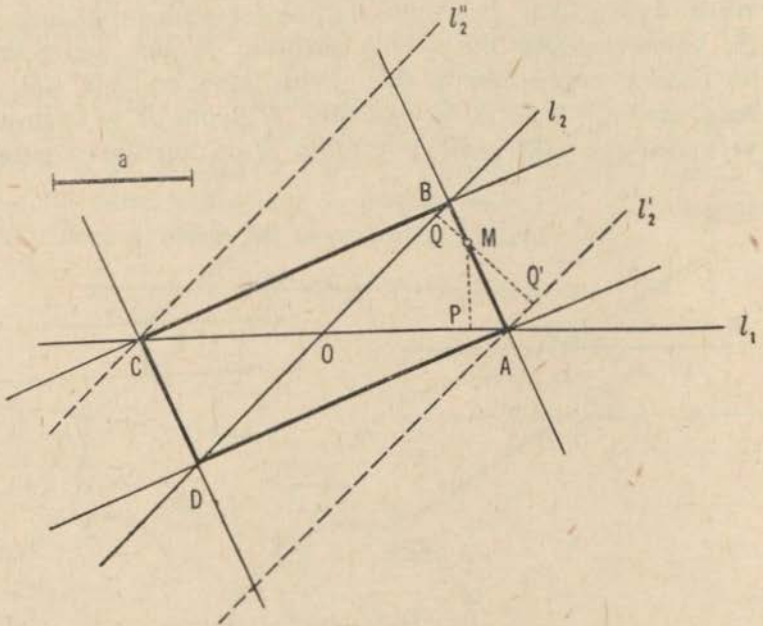


Şekil 61

(b) Çözümü basitleştirmek için iki nehir halini düşünelim. Problemin çözülmüş olduğunu ve aranan köprülerin KL ve MN olduğunu farzedelim. KL yi K noktası A ya gelecek şekilde bir öteleme ile AL' durumuna getirelim. (Şekil 61 b). Bu takdirde $AK = L'L$ ve $AK + LM + NB = L'L + LM + NB$ elde edilir. Eğer $AKLMNB$ yolu A ile B arasındaki en kısa yol ise $L'LMNB$ yolu da L' den B ye en kısa ve $LMNB$ yolu ise L ile B arasında en kısa yollar

olacaktır. Fakat L ile B sadece ikinci nehirle birbirlerinden ayrılmışlardır. Bu iki nokta arasında en kısa yolun nasıl çizileceği ise bu problemin (a) kısmında öğrenilmiştir.

Böylece şu çizim yapılır: A dan nehrin kıyı doğrultusuna bir dik çizilerek bu dikin üzerinde birinci nehrin genişliğine eşit bir AL' doğru parçası alınır. L' den de ikinci nehrin kıyı doğrultusuna bir dik çizilerek bu dik üzerinde



Şekil 62 a

ikinci nehrin genişliğine eşit $L'N'$ doğru parçası alınır. N' ile B yi birleştiren doğrunun ikinci nehrin B ile aynı tarafta olan kıyısını kestiği nokta N ise köprülerden biri bu N noktasında kurulmalıdır. Bu köprü'nün ikinci ucu M olsun. M den NB ye bir paralel çizilir. Bu paralelin birinci nehrin M ye yakın kıyısını kestiği nokta L ise birinci köprü de L de kurulmalıdır.

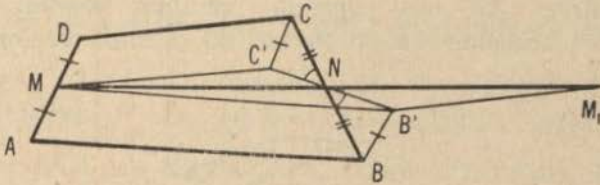
3. (a) P ye Q noktaları sırası ile M den l_1 ve l_2 ye çizilen dikmelerin ayakları olmak üzere $MP + MQ = a$ şartını sağlayan nokta M olsun (Şekil 62 a) l_2 yi QM doğrultusunda a kadar öteleyelim. Öteleme sonunda l_2 nin yeni durumunu l_2' ile gösterelim. Bu takdirde M nin l_2' ye olan MQ' uzaklığının yani $a - MQ$ nün MP ye eşit olduğu görülür. Şu halde M noktası l_1 ve l_2' doğrularının meydana getirdiği açının açı ortayı üzerindedir.

Bu muhakeme ile aranan geometrik yerin l_1 doğrusunun l_2' ve l_2'' ile teşkil ettiği açılarının açı-ortayları olduğu anlaşılır. Burada l_2' ve l_2'' doğruları l_2 nin kendisine dik bir doğru doğrultusunda ayrı yönlerde a kadar ötelenmesinden elde edilmişlerdir. Ancak bu dört açıortayın bütün noktaları geometrik yere ait değildir. Şekil 62 a dan geometrik yerin bu dört açıortayı tarafından teşkil edilen dikdörtgenin çevresinden ibaret olduğu kolayca görülür.

(b) Düzlemin $MP - MQ = a$ veya $MQ - MP = a$ eşitliklerinden birini gerçekliyen noktası M olsun. Burada P ve Q noktaları M den l_1 ve l_2 ye çizilen diklerin ayaklarıdır (Şekil 62 b de M noktası ikinci eşitliği sağlar). l_2 doğrusunun QM doğrultusunda a kadar ötelenmiş durumu l_2' olsun. Bu problemin (a) kısmında olduğu gibi M nin l_1 ve l_2' den aynı uzaklıkta olduğu gösterilebilir. (Şekil 62 b de $MQ - MP = a$ ve $M_1P_1 - M_1Q_1 = a$ olduğuna dikkat). Bundan istenilen geometrik yerin l_1 doğrusu ile l_2' ve l_2'' doğrularının meydana getirdiği dört açının açı ortaylarından ibaret olduğu sonuncuna varılır. Ancak bu halde $ABGD$ dikdörtgeninin kenarları değil, bu kenarların uzantıları geometrik yeri teşkil ederler. ($MP - MQ = a$ eşitliği HBG ve LDN üzerindeki noktalar tarafından ve $MQ - MP = a$ eşitliği ise EAF ve ICK üzerindeki noktalar tarafından sağlanır).

4. BDE üçgeni DAF üçgeninin AB doğrultusunda AD kadar ötelenmiş halidir. Buna göre iki şekilde karşılıklı

lel ve eşit olurlar. $BN = NC$ olduğu da düşünülürse $\triangle BNB' = \triangle CNC'$ sonuncuna varılır. Bu da $B'N = NC'$ ve $\widehat{BNB'} = \widehat{CNC'}$ sonucunu yani $B'N$ ile NC' nün birbirinin uzantıları olduğunu ifade eder.



Şekil 63

Böylece, verilen şartlarla, MN kenar ortayı komşu MB' ve MC' kenarlarının ortalamasına eşit olan bir $MB'C'$ üçgeni çizmiş olduk. (Çünkü $MB' = AB$ ve $MC' = DC$ dir.) Eğer MN kenar ortayını $M_1N = NM$ olacak şekilde uzatarak elde edeceğimiz M_1 noktasını B' ile birleştirirsek MM_1B' gibi bir üçgen elde ederiz. Bu üçgende $MM_1 = 2MN$ doğru parçası MB' ile $B'M_1$ in toplamına ($B'M_1 = MC'$ dür.) eşit çıkar ki bu mümkün değildir. Bu netice de B noktasının MM_1 üzerinde bulunması gerektiğini gösterir ve bunun da mânası $MB' \parallel MN \parallel MC'$ ve $AB \parallel MN$, $DC \parallel MN$ yani $ABCD$ dörtgeni bir yamuktur.

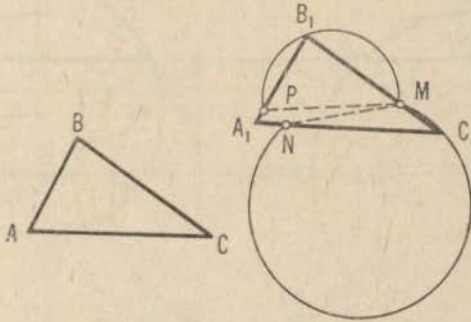
6. Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim. AX doğru parçasını CD doğrultusunda $EF = a$ kadar öteler ve yeni durumda bu doğru parçasını $A'X'$ ile gösterirsek $A'X'$ nün F den geçtiğini kolayca görürüz (Şekil 64).

Öteyandan $\widehat{A'FB} = \widehat{AXB} = \frac{1}{2} \widehat{AmB}$ olduğundan $A'FB$

açısı belli olur. Buna göre şu çizim yapılır, A noktası CD doğrultusunda a kadar ötelenerek A' durumuna getirilir ve AB' doğru parçasını AXB açısı altında gören noktaların ge-

7. (a) Problemin çözülmüş yani $M_1M_2 = a$ olduğunu farzedelim (Şekil 65). Verilen çemberlerin O_1, O_2 merkezlerinden l doğrusuna O_1P_1 ve O_2P_2 dikmeleri çizilirse, $AP_1 = \frac{1}{2} AM_1$, $AP_2 = \frac{1}{2} AM_2$ ve $P_1P_2 = \frac{1}{2} (AM_1 + AM_2) = \frac{1}{2} M_1M_2 = \frac{1}{2} a$ elde edilir. Şimdi l doğrusunu O_1 den geçecek şekilde l_1 doğrusu durumuna ötelileyelim. l' nün O_2P_2 ile kesim noktası P' ile gösterilirse $P_1O_1P'P_2$ dikdörtgeninden $O_1P' = P_1P_2 = \frac{1}{2} a$ bulunur. Böylece problem hipotensü O_1O_2 ve bir dik kenarı $O_1P' = \frac{1}{2} a$ olan bir üçgenin çizimine dönüştürülmüş olur. Aranan l doğrusu O_1P' ye paralel olacaktır.

Eğer $O_1O_2 > \frac{1}{2} a$ ise iki çözüm, $O_1O_2 = \frac{1}{2} a$ ise bir çözüm ve $O_1O_2 < \frac{1}{2} a$ ise sıfır çözüm vardır.

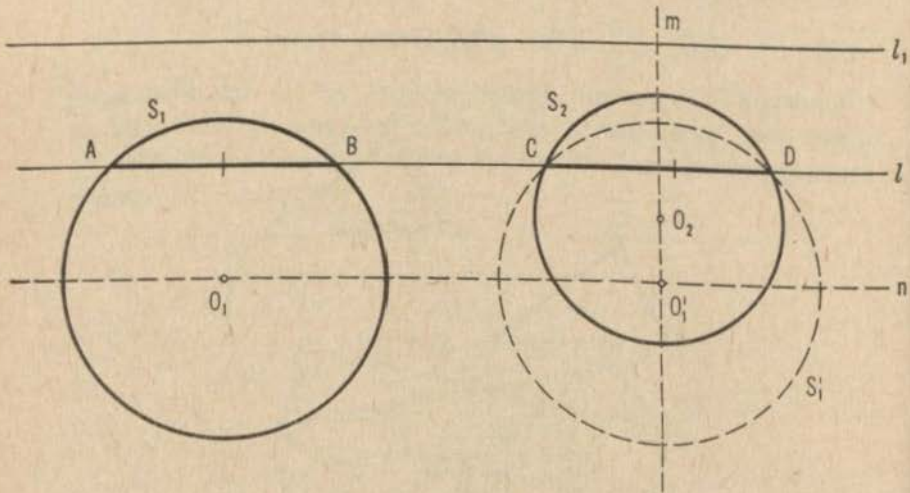


Şekil 66

7. (b) M, N, P verilen noktalar ve ABC de verilen üçgen olsun (Şekil 66). MN ve MP doğru parçalarını sırasıyla ACB ve ABC açıları altında gören çember yayları çizilir. Böylece çözümü istenen problem şu şekli alır. M noktasın-

dan öyle bir B_1C_1 doğrusu geçirin ki, çember yaylarının bu doğrudan ayırdığı parça BC ye eşit olsun. Bu sorunun cevabı bu problemin (a) kısmında verilmiştir. Bilindiği gibi cevap sayısı iki, bir veya sıfırdır.

8. (a) Problemin çözülmüş olduğunu ve l doğrusunun S_1 ve S_2 çemberlerini A, B, C, D noktalarında kestiğini farzedelim (Şekil 67 a). S_1 çemberi l doğrultusunda AC kadar ötelenerek S_1' durumuna getirilir. $AB = CD$ olduğundan bu iki doğru parçası çakışacaklar ve dolayısıyla S_2 ve S_1' çemberlerinin O_2 ve O_1' merkezleri CD nin orta dikmesi üzerinde bulunacaktır. Buradan şöyle bir çizime varılır: S_2 çemberinin O_2 merkezinden geçen ve l_1 e dik olan m doğrusu ile S_1 çemberinin O_1 merkezinden geçen ve l_1 e paralel olan n doğrusunun O_1' kesim noktası bulunur. S_1 çemberinin merkezi olan O_1 noktası O_1' ye gelecek şekilde ötelenerek S_1' durumuna getirilir. S_2 ile S_1' nün kesiştiği noktaları birleştiren doğru problemin cevabı olur. Çözüm sayısı en çok bir, en az sıfırdır.

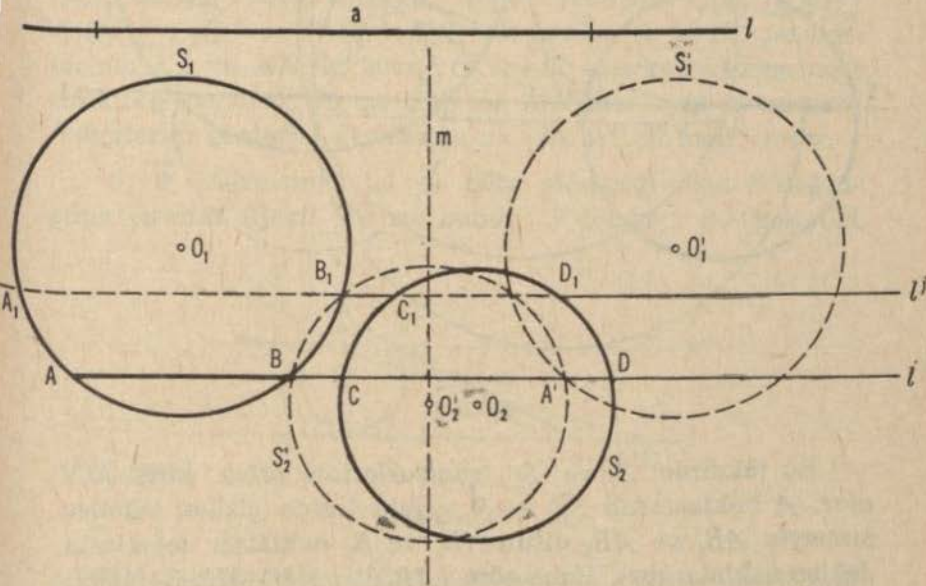


Şekil 67 a

8. (b) Problemin çözülmüş ve l doğrusunun S_1 ve S_2 çemberlerini kestiği noktalar A, B ve C, D ile gösterilmek

üzere $AB + CD = a$ olduğunu farzedelim (Şekil 67 b). S_1 çemberi l doğrultusunda a kadar ötelenerek S_1' durumuna getirilirse $AA' = a = AB + CD$ elde edilir. Yani $BA' = CD$ olur. Şu halde S_2 çemberi l doğrultusunda ötelenerek merkezi O_2' olan S_2' çemberi durumuna getirilir. Burada O_2' noktası O_1O_1' nün orta dikmesi olan m nin üzerindedir. (O_1 ve O_1' noktaları S_1 ve S_1' çemberlerinin merkezleridir), ve bu öteleme S_2 nün CD kirişini BA' durumuna getirir.

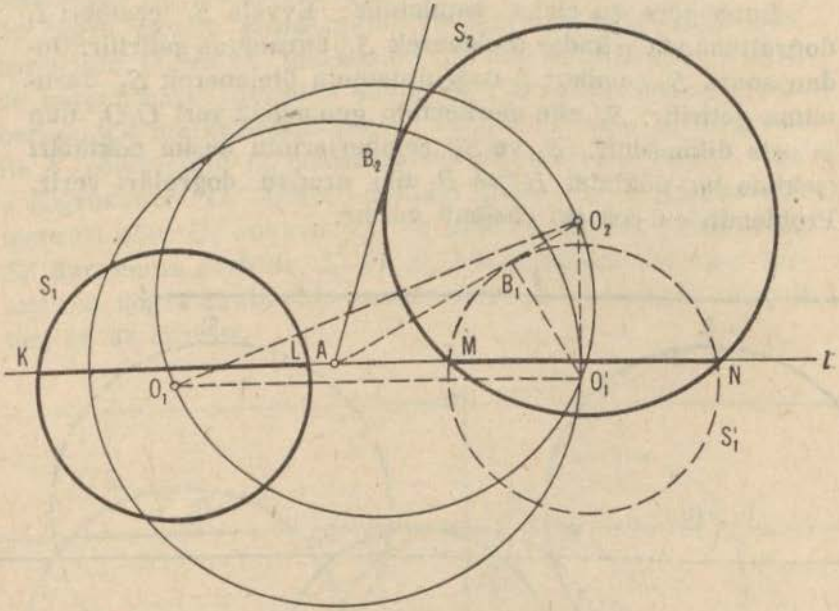
Buna göre şu çizim yapılabilir: Evvelâ S_1 çemberi l_1 doğrultusunda a kadar ötelenerek S_1' durumuna getirilir. Ondan sonra S_2 çemberi l_1 doğrultusunda ötelenerek S_2' durumuna getirilir. S_2' nün merkezinin geometrik yeri O_1O_1' nün m orta dikmesidir. S_1 ve S_2' çemberlerinin kesim noktaları (şekilde bu noktalar B ve B_1 dir) aranan doğruları verir. Problemin en çok iki çözümü vardır.



