TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 29

G. POLYA

MATEMATİK VE AKLA YAKIN MUHAKEME

I. CİLT. MATEMATİKTE ENDÜKSİYON VE BENZETME

I. KISIM

Çeviren :
Orhan Ş. İÇEN

İstanbul — 1966

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 29

G. POLYA

MATEMATİK VE AKLA YAKIN MUHAKEME

I. CİLT. MATEMATİKTE ENDÜKSİYON VE BENZETME

I. KISIM

Çeviren :

Orhan Ş. İÇEN

İstanbul — 1966

Bu kitap Princeton University Press, Princeton, New Jersey tarâfından 1954 te yayınlanan G. POLYA Induction and Analogy in Mathematics. Vol. I of Mathematics and Plausible Reasoning *adlı eserden Türkçeye çevrilmiştir. Eserin Türkiye için telif hakkını Derneğimize veren Princeton University Press Yayınevine teşekkürlerimizi sunarız.*

İstanbul Üniversitesi Döner Sermaye Matbaası

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısiyle mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod, gerek fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Savaşından sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana getirilmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özelikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'un bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

ÖNSÖZ

Bu kitabın birbirleriyle sıkı sıkıya bağlı olan çeşitli hedefleri vardır. Evvelâ bu kitap matematik öğrenen ve öğretenlere, önemli fakat ekseriya ihmal edilegelen bir yolda hizmet etmek istemektedir. Fakat, bu kitap aynı zamanda bir felsefî kalem denemesidir. O, evvelce başlanmış bir işin devamı olduğu gibi, kendisi de bir devama muhtaçtır. Aşağıda bu noktalara birbiri peşisıra temas edeceğim:

1. Açıkça konuşulursa, matematik ve dedüktif mantık (ki o da aslında bir matematik dalıdır) dışındaki bütün bilgilerimiz faraziyeler (tahminler) den ibarettir. Tabiatıyla faraziyeden faraziyeye fark vardır. Bu faraziyeler içinde fizikî ilimlerdeki bazı genel kanunların ifadeleri gibi son derece saygı ve güvene lâyık olanları vardır. Fakat öyle başka faraziyeler de vardır ki, ne güvene ne de saygıya lâyıktır: Meselâ bu sonuncuların bazılarını bir gazetede okumak insanı pek âlâ kızdırabilir. Ve bu iki çeşit arasında her türlü faraziye ve tahmin cinsleri mevcuttur.

Matematik bilgilerimizi *dedüktif (ispatlayıcı) muhakeme* ile sağlama bağlarız, fakat faraziyelerimizi *akla yakın muhakeme* ile destekleriz. Bir matematik ispat bir dedüktif muhakemedir, fakat fizikçinin endüksiyon yoluyla, avukatın ifadelerden, tarihçinin vesikalardan ve iktisatçının istatistiklerden netice çıkarması *akla yakın* muhakeme sahasına girer.

Bu iki muhakeme cinsi arasındaki fark büyük ve çok çeşitlidir. Dedüktif muhakeme emin, söz götürmez, ve kesindir. Akla yakın muhakeme riskli, münakaşaya açık ve geçicidir. Dedüktif muhakeme ilimlere matematiğin nüfuz ettiği yere kadar girer,

fakat kendi başına (tıpkı matematiğin kendisi gibi) etrafımızdaki âlem hakkında bize esas itibariyle yeni bir bilgi verebilmek kabiliyetinden mahrumdur. Dış âlem hakkında öğrenebildiğimiz her yeni şey, günlük işlerimizde kullandığımız tek muhakeme cinsi olan, akla yakın muhakeme ile elde edilir. Dedüktif muhakeme, bu muhakemenin teorisini teşkil eden mantık (formel veya dedüktif mantık) tarafından açıklığa kavuşturulmuş ve kanunlaştırılmış olan değişmez ve katı ölçülere sahiptir. Halbuki akla yakın muhakemenin ölçüleri seyyâl olup, bu tarz muhakemenin açıklık bakımından dedüktif mantık ile mukayese edilebilecek ve herkesin onda olduğu kadar üzerinde birleşebileceği bir teorisi yoktur.

2. Bu iki muhakeme cinsine dair bir nokta üzerinde durulmaya lâyıktır. Herkes bilmektedir ki, matematik dedüktif muhakemeyi öğrenmek için mükemmel bir imkân teşkil etmektedir, fakat buna karşılık mûtad okul programlarında akla yakın muhakemeyi öğrenmek için yukarıki ile mukayese edilir bir imkân veren hiçbir dersin mevcut olmadığını ileri sürmek isterim. Bu işe alâka duyan her dereceden bütün matematik öğrencilerine hitap ediyor ve diyorum ki: Tabiatıyle ispat etmeyi öğrenelim, fakat *tahmin etmeyi de öğrenelim.*

Bu, kulağa biraz çelişmeli gelebilir. Bu yüzden, meydana gelmesi mümkün olan bazı yanlış anlamalara mâni olmak için bir iki nokta üzerinde ısrar etmeliyim.

Matematiğe bir dedüktif ilim gözüyle bakılmaktadır. Fakat bu, matematiğin yönlerinden ancak birisidir. Tamamlanıp bitirilmiş matematik bitmiş şekliyle sunulduğu zaman sadece ispatlardan ibaret sırf dedüktif bir muhakeme olarak görünür. Fakat meydana getirilmekte olan matematik ise, yapılmakta olan diğer herhangi bir insan bilgisine benzer. Bir matematik teoremini ispat etmeden evvel, onu tahmin etmelisiniz; ispatın ayrıntılarına girişmeden evvel, o ispatın dayanacağı fikri tahmin etmelisiniz.

Müşahedeleri terkip etmeli ve benzerlikleri tâkip etmelisiniz; tekrar ve tekrar ispat denemeleri yapmalısınız. Matematikçinin yaratıcı faaliyetinin neticesi dedüktif muhakemedir, ispattır; fakat ispat akla yakın muhakeme ile, tahmin ile bulunur. Eğer bir matematik öğrenimi bir dereceye kadar da olsa matematik bilgilerin keşfedilişini aksettirecekse, o öğrenimde tahminin, akla yakın muhakemenin de bir yeri bulunmalıdır.

Yukarda söylemiş olduğumuz gibi iki türlü muhakeme tarzı vardır: dedüktif muhakeme ve akla yakın muhakeme. Bu iki muhakeme tarzının birbiri ile tenakuz halinde bulunmadığını, aksine onların birbirini tamamladığına işaret etmek isterim. Dedüktif muhakemede esas olan şey bir ispatı bir tahminden, geçerli bir ispat iddiasını geçerli olmayan bir ispat teşebbüsünden ayırt etmektir. Akla yakın muhakemede ise esas, bir tahmini diğer bir tahminden, daha akla yakın bir tahmini daha az akla yakın bir tahminden ayırt etmektir. Eğer dikkatinizi yukarıki ayrılıkların her ikisine birden yöneltirseniz, onların her ikisi de daha berrak hale gelebilir.

Hayatını matematiğe hasretmek niyetinde olan ciddî bir matematik öğrencisi dedüktif muhakemeyi öğrenmek zorundadır; bu onun mesleği ve ilminin alâmeti farikasıdır. Fakat onun hakikaten başarılı olabilmesi için akla yakın muhakemeyi de öğrenmesi lâzımdır; bu, onun yaratıcı faaliyetinin dayanacağı muhakeme tarzıdır. Genel veya amatör öğrenci de dedüktif muhakemeyi biraz tanımış olmalıdır; çünkü her ne kadar bu tarz muhakemeyi doğrudan doğruya kullanacağı bir fırsat pek zuhûr etmeyebilirse de, modern hayatta karşılacağı her çeşitten ispat iddialarını mukayese edebileceği bir standarda sahip olmalıdır. Fakat, kendisi bütün teşebbüslerinde akla yakın muhakemeye ihtiyaç duyacaktır. Her halükârda haris bir matematik öğrencisinin, ileriki alâkaları ne olursa olsun, dedüktif ve akla yakın, her iki muhakeme tarzını da öğrenmesi şarttır.

3. Tahmin etmeyi öğrenmek için yüzde yüz garantili bir metodun mevcut olabileceğine inanmıyorum. Her ne olursa olsun, böyle bir metod varsa bile, ben onu bilmemekteyim ve aşağıki sahifelerde böyle bir metod vermek iddiasını aslâ taşımıyorum. Akla yakın muhakemeyi müessir bir şekilde kullanabilmek bir pratik meharettir ve diğer pratik meharetler gibi taklit ve mümarese ile öğrenilir. Akla yakın muhakemeyi öğrenmek isteyen okuyucu için elimden geleni yapmağa çalışacağım, fakat ona verebileceklerim taklit edilmek üzere misâller ile mümarese fırsatlarından ibaret kalacaktır.

Bu kitapta ekseriya, büyük veya küçük, matematik keşiflerini inceliyeceğiz. Bir keşfin vukua gelişinin hakikî hikâyesini anlatmaklığım mümkün değildir, çünkü hiç kimse onu tam manâsıyla bilemez. Fakat o keşfin nasıl vukubulmuş olabileceğine dair muhtemel bir hikâye tertip etmeye çalışacağım. Keşfin altında yatan sebeplerle kâşifi ona götüren akla yakın istidlâller, kısaca taklide değer her şey üzerinde durmaya çalışacağım. Tabiatıyle okuyucuya tesir etmeye çalışacağım; bu benim öğretmen ve yazar olarak görevimdir. Bununla birlikte, asıl önemli noktada okuyucuya karşı tamamen samimî olacağım: ancak bana halis ve faydalı görünen şeylerle okuyucuya tesir etmeye çalışacağım.