Şekil 67 b

Verilen l_1 doğrultusuna paralel bir l doğrusu üzerinde verilen iki çemberin ayırdığı kirişlerin farkının belli bir uzunlukta olması halinde bu l doğrusunun nasıl çizileceği de aynı şekilde gösterilebilir.

(c). Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim ve S_1 dairelerini, KL doğru parçası MN ile çakışacak şekilde, KN doğrultusunda öteliyerek S' durumuna getirelim.

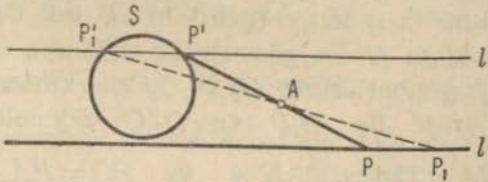


Şekil 68

Bu takdirde S_2 ve S'_1 çemberlerinin ortak kirişi MN olur. A noktasından S'_1 ve S_2 çemberlerine çizilen teğetler sırasıyla AB_1 ve AB_2 olsun (B_1 ve B_2 noktaları teğetlerin değme noktalarıdır). Buna göre $(AB_1)^2 = AM \cdot AN$; $(AB_2)^2 = AM \cdot AN$ ve bu iki eşitliğin sonucu olarak $(AB_1)^2 = (AB_2)^2$ yazılabilir. Öte yandan S'_1 'nin merkezi O'_1 olmak üzere AO'_1

yü: $AO_1' = \sqrt{(O_1'B_1)^2 + (AB_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + (AB_2)^2}$ eşitliğinden elde edebiliriz. Burada r_1 , S_1 dairesinin yarı çapıdır. Ayrıca $O_1O_1'O_2$ açısı diktir çünkü S_1' ve S_2 çemberlerinin merkezler doğrusu olan $O_1'O_2$ doğrusu bu çemberlerin MN ortak kirişine ve dolayısıyla MN ye paralel olan O_1O_1' ye diktir. Bu sonuç S_1 i S_1' ye dönüştürecek olan ötelemeyi bulmamıza yarayacaktır. Şimdi evvelâ merkezi A ve yarı çapı $\sqrt{r_1^2 + (AB_2)^2}$ olan çemberi ve ondan sonra da çapı O_1O_2 olan çemberi çizelim. Bu iki çemberin kesiştiği noktalar r_1 yarı çaplı S_1' çemberinin O_1' merkezini tayin eder. Şimdi çözümü veren S_2 ve S_1' nün MN ortak kirişini çizebiliriz. Hakikaten A noktasının MN üzerinde olduğunu göstermek mümkündür. Zira aksi takdirde $(AB_1)^2 = (AB_2)^2$ bağıntısı sağlanamazdı. (Eğer AM doğrusu S_2 ve S_1' çemberlerini ayrı N_2 ve N_1 noktalarında kesseydi bu takdirde $(AB_2)^2 = AM \cdot AN_2$ ve $(AB_1)^2 = AM \cdot AN_1$ olacaktı. Diğer taraftan $O_2O_1' \perp MN$; $O_1O_1' \perp O_2O_1'$ ve $O_1O_1' \parallel MN$ olduğundan S_1 ve S_1' çemberlerinin KL ve MN kirişleri O_1 ve O_2 merkezlerinden eşit uzaklıkta olurlar. Bu da KL ve MN nin aynı uzunlukta olduklarını gösterir. Problemin en çok iki çözümü vardır.

9. l doğrusunun A ya göre simetriği olan l' doğrusunu çizelim (Şekil 69) ve bunun S çemberi ile kesiştiği



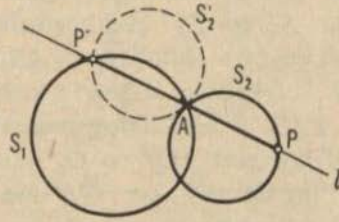
Şekil 69

noktalardan birini P' ile gösterelim. $P'A$ doğrusu problemin cevabıdır. Çünkü $P'A$ nın l yi kestiği P noktası, P' noktasının A ya göre simetriğidir yani $PA' = AP$ dir. Problemin en çok iki çözümü vardır.

10. (a) S_2 çemberinin A ya göre simetrik olan S_2' çemberini çizelim (Şekil 70 a). S_1 ile S_2' nün kesiştiği noktalardan biri A olacaktır. İkinci noktayı P' ile gösterelim. $P'A$ doğrusu problemin çözümünü verir. Çünkü $P'A$ nın S_2 yi kestiği P noktası P' nün A ya göre simetrigi yani $P'A = AP$ dir.

Eğer S_1 ve S_2 çemberleri iki noktada kesişirlerse problemin ancak bir çözümü vardır. Çemberler teğet ve yarı çaplar farklı ise çözüm yoktur. Çemberlerin teğet ve yarı çapların eşit olması halinde sonsuz çözüm vardır.

Not: Bu problem 8 (c) nin özel halidir.



Şekil 70 a

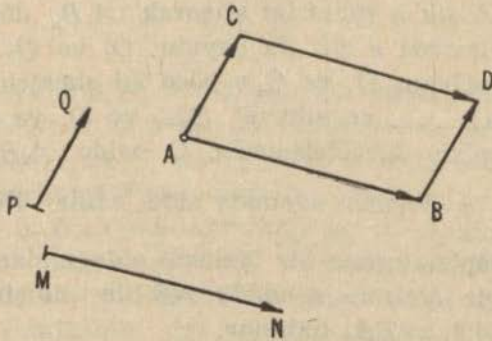
(b) S_2 çemberinin A ya göre simetrigi olan S_2' yü çizelim. Problemin çözülmüş olduğunu ve MAN nin aranan doğru olduğunu farzedelim (Şekil 70 b). Bu doğrunun S_2' yü kestiği noktayı N' ile gösterirsek $MN' = a$ olduğu görülmür. S_1 ve S_2' çemberlerinin O_1 ve O_2' merkezlerinden MAN doğrusuna sırası ile O_1P ve $O_2'Q$ dikmeleri çizilirse $PA = \frac{I}{2} MA$, $QA = \frac{I}{2} N'A$ ve $PQ = PA - QA = \frac{I}{2} (MA - N'A) = \frac{I}{2} a$ elde edilir.

Böylece O_2' noktasının O_1P doğrusuna olan uzaklığının $\frac{I}{2} a$ ya eşit yani O_1P nin, merkezi O_2' ve yarı çapı $\frac{I}{2} a$

(b) Tek sayıda simetrilerin toplamı bir simetri olduğundan (bu problemin birinci kısmına bak) A nın $O_1, O_2, \dots, O_n$ ye göre ardışık n simetriginden elde edilen A_n noktası aynı noktanın O ya göre simetriği olarak da elde edilebilir. A_{2n} noktası A_n den aynı n simetri sonunda elde edilebildiği gibi bu nokta A_n nin O ya göre simetriği olarak da bulunur. Bu ise A_{2n} nin A ile çakışacağını gösterir.

Eğer n çift ise A_n noktası A dan veya A_{2n} noktası A_n den aynı öteleme sonunda elde edilir. Bu da gösterir ki A_{2n} noktası genel olarak A ile çakışmayacaktır. (Bu hal ancak ötelemenin mesafesi sıfır olduğu zaman mümkündür.)

14. (a) O_1 ve O_2 ye göre iki simetrinin toplamı bir öteleme ve O_3, O_4 e göre iki simetrinin toplamı genel olarak birincisinden farklı başka bir ötelemedir. Buna göre ilk A_4 noktası A dan ardışık iki öteleme sonunda ve A_4' ile göstereceğimiz ikinci nokta da A nın ters sıra takip edilmek üzere aynı mesafelerde iki defa ötelenmesinden elde edilir. Fakat *iki ötelemenin toplamı bu ötelemelerin sırasına tabi değildir.* (Bunu isbat için şekil 73 e bakmak kâfidir.



Şekil 47

Bu şekilde B ve C noktaları A nın sırası ile MN ve PQ kadar ötelenmesinden elde edilmişlerdir. D noktası B nin

PQ kadar ötelenmesinden ve C nin MN kadar ötelenmesinden elde edilir. Teoremin isbatı bundan ibarettir.)

(b) Bu problem $n=5$ hali için 13 (b) den başka birşey değildir. Hakikaten A noktasının O_1, O_2, O_3, O_4 ve O_5 e göre ardışık simetrikleri alınmak suretiyle elde edilmiş olan A_5 noktasının bu noktalara göre ve aynı sıra takip edilerek simetrikleri alınırsa gene A noktası bulunur.

(c) 13 üncü probleme göre n tek ise son durumlar aynı olur.

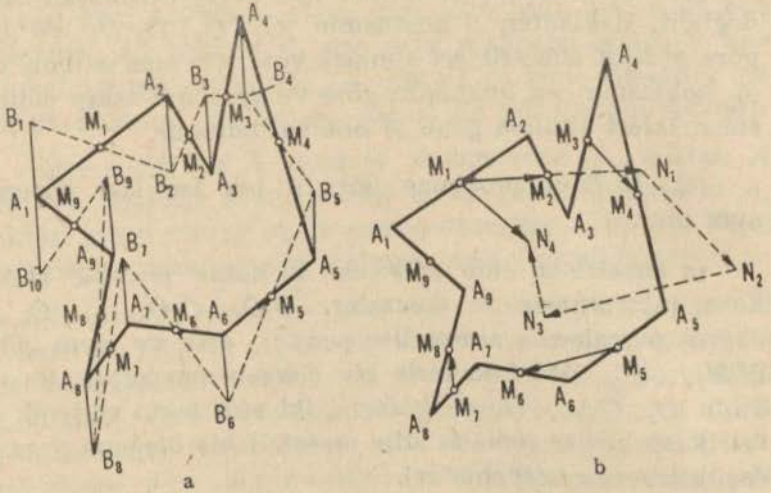
(n simetriden elde edilecek iki nokta $n=2k$ halinde keza çakışıklırlar ve kenarları $O_1O_2, O_3O_4, \dots, O_{n-1}O_n$ doğru parçalarına sırası ile paralel, eşit ve aynı yönlü $M_1M_2 \dots M_k$ gibi k kenarlı bir çokgen mevcuttur. Bu takdirde $O_1, O_2, \dots, O_n$ ye göre bu iki sıra takip edilerek alınacak simetrikler toplamı sıfır mesafeli bir öteleme yani özdeşlik transformasyondur).

15. Birinci Çözüm :

Problemın çözülmüş ve orta noktaları $M_1, M_2, \dots, M_9$ olan 9 genin $A_1A_2 \dots A_9$ olduğunu farzedelim (Şekil 74 a).

Düzlemin herhangi bir noktası B_1 ve B_1 in M_1 e göre simetriği B_2 olsun. B_2 nin M_2 ye göre simetriği B_3 ve böylece devam edilerek B_9 un M_9 a göre simetriği B_{10} olsun. $A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_1B_{10}$ doğru parçalarından herbiri bir evvelkinden bir simetri neticesinde elde edildiği için bunlardan her biri bir evvelkine paralel, eşit ve onunla ters yönlüdür. Sonuç olarak A_1B_1 ile A_1B_{10} eşit, paralel ve ters yönlü olurlar. Bu ise A_1 noktasının B_1B_{10} un ortası olduğunu gösterir. Herhangi bir B_1 noktasından hareketle B_{10} u bulabilmemiz bize A_1 in nasıl elde edilebileceğini gösterir. Bir defa A_1 elde edilince $A_2, A_3, \dots, A_9$ noktaları; $M_1, M_2, \dots, M_9$ a göre simetri alınarak kolayca bulunurlar. Problemın daima bir çözümü vardır ve elde edilen 9 genin

konveks olması da icap etmez hatta kenarlar birbirini keşebilir.



Şekil 74

Eğer n çift ise ve evvelki muhakemeyi tekrarlırsak problemi çözülmüş farzettığımız takdirde A_1B_{n+1} ile A_1B_1 in eşit, paralel ve aynı yönlü olduklarını yani çakiştıklarını görürüz. Buna göre eğer B_{n+1} noktası B_1 ile çakişmazsa problemin çözümü yoktur. Eğer B_{n+1} noktası B_1 ile çakişırsa bu takdirde A_1B_1 doğru parçası, A_1 noktası ne durumda alınırda alınsın, A_1B_{n+1} doğru parçası ile çakişacaktır. O zaman sonsuz çözüm elde edilir ve düzlemin herhangi bir noktası A_1 olarak alınabilir.

İkinci çözüm :

$M_1, M_2, \dots, M_n$ ye göre alınacak simetrilerin toplamı sonunda aranan çokgenin A_1 köşesi kendisi ile çakiştirilir. Yani A_1 noktası bu n simetri toplamının bir sabit noktası olur (Şekil 74 b de $n=9$ hali gösterilmiştir). Eğer n çift

olsa idi bu n simetrisinin toplamı bir öteleme olacaktı. Bu hali 13 (a) nın çözümünde gördük. Bir ötelemeye sabit nokta bulunmadığından n nin çift olması halinde problemin, genel olarak, çözümü yoktur. Bu sonuç ancak n simetri toplamının bir özdeşlik (sıfır mesafede öteleme) olması halinde değişir. Bu halde şeklin bütün noktaları sabit kalır ve problemin sonsuz sayıda çözümü olur yani düzlemin herhangi bir noktası A_1 köşesi olarak alınabilir. Eğer n tek ise (meselâ $n=9$) simetrilerin toplamı gene bir simetridir. Bir simetride ancak bir sabit nokta bulunacağından (simetri merkezi) aranan çokgenin A_1 köşesinin simetri merkezi ile çatışması gerektiği ve bu halde problemin tek bir çözümü bulunacağı anlaşılır.

Şimdi $M_1, M_2, \dots, M_9$ gibi 9 noktaya göre alınacak simetriler toplamına eşit bir simetrisinin merkezinin nasıl çizileceğini göstereyim. M_1 ve M_2 ye göre iki simetrisinin toplamı M_1M_3 doğrultusunda ve $2 M_1M_2$ ye eşit bir öteleme; M_3 ve M_4 e göre iki simetrisinin toplamı M_3M_4 doğrultusunda ve $2 M_3M_4$ e eşit bir öteleme, vesairedir. Böylece ilk 8 simetrisinin toplamı M_1M_2 (veya M_1N_1), M_3M_4 ($// N_1N_2$), M_5M_6 ($// N_2N_3$) ve M_7M_8 ($// N_3N_4$) doğrultularında 4 ötelemenin toplamına eşit olmuş olur. Burada sırası ile $2 M_1M_2 = M_1N_1$, $2 M_3M_4 = N_1N_2$, $2 M_5M_6 = N_2N_3$ ve nihayet $2 M_7M_8 = N_3N_4$ dür (Şekil 74 (b) ye bak). Bu toplam M_1M_4 doğrultusunda M_1M_4 büyüklüğünde bir ötelemeye denktir. A_1 noktası M_1N_4 doğrultusunda M_1N_4 e eşit bir öteleme ile M_9 a göre bir simetrisinin toplamı olan yarı dönmenin simetri merkezidir.

A_1 i bulmak için M_9 dan başlayan, N_4M_1 e paralel ve $\frac{1}{2} M_1N_4$ e eşit olan M_9A_1 i çizmek kâfidir (şekil 74 b). A_1 köşesi bulunduktan sonra dokuzgenin diğer köşelerini bulmak güç değildir.

16. (a) Eğer $ABCD$ dörtgeninin kenarlarının orta noktaları M, N, P ve Q ise (şekil 22 a ya bak) bu takdirde bu

noktalara göre uygulanacak ardışık dört yarı dönme sonunda A noktası gene kendisine dönüşecektir (15 inci problemin çözümü ile karşılaştırınız). Çözüm ancak M , N , P ve Q noktalarına göre simetriler toplamının, başka bir deyimle buna eşit olan ve MN , PQ doğrultularındaki $2MN$ ve $2PQ$ ye eşit iki öteleme toplamının bir özdeşlik transformasyonuna eşit olması halinde mümkündür. Bu ise MN PQ doğru parçalarının paralel, eşit ve ters yönlü olduklarını yani $MNPQ$ dörtgeninin paralelkenar olduğunu gösterir.

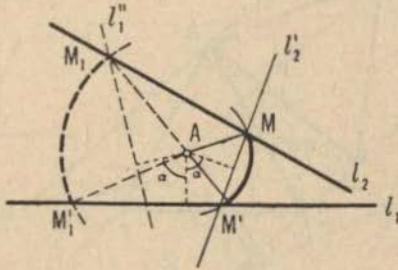
(b) Bu problemin (a) kısmında olduğu gibi M_1M_2 , M_3M_4 ve M_5M_6 doğrultularında sırası ile $2M_1M_2$, $2M_3M_4$ ve $2M_5M_6$ ya eşit ötelemeler toplamı bir özdeşlik transformasyonudur. Şu halde kenarları M_1M_2 , M_3M_4 ve M_5M_6 ya paralel ve sırası ile $2M_1M_2$, $2M_3M_4$ ve $2M_5M_6$ ya eşit bir üçgen vardır. Bu da kenarları M_1M_2 , M_3M_4 ve M_5M_6 ya paralel ve eşit bir üçgenin çizilebileceğini gösterir.

Aynı düşünce ile kenarları M_2M_3 , M_4M_5 ve M_6M_1 e paralel ve eşit bir üçgenin varlığı isbat edilebilir.

NOT: 16. (b) nin çözümünde kullanılan metottan faydalanılarak $M_1, M_2, \dots, M_{2n}$ gibi $2n$ noktanın $2n$ kenarlı bir çokgenin kenarlarının orta noktaları olabilmesi ancak ve ancak kenarları $M_1M_2, M_3M_4, \dots, M_{2n-1}M_{2n}$ doğru parçalarına paralel ve eşit bir n kenarlıının varolması halinde mümkündür denilebilir. Burada kenarları sırası ile $M_2M_3, M_4M_5, \dots, M_{2n}M_1$ doğru parçalarına paralel ve eşit bir n kenarlı daha vardır.

17. l_1 doğrusu A noktası etrafında α kadar döndürülerek l_1' durumuna getirilir. l_1' nün l_2 kesim noktası M olsun (şekil 75). Merkezi A ve yarı çapı AM olan çember problemin çözümünü verecektir. Çünkü bu çemberin l_1 ile kesim noktası olan M' , merkez açısı olan MAM' açısı α ya eşit olduğundan, dönme sonunda M ile çakışır. Verilen l_1 ve l_2 doğruları arasındaki açılardan biri α ya eşit olma-

dıkça saat ibrelerinin hareket yönünde veya ters yönde döndürme yapıldığına göre problemin iki cevabı vardır. l_1 ve l_2 arasındaki açılardan biri α ya eşit ise ya bir çözüm veya sonsuz çözüm; Eğer l_1 ve l_2 doğruları birbirine dik ve dönme açısı da $\alpha = 90^\circ$ ise ya çözüm yoktur veya sonsuz çözüm vardır.



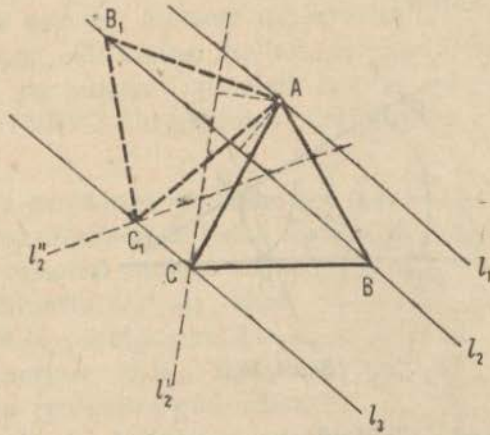
Şekil 75

18. Problemin çözülmüş ve köşeleri l_1 , l_2 , l_3 üzerinde bulunan üçgenin ABC olduğunu farzedelim (Şekil 76). l_2 doğrusu A noktası etrafında 60° döndürülürse B noktası C ye gelir. Buna göre şu çizim yapılır: l_1 üzerinde herhangi bir A noktası alınarak l_2 doğrusu bu nokta etrafında 60 derece döndürülür. l_2 nin yeni durumu l_2' ile gösterilirse bu doğru ile l_3 ün kesim noktası aranan üçgenin C köşesidir. l_2 doğrusu bir veya diğer yönde 60 derece döndürülebileceği için problemin iki çözümü varsa da bu iki çözüm eşitler.

Köşeleri merkez bir üç çemberin çevresinde yer almak üzere bir eşkenar üçgen çizmek problemi de benzer şekilde çözülür.

NOT: l_1 doğrusu üzerinde A yerine başka bir A' noktası alınırsa yeni çözüm Şekil 76 dan bir izometri sonunda (daha açık olarak l_1 doğrultusunda AA' kadar bir öteleme sonunda) elde edilebilir. Fakat geometride bu gibi şekiller aynı kabul edilir. Bu sebeple problemin cevabı, A nokta-

sının l_1 üzerindeki durumuna bağlı değildir. l_1, l_2, l_3 doğruları paralel olmasalardı problem aynı şekilde çözülecekti. Ancak, bu takdirde, A nın l_1 üzerindeki muhtelif durumları için birbirine eş olmayan sonsuz çözüm elde edecektik.

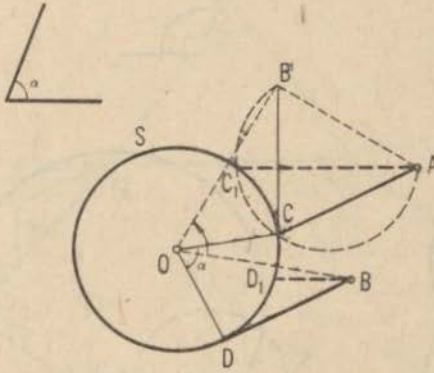


Şekil 76

Aynı şekilde muhakeme ile köşeleri merkez bir S_1, S_2, S_3 çemberinin üzerinde bulunan eşkenar üçgenin çizimi yapılabilir. Bu takdirde en çok dört çözüm vardır. Burada gene A noktasının S_1 çemberi üzerindeki durumunun bir önemi yoktur. Çünkü elde edilecek şekillerin birinden diğerine ortak merkez etrafında bir dönme ile geçilebilir. Öteyandan eğer çemberler aynı merkezli değillerse A nın S_1 üzerindeki her durumuna ayrı bir çözüm elde edilecek yani problemin sonsuz çözümü olacaktır.

19. CD yayının bulunmuş olduğunu farzedelim (Şekil 77). BD doğru parçası S çemberinin O merkezi etrafında α kadar döndürülür. Yeni durum $B'C$ ile gösterilirse $\widehat{ACB'} = \alpha$ olduğu görülür.

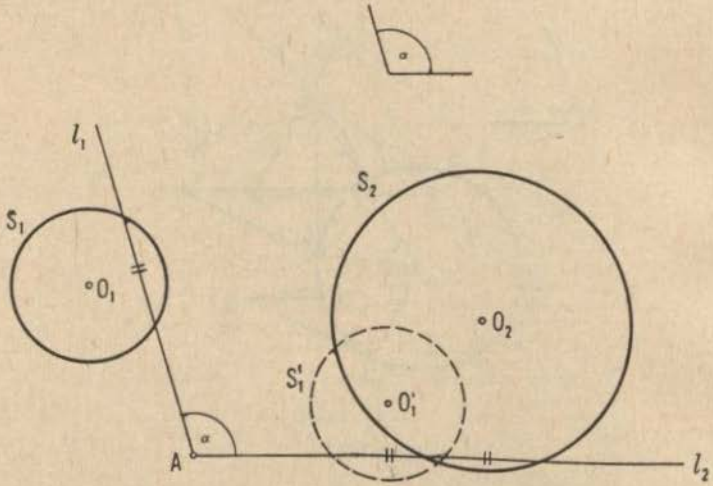
Buna göre şu çizim yapılır: B noktası O etrafında α kadar döndürülerek B' durumuna getirilir. AB' yü α açısı altında gören noktaların geometrik yeri çizilir. Bu geometrik yeri çizilir. Bu geometrik yerin S ile kesim noktası aranan C noktasıdır. AB' yü α açısı ile gören yay S çemberini iki noktada kesebildiğine ve B noktası O etrafında iki yönde döndürülebildiğine göre problemin dört çözümü olabilir.



Şekil 77

20. Problemin çözülmüş olduğunu farzederek S_1 çemberini A noktası etrafında α kadar çevirmek suretiyle S_1' durumuna getirelim (Şekil 78). S_2 ve S_1' çemberleri l_2 üzerinde eşit kirişler ayıracaktır. Böylece problem 8 (c) ye çevrilmiş olur. Başka bir deyim ile A dan öyle bir l_2 doğrusu geçirilmelidir ki bu doğru S_1' ve S_2 üzerinde eşit kirişler ayırsın. l_2 elde edildikten sonra bunun A etrafında α kadar döndürülmesiyle l_1 doğrusu elde edilir. S_1 in l_1 üzerinde ayırdığı kiriş aranan kiriştir. S_1 çemberi A etrafında iki yönde döndürülebileceğinden problem iki şekilde 8 (c) ye dönüştürülebilir ve her birinden iki çözüm elde edileceği için esas problemin en çok dört çözümü vardır.

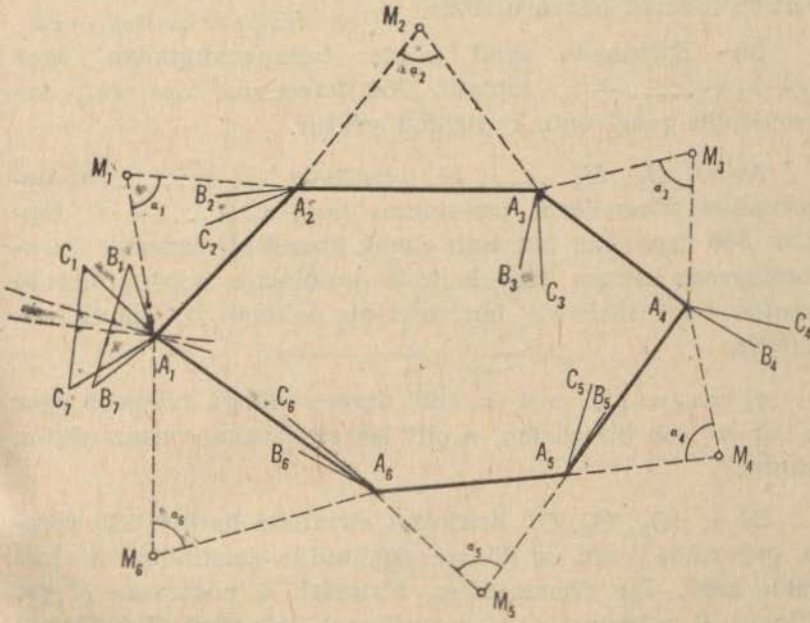
21. *Birinci Çözüm* (15 inci problemin birinci çözümü ile karşılaştırınız): Problemin çözülmüş ve aranan n genin $A_1A_2 \dots A_n$ olduğunu farzedelim ($n=6$ için şekil 79 a bak). Düzlemin herhangi bir B_1 noktası göz önüne alınır. M_1 etrafında α_1 , M_2 etrafında $\alpha_2, \dots, M_n$ etrafında α_n değerinde uygulanacak dönmeler dizisi A_1B_1 i sırası ile A_2B_2 ye,



Şekil 78

A_2B_2 yi A_3B_3 e, ve sonuç olarak A_nB_n i A_1B_{n+1} e dönüştürür. Bütün bu doğru parçaları birbirine eşit ve bu sebeple A_1 köşesi B_1 ve B_{n+1} den eşit uzaklıktadır (burada B_{n+1} noktası B_1 noktasından n dönme sonunda elde edilmiştir). Şimdi de düzlemin ikinci bir C_1 noktası göz önüne alınır ve bu nokta $M_1, M_2, \dots, M_n$ noktaları etrafında sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ kadar döndürülerek yeniden A_1 den eşit uzaklıkta olan C_1 ve C_{n+1} gibi iki nokta elde edilir. B_1B_{n+1} ve C_1C_{n+1} doğru parçalarının orta dikmelerinin kesişim noktası aranan n gen'in A_1 köşesini verir. A_1 bulunduktan sonra bu noktayı M_1 etrafında α_1 kadar döndürmek suretiyle A_2 yi, A_2 yi M_2 etrafında α_2 kadar döndürmek

suretiyle A_3 ü , ... elde etmek mümkündür. B_1B_{n+1} ve C_1C_{n+1} doğru parçalarının birbirine paralel olmaması halinde orta dikmeler bir noktada kesişeceğinden problemin ancak bir çözümü vardır. Orta dikmeler paralel ise çözüm yoktur ve çakışarlarsa sonsuz çözüm vardır. Elde edilen çok genin konveks olması şart değildir.



Şekil 79

İkinci çözüm: (15 inci problemin ikinci çözümü ile karşılaştırınız.): M_1 köşesi, merkezleri $M_1, M_2, \dots, M_n$ ve dönme açıları sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, olan n dönmenin bir sabit noktasıdır (bu dönmeler A_1 i A_2 ye, A_2 yi A_3 e, ..., A_n i A_1 e dönüştürür). Fakat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ değerlerindeki n dönmenin toplamı, bu toplam 360 derecenin tam katı olmadıkça $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ye eşit bir dönme-

dir (eğer toplam 360 derecenin tam katı ise sonucun bir öteleme olduğu evvelce görülmüştü). Şu halde bir dönmede tek sabit nokta dönme merkezi olduğundan $M_1, M_2, \dots, M_n$ noktaları etrafındaki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ değerinde dönmelerin toplamı, yukarıdaki hipotez altında, A_1 merkezli tek bir dönmedir. Hakikatte A_1 noktasını bulmak için tekrar iki dönmenin toplamının nasıl bulunacağı hakkında evvelce verilen metoda başvurulabilir.

Bir ötelemelerde sabit nokta bulunmadığından eğer $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ toplamı 360 derecenin tam katı ise problemin genel olarak çözümü yoktur.

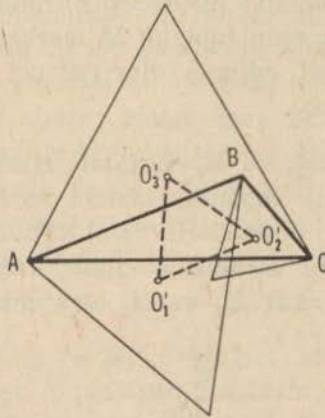
Ancak $M_1, M_2, \dots, M_n$ etrafında $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ değerindeki dönmelerin toplamının ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ toplamı 360 derecenin tam katı olmak üzere) bir özdeşlik transformasyonu olması özel halinde problemin sonsuz cevabı vardır. Yani düzlemin herhangi bir noktası A_1 olarak alınabilir.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 180$ derece olduğu takdirde eğer n tek ise tek bir çözüm, n çift ise sıfır veya sonsuz çözüm vardır.

22 a. O_1, O_2, O_3 noktaları etrafında herbiri 120 derece değerinde olan üç dönme düşünülür (metindeki 31 inci şekle bak). Bu dönmelerden birincisi A noktasını B ye, ikincisi B noktasını C ye ve nihayet üçüncüsü C noktasını A ya dönüştürür. Böylece A noktasının bu üç dönme toplamının sabit bir noktası olduğu görülür. Fakat herbiri 120 dereceye eşit 3 dönmenin toplamı, genel olarak, bir ötelemedir ve bir ötelemelerde sabit nokta yoktur. Öteyandan A noktası sabit bir nokta olduğundan bu 3 öteleme toplamının bir özdeşlik transformasyonu (sıfır uzaklığında öteleme) olduğu görülür. İlk iki dönmenin toplamı, biri O_1 den diğeri O_2 den geçen ve her biri O_1O_2 ile 60 ar derecelik açılar yapan iki doğrunun kesiştiği O noktası etrafında 240 derece değerinde bir dönmedir. Şu halde O_1O_2O üçgeni eş-

kenardır. Bu dönme ile O_3 etrafındaki 120 derecelik dönmenin toplamı bir özdeşlik transformasyonu olduğundan O noktası O_3 ile mutlaka çakışır. Böylece $O_1O_2O_3$ üçgeninin eşkenar olduğu isbat edilmiş olur.

Aynı şekilde gösterilebilir ki ABC üçgeninin kenarları üzerine bu defa üçgenin içine doğru çizilen eşkenar üçgenlerin O_1' , O_2' , O_3' merkezleri gene bir eşkenar üçgen meydana getirirler (Şekil 80).



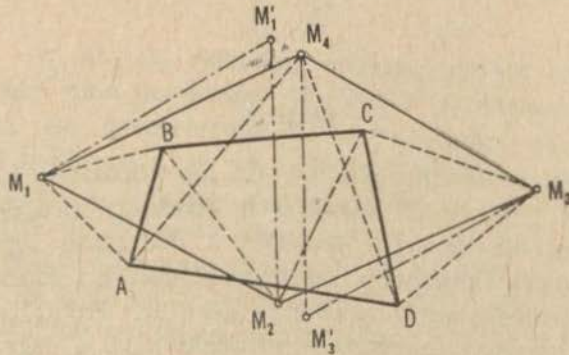
Şekil 80

b. Bu problemin çözümü (a) nın çözümüne benzer. A noktası B_1 , A_1 ve C_1 merkezleri etrafında sırasıyla β , α ve γ değerinde ($\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$) 3 dönmenin toplamı sonuncu olarak kendisine dönüşeceğinden bu toplamın bir özdeşlik transformasyonu olduğu görülür. Fakat bu ancak C_1 in B_1 ve A_1 merkezleri etrafındaki β ve α değerinde iki dönmenin toplamının merkezi ile çakıştığı zaman mümkündür. Yani C_1 noktası, B_1 ve A_1 den geçen ve B_1A_1 ile sırası ile $\frac{1}{2} \beta$ ve $\frac{1}{2} \alpha$ açılarını meydana getiren iki doğrunun kesim noktasıdır. Böylece teorem isbat edilmiş olur.

Aynı şekilde gösterilebilir ki, bir ABC üçgeninin kenarları taban olmak üzere üçgenin içine doğru köşeleri A_1' , B_1' ve C_1' ve tepe açıları α , β , ve γ ($\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$) olan ABC_1' , BCA_1' ve ACB_1' ikizkenar üçgenleri çizilirse, A_1' B_1' C_1' üçgeninin açıları sırası ile $\frac{I}{2} \alpha$, $\frac{I}{2} \beta$ ve $\frac{I}{2} \gamma$ olur.

23. A_1 , B_1 ve M noktaları etrafında ve aynı yönde sırası ile 60° , 60° ve 240 dereceye eşit 3 dönme uygulanırsa B noktası kendisine döndürür (metindeki 32 nci şekle bak) yani 3 dönmenin toplamı bir özdeşlik transformasyonu olur. Burada ilk iki dönmenin toplamı M merkezli bir dönmedir. Böylece teorem isbat edilmiş olur (22 nci problemin çözümü ile karşılaştırınız).