Her bölümün sonuna örnekler ve tamamlayıcı bilgiler eklenmiştir. Tamamlayıcı bilgiler, eklendikleri bölümün metni için fazla teknik veya fazla ince hususlarla, bölümün esas muhakemesinin biraz kenarında kalan noktalara dairdir. Temrinlerin bazıları metinde sadece kısaca temas edilmiş teferruatı tekrar gözden geçirmek için okuyucuya bir fırsat vermektedir. Fakat temrinlerin büyük kısmı kendi aklına yakın neticelerini çıkarmak için okuyucuya bir fırsat vermektedir. Bir bölümün sonunda sorulan daha güç bir probleme hücum etmeden evvel, okuyucunun bölümün onunla ilgili parçalarını dikkatle okuması ve kom-

şu problemlere de göz atması lâzımdır; bunların biri veya diğeri kendisine bir ip ucu verebilir. Okuyunun istifadesini en yüksek dereceye çıkarmak gayesiyle, bu ipuçlarını vermek (veya saklamak) için yalnız sorulan problemlerin muhtevası ve şekli değil, onların *düzenlenişi* üzerinde de çok dikkat sarfedilmiştir. Hakikaten, bu problemlerin düzenlenişine dışardaki bir kimsenin tasavvur edeceği veya lûzum göreceğinden çok daha fazla dikkat harcanmıştır.

Geniş bir okuyucu çevresine hitap edebilmek için, her önemli noktayı mümkün olduğu kadar elemanter bir misâlle aydınlatmağa çalıştım. Bununla beraber birçok hallerde, söz konusu noktayı yeter derecede tesirli bir şekilde desteklemek için pek fazla elemanter olmayan bir misâl seçmek zorunda kaldım. Hakikaten, tarihî bakımdan enteresan olan, veya hakikî matematik güzelliği haiz bulunan, yahut diğer ilimler veya günlük hayattaki metodlarla olan paralelliği aydınlatan bazı misâlleri de vermek mecburiyetini hissettim.

Kitapta anlatılan bir çok hikâyelerin son şekillerinin bir nevi gayrı resmî psikolojik tecrübe sonunda meydana geldiğini ilâve etmeliyim: Hikâye konusunu birbirinden farklı birçok sınıfla münakaşa ettim ve sınıflara konuyu anlatırken sözümü sık sık şöyle sorularla kestim: «Pek âlâ, şimdi siz olsanız, bu durumda ne yapardınız?» Kitap metninin bünyesine alınmış olan birçok pasaj öğrencilerimin cevapları tarafından telkin edilmiş olduğu gibi, hikâyemin ilk tasarladığım şeklinde de dinleyicilerimin reaksiyonu neticesinde başka tarzda bazı değişiklikler yapılmıştır.

Kısaca, okuyucuya zekice taklidetmek ve işleri kendi başına yapabilmek için uygun bir fırsat vermek gayesi uğrunda bütün araştırma ve öğretim tecrübemi kullanmaya çalıştım.

4. Bu kitapta toplanmış olan akla yakın muhakeme örnekleri başka bir iş için de kullanılabilir: Bu misâller çok münakaşalı bir felsefî problem, endüksiyon problemi, üzerine de biraz

ışık serperler. Burada can alacak soru şudur: Endüksiyonun kaideleri var mıdır? Bazı filozoflar buna evet cevabı vermişlerse de ekseri ilim adamları bu cevabın hayır olması fikrindedirler. Faydalı bir şekilde münakaşa edilebilmesi için bu soru başka türlü sorulmalıdır. Bundan başka bu konu, kelimeler üzerinde duran geleneksel yola veya yeni gelişen formalizmlere daha az iltifat etmek ve ilim adamlarının hareket tarzlarıyla daha sıkı temas halinde olmak üzere, daha farklı bir şekilde işlenmelidir. Şimdi endüktif muhakemenin, akla yakın muhakemenin bir özel hali olduğuna dikkat ediniz. Bundan başka endüktif muhakemenin matematik araştırmalarındaki (modern yazarların hemen hemen unuttukları, fakat Euler ve Laplace gibi eski yazarların açıkça farkına varmış oldukları) rolünün fizik araştırmalarındaki rolüne benzer olduğuna da dikkat ediniz. Bu takdirde, matematiğe dair konulardaki akla yakın muhakeme örneklerini müşahede etmek ve birbirleriyle mukayese etmek suretiyle endüktif muhakeme hakkında biraz bilgi edinmek imkânı bulunduğunun farkına varabilirsiniz. Böylece *endüksiyonu, endüktif olarak araştırmak* için kapı açılmış oluyor.

Bir biyolog bir genel problemi, meselâ bir genetik problemini, araştırmaya teşebbüs ettiği zaman, onun o problemin tecrübî tetkikine en müsait olan bir takım özel bitki veya hayvan türleri seçmesi icabettiği çok önemli bir noktadır. Eğer bir kimyager meselâ kimyasal reaksiyon hızı gibi genel bir problemi araştırmaya niyet ettiği zaman, problemi ile ilgili tecrübelerin kendileri üzerinde uygun bir şekilde yapılabileceği bir takım özel kimyasal maddeler seçmesi hususu çok önemlidir. Uygun tecrübe malzemesinin seçilmesi, herhangi bir problemin endüktif araştırılmasında büyük önemi haizdir. Bana öyle geliyor ki, matematik, bir çok bakımlardan, endüktif muhakeme in incelenmesi için en uygun tecrübe malzemesidir. Bu inceleme bir nevi psikolojik tecrübe serisi de ihtiva eder: Çeşitli cinsten delillerin bir faraziyeye olan güvenimiz üzerinde nasıl hükmettiklerini kendi

üzerimizde tecrübe etmek. Kendi iç sadelik ve berraklıkları sayesinde, matematik konular bu türlü bir psikolojik araştırmaya başka herhangi bir alandaki konulardan çok daha müsaittir. Bu kitapta okuyucu bu hususa kanaat getirebilmek için geniş fırsat bulabilir.

Özel bir hal olan endüktif muhakeme yerine, daha genel fikir olan akla yakın muhakemeyi nazarı itibara almak daha felsefî bir davranıştır. Bana öyle geliyor ki, bu kitapta toplanmış olan misâller bizi akla yakın muhakemenin belirli ve olduk ça tatminkâr bir yönüne sevketmektedir. Bununla beraber okuyucuyu kendi görüşlerimi kabûle zorlamak istemiyorum. Hattâ bu görüşlerimi I. Ciltte ifade bile etmiyerek, misâllerin kendilerinin konuşmasını istedim. Fakat II. Cildin ilk dört bölümü akla yakın muhakemenin daha açıkça yapılmış bir genel münakaşasına hasredilmiştir. Orada, önceki misâllerin telkin etmiş olduğu akla yakın muhakeme modellerini formel olarak ifade ederek, bu modelleri sistematize etmeye ve bunların gerek birbirlerine karşı ve gerek ihtimâlat fikriyle olan münasebetlerinden bazılarını gözden geçirmeye çalışmaktayım.

Bu dört bölümün muhtevasının felsefe denilmeye lâyık olup olmadığını bilmiyorum. Eğer bu felsefe ise, herhalde genel iddialar ortaya atmaktan ziyade, müşahhas misâlleri ve insanların müşahhas davranışlarını anlamayı kendine iş edinen hayli mütevazi bir felsefe cinsidir.

Görüşlerim hakkında verilecek son hükmün ne olacağını tabiatıyle daha da az bilmekteyim. Fakat vereceğim misâllerin, endüksiyon veya akla yakın muhakemeyi peşin hükümlerden makûl derecede ari olarak tetkik eden ve görüşlerini müşahede edilebilir vâkıalarla yakın temas halinde meydana getirmek isteyen bir kimseye faydalı olabileceğine kuvvetle güveniyorum.

5. Kendisine daima bir bütün gözüyle bakmış olduğum, *Matematik ve akla yakın muhakeme* hakkındaki bu eser tabiî bir

şekilde iki kısma ayrılmaktadır: *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme* (Cilt I) ve *Akla yakın Muhakeme Modelleri* (Cilt II). Öğrencilere kolaylık olmak üzere bu kısımlar iki ayrı cilt halinde yayınlanmış olup(1), I. Cilt II. Ciltten tamamen müstakildir ve birçok öğrencilerin II. Cildi okumadan evvel I. Cildi dikkatle gözden geçirmek istiyeceklerini tahmin ederim. I. Cilt eserin daha ziyade matematik «et» ini ihtiva etmekte olup, II. Cildteki Endüksiyonun endüktif araştırılması için «veriler» sağlamaktadır. Matematikte oldukça ileri gitmiş ve tecrübeli olması lâzım gelen bazı okuyucular doğrudan doğruya II. Cilde başlamak isteyeceklerdir. Bunlar için II. Cildin ayrı olarak elde edilebilmesi bir kolaylık olacaktır. Müracaat kolaylığı maksadıyla iki cildteki bölümler ayrı ayrı değil, fakat tek bir sırada numaralanmıştır. Kitapların sonuna birer indeks ilâve etmedim, çünkü böyle bir indeksin ilâvesi ithâl etmiş olduğum terimleri bu cins bir kitapta arzu edildiğinden daha katı bir hale gelmeğe temayül ettirecekti. Onun yerine, kitabın fihristinin kendisi için tatminkâr bir rehber olacağı kanaatındayım.