24 a. M_1 , M_2 , M_3 ve M_4 noktaları etrafında 60 ar derecelik dört dönmenin toplamı, birinci ve üçüncü dönmeler ikinci ve dördüncü dönmelerin tersi yönünde olmak üzere, dörtgenin A köşesini kendisine döndürür (metindeki 33 üncü şekle bak). Fakat M_1 ve M_2 etrafındaki iki dönmenin



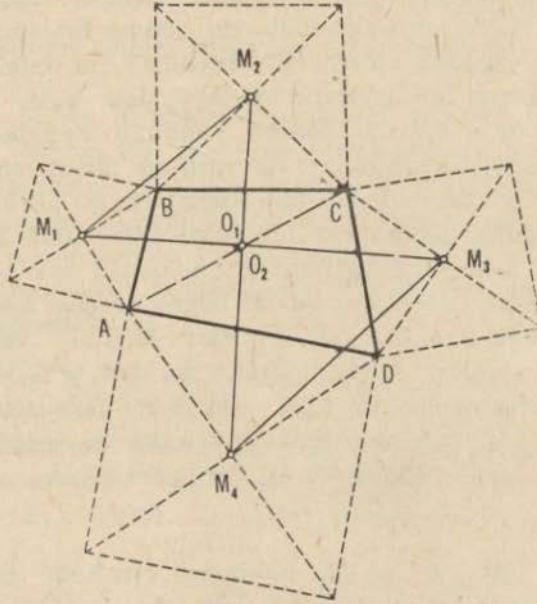
Şekil 81 a

toplamı $M_1 M_1'$ kadar bir ötelemedir. Burada M_1' noktası $M_1 M_2 M_1'$ eşkenar üçgeninin bir köşesidir ($M_1 M_2 = M_2 M_1'$,

$\widehat{M_1M_2M_1'} = 60^\circ$ ve M_2M_1 den M_2M_1' ye doğru olan dönmenin yönü M_2B den M_2C ye olan dönmenin yönü ile çakışır. Bu-
nu görmek için 81 a 28 b ye bak). Benzer muhakeme ile M_3 ve M_4 noktaları etrafındaki iki dönme toplamının M_3M_3' ye eşit bir öteleme olduğu söylenebilir. Bu defa $M_3M_4M_3'$ üçgeni eşkenar bir üçgendir ve M_4M_3 den M_4M_3' ye dönme yönü M_4D den M_4A ya dönme yönünün aynıdır. Böylece M_1M_1' ve M_3M_3' uzunlukları ile verilmiş iki ötelemenin toplamının A noktasını kendisine döndürdüğü görülür. Fakat iki ötelemenin toplamında bir nokta bile sabit kalırsa bu toplam bir özdeşlik transformasyonu olmak zorundadır. Yani iki ötelemeyi belirten bu iki doğru parçası eşit, paralel ve ters yönlü olmalıdır. Fakat eğer $M_1M_2M_1'$ ve $M_3M_4M_3'$ eşkenar üçgenleri $M_1M_1' = M_3M_3'$ ve $M_1M_1' // M_3M_3'$ olacak şekilde yerleştirilmiş ve M_1M_1' ile M_3M_3' ters yönde iseler M_1M_2 ve M_3M_4 kenarları da eşit, paralel ve ters yönlü olurlar. Bu da bize $M_1M_2M_3M_4$ ün bir paralelkenar olduğunu gösterir.

b. M_1, M_2, M_3 ve M_4 noktaları etrafında herbiri 90 derecelik dönmeler toplamı A noktasını kendisi ile çakıştırır. Yani dört dönmenin toplamı bir özdeşlik transformasyonu olur (81 inci problemin a kısmı ile karşılaştırınız). Fakat M_1 ve M_2 noktaları etrafında herbiri 90 ar derecelik iki dönmenin toplamı O_1 etrafında bir yarım dönmedir. Burada O_1 noktası, $O_1M_1M_2$ ikizkenar dik üçgeninin köşesidir ($\widehat{O_1M_1M_2} = \widehat{O_1M_2M_1} = 45^\circ$; 81 b yi metin kısmındaki 28 a ile karşılaştırınız). Benzer şekilde düşünülerek M_3 ve M_4 noktaları etrafında uygulanacak 90 ar derecelik iki dönme toplamının $O_2M_3M_4$ ikizkenar dik üçgeninin O_2 köşesine göre bir yarım dönme olduğu söylenebilir. Öteyandan O_1 ve O_2 noktaları etrafındaki iki yarım dönmenin toplamı bir özdeşlik transformasyonu olduğundan bu iki noktanın çakışması gerekir. Bu da $O_1M_2M_4$ üçgeninin $O_1 = O_2$ noktası etrafında 90 derece döndürülmesi sonunda $O_1M_1M_3$ üçgeni-

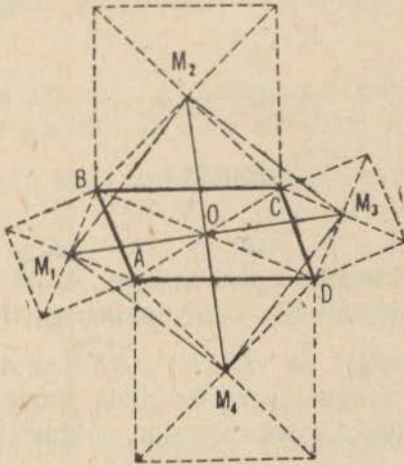
nin elde edileceğini göslerir. Buradan M_1M_3 ve M_2M_4 doğru parçalarının birbirine eşit ve dik olduğu görülür.



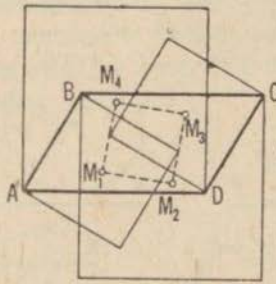
Şekil 81 b

c. Bundan evvelki şıkta verilen isbattan $M_1M_2M_3M_4$ dörtgeninin M_1M_3 ve M_2M_4 köşegenlerinin eşit ve birbirine dik oldukları anlaşılır. Öteyandan $ABCD$ paralelkenarının köşegenlerinin kesim noktası olan O noktası şeklin simetri merkezi olduğundan bu nokta 81 c şeklinin ve özellikle $M_1M_2M_3M_4$ dörtgeninin (bir simetri merkezi olan dörtgen ancak paralelkenar olabileceğinden bu dörtgen mutlaka paralelkenardır) simetri merkezidir. Fakat köşegenleri birbirine eşit ve dik olan paralelkenar ancak bir karedir.

Aynı yoldan isbat edilebilir ki bir paralelkenarın dört kenarı üzerine ve şeklin içine doğru dört kare çizilirse bu karelerin merkezleri gene bir kare meydana getirir.



Şekil 81 c



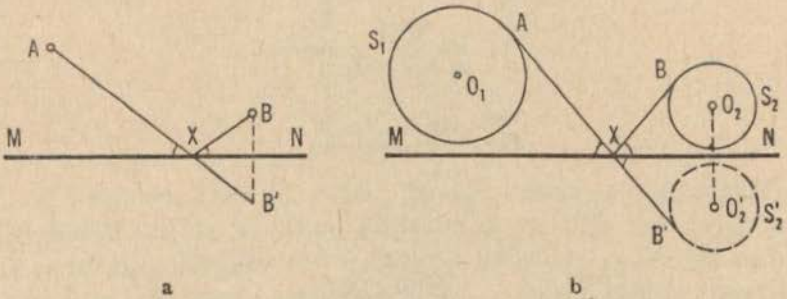
Şekil 81 d

İKİNCİ FASIL

SİMETRİ

25. a. X noktasının bulunmuş ve $\widehat{AXM} = \widehat{BXN}$ olduğunu farzedelim (şekil 82 a). B' noktası B nin MN doğrusuna göre simetriği ise $\widehat{B'XN} = \widehat{BXN} = \widehat{AXM}$ dir ve A, X, B' noktaları aynı doğru üzerinde olurlar. Buradan X noktasının MN ile AB' nün kesim noktası olduğu sonucuna varılır.

b. X noktasının bulunmuş olduğunu farzedelim ve S_2 nin MN doğrusuna göre simetriğini S_2' ile gösterelim (şekil 82 b). X den S_1, S_2 ve S_2' çemberlerine çizilen teğetler



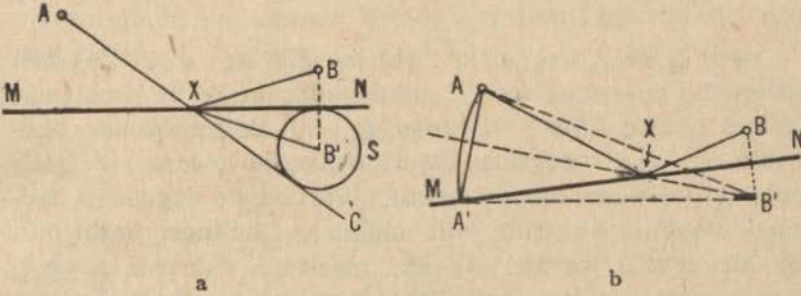
Şekil 82 a b

XA, XB ve XB' ile gösterilirse $\widehat{B'XN} = \widehat{BXN} = \widehat{AXM}$ olur. Bu da A, X, B' noktalarının aynı doğru üzerinde bulunduklarını gösterir. Şu halde X noktasını elde etmek için S_1, S_2, S_2' çemberlerinin ortak teğetleri olan AB' ile MN nin kesiştiği noktayı bulmak kâfidir. Genel olarak iki çemberin

dört ortak teğeti olduğundan problemin en çok dört çözümü vardır.

c. *Birinci çözüm*: X noktasının bulunmuş olduğunu farzedelim. B nin MN ye göre simetrisi B' ve AX in uzantısı XC ise (şekil 83 a) bu takdirde $\widehat{CXN} = 2 \cdot \widehat{BXN} = 2 \cdot \widehat{B'XN}$ dir. Bu sonuç XB' nün NXC açısının açı ortayı olduğunu gösterir. Şu halde AXC doğrusu B' merkezli ve MN ye teğet S çemberine teğettir ve X noktası MN ile A dan S çemberine teğet doğrunun kesim noktası olarak elde edilir.

İkinci çözüm: Gene X noktasının bulunmuş olduğunu farzedelim. Birinci çözümdeki notasyonları aynen kullanarak A nın $B'X$ e göre göre simetrisini A' ile gösterelim. $B'X$ doğrusu AXM açısının açı ortayıdır ve $B'A = B'A'$ olacak şekilde A' noktası XM doğrusu üzerindedir (şekil 83 b). Böylece A' noktası MN doğrusu ile merkezi B' ve yarı çapı $B'A$ olan çemberin kesim noktası olarak bulunabilir. MN ile B' den AA' ye indirilen dikmenin kesim noktası aranan X noktası olur.

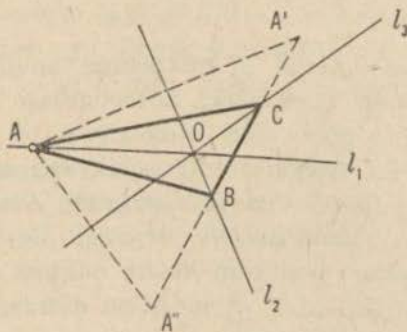


Şekil 83 a, b

26. a B açısının açı ortayı l_2 ve C açısının açı ortayı l_3 olmak üzere aranan ABC üçgeninin çizilmiş olduğunu

farzedelim (şekil 84 a). Bu takdirde BA ve BC doğrularının l_2 ye göre birbirinin simetrigi; BC ve AC doğruları da l_3 e göre birbirinin simetrigi olurlar. Bunun sonucu olarak da A nın l_2 ve l_3 e göre simetrikleri olan A' ve A'' noktaları BC doğrusu üzerinde bulunur.

Buna göre şu çizim yapılır: A noktasının l_2 ve l_3 e A' ve A'' simetrikleri elde edilir. B ve C köşeleri $A'A''$ nın l_2 ve l_3 ile kesiştiği noktalardan başka bir şey değildir.

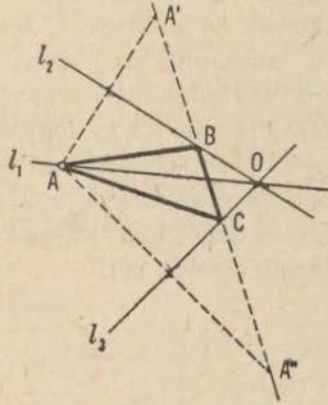


Şekil 84 a

Eğer l_2 ve l_3 doğruları birbirine dik ise $A'A''$ doğrusu verilen üç doğrunun kesim noktasından geçer ve problemin çözümü olmaz. Eğer l_1 doğrusu l_2 ve l_3 doğrularından birine dik ise $A'A''$ doğrusu diğerine paralel olacak ve gene problemin çözümü olmayacaktır. Verilen üç doğrudan herhangi ikisinin birbirine dik olmaması halinde problemin tek bir cevabı vardır. Ancak, meselâ l_1 doğrusu l_2 ve l_3 doğrularının meydana getirdiği dar açının içinde ise bu son iki doğru üçgenin dış açıların ortayları olur (Şekil 84 b). Bu kısmın isbatını okuyucuya bırakıyoruz.

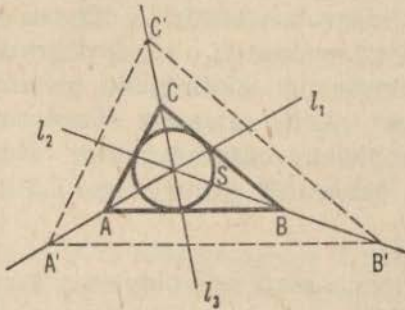
b. l_1, l_2, l_3 doğrularından herhangi biri üzerinde rastgele bir A' noktası alınarak iç açı ortayları bu doğrular

olan $A'B'C'$ üçgeni çizilir. Bundan sonra kenarları bu üçgenin kenarlarına paralel ve S çemberine teğet olan üç



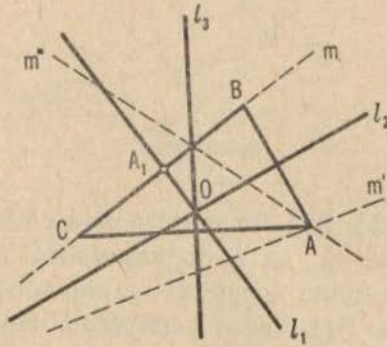
Şekil 84 b

doğru çizilir (Şekil 85). Bu suretle elde edilen üçgen problemin cevabı olur. l_1, l_2, l_3 doğrularından biri diğer ikisi arasındaki geniş açının içindeyse problemin tek bir cevabı vardır. Eğer biri diğer ikisi tarafından teşkil edilen dar açının içinde ise verilen çember aranan üçgenin dış çemberi olur.



(Şekil 85)

c. ABC üçgeninin bulunmuş olduğunu farzedelim (şekil 86). A noktası B nin l_2 ye göre simetriği olduğundan bu nokta BC nin l_2 ye göre simetriği üzerinde bulunur. Bunun gibi düşünülerek A noktası C nin l_3 e göre simetriği olduğundan bu noktanın BC nin l_3 e göre simetriği üzerinde bulunduğu söylenebilir. Buna göre şu çizim yapılır: Evvelâ A_1 den l_1 e dik bir m doğrusu geçirilir. Sonra bu doğrunun sırasıyla l_2 ve l_3 e göre m' ve m'' simetrikleri çizilir. Bu son iki doğrunun kesim noktası istenilen üçgenin A köşesini verecektir. Diğer köşeler bu köşenin l_2 ve l_3 e göre simetrikleridir (şekil 86).

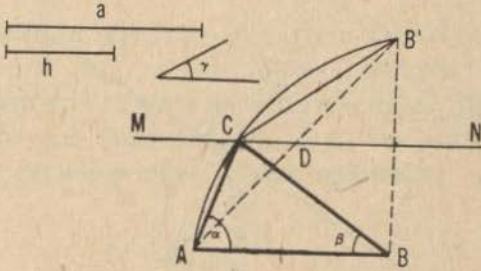


Şekil 86

Eğer l_2 ve l_3 doğruları birbirine dik ise m' ve m'' doğruları ya paralel (A_1 noktası l_1 , l_2 , l_3 doğrularının kesiştiği O noktası ile çakışmadığı takdirde bu hal olur) veya çakışırlar (A_1 noktası O ile çakışırsa son durum hasıl olur). Birinci halde problemin çözümü yoktur. İkinci halde ise çözüm sayısında belirsizlik vardır. Diğer bütün hallerde çözüm tektir.

27. a. Problemin çözülmüş olduğunu farzederek C den AB ye paralel MN doğrusunu çizelim ve B nin MN ye göre simetriğini B' ile gösterelim (şekil 87). $\alpha > \beta$ olmak

şartiyle ABC üçgeninin A ve B deki açılarını α ve β ile gösterelim. Bu takdirde: $\widehat{B'CN} = \widehat{BCN} = \beta$, $\widehat{ACN} = 180 - \alpha$; $\widehat{ACB'} = (180 - \alpha) + \beta = 180 - (\alpha - \beta) = 180 - \gamma$ olduğu görülür. Böylece şu çizim elde edilir: Evvelâ $AB = a$ uzunluğu çizilir. Sonra AB den h uzaklığında ve AB ye paralel bir MN doğrusu çizilir. Şimdi B nin MN ye göre simetrisini B' ile gösterelim ve AB' yü $180 - \gamma$ açısı altında gören yayı çizelim. Bu yayın MN yi kestiği nokta üçgenin C köşesidir. Problemin tek bir cevabı vardır.