Bu eser ondan evvelki *How to Solve It* (Problemi nasıl çözmeli?) adlı kitabımın devamıdır. Konumuzla ilgili okuyucu her iki eseri de okumalıdır, fakat onları okuyuş sırası pek önemli değildir. Bu eserin metni, öncekinden müstakil olarak okunabilecek surette düzenlenmiştir. Hakikaten, bu kitapta öncekine yapılan pek az direkt başvurma mevcut olup, ilk okuyuşta bunlar hiç nazarı itibara alınmıyabilir. Bununla birlikte, hemen her sahifede ve bazı sahifelerin hemen her cümlesinde önceki kitaba bilvâsıta müracaatlar mevcuttur. Hakikaten bu eser, eski eserin konusuna dair kendisinin küçüklüğü ve elementer karakteri icabı ihtiva edemediği, birçok temrin ve bazı daha ileri misâller vermektedir.

Bu kitap G. Szegö ve yazar tarafından yazılmış bir Analiz

(1) Türkçe çeviride I. Cilt iki kısım halinde yayınlanmıştır. [Çevirenin Notu].

Problemleri kolleksiyonu (Bibliografya'ya bakınız) ile de ilgilidir. O kolleksiyondaki problemler, birbirlerini karşılıklı destekliyecek, birbirlerine ip ucu teşkil edecek, belirli bir konuyu birlikte kaplayacak ve problem çözmede önemli olan türlü davranışlar üzerinde okuyucuya temrin fırsatı verecek şekilde, seriler halinde dikkatle düzenlenmiştir. Bu kitaptaki problemlerin ele alınışında da o kolleksiyondaki anlatış metodu tâkip edilmekte olup, bu önemsiz bir bağ değildir.

Bu kitabın II. cildine ait iki bölüm Probabilite (İhtimâller) Teorisi ile uğraşmaktadır. Bu bölümlerin ilki, İhtimâller Hesabına dair yazarın senelerce evvel yazmış olduğu bir elemanter ekspoze ile (Bibliografya'ya bakınız) bir parça ilgilidir. Her iki yerde de ihtimâl kavramının temellerine dair görüşler ve hareket noktaları aynıdır, fakat bunun dışında ikisi arasında pek az temas noktası vardır.

Bu kitapta ileri sürülen görüşlerin bazıları evvelce yazarın Bibliografyada zikredilen makalelerinde ifade edilmişti. 4, 6, 8, 9 ve 10 No. lu makalelerden geniş pasajlar bu kitabın metnine alınmıştır. Bu pasajların tekrar basılmasına izin vermek lûtfunda bulunan *American Mathematican Monthly*, *Etudes de Philosophie des Sciences en Hommage à Ferdinand Gonseth* ve *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950* nin editörlerine candan teşekkürlerimi sunarım.

Bu kitabın ekseri kısımları derslerimde anlatılmış olup, bazı kısımları birçok defalar anlatılmıştır. Bu anlatış tarzını basılı bir matematik metninde muhafaza etmenin genel olarak tavsiye edilebilir birşey olduğunu zannetmiyorum, fakat içinde bulunduğumuz halde bu uygun, veya hiç olmazsa affedilebilir bir şeydir.

6. II. Cildin Keşif ve Öğretimden bahseden son bölümü kitabın muhtevasını yazarın bir önceki eserine daha açık bir şekilde bağladığı gibi, muhtemel bir devama da işaret etmektedir.

Akla yakın muhakemenin tesirli bir şekilde kullanılışı prob-

lem çözmekte esaslı bir rol oynar. Bu kitap bu rôlü birçok misâllerle aydınlatmaya çalışmaktadır; fakat geriye, problem çözmenin aynı şekilde aydınlatılmaya muhtaç olan diğer tarafları kalıyor.

Burada temas edilen birçok noktalar, üzerlerinde daha fazla çalışılmaya muhtaçtır. Akla yakın muhakeme hakkındaki benim görüşlerim diğer yazarların görüşleri ile karşılaştırılmalı, tarihî misâller daha esaslı şekilde elden geçirilmeli, keşif ve öğretim üzerindeki görüşler tecrübî psikoloji metodlarıyla mümkün olan yere kadar araştırılmalıdır, [1] ve s. Henüz böyle bir çok görevler geri kalmıştır, fakat onların bazıları zahmetlerin karşılığını vermemek nankörlüğünü gösterebilir.

Bu kitap bir ders kitabı değildir. Fakat onun, zamanla ders kitaplarının anlatış tarzlarına ve problem seçişlerine tesir edeceğini ümit ediyorum. Daha ziyade alışık olduğumuz konular üzerindeki ders kitaplarının bu esaslara göre yeniden yazılması nankör bir iş olmayabilir.

7. Baskı hususunda göstermiş olduğu dikkat için Princeton University Press'e ve bilhassa bir çok noktalardaki anlayışlı yardımından dolayı bu matbaanın direktörü Mr. Herbert S. Bailey, Jr. a teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

Müsveddenin daktiloya çekilmesi hususunda Mrs. Priscilla Feigen'e ve provaların okunuşundaki lûtufkâr yardımından dolayı Dr. Julius G. Baron'a da çok teşekkür borçluyum.

GEORGE POLYA

Stanford Üniversitesi
Mayıs 1953

---

[1] Stanford Üniversitesinin Psikoloji Şubesi, E. R. Hilgard tarafından yönetilen ve O. N. R. tarafından desteklenen bir proje çerçevesi içinde bu istikamette hazırlık faaliyetine başlamıştır.

KİTABIN KULLANILIŞI HAKKINDA OKUYUCUYA TAVSİYELER

Bu kitapta meselâ VII. Bölümün 2. paragrafı, VII. Bölümün içinde paragraf 2 olarak, fakat kitabın diğer herhangi bir bölümünde paragraf 7.2 olarak zikredilecektir. XIV. Bölümün 5. paragrafının (3) numaralı fıkrası XIV. Bölümde paragraf 5 (3), fakat diğer herhangi bir bölümde paragraf 14.5 (3) olarak zikredilecektir.

Biraz Elemanter Cebir ve Geometri bilgisi metnin birçok yerlerinin esaslı bir kısmını okumak için kâfidir. Köklü bir Elemanter Cebir ve Geometri bilgisi ile biraz Analitik Geometri ve Diferansiyel ve İntegral Hesap bilgisi hemen hemen bütün metni ve örnekler ve tamamlayıcı bilgilerin ekserisini okumak için kâkâfidir. Fakat metin içindeki (az sayıda olan) bazı arızî ihtarlarda, sorulan bazı problemlerde ve bir takım tamamlayıcı bilgilerde daha ileri matematik bilgisi farzedilmektedir. Daha ileri bilginin farzedildiği yerlerde genellikle, bu hususa dair ikazda bulunulmaktadır.

Kendisine çok elemanter gelen yerleri atlayan ilerlemiş bir okuyucu, kendisine çok karışık gelen yerleri atlayan daha az ilerlemiş bir okuyucuya nazaran daha fazla şey kaçırabilir.

Bazı ispatların (çok güç olmayan) ayrıntıları ekseriya herhangi bir ikaz işareti vermeden aradan çıkarılmıştır. Bu ayrıntılar, böyle bir durumla karşılacağı hususuna gereğince hazırlanmış olan, iyi kritik âdetlere sahip bir okuyucu tarafından ispatları bozmaksızın tamamlanabilir.

Çözümü sorulan problemlerden bazıları çok kolaydır, fakat az sayıda bir kısmı da iyice zordur. Bunların bazılarına çözümü kolaylaştırabilecek yardımlar köşeli parantezler [ ] içinde ilâve edilmiştir. Bazan, böyle bir problemin etrafındaki problemler çözüme yardımcı ip uçları verebilirler. Bazı bölümlerdeki misâllerin önüne konulan, bazan da bu misâllerin Birinci veya İkinci Kısımlarından önce verilen başlangıç yazılarına özel bir dikkat atfedilmelidir.

Sorulan problemlerin kitapta verilen çözümleri bazan çok kısadır: Bu çözümler, kendilerinden herhangi birine kitapta bakmadan evvel ona ait problemi kendi vâsıtalarıyla ciddî surette çözmeğe uğraşacak bir okuyucu için tasarlanmıştır.

Bir problem üzerinde ciddî gayret sarfetmiş olan bir okuyucu, onu çözmeyi başaramasa bile istifadeli çıkabilir. Meselâ, o takdirde kitaptaki çözüme bakabilir ve kendisine ana fikir olarak görünen şeyi ortaya çıkarmaya çalışabilir, sonra kitabı bir kenara koyarak çözümü tekrar çıkarmaya uğraşabilir.

Bazı yerlerinde bu kitap, şekillerde veya bir çözümün çıkarılışındaki ufak ara adımlarını vermekte çok bol davranmıştır. Bundan maksat bir şekil veya bir formülün *meydana gelişini* gözle görülür hale sokmaktır; meselâ Şek. 16.1—16.5 'e bakınız. Fakat bir kitap ne kadar şekil veya formül ihtiva ederse etsin, gene azdır. Bir okuyucu, kitaptan bir pasajı «ilk yaklaşım halinde» veya daha etraflı bir şekilde okumak isteyebilir. Eğer daha etraflı olarak okumak isterse, kalem kâğıdı elinden eksik etmemelidir: Kitapta verilen, veya sadece işaret edilen, herhangi bir formülü veya şekli yazmaya veya çizmeye hazır olmalıdır. Böyle yapmak suretiyle, kendisi şekil veya formülün meydana gelişini görmek, türlü ayrıntıların nihaî mahsûle nasıl katkıda bulunduklarını anlamak ve sonradan bütün işi hatırlamak hususlarında daha fazla şansa sahip olur.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ vii

KİTABIN KULLANILIŞI HAKKINDA TAVSİYELER xvii

BÖLÜM I. ENDÜKSİYON 1

1. Tecrübe ve kanaat. 2. İlham verici temas noktaları. 3. Destekleyici temas noktaları. 4. Endüktif davranış.

I. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1-14. [12. Evet ve Hayır. 13. Tecrübe ve davranış. 14. Mantıkçı, matematikçi, fizikçi ve mühendis.]

BÖLÜM II. GENELLEŞTİRME, ÖZELLEŞTİRME, BENZETME 15

1. Genelleştirme, Özelleştirme, Benzetme ve Endüksiyon. 2. Genelleştirme. 3. Özelleştirme. 4. Benzetme. 5. Genelleştirme, Özelleştirme ve Benzetme. 6. Benzetme vasıtasıyle keşif. 7. Benzetme ve Endüksiyon.

II. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1 - 46 [Birinci Kısım: 1 - 20; İkinci Kısım: 21 - 46]. [1. Doğru genelliştirme. 5. Aşırı bir özel hal. 7. Bir baş özel hal. 10. Bir temsilî özel hal. 11. Bir benzer hal. 18. Büyük benzerlikler. 19. Açıklanmış benzerlikler. 20. İktibaslar. 21. E faraziyesi. 44. Bir itiraz ve bir ispata ilk yaklaşma 45. Bir ispata ikinci bir yaklaşma. 46. Benzerliğin tehlikeleri.]

BÖLÜM III. UZAY GEOMETRİDE ENDÜKSİYON 53

1. Çokyüzlüler. 2. İlk destekleyici temas noktaları. 3. Daha başka destekleyici temas noktaları. 4. Sıkı bir deneme.

5. Birbirinden farklı değerde gerçeklemeler. 6. Çok farklı bir hal. 7. Benzerlik. 8. Uzayın parçalara ayrılışı. 9. Problemi tadil etmek. 10. Genelleştirme, özelleştirme, benzetme. 11. Benzer bir problem. 12. Bir benzer problemler serisi. 13. Çok problem, tek problemden daha kolay olabilir. 14. Bir faraziye. 15. Önceden söylemek ve gerçeklemek. 16. Tekrar ve daha iyi. 17. Endüksiyon dedüksiyona, özel hal genel ispata yol gösterir. 18. Daha başka faraziyeler.

III. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı bilgiler: 1 - 41. [21. Endüksiyon: aklın intibakı, dilin intibakı. 31. Descartes'ın çokyüzlülere dair çalışmaları. 36. Bütünleyici uzay açıları, bütünleyici küresel çokgenler.]

BÖLÜM IV. SAYILAR TEORİSİNDE ENDÜKSİYON 93

1. Kenarları tam sayılarla ölçülen dik üçgenler. 2. Kare toplamları. 3. Dört tek kare toplamına dair. 4. Bir misâlin muayenesi. 5. Müşahede neticelerinin cedvel halinde tertiplenmesi. 6. Kaide nedir? 7. Endüktif keşfin tabiatı hakkında. 8. Endüktif delilin tabiatı hakkında.

IV. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1 - 26. [1. Yazış tarzı. 26. Endüksiyonun tehlikeleri.]

BÖLÜM V. ENDÜKSİYONA DAİR ÇEŞİTLİ MİSÂLLER 120

1. Açılımlar. 2. Yaklaşık Förmüller. 3. Limitler. 4. İddiayı cerhetmeye çalışmak. 5. İddiayı ispata çalışmak. 6. Endüksiyon safhasının rolü.

V. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1 - 18. [15. Müşahede edilen kaideleri izah etmek. 16. Müşahede edilen vâkıaları tasnif etmek. 18. Aradaki fark nedir?]

BÖLÜM VI. DAHA GENEL BİR İFADE 142

1. Euler. 2. Euler'in muhtırası. 3. Daha genel bir noktai nazara geçiş. 4. Euler'in muhtırasının şematik özeti.

VI. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1 - 25.

[1. Doğuray fonksiyonlar. 7. Düzlem geometriye ait bir kombinasyon problemi. 10. Kare toplamları. 19. Diğer bir rekürrans formulü. 20. Sayıların bölenler toplamına dair diğer bir çok olağanüstü kanun. 24. Euler bir keşfi nasıl kaçırdı?. 25. Euler'in $\sigma(n)$ 'e dair teoreminin bir genelleştirilmesi.]

BÖLÜM VII. MATEMATİK ENDÜKSİYON 171

1. Endüktif safha. 2. İspat safhası. 3. Geçişlerin incelenmesi. 4. Matematik endüksiyonun tekniği.

VII. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1—18. [12. Daha fazla şey ispat etmek daha az zahmetli olabilir. 14. Teoreminizi dengeleyiniz. 15. İleriye bakış. 17. Herhangi n sayı birbirine eşit midir?]

BÖLÜM VIII. MAKSİMUMLAR VE MİNİMUMLAR 191

1. Modeller. 2. Misâl. 3. Teğet tesviye çizgisi modeli. 4. Misâller. 5. Kısmî değişim modeli. 6. Aritmetik ve geometrik ortalamalar teoremi ve onun ilk neticeleri.

VIII. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1-63 [Birinci Kısım: 1—32; İkinci Kısım: 33- 63]. [1. Düzlem geometride en küçük ve en büyük uzaklıklar. 2. Uzay geometride minimum ve maksimum uzaklıklar. 3. Bir düzlemdeki tesviye çizgileri. 4. Uzayda tesviye yüzeyleri. 11. Kesen tesviye çizgisi prensibi. 22. Kısmî değişim prensibi. 23. Ekstremumun varlığı. 24. Kısmî değişim modelinin bir değişik şekli: Bir sonsuz işlem. 25. Kısmî değişim modelinin diğer bir değisik şekli: Bir sonlu işlem. 26. Grafik yoluyla mukayese. 33. Çokgenler ve çokyüzlüler. Alan ve çevre. Hacım ve yüzey alanı. 34. Kare tabanlı dik prizma. 35. Dik silindirler. 36. Genel dik prizma. 37. Kare tabanlı dik çifte piramit. 38. Dik çifte koni. 39. Genel dik çifte pira-

mit. 43. Geometriyi cebire uygulamak. 45. Cebiri geometriye uygulamak. 51. Kare tabanlı dik piramit. 52. Dik koni. 53. Genel dik koni. 55. Kapağı açık kutu. 56. Su yalağı. 57. Bir parça. 62. Bir postahane problemi. 63. Kepler'in bir problemi.]

I. CİLT

MATEMATİKTE ENDÜKSİYON VE BENZETME

I

Endüksiyon

Müşahedelerin Matematik İlimlerin Sırfî Matematik adı verilen kısmında bile büyük bir ehemmiyeti haiz olduğunu ileri sürmek, kolay kabûl edilemiyecek bir iddia olarak görünecektir. Çünkü umumî kanaat, müşahedelerin duygular üzerine tesir yapan fizikî eşyaya münhasır olduğu merkezindedir. Halbuki sayıları yalnız akla nispet etmek zorunda olduğumuzdan, onların tabiatını araştırırken müşahedelerin ve bir nevi tecrübenin ne işe yarayabileceğini anlamamız kolay değildir. Bununla beraber, burada sebepleriyle birlikte açıklıyacağım gibi, sayıların bugün bilinen özeliklerinin büyük bir kısmı, hattâ doğrulukları kesin ispatlarla teyit edilmelerinden çok zaman evvel, müşahede ile keşfedilmişlerdir. Hattâ sayıların pek iyi tanıdığımız, fakat bugüne kadar ispatını yapamadığımız daha bir çok özelikleri de vardır ki, ancak müşahede ile bulunmuşlardır. Buradan görüyoruz ki, mükemmellikten hâlâ çok uzak bulunan Sayılar Teorisinde müşahedelere en büyük ümitlerimizi bağlayabiliriz; bu müşahedeler bizi daimî surette, sonradan ispatına çalışacağımız, yeni özeliklere sevkedecektir. Sadece müşahedelerle desteklenen ve henüz ispat edilmemiş durumda olan bilgi nev'ini hakikatten dikkatle ayırt etmek lâzımdır; umumiyetle bu cins bilgiye endüksiyonla elde edilmiş bilgi diyoruz. Sadece endüksiyonun bizi hatâya sevkettiği haller de görmüş olduğumuzdan, sayıların müşahede ile keşfetmiş olduğumuz ve yalnız endüksiyonla desteklenen bir özeliğini hemen doğru olarak kabûl etmemeye çok dikkat etmeliyiz. Hakikaten, böyle bir keşfi ancak keşfedilen özeliği daha kesin olarak incelemek ve o özeliği ispat veya cerhetmek için bir fır-

sat olarak kullanmalıyız; her iki halde de faydalı bir şey öğrenmemiz mümkündür. — EULER[1].

1. **Tecrübe ve kanaat.** Tecrübe insan kanaatlarını değiştirir. İnsanlar tecrübeden öğrenirler veya, daha ziyade, öğrenmelidirler. Tecrübeden en iyi şekilde istifade etmek insanlığın büyük vazifelerinden biridir ve bu vazife uğrunda çalışmak ta ilim adamlarının esas meşgalesidir.