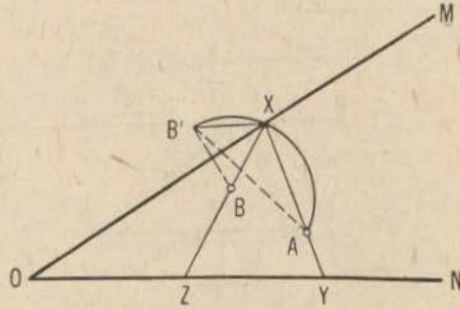
Şekil 87

b) Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim ve MN doğrusu ile B' noktasını bu problemin ilk kısmındaki gibi tayin edelim (Şekil 87). $\widehat{ABC'} = 180 - \gamma$ olduğundan ACB üçgenini belli olan AC ve $CB' = BC$ kenarları ile aralarındaki $180 - \gamma$ açısı yardımı ile çizebiliriz. MN doğrusu ABB' üçgeninde orta taban olduğundan bu doğru ACB' üçgeninin C_1 den geçen kenar ortayı ile çakışır. Sonuç olarak B' nün MN ye göre simetrisi alınarak istenilen üçgenin B köşesi elde edilir. Problemin tek bir cevabı vardır.

28. Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim ve B nin OM ye göre simetrisini B' ile gösterelim (Şekil 88). Bu takdirde: $\widehat{B'XA} = \widehat{B'XB} + \widehat{YXZ}$ dir. Fakat $\widehat{XZY}$ açısı XOZ

üçgeninin bir dış açısı olduğundan $\widehat{B'XB} = 2 \cdot \widehat{OXZ} = 2(\widehat{XZY} - \widehat{MON})$ yazılabilir. Buna göre :

$\widehat{B'XA} = 2 \cdot \widehat{XZY} - 2 \cdot \widehat{MON} + \widehat{YXZ} = \widehat{XZY} = \widehat{XYZ} + \widehat{YXZ} - 2 \cdot \widehat{MON} = 180 - 2 \cdot \widehat{MON}$ olur. Böylece $\widehat{B'XA}$ açısı bulunmuş olur. Buradan X noktası, OM ile AB' yü $180 - 2 \cdot \widehat{MON}$ açısı altında gören yayın kesiştiği nokta olarak elde edilir. Problemin tek bir çözümü vardır.

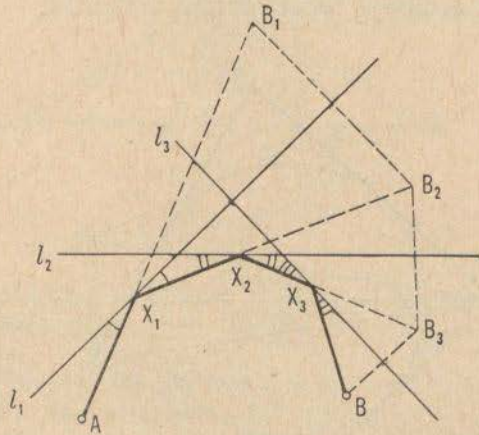


Şekil 88

29. a) $ABCD$ dörtgenin çizilmiş olduğunu farzederek B nin AC köşegenine göre simetrisini B' ile gösterelim (Şekil 89). $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$ olduğundan B' noktası AD doğrusu üzerindedir. Bu da kenarları DC , $BC' = BC$ ve $DB' = AD - AB' = AD - AB$ olan $B'DC$ üçgeninin belli olduğunu bize gösterir. Bu sebeple evvelâ bu üçgen çizilir. Sonra belli olan AD uzunluğu yardımı ile A noktası bulunur. Ondan sonra da B' nün AC ye göre simetrisi alınarak B noktası elde edilir. $AD \neq AB$ ise problemin bir çözümü; $AD = AB$ ve $CD \neq CB$ ise sıfır çözümü ve nihayet $AD = AB$ ve $CD = CB$ ise birden fazla çözümü vardır.

$\widehat{AD_1C_1} = \widehat{ADC}$ açıları belli olduğundan C ve C_1 noktalarının BC ve D_1C_1 üzerindeki yerlerini bilmeden BC ve D_1C_1 i bulabiliriz. Şimdi AB , BC ve D_1C_1 e teğet çemberi çizersek bu çember dörtgenin iç çemberi olur. Ondan sonra AD_1 ve D_1C_1 in AO ya göre simetrikleri alınarak AD ve DC bulunur. C noktası BC ile D_1C_1 in simetrisinin kesim noktasıdır. Eğer $\widehat{ADC} \neq \widehat{ABC}$ ise problemin tek bir çözümü; $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ ve $AD \neq AB$ ise sıfır çözümü; $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ ve $AD = AB$ ise birden fazla çözümü vardır.

30. a. Problemin çözülmüş yani $X_1, X_2, \dots, X_n$ noktalarının $l_1, l_2, \dots, l_n$ doğruları üzerinde $AX_1, X_2, \dots, X_n B$ yolu probleme cevap olacak şekilde bulunmuş olduğunu farzedelim (şekil 91 de $n=3$ hali gösterilmiştir). Kolayca



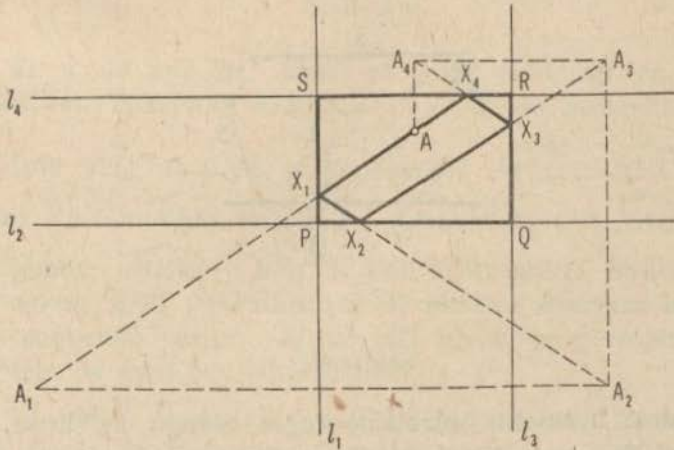
Şekil 91

görülür ki X_n noktası l_n doğrusu ile $X_{n-1}B_n$ doğrusunun kesim noktasıdır. Burada B_n noktası B nin l_n ye göre simetriği (25 a nın çözümüne bak) yani B_n, X_n, X_{n-1} noktaları aynı doğru üzerindedir. Bu takdirde X_{n-1} noktası l_{n-1}

ile $X_{n-2}B_{n-1}$ in kesim noktası olur. Gene burada B_{n-1} noktası B_n in l_{n-1} e göre simetrigidir. Benzer yoldan gidilerek B_{n-2} noktasının B_{n-1} in l_{n-2} ye göre simetrigi olmak üzere X_{n-2} nin l_{n-2} ile $X_{n-3}B_{n-2}$ nin kesim noktası olduğu ve X_{n-3} ün de B_{n-3} noktası B_{n-2} nin l_{n-3} e göre simetrigi olmak üzere l_{n-3} ile $X_{n-4}B_{n-3}$ ün kesim noktası olduğu ve saire gösterilebilir.

Böylece şu çizim elde edilir: Evvelâ B nin l_n ye göre B_n simetrigi, sonra B_n nin l_{n-1} e göre B_{n-1} simetrigi elde edilir ve bu çizime böylece devam edilerek en sonda B_2 nin l_1 e göre B_1 simetrigine varılır. A daki bilardo topunun vuruş doğrultusunu tayin eden X_1 noktası, l_1 ile AB_1 in kesim noktası olarak bulunur. Bundan sonra $B_2, B_3, \dots, B_n$ ve X_1 noktalarının yardımı ile $X_2, X_3, \dots, X_n$ noktalarını bulmak kolaydır.

b) (a) kısmındaki işlemi takip etmek suretiyle ilk iş olarak A nın l_4 e göre A_4 simetrigini ondan sonra A_4 ün l_3 e göre A_3 simetrigini elde ederek ve bu çizime devamla nihayet A_1 noktasına varırız (Şekil 92). Kolayca sağlanabi-



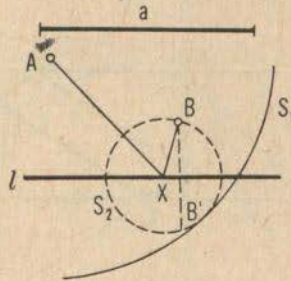
Şekil 92

lir ki l_3 e göre simetriği takip eden l_4 e göre simetri, bu iki doğrunun kesim noktası olan R ye göre bir simetridir. Benzer yoldan gidilerek diğer iki simetrinin P ye göre bir simetriye denk olduğu söylenilebilir. Bu sebeple dört simetri yerine R ve P noktalarına göre iki yarı dönmenin toplamı kalmış olur. Fakat bu toplamın PR doğrultusunda ve 2. PR büyüklüğünde bir öteleme (Şekil 17 ye bak) olduğunu biliyoruz.

Böylece AA_1 in PR köşegenine paralel ve onun iki katına eşit olduğu bulunmuş olur. Açıları göz önüne alarak $AX_1X_2X_3X_4A$ yolunun bir paralelkenar olduğunu görmek kolaydır. Çünkü, köşegenlere paralel olan karşılıklı kenarlar birbirine paraleldirler. Böylece eğer bilardo topu A ya dönünce durdurulmazsa ikinci turda mutlaka aynı yolu takip edeceği anlaşılır.

Sonuç olarak şekilden görülebilir ki yolun toplam uzunluğu AA_1 e yani köşegen uzunluğunun iki katına eşittir.

31. a Problemi çözülmüş farzederek merkezi A ve yarı çapı a olan S_1 çemberi ile merkezi X ve yarı çapı XB (Şekil 93 a) olan S_2 çemberini çizelim. Bu iki çemberin AX

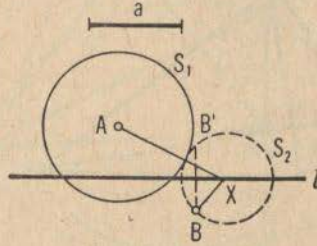


Şekil 93 a

üzerindeki bir nokta birbirine teğet olduğu aşikârdır. S_2 çemberi B den geçtiği için B nin l ye göre simetriği olan B' den de geçer. Böylece problem, verilen B ve B' gibi iki

noktadan geçen ve verilen bir S_1 çemberine teğet olan S_2 çemberinin çizimine dönüştürülmüş olur. Bu çemberin X merkezi istenilen noktadır. Problemin en çok iki çözümü vardır.

b. Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim. Merkezi A ve yarı çapı a olan çemberi S_1 ile, merkezi X ve yarı çapı BX olan çemberi de S_2 ile gösterelim (Şekil 93 b). S_1 ve S_2 çemberleri AX üzerinde bulunan bir noktada birbirine teğettirler. Ayrıca S_2 çemberi B nin l ye göre simetrisi olan B' den de geçer. Problemin bundan sonraki kısmı (a) kısmındaki çizimin tekrarıdır.



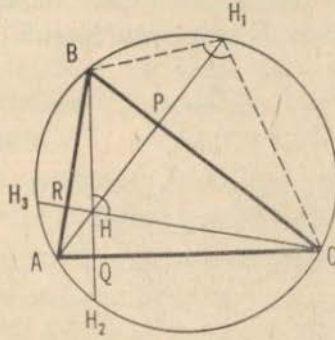
Şekil 93 b

32. a H nın BC kenarına göre simetrisi H_1 olsun (Şekil 94). Yükseklik ayakları P , Q , R ile gösterilirse bu

takdirde $\triangle BH_1C \cong \triangle BHC$ ve bu sebeple $\widehat{BH_1C} = \widehat{BHC}$ olur. Fakat $\widehat{BHC} = \widehat{RHQ}$ ve $\widehat{RHQ} + \widehat{RAQ} = \widehat{B_1HC} + \widehat{RAQ} = 180^\circ$ olduğundan $\widehat{BH_1C} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ elde edilir. Bundan H_1 noktasının ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bulunacağı sonucuna varılır. H nın AB ve AC ye göre simetrikleri için de aynı şey söylenebilir.

b. ABC üçgeninin çizilmiş olduğunu farzedelim. H_1, H_2, H_3 noktalarının üçgenin çevrel çemberinin üzerinde olduğu aşikârdır. Bu sebeple $\widehat{BHR} = \widehat{CHQ}$ ve

$\widehat{BRC} = \widehat{BQC} = 90^\circ$ dir. Buradan $\widehat{RBH} = \widehat{QCH}$ yani $\widehat{AH_3} = \widehat{AH_2}$ olduğu anlaşılır. Benzer bir düşünüşle $\widehat{BH_1} = \widehat{BH_3}$ ve $\widehat{CH_1} = \widehat{CH_2}$ sonuncuna varılır. Bundan da ABC üçgeninin köşelerinin H_1, H_2 ve H_3 noktalarından geçen çemberin H_2H_3, H_3H_1 ve H_1H_2 yaylarının orta noktaları olduğu isbat edilmiş olur. H_1, H_2, H_3 noktaları bir doğru üzerinde bulunmadıkça problemin tek bir çözümü vardır.



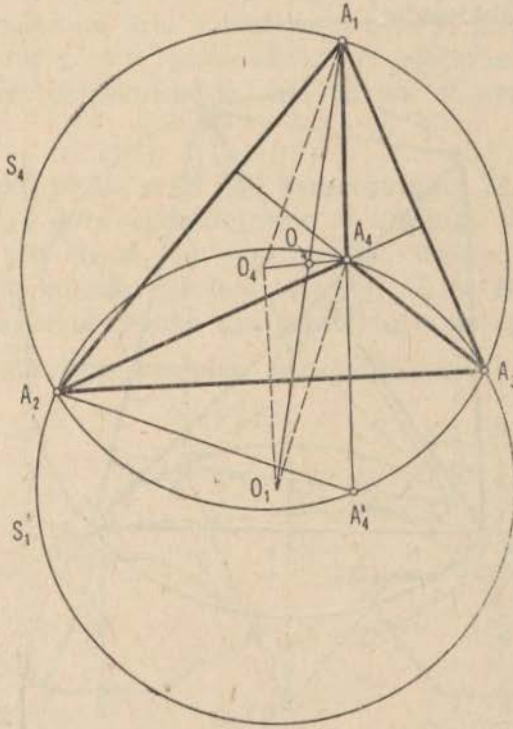
Şekil 94

33. a Kolayca görüleceği üzere $A_2A_3A_4$ üçgeninin üç yüksekliği A_1 noktasında kesişirler.

b. A_4 ün A_2A_3 e göre simetriği A_4' olsun (Şekil 95). Bu nokta, $A_1A_2A_3$ üçgeninin S_4 çevrel çemberi üzerinde bulunur. Böylece $A_2A_4'A_3$ üçgeninin çevrel çemberinin S_4 ile çakışık olduğu anlaşılır. Bu da bize $A_2A_3A_4$ üçgeninin S_1 çevrel çemberinin S_4 çemberi ile eş olduğunu isbat eder (S_1 ve S_4 birbirinin A_2A_3 e göre simetrikleridir). Benzer yoldan gidilerek S_2 ve S_3 çemberlerinin de S_4 e eş oldukları gösterilebilir.

c. $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4$ ve $A_2A_3A_4$ üçgenlerinden en az biri dar açılıdır. Hakikaten eğer $A_1A_2A_4$ üçgeni A_4

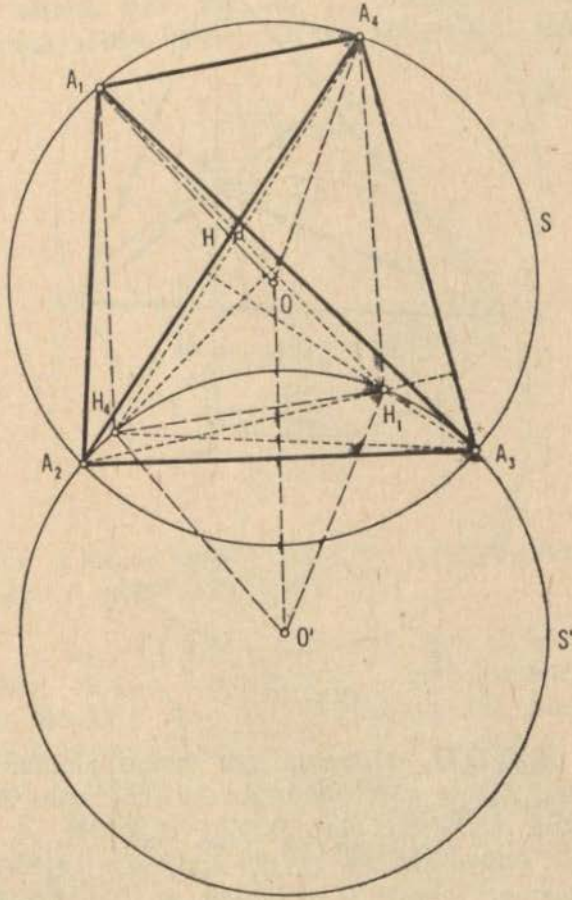
de geniş açılı ise $A_2A_3A_1$ üçgeni (burada A_1 noktası $A_2A_3A_4$ üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktasıdır) dar açılı olacaktır. Böylece $A_1A_2A_3$ üçgeninin dar açılı olduğunu ve A_4 noktasının bu üçgenin içinde bulunduğunu farzedeceğiz.



Şekil 95

Şimdi $A_1A_4O_1O_4$ dörtgenini göz önüne alalım. O_1 ve O_4 noktaları, A_2A_3 e göre birbirinin simetriği olan S_1 ve S_4 çemberlerinin merkezleri olup $O_1O_4 \perp A_2A_3$ dir. $A_1A_4O_1O_4$ dörtgeni göz önüne alınırsa $O_4O_1 \parallel A_1A_4$ ve $O_1A_4 = O_4A_1 = R$ olduğu anlaşılır. Burada R uzunluğu S_1, S_2, S_3, S_4 çemberlerinin yarı çapıdır. Bu dörtgen ya paralelkenar veya ikizkenar bir yamuktur. Fakat O_4O_1 kenarının A_2A_3 orta-

dikmesi A_1A_4 ü kesmediğinden bu dörtgen yamuk olamaz. Bu sebeple $A_1A_4O_1O_4$ şekli bir paralelkenar olup A_1O_1 ve A_4O_4 doğruları paralelkenarın köşegenleridirler. Bu iki köşegenin kesiştiği O noktası köşegenlerin ortası olur. Aynı yoldan gidilerek isbat edilebilir ki O noktası A_2O_2 ve A_3O_3 ün de orta noktasıdır.

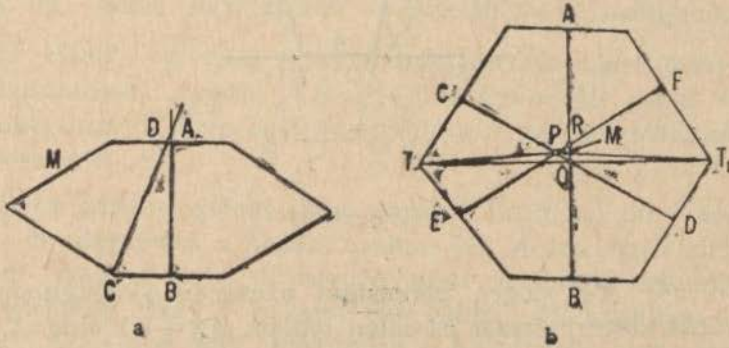


Şekil 96

34. a. S çemberinin O merkezinin A_2A_3 e göre simetrisi O' olsun (Şekil 96). $OO'H_4A_1$ ve $OO'H_1A_4$ dörtgenleri birer paralelkenardır. (33 c nin cevabına bak). O halde : $A_1H_4 = OO' = A_4H_1$ ve $A_1H_4 \parallel OO' \parallel A_4H_1$ ve böylece $A_1H_4H_1A_4$ dörtgeni bir paralelkenar olur. Buradan A_1H_1 ve A_4H_4 doğru parçalarının orta noktalarının aynı H noktası olduğu çıkar. Benzer yoldan gidilerek bu H noktasının A_2H_2 ve A_3H_3 doğru parçalarının da orta noktası olduğu gösterilebilir.

b. Şekil 96 ile şekil 95 i karşılaştırarak H_4 noktasının S nin A_2A_3 e göre simetrisi olan S' üzerinde bulunduğunu ve bunun gibi H_1 in de aynı çember üzerinde olduğunu görmek mümkündür. Böylece A_2, A_3, H_1 ve H_4 noktalarının S ye eş aynı çember üzerinde olduğu anlaşılır.

Teoremin diğer kısımları aynı şekilde isbat edilir.

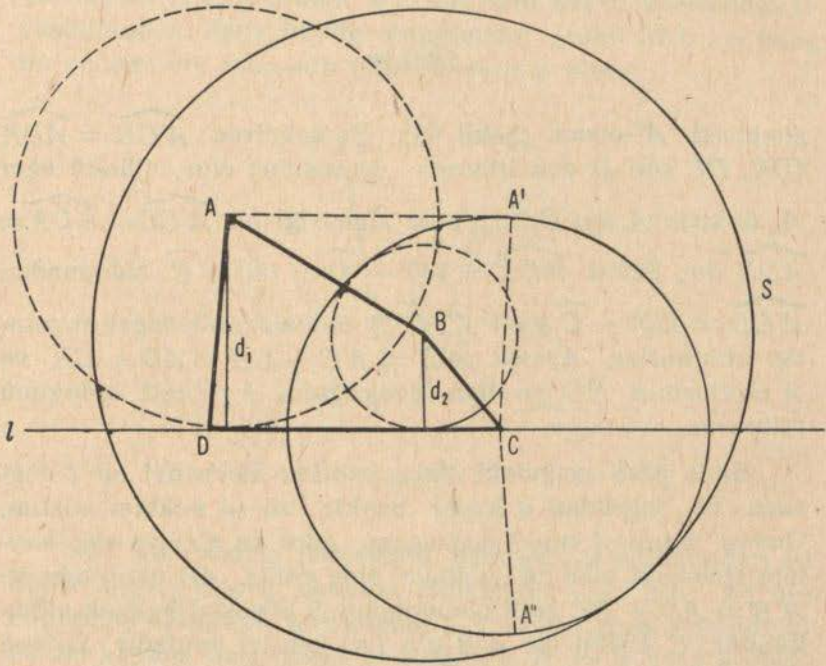


Şekil 97

35. M çokgeninin iki AB ve CD simetri ekseninin bu çokgenin içinde kesişeceği açıktır. Hakikatte bu eksenler şekil 97 a daki şekilde gösterildiği gibi kesişeselerdi herbiri ayrı ayrı bu çokgeni alanca eşit iki kısma bölemeyeceklerdi. Şimdi üçüncü bir EF simetri eksenini varsa bunun ilk iki simetri ekseninin kesim noktasından geçeceğini isbat

verilen bir değere eşit olacak şekilde yerleştirmekten ibarettir. Bunun için de 31 (a) dan faydalanılır.

D ve C noktalarının bulunmuş olduğunu ve A nın l doğrultusunda DC kadar ötelenmesinden elde edilen noktayı A' ile ve gene aynı A noktasını l ye göre DC değerindeki kaymış simetrisini A'' ile gösterelim. Merkezi C ve yarı çapı AD olan çemberin A' ve A'' noktalarından geçeceği



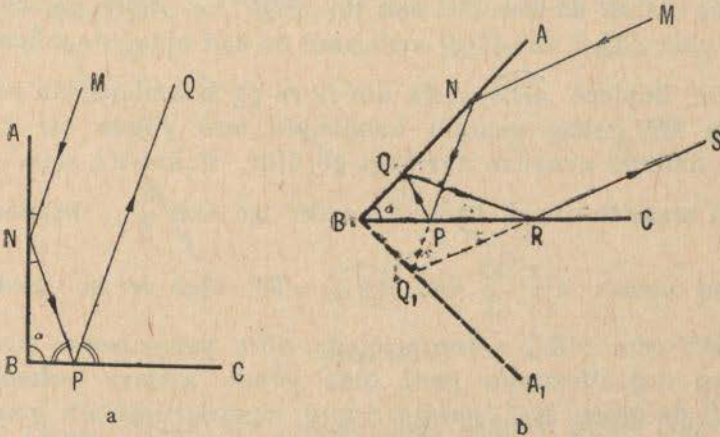
Şekil 100

($A'C = A''C = AD$ olduğundan) ve merkezi B , yarı çapı $BC + CA'' = BC + AD$ olan S çemberine teğet olacağı aşikardır. Fakat S çemberi verilenler yardımıyla çizilebilir ve böylece problem, verilen A' ve A'' noktalarından geçen ve verilen bir S çemberine teğet olan çemberin çizimine dö-

nüştürülmüş olur. Bu çemberin C merkezi aranan dörtgenin C köşesidir.

38. *Birinci çözüm:* Bir ışık ışınının aynadan yansıma doğrultusunun geliş doğrultusuyla ters yönde olabilmesi için gelen ışının aynaya dik olması gerekir. Bu özel hali bırakıp gelen ışının ilk çarptığı kenara dik olmaması haliyle işe başlayalım. MN ışınının ABC açısı içinde iki yansımadan sonra MN nin tersi olan PQ doğrultu ve yönünde aynayı terkettiğini farzedelim (şekil 101 a). Bu takdirde :

$$\begin{aligned}
 \widehat{PNB} + \widehat{NPB} &= 180^\circ - \widehat{NBP} = 180^\circ - \alpha \\
 &= 2(180^\circ - \alpha) = 2 \cdot \widehat{PNB} + 2 \widehat{NPB} \\
 &= \widehat{ANM} + \widehat{PNB} + \widehat{NPB} + \widehat{CPQ} \\
 &= 180^\circ - \widehat{MNP} + 180^\circ - \widehat{NPQ} \\
 &= 360^\circ - (\widehat{MNP} + \widehat{NPQ})
 \end{aligned}$$



Şekil 101

MN ve PQ ışınları paralel ve ters yönlü olduklarından

$\widehat{MNP} + \widehat{NPQ} = 180^\circ$ ve böylece $2(180^\circ - \alpha) = 360^\circ - 180^\circ$ ve buradan $\alpha = 90^\circ$ bulunur. Karşıt olarak eğer $\alpha = 90^\circ$ ise bu takdirde $\widehat{MNP} + \widehat{NPQ} = 180^\circ$ yani yansıma ışını olan PQ ile MN ters yönlü ve paralel olurlar.

Şimdi de gelen ışın MN nin açının kenarları arasında dört yansımadan sonra MN nin tersi olan RS doğrultusunda yansıdığını farzedelim (Şekil 101 b). Üç defa yansımadan sonra giden ışının gelen ışınla aynı doğrultuda ve ters yönlü olabilmesi ancak bu ışının verilen açının kenarına dik düşmesi halinde mümkün olup gelme doğrultusu rastgele olan her ışın için sağlanamaz. Hakikatte α nın verilen bir değerine karşılık ancak bir gelme açısı için bu mümkündür. AB nin ve PQR yolunun BC ye göre simetrikleri sırasıyla BA_1 ve PQ_1R olsun. Bu takdirde $\widehat{ABA_1} = 2\widehat{ABC} = 2\alpha$ ve ayrıca $\widehat{QPB} = \widehat{Q_1PB} = \widehat{NPC}$ ve bundan dolayı da NPQ_1 bir doğrudur. $\widehat{QRB} = \widehat{Q_1RB} = \widehat{SRC}$ olduğundan aynı şekilde düşünülerek Q_1RS nin bir doğru olduğu isbat edilebilir. Sonuç olarak da her biri eşit iki BQP ve AQR açılarına eşit olan BQ_1P ve AQ_1R açılarının da eşit olduğu sonucuna varılır. Böylece $\widehat{ABA_1} = 2\alpha$ nın N ve Q_1 noktalarından yansıyan MN gelme ışınının kendisiyle ters yönde bir Q_1S ışını halinde aynadan ayrıldığı görülür. Fakat 2α açısı evvelki manada olmak üzere $2\alpha = 90^\circ$ ise $\alpha = \frac{90}{2}$ bulunur.

Karşıt olarak $\alpha = \frac{90}{2}$ den $\widehat{ABA_1} = 90^\circ$ olur ve bu takdirde

MN ışını ABC açısının içinde dört yansımadan sonra gelme doğrultusunun tersi olan yönde aynayı terkeder. Şimdi de gelen MN ışınının açının kenarlarında altı yansımadan sonra gelme ışınının tersi olan Tu doğrultusunda aynayı terkettiğini (Şekil 101 c; genel olarak bir ışın beş yansımadan sonra ilk doğrultuya ters yönde aynadan çıka-

doğrularının N, Q, R ve S_1 noktalarında yansdıktan sonra MN ile ters olan S_1u doğrultu ve yönünde ayrıldığı görülür.

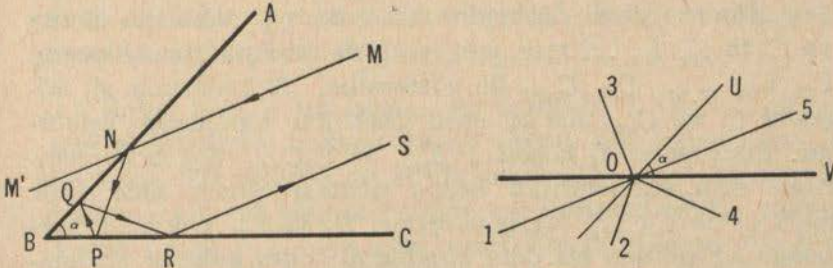
Şimdi BC nin ve Q_1RS_1 in BA_1 e göre simetriklerini gözönüne alalım BC nin simetriği BA_2 ve R nin simetriği R_1 olsun. $\widehat{R_1Q_1B} = \widehat{RQ_1B} = \widehat{PQ_1A_1}$ olduğundan NPQ_1R_1 bir doğru olur. Aynı şekilde $R_1S_1B = RS_1B = TS_1A_1$ ve dolayısı-
 R_1S_1Tu da bir doğrudur. Ayrıca birbirine eşit Q_1RB ve S_1RC açılarına eşit olan Q_1R_1B ve $S_1R_1A_2$ açıları da birbirine eşittir. Bu suretle MN ışınının $\widehat{ABA_2} = 3\alpha$ açısının kenarları üzerindeki N ve R_1 noktalarında yansdıktan sonra MN nin tersi olan R_1u doğrultusunda aynadan çıktığı görülür. Fakat daha önce yapılan isbata göre $3\alpha = 90^\circ$ yani $\alpha = \frac{90}{3}$ olmalıdır. Karşıt olarak eğer $\alpha = \frac{90}{3}$ olursa $\widehat{ABA_2} = 90^\circ$ olur ve MN ışını ABC açısının kenarlarında altı kere yansdıktan sonra gelme doğrultusunun tersi olan doğrultuda aynadan çıkar.

Son olarak bir ışının $\widehat{ABC} = \alpha$ açısının kenarlarında $2n$ yansımadan sonra gelme ışınının tersi yönünde ayrıldığını farzedelim (genel olarak bir ışın bir açının kenarlarında $2n-1$ defa yansdıktan sonra gelme doğrultusunun tersi olan bir doğrultuda çıkamaz).

Evvelki yoldan gidilerek gelen ışının AB ye çarptıktan sonra takip edeceği yolun BC ye göre simetriği düşünülürse bu simetride BA nın simetriği BA_1 olsun. Ondan sonra BC nin BA_1 e göre simetriği ve BA_1 in BA_2 ye göre BA_3 simetriği vesaire elde edilerek $n-1$ sayıda yansımadan sonra BA_{n-1} i elde ederiz. Sonuç olarak $\widehat{ABA_{n-1}} = n\alpha$ bulunur. Şimdi gelen ışının özel yansımalar sonunda AB_{n-1} ye çarptığı ve bundan sonra AB ye çarparak ilk doğrultunun tersi olan yönde ayrıldığı söylenebilir. Buna göre evvelce

isbat edilen eşitlik gereğince $n\alpha = 90$ ve nihayet $\alpha = \frac{90}{n}$ olduğu görülür.

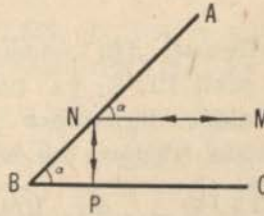
İkinci çözüm : Verilen açı ABC ve ışının yolu $MNPQ\dots$ ($n=2$, $\alpha=45$ için şekil 102 a ya bak) olsun. Bu çözümde sadece doğrultularla ilgileniyor ve bütün doğrultuların aynı O noktasından çıktığını farzediyoruz. Buna göre $O1 \parallel MN$, $O2 \parallel NP$, $O3 \parallel PQ, \dots$ dır. $\widehat{MNA} = \widehat{PNB}$ olduğundan $O2$ ile $O1$ in AB ye paralel OU doğrusuna göre birbirinin simetrikleri oldukları anlaşılır. OU ile AB nin paralellüğünü göstermek için şekil 102 a daki NM' ile NP nin NB ye göre simetrik olduklarını isbat etmek kâfidir. Benzer yoldan gidilerek $O3$ ile $O2$ nin BC ye paralel OV doğrusuna göre birbirinin simetrikleri olduğu gösterilir. Buna göre O_3 ışını O_1 den $2\widehat{UOV} = 2\alpha$ kadar bir dönmeden elde edilir. Benzer şekilde düşünülerek O_5 ışını O_3 den aynı yönde 2α



Şekil 102 a

kadar bir dönmeden ve bunun sonucu olarak da O_5 ışını O_1 den 4α kadar bir dönmeden, elde edilir. Şu halde eğer $\alpha = \frac{90}{n}$ ise açının iki kenarının her birinden n yansımadan sonra ayrılan bir ışın ile aynı doğrultudaki $O(2n+1)$ ışını O_1 ışını ile $2n\alpha = 180^\circ$ şartına uyan bir açı meydana geti-

recektir. Bu şart sağlandığı takdirde aynayı terkeden ışın ilk doğrultunun tersi olan bir yönde çıkar.



Şekil 102 b

39. a) Birinci çözüm (15. ve 21. problemlerin çözümlerine bak): İstenilen n kenarlı $A_1A_2 \dots A_n$ ve düzlemin herhangi bir noktası B_1 ve A_1B_1 in $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ ye göre ardışık simetrikleri $A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n, A_1B_{n+1}$ olsun. Bütün bu doğru parçaları birbirine eş olduğu için $A_1B_1 = A_1B_{n+1}$ yani A_1 noktası B_1 ve B_{n+1} den aynı uzaklıktadır. Su halde A_1 noktası B_1B_{n+1} in orta dikmesi üzerinde bulunur. Şimdi düzlemin ikinci bir C_1 noktasını alalım ve C_1 in $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n$ ye göre ardışık simetriklerini $C_2, C_3, \dots, C_n, C_{n+1}$ ile gösterelim. N kenarının A_1 köşesini C_1 ve C_{n+1} den de aynı uzaklıkta bulunacağı aşikârdır. Buna göre A_1 köşesi B_1B_{n+1} ve C_1C_{n+1} doğru parçalarının orta dikmelerinin kesim noktası olarak elde edilir (B_1B_{n+1} ve C_1C_{n+1} doğru parçaları B_1 ve C_1 noktaları herhangi bir şekilde bir defa alındıktan sonra kolayca çizilebilir). Bundan sonra A_1 köşesinin ardışık olarak verilen n doğruya göre simetrikleri çizilmek suretiyle çokgenin köşeleri bulunur. B_1B_{n+1} ve C_1C_{n+1} doğru parçaları birbirine paralel olmadıkça problemin tek bir çözümü vardır. Eğer bu iki doğru parçası paralel iseler çözüm yoktur. Son olarak iki doğru parçasını orta dikmeleri çakışık ise problemin sonsuz çözümü vardır. Cevap olarak elde edilen çokgenin konveks olmaması da mümkündür. Öte yandan problemin çözümünde n nin tek veya çift olmasının bir önemi yoktur.