Adına lâyık olan her ilim adamı, verilen bir tecrübeden en doğru kanaatı çıkartmaya ve verilen bir mesele hakkında en doğru kanaatı ortaya koymak için en uygun tecrübeyi yapmaya çalışır. İlim adamının tecrübe ile iş görme metoduna umumiyetle *endüksiyon* adı verilir. Endüksiyon metodunun bilhassa açık misâllerine matematik araştırmada rastlamak mümkündür. Müteakıp paragrafta böyle basit bir misâlin münakaşasına başlıyacağız.

2. **İlham verici temas noktaları.** Endüksiyon ekseriya müşahede ile başlar. Bir tabiat bilgini kuşların hayatını, bir kristallografi bilgini de kristallerin şekillerini müşahede edebilir. Sayılar Teorisi ile alâkadar bir matematikçi ise 1, 2, 3, 4, 5, ... tabiî sayılarının özeliklerini müşahede eder.

Eğer kuşların hayatını enteresan neticeler elde etmek hususunda az çok bir başarı ihtimali ile müşahede etmek istiyorsanız, kuşları biraz tanımış olmanız, onlara alâka duymanız, hattâ belki onları sevmeniz lâzımdır. Bunun gibi, eğer sayıları müşahede etmek istiyorsanız, onlara karşı alâka duymanız, ve onları biraz tanımanız lâzımdır. Meselâ, tek ve çift sayıları ayırdedebilmeli, 1, 4, 9, 16, 25, ... gibi kare sayılarını ve 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... gibi asal sayıları (1 sayısına «birim» olarak ayrı bir yer vermek ve onu asal saymamak daha

[1] Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 2, p. 459, Specimen de usu observationum im mathesi pura.

doğru olur) bilmelisiniz. Bu derece mütevazi bir bilgi bile, size enteresan bir şey müşahede etmek imkânını verebilir.

Meselâ bir tesadüf neticesinde

$$3+7=10, \quad 3+17=20, \quad 13+17=30$$

münasebetlerine rastlıyor ve bunların arasında bir benzerlik görüyorsunuz. 3, 7, 13 ve 17 sayılarının hep tek asal sayılar oldukları gözünüze çarpıyor. İki tek asal sayının toplamı ister istemez bir çift sayıdır; nitekim 10, 20 ve 30 çifttir. Acaba *diğer* çift sayılarda durum nasıldır? Onlar da aynı şekilde hareket ediyorlar mı? İki tek asal sayının toplamı olarak gösterilebilen ilk çift sayı, tabiatıyle

$$6=3+3 \qquad \text{tür.}$$

6 nın ötesine baktığımız zaman

$$8=3+5$$
$$10=3+7=5+5$$
$$12=5+7$$
$$14=3+11=7+7$$
$$16=3+13=5+11 \qquad \text{dir.}$$

Acaba bu iş daima böyle devam edip gidecek midir? Hiç olmazsa, yukarda müşahede edilen özel haller şu umumî ifadeyi ilham etmektedirler: 4 *ten büyük her çift sayı, iki tek asal sayının toplamıdır.*

İki tek asal sayının toplamı olarak gösterilemiyen 2 ve 4 istisnaî halleri üzerinde de düşündüğümüz takdirde aşağıki daha âlimâne ifadeyi tercih edebiliriz: *Ne asal olan, ne de bir asal sayının karesi olan her çift sayı iki tek asal sayının toplamıdır.*

Böylelikle bir *faraziye* formüle etmiş olduk. Bu faraziyeyi

*endüksiyon*la bulmuş olduk. Yani bu faraziye, bazı özel hallerin bizi sevkettiği bir müşahede tarafından telkin edildi.

Bu özel hallerin verdiği işaretler oldukça hafiftir; faraziyemize inanmak için ancak pek zayıf delillere sahibiz. Bununla birlikte, bu faraziyeyi iki yüz seneden biraz daha uzun bir müddet önce keşfetmiş bulunan matematikçinin, yani GOLDBACH'ın da çok daha sağlam delillere sahip olmadığını düşünerek kendimizi teselli edebiliriz.

Goldbach'ın faraziyesi doğru mudur? Buna bugün hiç kimse cevap veremez. Bazı büyük matematikçiler tarafından üzerinde sarfedilen büyük gayrete rağmen, bugün için Goldbach faraziyesi, Euler'in günlerinde olduğu gibi, «sayıların iyi tanıdığımız, fakat henüz ispat edemediğimiz» birçok özeliklerinden biridir. Bu faraziyeyi henüz ispat edemediğimiz gibi, onu cerh te edememekteyiz.

Şimdi geriye bakarak, önceki muhakemede endüksiyon metodu için tipik olabilecek adımları farketmeye çalışalım:

Evvelâ bir *benzerlik* müşahede etmiştik. Yani 3, 7, 13 ve 17 nin asal sayılar, 10, 20 ve 30 un çift sayılar olduklarını ve $3+7=10$, $3+17=20$, $13+17=30$ eşitliklerinin de birbirine *benzer* olduğunu görmüştük.

Bundan sonra bir *genelleştirme* adımı geliyordu. 3, 7, 13 ve 17 misâllerinden bütün tek asal sayılara, 10, 20 ve 30 dan bütün çift sayılara ve ondan sonra da, umumî olması muhtemel olan

$$\text{çift sayı} = \text{asal sayı} + \text{asal sayı}$$

şeklinde bir münasebete geçmiştik.

Bu suretle, açık bir şekilde formüle edilmiş, fakat sadece bir faraziye, bir *tahmin*den ibaret olan umumî bir ifadeye varmıştık. Yani bu ifade hiçbir surette ispat edilmiş olmayıp, doğruluk iddiasında bulunamaz; o sadece, hakikate varmak için bir teşebbüsten ibarettir.

Bununla beraber, bu faraziye tecrübeyle, «vâkıalar» ve realite ile bir takım *ilham verici temas noktalarını* haizdir. Bu faraziye, 10, 20, 30 çift sayıları özel hallerinde doğru olduğu gibi, 6, 8, 12, 14, 16 çift sayıları için de doğrudur.

İşaret ettiğimiz bu hususlarla endüksiyon metodunun bir ilk safhasını kabaca özetlemiş olduk.

3. Destekleyici temas noktaları. Büyük bir otorite tarafından bile ortaya atılmış olsa, hattâ kendiniz tarafından bile ortaya atılmış olsa, ispat edilmemiş bir faraziyeye pek fazla inanmamalısınız. O faraziyeyi ispat veya cerhetmeye çalışmalı; onu *mihenk taşına vurmalısınız.*

Goldbach faraziyesini yeni bir çift sayıyı gözden geçirerek onun iki tek asal sayı toplamı olup olmadığına bakmak suretiyle mihenk taşına vurabiliriz. Meselâ 60 sayısını gözden geçirelim. Bunun için, Euler'in kendi ifadesiyle «bir nevi tecrübe» yapalım. 60 sayısı çifttir. Fakat acaba iki asal sayının toplamı mıdır? Meselâ

$$60 = 3 + \text{asal sayı}$$

eşitliği doğru mudur? Hayır, çünkü 57 asal değildir. Öyleyse

$$60 = 5 + \text{asal sayı}$$

olabilir mi? Cevap gene «hayır» dır. Çünkü 55 asal değildir. Eğer iş hep bu şekilde devam ederse, faraziye suya düşer. Fakat bundan sonraki deneme

$$60 = 7 + 53$$

verir ki, 53 asaldır. Bu suretle, faraziye bir özel halde daha gerçekleşmiş olur.

Aksi netice Goldbach faraziyesinin âkıbetini kesin olarak tâyin ederdi. Eğer, 60 gibi verilmiş bir çift sayının altındaki bütün asal sayıları deneyip te, o sayıyı iki asal sayının toplamı

olarak gösteren hiçbir ayrılışa rastlamadığınız takdirde, faraziyeyi kesin olarak cerhetmiş olursunuz. Fakat faraziyeyi 60 sayısı için gerçeklediğiniz takdirde, böyle bir kesin neticeye varamazsınız. Tek bir gerçekleme ile teoremi elbette ispat etmiş olamazsınız. Bununla birlikte, böyle bir gerçeklenişi faraziye lehinde, onu daha fazla inanılabilir hale getiren, müsait bir işaret olarak telâkki etmek tabiîdir. Maamafih, bu müsait işarete ne kadar bir ağırlık vereceğiniz sizin şahsî takdirinize kalmıştır.

Bir an için 60 sayısına dönelim. 3,5 ve 7 asal sayılarını denedikten sonra, 30 un altındaki geri kalan asal sayıları deneyebiliriz. (Aşikâr olarak, 60/2 ye eşit olan 30 dan daha öteye geçmeye lûzum yoktur, çünkü toplamı 60'a eşit olması lâzım gelen iki asal sayıdan biri 30 dan küçük olmalıdır.) Böylece 60 ın iki asal sayı toplamı şeklindeki bütün ayrılışlarını elde ederiz:

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$$

Bu işe sistematik surette devam ederek, 60 çift sayısında yapmış olduğumuz gibi, çift sayıları birbiri ardı sıra gözden geçirebiliriz. Neticeleri de şöyle bir cedvel halinde sıralıyabiliriz :

$$\begin{aligned}
6 &= 3 + 3 \\
8 &= 3 + 5 \\
10 &= 3 + 7 = 5 + 5 \\
12 &= 5 + 7 \\
14 &= 3 + 11 = 7 + 7 \\
16 &= 3 + 13 = 5 + 11 \\
18 &= 5 + 17 = 7 + 11 \\
20 &= 3 + 17 = 7 + 13 \\
22 &= 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11 \\
24 &= 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 \\
26 &= 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13 \\
28 &= 5 + 23 = 11 + 17 \\
30 &= 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17
\end{aligned}$$

Yukarıki faraziye, burada gözden geçirmiş olduğumuz bütün özel hallerde gerçekleşmiştir. Faraziyenin gerçekleştiği her özel hal faraziyeyi kuvvetlendirir, onu daha fazla inanılabilir kılar. Tabiatıyla, ne kadar çok sayıda olursa olsun, bu türlü gerçeklemeler faraziyeyi ispata hiçbir zaman yetmez.

Bir faraziye verildiği zaman, onun hakkında toplayacağımız müşahedeleri tetkik etmemiz, onları birbiriyle mukayese ve terkip etmemiz, onların arkasında saklanmış olabilen bir ip ucu aramamız lâzımdır. Yukarıki faraziye halinde, verilen cedvelden esaslı bir ip ucu keşfetmek çok zordur. Gene de cedveli muayene ederek, faraziyenin manâsını daha açık olarak anlamaklığımız mümkündür. Bu cedvel, içinde bulunan çift sayıların iki asal sayının toplamı olarak kaç türlü gösterilebildiğini (meselâ 6 bir türlü, 30 üç türlü) bize anlatır. Cedvele bakılırsa, $2n$ çift sayısının bu türlü gösterilişlerinin sayısı n ile beraber «gayrı muntazam bir şekilde artıyor» görünmektedir. Goldbach faraziyesi, işte bu gösteriliş sayısının, cedveli ne kadar ileriye uzatırsak uzatalım, hiçbir zaman 0'a düşmeyeceği ümidini ifade eder.

Tetkik etmiş olduğumuz özel halleri iki gruba ayırabiliriz: faraziyenin formüle edilmesinden öncekiler ve faraziyenin formüle edilişinden sonrakiler. Önceki özel haller bize faraziyeyi ilham etmişler, sonrakiler ise onu desteklemişlerdir. Her iki cins özel hal, faraziye ile «vâkıalar» arasında bir nevi temas yaratırlar. Yukarıki cedvelde «ilham edici» ve «destekleyici» temas noktaları arasında bir fark gözetilmemiştir.

Şimdi geriye, yukarıki muhakemeye bakalım ve onda endüktif metodun bariz çizgilerini tanımaya çalışalım.

Yukarıda bir faraziye tasarlamış ve ondan sonra bu faraziyenin doğru olup olmadığını bulmaya çalışmıştık. Faraziyemiz, kendisinin gerçekleştiği bazı özel hallerin ilham ettiği bir umumî ifade idi. Daha sonra diğer bir takım özel halleri daha tetkik

etmiştik. Tetkik ettiğimiz bütün özel hallerde faraziyemiz doğru çıkınca, ona itimadımız artmıştı.

Bence burada yapmış olduklarımız, makûl insanların umumiyetle yaptıkları şeylerden ibarettir. Böyle yapmakla, şu prensibi kabûl etmiş görünüyoruz: *Faraziye halindeki bir umumî ifade gerçekleştiği her yeni özel hal ile daha fazla inanılabilir olur.*

Endüksiyon metodunun dayandığı prensip bu mudur?

4. Endüktif davranış. Özel hayatımızda ekseriya illüzyonlara sarılırız. Yani, hissî muvazenemizi alt üst etmekten korktuğumuz için, tecrübenin kolaylıkla cerhedebileceği bir takım inançlarımızı incelemeye cesaret edemeyiz. Bâzı hallerde illüzyonlara sarılıp kalmak pek gayrı makûl olmayabilir, fakat ilimde, *endüktif davranış* denilen bundan çok farklı bir davranışa ihtiyacımız vardır. Bu davranışın hedefi, inançlarımızı mümkün olduğu kadar tesirli bir şekilde tecrübelerimize uydurmaktır. Bu davranış vâkıalara muayyen bir tercih verilmesini ister, müşahedelerden genelleştirmelere hazırca yükselebilmeye ve en yüksek derecede genelleştirmelerden en müşahhas müşahedelere inebilmeye hazır oluşa ihtiyaç gösterir. Bu davranış, bin farklı nüansta «olabilir» ve «belki» diyebilmeye ihtiyaç gösterir. Bu davranışın ihtiyaç gösterdiği diğer birçok şeyler arasında bilhassa şu üçünü belirtelim:

Evvelâ, herhangi bir kanaatımızı gözden geçirmeye hazır olmalıyız.

İkinci olarak, mücbir bir sebep bulunduğu takdirde herhangi bir kanaatımızı değiştirmeliyiz.

Üçüncü olarak, hiç bir kanaatımızı önemli bir sebep olmadan hafiflikle değiştirmemeliyiz.

Bu noktalar pek basit görünür. Fakat, bunların dediklerini tamamen tutmak alelâdenin üstünde olan vasıflara ihtiyaç gösterir.

Birinci noktanın tutulması «fikrî cesaret» e ihtiyaç gösterir. Kanaatlerinizi yeniden ele almanız için cesarete ihtiyacınız vardır. Galileo'nun, çağdaşlarının peşin hükümlerine ve Aristo'nun otoritesine meydan okuyuşu büyük bir fikrî cesaret örneğidir.

İkinci nokta «fikrî namuskârlığa» ihtiyaç gösterir. Tecrübe tarafından cerhedilmesine rağmen, sırf *benim tarafımdan ortaya atıldığı için*, kendi faraziyeme yapışıp kalmaklığım namuslu bir iş olmaz.

Üçüncü nokta «akıllı ihtiyatkârlığa» ihtiyaç gösterir. Bir kanaatı ciddî bir şekilde tetkik etmeden, meselâ sırf modaya uymak üzere, değiştirmek akılsızlık olur. Bununla beraber, bütün kanaatlerimizi ciddî suretle tetkike ne zamanımız müsaittir, ne de bu kuvveti kendimizde bulabiliriz. Şu halde, günlük çalışmamızı, sorularımızı ve aktif şüphelerimizi tâdilini makûl olarak ümit edebileceğimiz bir takım kanaatlara hasretmemiz akıllıca bir iş olur. «Her şeye inanmayınız, fakat sadece şüphelenmeye değer şeylerden şüpheleniniz».

Fikrî cesaret, fikrî namuskârlık ve akıllı ihtiyatkârlık ilim adamının manevî vasıflarıdır.

I. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. Aşağıki dizinin müteakıp terimlerinin hangi kaideye göre bulunduğunu tahmin ediniz:

$$11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71,\ 101,\ 131,\ \ldots$$

2. Şu cedveli nazarı itibara alalım:

$$\begin{aligned} 1 &= 0+1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

Bu misâllerin ilham ettiği umumî kanunu tahmin ederek uygun bir matematik notasyonla ifade ediniz ve sonra ispat ediniz.

3. Aşağıki müteakıp toplamların değerlerini gözden geçiriniz :

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \ldots$$

Burada basit bir kaide mevcut mudur ?

4. Aşağıki müteakıp toplamların değerlerini gözden geçiriniz :

$$1,\ 1+8,\ 1+8+27,\ 1+8+27+64,\ \ldots$$

Burada basit bir kaide mevcut mudur ?

5. Bir üçgenin üç kenarı sırasıyla l, m ve n uzunluğundadır. Burada l, m. n pozitif tam sayılar olup, $l \leqq m \leqq n$ dir. Verilen bir n 'ye karşılık, bu şekilde tarif edilen kaç tane üçgen vardır ? [$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ alınız.] Üçgen sayısının n ye nasıl bağlı olduğunu gösteren umumî bir kanun bulunuz.

6. 5, 15, 25, ... (yani sonu 5 ile biten sayılar) dizisinin ilk üç terimi 5 ile bölünebilmektedir. Acaba sonraki terimler de 5 ile bölünebiliyor mu ?

3, 13, 23, ... (sonu 3 ile biten sayılar) dizisinin ilk üç terimi asal sayılardır. Acaba sonraki terimler de asal sayılar mıdır ?

7. Formel hesaplama ile

$$(1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+4!\,x^4+5!\,x^5+6!\,x^6+\cdots)^{-1}$$
$$= 1-x-x^2-3x^3-13x^4-71x^5-461x^6 \ldots.$$

buluruz. Bu bize sağdaki kuvvet serisinin katsayıları hakkında iki faraziye ilham eder: (1) Bu katsayılar (ikinciden itibaren) hep negatiftir; (2) Bu katsayılar (dördüncüden itibaren) hep asaldır. Bu iki faraziye aynı derecede itimada şayan mıdır?

8.

$$\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^{-1}=A_0+\frac{A_1x}{1!}+\frac{A_2x^2}{2!}+\cdots$$

vaz'edelim.

	$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
için	$A_n=$	1	1	1	2	4	14	38	216	600	6240

buluruz. Buna dair bir faraziye ileri sürünüz.