İkinci çözüm (15. ve 21. problemlerin çözümlerine bak). İstenilen n kenarlı $A_1, A_2, \dots, A_n$ olsun (Şekil 50 a ya bak). A_1 köşesinin $l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre ardışık simetrikliklerini alırsak $A_2, A_3, \dots, A_n$ noktalarını ve nihayet gene A noktasını elde ederiz. Buna göre A_1 noktası $l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre alınan simetriler toplamının bir sabit noktasıdır. Şimdi birbirinden ayrı 2 hal gözönüne alınabilir.

Birinci hal: n çift olsun. Bu takdirde $l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre simetriler toplamı, genel olarak, bir O noktasına göre bir simetriye dönüştürebilir. Bunu simetrilerin toplamıyla ilgili çizimde evvelce gördük. Bu dönmenin tek sabit noktası O dur. Ayrıca A_1 noktası O ile çakışık. A_1 noktası bulunduğundan sonra n kenarlıının diğer köşelerinin bulunması güç değildir. Bu halde problemin tek bir cevabı vardır.

$l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre simetriler toplamının bir öteleme veya özdeşlik transformasyonu (sıfır derecelik dönme veya sıfır büyüklüğünde bir öteleme) olması özel halinde ya problemin hiçbir çözümü yoktur (ötelemeye sabit nokta yoktur) veya düzlemin herhangi bir noktasını A_1 köşesi olarak almak suretiyle birden fazla çözüm vardır.

İkinci hal: n tek olsun. Bu takdirde $l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre simetrilerin toplamı genel olarak bir kaymış simetri olacaktır. Bir kaymış simetride sabit nokta mevcut olmadığından n nin tek olması halinde genel olarak çözüm yoktur. Ancak $l_1, l_2, \dots, l_n$ ye göre simetriler toplamının l ye göre bir simetriye dönüştürülebildiği takdirde (bu l doğrusu çizilebilir) çözüm tek olarak belirtilemeyecek; l doğrusunun herhangi bir noktası n kenarlıının A_1 köşesi olarak alınabilecektir. Çünkü simetri ekseninin her noktasının bu eksene göre simetrikli gene kendisidir. Böylece meselâ $n=3$ için genel olarak çözüm olmamakla beraber l_1, l_2 ve l_3 doğrularının aynı noktadan geçmesi veya birbirine paralel olmaları özel hallerinde birden fazla çözüm vardır.

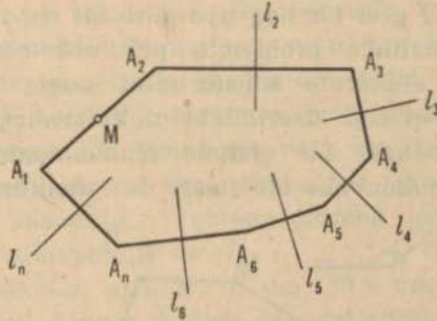
(b). Bu problem 39 a ya benzer. Eğer $A_1 A_2, \dots A_n$ istenilen n kenarlı ise (şekil 50 b ye bak). $A_n A_1$ doğrusu $l_1, l_2, \dots l_{n-1}, l_n$ ye göre ardışık simetrilere sonra $A_1 A_3, A_2 A_3, \dots A_{n-1} A_n$ ve nihayet tekrar $A_n A_1$ haline getirilir. Böylece $A_n A_1$ doğrusu $l_1, l_2, \dots l_n$ doğrularına göre simet-riler toplamının bir *sabit doğrusu* olmuş olur. Şimdi iki hal göz önünde bulundurulabilir.

Birinci hal: n çift olsun. Bu takdirde $l_1, l_2, \dots l_n$ ye göre simet-riler toplamı, genel olarak, bir O noktası etrafın-da bir simetri olup sabit bir doğru yoktur. Kısaca n nin çift olması halinde, genel olarak, çözüm yoktur. Simet-riler top-lamının O etrafında bir yarım dönmeye eşit olması (180 de-recelik bir dönme) veya bir ötelemeye eşit olması veya bir özdeşlik transformasyonu olması özel hallerinde problemin birden fazla çözümü vardır. Birinci halde simetri merkezin-den geçen herhangi bir doğru $A_n A_1$ olarak alınabilir. İkinci durumda öteleme doğrultusuna paralel bir doğru ve üçün-cü durumda ise düzlemin herhangi bir doğrusu $A_n A_1$ olarak alınabilir.

İkinci hal: n tek olsun. Bu takdirde $l_1, l_2, \dots l_n$ ye göre simet-riler toplamı genel olarak, bir l doğrusuna göre kaymış simetridir. Bu kaymış simetrinin tek sabit doğrusu bu l doğrusu olacağından istenilen n kenarlıının $A_n A_1$ kenarı mutlaka l ile çakışmıştır. l nin $l_1, l_2, \dots l_n$ ye göre ardışık simet-rileri çizilerek n kenarlıının bütün kenarları elde edilebilir. Böylece n nin tek olması halinde genel olarak problemin tek bir çözümü olacağı görülür. Verilen doğrula-ra göre simet-riler toplamına bir l doğrusuna göre bir simet-riye eşit olması halinde bir istisna ile karşılaşılır. Bu halde problemin birden fazla cevabı vardır. $A_n A_1$ kenarı olarak l doğrusu veya ona dik bir doğru alınabilir. $n=3$ için bir uygulama yapılırsa l_1, l_2, l_3 doğrularından ya üçünün bir-den üçgenin dış açı ortayları oldukları veya ikisinin iç ve birinin dış açı ortayı olduğu görülür. Bu üç doğrunun aynı noktadan geçmesi özel halinde problemin, önce de söyledi-

gimiz gibi, birden fazla çözümü vardır (Problem 26 a ya bak).

Bu problemin (b) kısmının çözümü (a) kısmının birinci] çözümüne benzediği için okuyucuya bırakıyoruz.

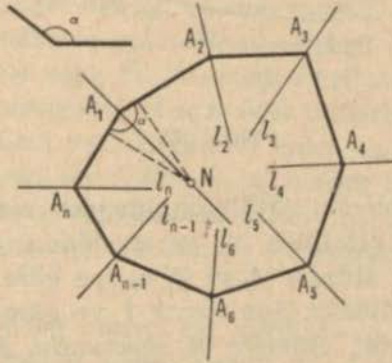


Şekil 103

40. (a) Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim (Şekil 103), M noktası etrafında bir yarı dönme A_1 noktasını A_2 ye, l_2 ye göre bir simetri A_2 yi A_3 e, l_3 e göre bir simetri de A_3 ü A_4 e v.s. götürür. Son olarak l_n ye göre bir simetri A_n yi A_1 e döndürür. Böylece A_1 noktasının M etrafında bir yarı dönme ile $l_2, l_3, \dots, l_n$ doğrularına göre simetriler toplamının bir sabit noktası olduğu anlaşılır. M etrafında bir yarı dönme, doğrulara göre bir çift simetriye denktir. Şimdi iki hâl gözönüne alacağız.

Birinci hal: n tek olsun. Bu takdirde problem bir takım doğrulara göre çift sayıda simetriler toplamının bir sabit noktasını bulmak problemine dönüştürülmüş olur. Bilindiği gibi bu toplam, genel olarak, O noktası etrafında bir dönebilir (O noktası M ve $l_2, l_3, \dots, l_n$ yardımıyla çizilebilir). Kısaca n nin tek olması halinde problemin genellikle tek bir çözümü vardır. Doğrulara göre çift sayıda simetriler toplamının bir ötelemeye eşit veya bir özdeşlik transformasyonu olması halleri özel hallerdir. Bunlardan birincisinde asla çözüm yoktur. İkincisinde ise çözüm sayısı sonsuzdur.

İkinci hal: n çift olsun. Bu takdirde problem bir takım doğrulara göre tek sayıda simetriler toplamının bir sabit noktasını bulmak problemine dönüştürülmüş olur. Genel olarak bu toplam bir kaymış simetri olup problemin çözümü yoktur (kaymış simetride sabit nokta yoktur). Simetriler toplamının l gibi bir doğruya göre bir simetriye dönüştürülmesi özel halinde problemin pek çok çözümü vardır (doğruya göre simetride sonsuz sabit nokta mevcut olup bunlar simetri eksenini üzerindeki noktalardır). Çizim 39 a'nın çizimine benzer bir çizimle tamamlanabilir. Çözümü veren çokgenin konveks olmaması da mümkündür.



Şekil 104

b. Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim (Şekil 104). M noktası etrafında $180-\alpha$ ya eşit bir dönme $A_n A_1$ i $A_2 A_1$ durumuna getirir. l_2 ye göre bir simetri $A_1 A_2$ yi $A_2 A_3$ e, l_3 e göre bir simetri $A_2 A_3$ ü $A_3 A_4$ e, v.s götürür. En sonunda l_n ye göre bir simetri $A_{n-1} A_n$ yi $A_n A_1$ durumuna getirir. Böylece $A_n A_1$ in M etrafında $180-\alpha$ ya eşit bir dönme ile $l_2, l_3, \dots, l_n$ ye göre düşünülen $n-1$ simetrinin toplamından ibaret bir transformasyonun bir sabit doğrusu olduğu anlaşılır. Şimdi iki hal düşünülür.

Birinci hal: n çift olsun. Doğruya göre simetri bahis konusu olmak üzere tek sayıda simetriler toplamının bir kaymış simetri olduğu ve bu kaymış simetrinin tek sabit

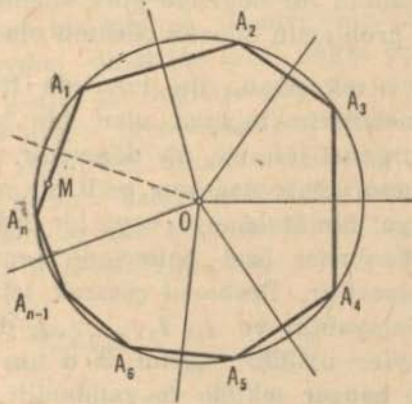
doğrusunun simetri eksenini l den ibaret bulunduğunu ve bu sebeple problemin ancak bir çözümü olduğu bilinmektedir. Simetriler toplamının bir doğruya göre simetriye eşit olması özel halinde problemin sonsuz çözümü olacaktır.

İkinci hal: n tek olsun. Bu takdirde transformasyon, çift sayıda simetrilerin toplamı olan bir transformasyon olacaktır ki bu, genel olarak, bir dönmedir. Bu halde çözüm yoktur. Simetriler toplamının belli bir nokta etrafında bir yarı dönmeye, bir ötelemeye veya bir özdeşlik transformasyonuna eşit olması özel hallerinde problemin birden fazla çözümü olacaktır. Problemi çözmek için çizilen çokgen konveks olmayabilir ve $l_2, l_3, \dots, l_n$ doğruları iç veya dış açı ortaylar olabilir. Çizim, 39 a nın birinci çözümündeki çizime benzer şekilde de yapılabilir.

41. a) İstenilen çokgen $A_1 A_2 \dots A_n$ olsun (Şekil 105). A_1 in çember merkezinden geçen ve $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ ve $A_n A_1$ doğrularına dik olan doğrulara göre ardışık simetrikleri çizilerek evvelâ A_2 , sonra A_2 den $A_3, \dots, A_n$ ve nihayet A_n den A_1 elde edilir. O halde A_1 noktası bu simetriler toplamının bir sabit noktasıdır. Şimdi iki hal gözönüne alınabilir.

Birinci hal: n tek olsun. Bir noktada kesişen üç doğruya göre alınacak üç simetrinin toplamı bu noktadan geçen dördüncü bir doğruya göre bir simetriye eşit olduğundan aynı noktadan geçen tek sayıda doğrulara göre simetriler toplamının da gene bu noktadan geçen belirli bir doğruya göre bir simetriye eşit olduğunu görmek güç değildir (ilk üç simetri toplamıyla diğer ikisi v.s. düşünülerek bu problem üç simetriye dönüştürülebilir). Şu halde n simetrinin toplamı, çemberin O merkezinden geçen bir doğruya göre bir simetriye dönüştürülebilir. l ye göre düşünülen bu simetrinin iki sabit noktası vardır. Bu noktalar l nin çemberi kestiği noktalardan ibarettir. Bunlardan birini aranan çokgenin A_1 köşesi olarak aldıktan sonra bu noktanın bahis

konusu n doğruya göre simetriklerini çizmek suretiyle diğer köşeleri buluruz. Problemin iki çözümü vardır.



Şekil 105

İkinci hal: n çift olsun, O dan geçen iki doğruya göre düşünülen iki simetrisinin toplamı aynı nokta etrafında belirli bir açı kadar bir dönmedir. Bundan şu sonuç elde edilir: n bir çift sayı olmak üzere bir O noktasından geçen n doğruya göre simetrisi toplamı yerine aynı nokta etrafında $\frac{n}{2}$ simetri alınabilir. Yani toplam O etrafında bir dönme-

dir. Öte yandan O etrafında bir dönmede merkezi O olan bir çemberin hiçbir noktası sabit kalamıyacağından problemimizin genel olarak çözümü yoktur. n simetri toplamının bir özdeşlik transformasyonu olması özel hali bir istisnadır, Bu takdirde problemin sonsuz çözümü vardır, ve çemberin herhangi bir A_1 noktası istenilen n kenarlıının bir köşesi olarak alınabilir.

b). n kenarlıının çizilmiş olduğunu farzedelim (Şekil 105 e bak). A_1 köşesinin A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$ kenarlarına dik olan ve çemberin merkezinden geçen $n-1$ doğruya göre ardışık simetrikleri alınır (çemberin merkezi ve çokgenin kenarlarının doğrultuları belli olduğundan bu doğrular bi-

linmektedir). Bu çizim A_1 noktasını A_n ye dönüştürür. Şimdi iki hal düşünülebilir.

Birinci hal: n tek olsun. Bu takdirde O dan geçen doğrulara göre $n-1$ simetrisinin toplamı gene bu O noktası etrafında α büyüklüğünde bir dönme olup, bu α açısı bellidir.

$\widehat{A_1 O A_n} = \alpha$ belli olunca $A_1 A_n$ kirişi ve bu kirişin merkezden uzaklığı da bulunur. $A_1 A_n$ verilen bir M noktasından geçeceğinden problem M noktasından merkezi O ve yarı çapı O nun $A_1 A_n$ kirişine uzaklığına eşit olan çembere teğetler çizmek problemine dönüşmüş olur. En çok iki ve en az sıfır cevap elde edilebilir.

İkinci hal: n çift olsun. Bu takdirde aynı noktadan geçen doğrulara göre $n-1$ simetrisinin toplamı gene bu noktadan geçen bir l doğrusuna göre bir simetridir. Şu halde A_1 ile A_n simetrik iki noktadır. $A_1 A_n$ bilinen bir M noktasından geçeceğinden bu doğru M den l ye bir dik çizilerek kolayca bulunur. Problemin her zaman bir tek çözümü vardır.

32. (a) O dan geçen l_1, l_2, l_3 doğrularına göre düşünülecek üç simetrisinin toplamı aynı noktadan geçen belli bir l doğrusuna göre simetriye eşit olduğundan A_3 noktası A nın l ye göre simetrik olarak elde edilir. Fakat A_6 noktası A_3 ün l ye göre simetrik olduğundan bu nokta A ile çakışır. Bu sonuç O dan geçen doğru sayısı tek olmak üzere, doğru sayısı ne olursa olsun doğrudur. Eğer O dan geçen doğru sayısı, n bir çift sayı olmak üzere, n ise bu takdirde n simetrisinin toplamı O etrafında α büyüklüğünde bir dönmedir. Böylece $2n$ dönmeden sonra bulunacak A_{2n} noktası, yalnız α nın 180 derecenin tam katlarına eşit olması halinde, A ile çakışır.

Not: Rastgele bir A noktasının aynı noktadan geçen veya birbirine paralel olan l_1, l_2, l_3 gibi üç doğruya göre $l_1, l_2, l_3, l_1, l_2, l_3$ sırası üzere düşünecek altı simetrisinin sonunda elde edilen A_6 noktası ilk A noktası ile çakışaktır. Bu şartlar altında l_1, l_2, l_3 e göre simetriler toplamı bir l doğrusuna göre bir simetriye denktir ve 42.a'nın çözümün-

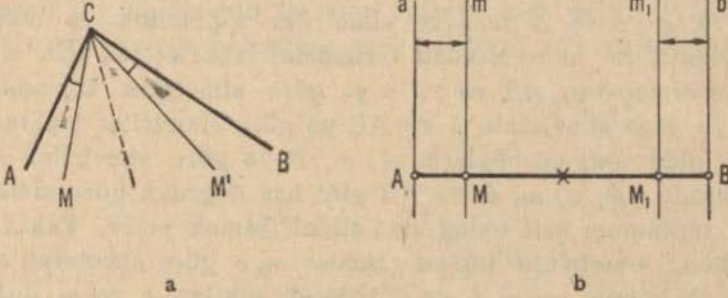
de bu muhakeme uygulanmıştır. Diğer bütün hallerde l_1 , l_2 , l_3 gibi üç doğruya göre simetriler toplamı kaymış bir simetri olup bu takdirde A_6 noktası A dan ardışık iki kaymış simetriden elde edilir. Bu kaymış simetri l doğrusu doğrultusuna bir kaymayı kapsadığından A_6 noktası A ile çakıştırılamaz. (İki özdeş kaymış simetrinin toplamı şu dört transformasyonun toplamı olarak yazılabilir: l boyunca öteleme l ye göre simetri, l ye göre simetri ve l boyunca öteleme.)