9. Büyük Fransız matematikçisi Fermat, genel terimi $2^{2^n}+1$ olan

$$5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ \ldots$$

dizisini nazarı itibara almıştı. Fermat, bu dizisinin $n=1, 2, 3, 4$ e tekabül eden (yukarda verilmiş) ilk dört teriminin asal olduğunu müşahede etmiş ve geri kalan terimlerin de asal oldukları faraziyesini ileri sürmüştü. Bunu ispat etmediği halde, faraziyesine o kadar emniyet etmişti ki, Wallis ve diğer İngiliz matematikçilerini onu ispata davet etmişti. Buna rağmen Euler, hemen sonraki terim olan ve $n=5$ e tekabül eden $2^{32}+1$ sayısının asal olmadığını ve bu sayının 641 ile bölünebileceğini bulmuştur[1]. Euler'in bu bölümün başına koymuş olduğumuz pasajına bakınız. «Sadece endüksiyonun bizi hatâya sevkettiği haller de görmüştük.»

---

[1] Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, p. 1–5. Hardy and Wright, *The Theory of Numbers* p. 14–15.

10. Goldbach faraziyesini $2n = 60$ için gerçeklerken $n = 30$ un altındaki p asal sayılarını sırayla denemiştik. Bunun yerine, $n = 30$ ile $2n = 60$ arasındaki bütün p' asal sayılarını da deneyebilirdik. Büyük n ler için hangi usûl daha avantajlı olacaktır?

11. «Endüksiyon», «tecrübe» ve «müşahede» kelimelerinin manâsına bir lûgat kitabında baktığınız zaman, diğerleri arasında, aşağıki gibi cümlelere rastlarsınız :

«Endüksiyon, özel hallerden genel bir kanun çıkartmak, veya genel bir ifadeyi ispat etmek için ortaya vâkıalar atmaktır».

«Tecrübe, faraziyelerin doğru olup olmadığını muayene etmek için kullanılan bir usûldür».

«Müşahede, tabiatta vukubulan hâdiselerin sebep ve netice veya karşılıklı münasebet bakımından dikkatle gözlenmesi ve kaydedilmesidir».

Bu tarifler 2. ve 3. paragraflarda münakaşa edilmiş olan misâlimize uygulanabilir mi?

12. *Evet ve Hayır.* Matematikçi de tabiat bilgini gibi, faraziye halindeki bir genel kanunun herhangi bir neticesinin doğru olup olmadığını yeni bir müşahede ile denemek için Tabiata bir sual tevcih eder :

«Bu kanunun doğru olup olmadığından şüpheleniyorum. Acaba o doğru mudur?» Eğer o denemede netice açıkca cerhedilirse, kanunun doğru olmasına imkân yoktur. Eğer netice açıkca gerçeklenirse, bu, kanunun belki doğru olabileceğine bir işarettir. Tabiat, evet veya hayır diye cevap verebilir, fakat bunlardan birini fısıldayarak. diğerini gürleyerek söylemektedir. Tabiatın eveti muhtemel, fakat hayırı kesindir.

13. *Tecrübe ve davranış.* Tecrübe insan davranışını tâdil eder. Ve tecrübe insan inanışlarını da tâdil eder. Bu iki şey birbirinden müstakil değildir. Davranış ekseriya inanışlardan doğar, inanışlar da müstakbel davranışlardır. Fakat bir şahsın davranışını görebilmeniz mümkün olduğu halde, onun inanışlarını göremezsiniz. Davranış, inanıştan daha kolaylıkla müşahede edilir. «Bir defa yanmış bir çocuğun ateşten korktuğunu» herkes bilir. Bu, tam bizim biraz evvel söylemiş olduğumuz şeyi ifade eder: Tecrübe insan davranışını tâdil eder.

Evet, tecrübe hayvanların davranışlarını da tâdil eder.

Bulunduğum yerin civarında hiç tahrik edilmeden gelip geçenlere havlayan ve onların üzerlerine atılan arsız bir köpek vardır. Fakat ben kendimi ondan kolayca korumanın yolunu buldum. Eğer yere eğilir ve bir taş alır gibi yaparsam, köpek haykırarak uzaklaşıyor. Bütün köpekler bu şekilde davranmazlarsa da, bu köpeğe o davranışı ne türlü bir tecrübenin verdiğini tahmin etmek zor değildir.

Hayvanat bahçesindeki ayı «yiyecek dilenir». Yani etrafta kendisine bakan birisi varsa, gülünç bir vaziyet takınarak ekseriya kendisine bakan kimsenin kafese bir parça şeker atmasını temin eder. Çok muhtemeldir ki, serbest ayılar hiçbir zaman böyle gülünç tavırlar takınmazlar ve hayvanat bahçesindeki ayıyı dilenmeye sevkeden tecrübenin nasıl birşey olduğu kolayca tasavvur edilebilir.

Endüksiyon hakkında yapılacak tam bir araştırmanın belki hayvan davranışını da ihtiva etmesi lâzım gelir.

14. *Mantıkçı, matematikçi, fizikçi ve mühendis.* Mantıkçı «Şu matematikçiye bak!» dedi, «ilk doksan dokuz sayının yüzden küçük olduğuna dikkat ediyor ve buradan endüksiyon dediği yolla bütün sayıların yüzden küçük olduğu neticesini çıkarıyor.»

Matematikçi «Bir fizikçi 60 ın bütün sayılarla bölünebildiğini zanneder. Evvelâ 60 ın 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile bölünebildiğini müşahede eder. Sonra, kendi dediğine göre gelişi güzel seçilmiş, 10, 20, 30 gibi birkaç hali daha tetkik eder. 60 bütün bu sayılarla bölünebildiğinden, bu tecrübî delilleri kâfi sayar» dedi.

Fizikçi «Evet, ama bir de mühendislere bakın» dedi. «Bir mühendis bütün tek sayıların asal olduğundan şüphelenmiş. Her halûkârda 1 asal sayılabilir, diye muhakemeye başlamış. Sonra 3, 5 ve 7 gelir ki, bunların da hepsi şüphesiz asaldır demiş. Bunlardan sonra biçimsiz bir hal olan ve hiç te asal olacağa benzemeyen 9 gelir. Bununla beraber 11 ve 13 tabiatıyla asaldır. Şimdi 9 a dönerek, onun bir tecrübe hatâsı olması lâzımgeldiği neticesini çıkarırım, demiş».

Endüksiyonun bizi yanlış neticeye sevkedebileceği pek aşikârdır. Bununla beraber, endüksiyonun bazan doğru netice vermesi, çokluğu bu derece ezici görünen hatâ ihtimalleri karşısında şayanı dikkattir. İşe endüksiyonun yanlış netice verdiği aşikâr hallerin tetkiki ile mi, yoksa doğru netice verdiği şayanı dikkat hallerin tetkiki ile mi başlıyalım? Kıymetli taşların tetkikinin âdi çakıl taşlarınınkinden daha çekici olduğu kolayca teslim edilebilir. Bundan başka, mineralogları Kristallografi denilen harikûlade ilme sevkeden şey de çakıl taşlarından çok daha ziyade, kıymetli taşların tetkiki olmuştur.

II

GENELLEŞTİRME, ÖZELLEŞTİRME, BENZETME

Herşeyden çok, benim en güvenilebilir rehberlerim olan Benzerliklere düşkünüm. Onlar tabiatın bütün sırlarını bilirler ve Geometride en az ihmâl edilmelidirler.—KEPLER

1. Genelleştirme, Özelleştirme, Benzetme ve Endüksiyon. Bundan önce oldukça tafsilâtlı bir şekilde münakaşa etmiş olduğumuz endüktif muhakeme misâline tekrar bakalım. Orada

$$3+7=10, \quad 3+17=20, \quad 13+17=30$$

gibi üç münasebetin *benzerliğini* müşahede etmekle işe başlamış ve 3, 7, 13 ve 17 den bütün asal sayılara ve 10, 20, 30 dan bütün çift sayılara yükselme suretiyle *genelleştirmiş* ve sonra 6, 8 veya 60 gibi özel çift sayıları muayene etmek üzere tekrar aşağı inerek *özelleştirme* yapmıştık.

Bu ilk misâl son derece basit olmakla beraber endüktif muhakemede genelleştirme, özelleştirme ve benzetmenin rolünü gayet doğru bir şekilde göstermektedir. Buna rağmen, gene de daha zayıf ve daha renkli örnekleri de gözden geçirmeli ve bu işten evvel de genelleştirme, özelleştirme ve benzetme adlarını taşıyan büyük keşif kaynaklarını kendi başlarına münakaşa etmeliyiz.

2. Genelleştirme, verilen bir cümlenin elemanlarını nazarı itibara alıştan o cümleyi ihtiva eden daha büyük bir cümlenin elemanlarını ele almaya geçiştir. Meselâ, üçgenleri nazarı itibara

alıştan, kenar sayısı keyfî olan çokgenleri nazara itibara alışa geçerken bir genelleştirme yapmış oluruz. Aynı şekilde bir dar açının trigonometrik fonksiyonlarını tetkikten keyfî bir açının trigonometrik fonksiyonlarını tetkike geçerken de bir genelleştirme yapmış oluruz.

Bu son iki misâlde yapılan genelleştirmelerin iki farklı esasa göre yapıldığı okuyucu tarafından görülebilir. Birinci misâlde üçgenlerden n-kenarlı çokgenlere geçerken bir sabit yerine bir değişken getiriyoruz, yani sabit 3 tabiî sayısı yerine (sadece $n \geq 3$ tahdidine bağlı) keyfî bir n tabiî sayısı getiriyoruz. İkinci misâlde ise, dar açılardan keyfî α açılarına geçerken bir tahdidi, yani $0° < \alpha < 90°$ tahdidini, ortadan kaldırıyoruz.