(b). Bu problem esasında (a) kısmındaki problemin aynıdır (14 b ye de bak).

(c). l_1 ve l_2 ye göre simetriler toplamı bunların O kesim noktası etrafında α gibi bir değerde bir dönmeye; l_3 ve l_4 e göre simetriler toplamı ise O etrafında β gibi bir dönmeye eşittir. Bundan anlaşılır ki (bu simetriler hangi sıra takip ederek yapılırsa yapılsın) A_4 noktası A dan O etrafında $\alpha + \beta$ değerinde bir dönmeden elde edilir. İspat etmek istediğimiz de bu idi.

43. (a) CM , AN , BP doğruları bir noktadan geçtiği için CM , AN , BP , CM . AN BP doğrularına göre simetrilerin toplamı bir özdeşlik transformasyonudur (problem 42 a ya bak), CM' , AN' ve BP' doğrularının bir noktadan geçtiğini isbat etmek için sırasıyla CM' , AN' , BP' , CM' , AN' ve BP' doğrularına göre alınan simetriler toplamının da bir özdeşlik transformasyonu olduğunu göstermek kâfidir. Gerçi CM' ye göre simetri C den geçen CB , CM ve CA doğrularına göre simetrilerin toplamıdır. Bu sonuç, C noktası etrafında BCM' açısına eşit bir dönmenin CM yi CA ya ve CB yi CM' ye dönüştüreceği ifade edilerek de gösterilebilir. Burada CM' doğrusu BCA açısının açı ortayına göre CM nin simetrigidir. (şekil 106 a yı 47 b ile karşılaştır). Benzer yoldan gidilerek AN' ye göre simetrinin AC , AN ve AB ye göre simetriler toplamına eş olduğu ve son olarak da BP' ye göre simetrinin BA , BP ve BC ye göre simetriler toplamının aynı olduğu gösterilebilir. Bütün bunlardan da CM' , AN' ve BP' ye göre simetriler toplamının CB , CM , CA , AC ($=CA$) AN , AB , BA ($=AB$), BP ve BC gibi dokuz doğruya

göre simetriler toplamının eşit olduğu sonucuna varılır. Aynı doğruya göre ardışık iki simetri toplamı birbirini götüreceğinden yukarıdaki dokuz doğruya göre simetriler top-



Şekil 106

lamı yerine elde CB, CM, AN, BP ve BC gibi beş doğruya göre simetriler toplamı kalır. Şimdi bu transformasyon iki defa uygulanırsa CB, CM, AN, BP, BC, CB(=BC), CM, AN, BP ve BC gibi on doğruya göre simetriler toplamı elde edilmiş olur. Bu da CB, CM, AN, BP, CM, AN, BP ve BC gibi sekiz doğruya göre simetriler toplamına özdeştir. Fakat iç altı doğruya göre simetriler toplamı eğer bir özdeşlik transformasyonu ise sekiz doğruya göre sekiz simetrinin toplamı CB ve BC (=CB) gibi iki doğruya göre simetriye yani özdeşlik transformasyonuna dönüşür.

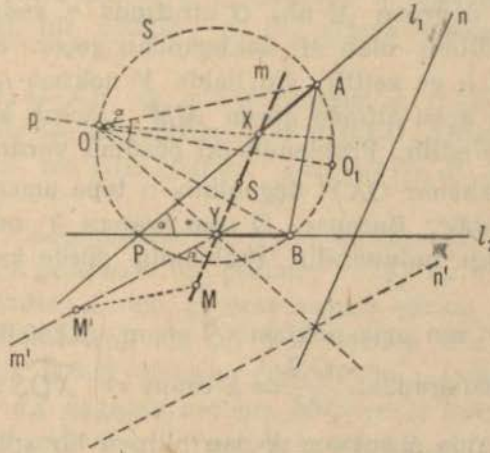
(b). M, M_1, N, N_1, P ve P_1 noktalarından ABC üçgeninin AB, BC, CA kenarlarına inilen dikmeler sırasıyla m, m_1, n, n_1, p, p_1 , ile ve AB kenarına A ve B noktalarından çizilen dikmeler de a ve b ile gösterilmiş olsun. Eğer m, n, p, m, n, p doğrularına göre simetriler toplamı bir özdeşlik transformasyonu ise $m_1, n_1, p_1, m_1, n_1, p_1$ doğrularına göre simetriler toplamının da bir özdeşlik transformasyonu olduğunu isbat edeceğiz (problemin a kısmının çözümü ile karşılaştır). Açıktır ki bir üçgenin farklı iki kenarına çizilen dikmeler birbirine paralel olmaz. Fakat m_1 doğru-
suna göre simetri, A noktasına göre simetri ile m doğru-

sunu göre simetrisinin ve B noktasına göre simetrisinin toplamına eşittir. Bunun gibi n_1 e göre simetri, B noktasına göre simetri, ile n doğrusuna ve C noktasına göre simetrilerin toplamına eşittir. Benzer muhakeme ile p_1 e göre simetrisinin C ye, p ye ve A ya göre simetriler toplamına eş olduğu söylenir. Bu teoremlerden birincisini isbat etmek için A ya göre simetrisinin AB ye ve a ya göre simetriler toplamına; B ye göre simetrisinin b ve AB ye göre simetriler toplamına eşit olduğunu ve böylece A , m , B ye göre simetriler toplamının AB , a , m , b ve AB gibi beş doğruya göre simetriler toplamına eşit olduğuna dikkat etmek yeter. Fakat üç "içten,, simetrisinin toplamı sadece m_1 e göre simetriye eşittir. Bu sonuç, m yi b ye götürecektir a ve m doğrularının ötelenmesinden a nın m_1 durumuna geleceğini görmekle elde edilir (m_1 ile AB nin orta noktasına göre birbirinin simetriğidir). Şu halde beş simetrisinin toplamı AB , m_1 ve AB ye göre simetriler toplamına veya M_1 e ve AB ye göre simetriler toplamına denktir. M_1 e göre simetri ise sıra takip edilmek üzere m_1 e ve AB ye göre alınacak simetrilerin toplamına eşittir. Yani M_1 e ve AB ye göre simetriler toplamı m_1 , AB ve gene AB ye göre simetriler toplamına ve bu da aşikârdır ki m_1 e göre tek bir simetriye eşittir.

Özet olarak m_1 , n_1 , p_1 , m_1 , n_1 , p_1 gibi altı doğruya göre simetriler toplamı A , m , B ; B , n , C ; C , p , A ; A , m , B ; B , n , C ; C , p , A veya aynı şey olan A , m , n , p , m , n , p , A nokta ve doğrularına göre alınacak simetrilerin toplamına eşittir. Şu halde eğer altı "iç,, simetrisinin toplamı bir özdeşlik transformasyonu ise bu takdirde bütün simetrilerin toplamı (bu durumda A ya göre simetriden ibaret olur) gene bir özdeşlik transformasyonudur. (Çözümü a kısmının çözümümüyle karşılaştır).

44. Düzlemin üç doğrusuna göre simetriler toplamı iki defa alınır ya bir özdeşlik transformasyonu veya bir öteleme elde edilir. (42 a nın çözümüne bak). Böy-

lece A_{12} noktası A dan iki ötelemenin toplamı olarak elde edilir (bu ötelemelerden biri veya her ikisi sıfır uzaklığında ötelemeler yani özdeşlik transformasyonu olabilir). A'_{12} ile gösterdiğimiz ikinci nokta ise A dan eşit fakat ters sıralı iki ötelemenin toplamı halinde elde edilir. Problemde istenen böylece bulunmuş olur (çözümü 14 a ile karşılaştır).



Şekil 107 a

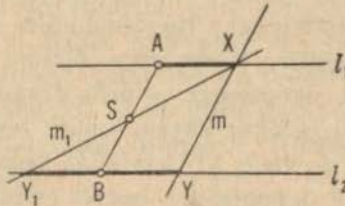
45. *Birinci çözüm:* Önce l_1 ve l_2 nin paralel olmadıklarını (Şekil 107 a) ve problemin çözülmüş olduğunu farzedelim. AX doğru parçası, A noktası B ye ve X noktası Y ye gelecek şekilde bir dönme sonucunda BY durumuna getirilebilir (l_1 ile l_2 paralel olmadıklarından AX ten BY ye bir öteleme ile geçilemez). Bu dönmenin α açısı l_1 ile l_2 arasındaki açıya eşittir. Buna göre dönme merkezi olan O noktası AB doğru parçasının p orta dikmesi ile AB yi α açısı altında gören çember yayını kesim noktası olarak (bulunabilir (bu yay, l_1 ve l_2 yi kesiştiği nokta P ile gösterilmek şartıyla, ABP üçgeninin S çevrel çemberi üzerindedir). Bu dönme istenilen m doğrusunu gene Y den geçen m' durumuna getirsin. Şimdi problemin (a), (b), (c) ve (d) şıklarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) m doğrusunu O etrafında α kadar döndürelim ve bu döndürülmüş doğruyu n' ile gösterelim. OY doğrusu m ile m' arasındaki açının ve n ile n' arasındaki açının açı ortayı olacaktır. Bu sebeple Y noktası l_2 ile O yu n ve n' nün kesim noktasına birleştiren doğrunun kesiştiği nokta olarak elde edilir. Problemin iki çözümü bulunabilir.

b) m' doğrusu M nin O etrafında α kadar dönmesinden elde edilmiş olan M' noktasından geçer. m ile m' arasındaki açı α ya eşittir. Şu halde Y noktası l_2 doğrusu ile MM' yü α açısı altında gören MM' yayının kesim noktası olarak elde edilir. Problemin iki çözümü vardır.

c) İkizkenar OXY üçgeninin α tepe açısı ve $XY = \alpha$ tabanı bellidir. Buradan O nun aranan X noktasına olan OX uzaklığı bulunabilir. Problemin dörde kadar çözümü vardır.

d) XY nin orta noktası S olsun. OXY üçgeninin açıları belli olduğundan $\frac{OS}{OX} = k$ oranı ve $\widehat{XOS} = \frac{1}{2}\alpha$ da bellidir. Şu halde S noktası X den bilinen bir spiral benzeşim ile elde edilebilir (bu kitabın ikinci cildinin birinci bölümünde ikinci kısma bak). S noktası r ile l_1 den spiral benzeşimden elde edilen l_1' nün kesim noktası olarak bulunur. Aranan m doğrusu OS ye diktir. Problemin genellikle iki çözümü vardır. Eğer l_1' doğrusu r ile çakışırsa çözüm belirsizdir.



Şekil 107 b

Eğer $l_1 // l_2$ ise m doğrusu ya AB nin S orta noktasından geçer veya AB ye paralel olur (şekil 107 b). Bu hal-

lerde problem çok daha basitleşir. Özellikle çözüm sayılarını incelersek:

a) Eğer n doğrusu l_1 e veya AB ye paralel değilse bir çözüm; $n // AB$ ise sonsuz çözüm vardır.

b) M noktası AB üzerinde veya birbirine paralel l_1 ve l_2 doğrularının l_0 orta paraleli üzerinde değilse iki çözüm; AB üzerinde bulunur veya l_0 üzerinde bulunduğu halde S ile çakışmazsa bir çözüm; S ile çakışırsa sonsuz çözüm vardır.

c) Eğer $a \neq AB$ ve $a > d$ (burada d , l_1 ile l_2 arasındaki uzaklıktır) ise iki çözüm; $a = d$ fakat $AB \neq d$ ise bir çözüm; $a < d$ ise sıfır çözüm; $a = AB (\geq d)$ ise sonsuz çözüm vardır.

d) Eğer r doğrusu paralel l_1 ve l_2 doğrularına paralel değil ve S den geçmezse bir çözüm; $r // l_1$ ve S den geçmezse sıfır çözüm; S den geçerse sonsuz çözüm vardır.

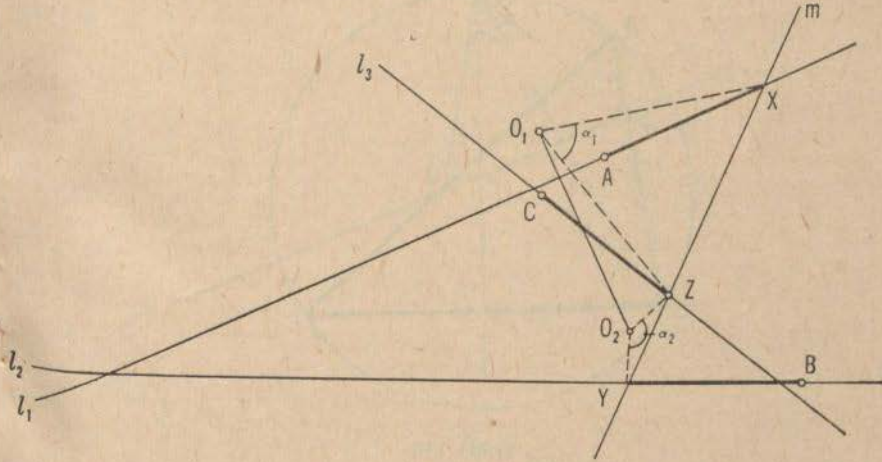
Aynı problemin (a), (c), (d) kısımlarının ters olarak eş şekillerle ilgili ikinci teoreme göre çözüm: Bahis konusu teoreme göre AX doğrusu kaymış bir simetri (veya kaymış simetrisinin özel hali olan adi simetri) yardımıyla kendisine eş BY durumuna getirilebilir. Bu kaymış simetride A nın yeni durumu B , X in yeni durumu Y dir. Öte yandan kaymış simetrisinin l eksenini AB nin orta noktasından geçer ve l_1 ve l_2 doğrularının teşkil ettiği açının açısı ortasına paralel olur (l_1 ve l_2 doğrularının iki açısı ortayı olduğundan AX i BY durumuna götüren kaymış simetri X ve Y noktaları AB nin aynı tarafında veya ayrı ayrı taraflarında bulunduğu göre, iki şekilde seçilebilir. Eğer $l_1 // l_2$ ise kaymış simetriden birinin eksenini l_1 ve l_2 ye paralel olur. İkinci eksen bu doğrulara dik olduğundan problemin (a), (c), (d) kısımlarında bu halin rolü anlaşılmaktadır). Buradaki ötelemenin d uzunluğu, A_1 noktası Şekil. 108 de A nın l ye göre simetrisini göstermek üzere, A_1B ye eşittir. Keza X_1 noktası X in l ye göre simetrisini göstermek şartıyla $X_1Y // l$ ve $X_1Y = d$ olur. Şimdi (a), (c), (d) hallerini ayrı ayrı inceleyelim.

BY yi CZ durumuna getiren ikinci bir dönme vardır. Bu iki dönmenin α_1 ve α_2 açıları sırasıyla l_1 ile l_3 ve l_2 ile l_3 arasındaki açılara eşittir. Dönme merkezi olan O_1 ve O_2 noktaları problem 45 (a)—d in ilk çözümündeki gibi bulunur O_1XZ ve O_2XZ ikizkenar üçgenlerinde O_1 ve O_2 açıları sırasıyla α_1 ve α_2 olup $\widehat{O_1ZY} = 90 - \frac{1}{2} \alpha_1$ ve $\widehat{O_2ZY} = 90 - \frac{1}{2} \alpha_2$

dir. Bu iki eşitlikten de $\widehat{O_1ZO_2} = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2)$ elde edilir.

Şu halde Z noktası l_3 doğrusu ile O_1O_2 yi bilinen $1/2 (\alpha_1 + \alpha_2)$ veya $1/2 (\alpha_1 - \alpha_2)$ açısı altında gören yayın kesim noktası olarak bulunur.

α_1 ve α_2 açılarından herbiri ve O_1 ve O_2 dönme merkezlerinin herbiri iki ayrı yoldan bulunabilir (bundan evvelki problemin çözümüyle karşılaştır). Problemin en çok 16 çözümü vardır.



Şekil 109

47. Problemin çözülmüş olduğunu farzedelim (şekil 110). Birinci teoreme göre BP yi CQ ye dönüştüren bir dönme vardır. Bu dönmenin α açısı AB ile AC arasındaki açıya eşit olup dönme merkezi olan O noktası problem 45 (a)—d nin birinci çözümündeki gibi bulunur OPQ ikizkenar üçgeninde O köşesi ve α açısı belli olduğundan $\frac{OP}{PQ} = k$

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanığın Matematiğe Bazı Tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergelle Yapılan Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant Denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvelle Yapılan Çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş (550 Krş.)
- 16 — Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (600 Krş.)
- 17 — Çeşitli Geometriler (750 Krş.)
- 18 — İndirgemeli Diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
- 22 — Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (400 Krş.)
- 23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
- 24 — Matematiksel Sonsuz (100 Krş.)
- 25 — Sayılar ve Şekiller (850 Krş.)
- 26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen Şekiller (300 Krş.)
- 27 — Oyunlar Teorisine Giriş (300 Krş.)
- 28 — İhtimaliyet ve İnfomasyon (750 Krş.)
- 29 — Matematikçe Endüksiyon ve Benzetme (Cilt I) (750 Krş.)
- 30 — Matematikte Endüksiyon ve Benzetme (Cilt II) (750 Krş.)
- 31 — Matematik ve akla yakın muhakeme II. Cilt (Basılmakta)
- 32 — Gök Mekanığı (10 lira)
- 33 — Geometride İndüksiyon (5 lira)
- 34 — Geometrik transformasyonlar (5 lira)

Matematik Derneğinin adresi: Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü
Vezneciler - İstanbul

FİATİ: 500 Kuruş