Genelleştirmeyi ekseriya tek bir şeyden onu ihtiva eden bütün bir sınıfa geçmek suretiyle yaparız.

3. Özelleştirme, verilen bir cümlenin elemanlarını ele alıştan, o cümlenin içinde bulunan daha küçük bir cümlenin elemanlarını nazarı itibara almaya geçiştir. Meselâ çokgenleri nazarı itibara alıştan düzgün çokgenleri ele almaya geçersek bir özelleştirme yapmış oluruz, ve keyfî n kenarlı düzgün çokgenlerden de eşkenar üçgene geçersek özelleştirmeyi daha ileri götürmüş oluruz.

Birbirini tâkip eden bu iki geçiş farklı iki esasa göre yapılmıştır. Çokgenlerden düzgün çokgenlere geçişin teşkil ettiği birincisinde bir tahdit ithâl etmiş olduk, yani çokgenlerin bütün kenar ve açılarının eşit olması şartını koştuk. İkinci geçişte ise bir değişken yerine sabit bir şey, yani n tabiî sayısı yerine 3 koyduk.

Çok defalar özelleştirmeyi bütün bir sınıftan o sınıfın tek bir elemanına geçmek suretiyle yaparız. Meselâ asal sayılar hakkında herhangi bir iddiayı kontrol etmek istersek, meselâ 17 gibi

bir asal sayı alır ve genel iddianın bu 17 asal sayısı için doğru olup olmadığına bakarız.

4. Benzetme. Genelleştirme ve özelleştirme kavramlarında müphem veya şüpheli hiçbir şey yoktur. Halbuki *benzetme*nin münakaşasına başlayınca daha az sağlam bir zemine adım atmış oluyoruz.

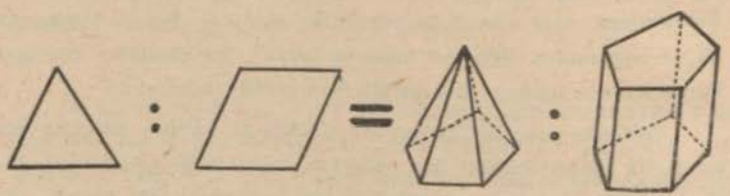
Matematikte kullanılan *benzetme* metodu âdi benzetmeden pek farklı değildir. Diyebiliriz ki, matematikteki benzetme, daha belirli olup, daha ziyade kavramlar seviyesindedir. Maksadımızı biraz daha doğru olarak şöyle de ifade edebiliriz: Matematikteki benzerlik ile diğer benzerlik arasındaki esas fark, kanaatıma göre, düşünen şahsın niyetlerindedir. Benzer şeyler birbirleriyle bir veçhede uyuşurlar. Eğer bunlarda ortak olan veçheyi belirli kavramlara irca etmek istiyorsanız, bunlara *benzer* şeyler gözüyle bakarsınız. Eğer bu hususta berrak kavramlara varmaya muvaffak olmuşsanız, benzerliği *izah* etmiş olursunuz.

Şairlerin genç bir kadını bir çiçekle mukayese ederken bir benzerlik hissettiklerini ümit ederim, fakat onlar genellikle bizim yukarda anlattığımız mânada bir benzerliği göz önüne getirmezler. Hakikaten, onlar hissî seviyeyi bırakarak, bu mukayeseyi ölçülebilir veya kavram olarak tarif edilebilir bir şekle sokmak niyetinde de pek değildirler.

Bir Tabiat Tarihi müzesinde türlü memeli hayvan iskeletlerine bakınca onların hepsini de korkunç bulabilirsiniz. Eğer onlar arasında bulabildiğiniz bütün benzerlik bundan ibaretse, yukarıki mânada pek fazla bir benzerlik görmüş sayılamazsınız. Halbuki bir insanın eli, bir kedinin pençesi, bir atın ön ayağı, bir balinanın yüzgeci ve bir yarasanın kanadını göz önüne alırsanız, bu kadar farklı şekilde kullanılan bu organlar arasında, birbirleriyle benzer münasebeti haiz benzer parçalardan mürekkep oluştan ibaret harikulâde ilham verici bir benzerliğin farkına varabilmeniz mümkündür.

Son misâl izah edilmiş benzerliğin en tipik bir örneğidir: Eğer iki sistemden *birinin parçaları arasında açıkça tarif edilmiş münasebetler, diğerinin onlara tekabül eden parçaları arasındakilerle intibak ediyorsa*, bu iki sistem *benzer* sistemlerdir.

Meselâ, düzlemdeki üçgen uzaydaki dörtyüzlünün benzeri (mütekabili) dir. Düzlemde iki doğru sonlu bir şekil sınırlayamaz, fakat üç doğru bir üçgen sınırlayabilir. Uzayda 3 düzlem sonlu bir şekil sınırlayamaz, fakat 4 tanesi bir dörtyüzlü çevreleyebilir. Gerek üçgenin, gerek dörtyüzlünün en az sayıda kenar elemanı tarafından sınırlanmaları bakımından, üçgenin düzleme nispeti dörtyüzlünün uzaya nispetinin aynıdır. İşte bu iki şekil arasındaki benzerlik buradan geliyor.



Şek. 2.1. Düzlem ve Uzayda Benzer Münasebetler

Benzerlik kelimesinin Eski Yunancadaki karşılığı olan «analogia» kelimesinin mânalarından birisi de «orantı» dır. Hakikaten, 6 ve 9 sayılarının teşkil ettiği sistem, karşılıklı sayıların oranlarının intibak etmesi bakımından 10 ve 15 sayılarının teşkil ettiği sisteme «benzer» dir:

$$6 : 9 = 10 : 15$$

Orantı, yahut karşılıklı kısımların oranlarının intibakı,

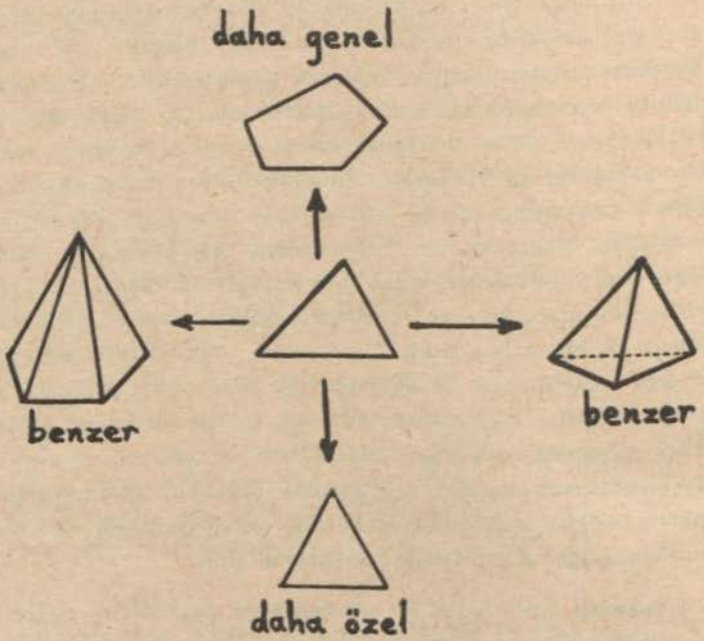
geometrideki benzer şekillerde müşahhas olarak görebileceğimiz gibi, bize çok iyi fikir veren bir benzerlik halidir.

Bir misâl daha: Bir üçgenle bir piramide de benzer şekiller gözü ile bakabiliriz. Bir tarafta bir doğru parçası, öte tarafta bir çokgen alalım. Doğru parçasının bütün noktalarını kendisinin dışında bulunan bir nokta ile birleştirirsek, bir üçgen elde ederiz. Çokgenin bütün noktalarını kendi düzlemi dışında bulunan bir nokta ile birleştirirsek, bir piramit elde ederiz. Aynı şekilde bir paralelkenarla bir prizmaya da benzer şekiller gözüyle bakabiliriz. Hakikaten bir doğru parçası veya bir çokgeni kendi doğru veya düzlemini kesen bir doğrultuda kendisine paralel kalmak üzere hareket ettirirsek, birincisi bir paralelkenar, ikincisi de bir prizma çizer. Düzlem ve uzay şekiller arasında bunlara tekabül eden münasebetleri bir nevi orantı şeklinde göstermek hevesine kapılabiliriz. Eğer bir an için bu hevese mukavemet edemezsek, Şek. 2.1. i elde ederiz. Bu şekil (: ve = gibi) bazı sembollerin alışılmış mânalarında değişiklik yapmaktadır, tıpkı «analogia» kelimesinin lengüistik tarihi boyunca «orantı» dan «benzerliğe» doğru mâna değiştirmesi gibi.

Yukarıki misâl başka bir bakımdan da öğreticidir. Benzerlik, bilhassa yeter derecede izah edilmemiş benzerlik, tek mânalı olmayabilir. Meselâ, düzlem ve uzay geometriyi mukayese ederken, evvelâ düzlemdeki üçgenin uzaydaki dörtyüzlüye, sonra da bir piramide benzer olduğunu bulmuştuk. Bu benzerliklerin her ikisi de makûl olup, her ikisinin de kendi yerinde değeri vardır. Düzlem ve uzay geometriler arasında bir tek imtiyazlı benzerlik mevcut olmayıp, birçok benzerlikler mevcuttur.

Şek. 2.2, bir üçgenden hareket ederek genelleştirme yoluyla nasıl bir çokgene yükselebileceğimizi, özelleştirme yoluyla nasıl bir eşkenar üçgene inebileceğimizi, yahut benzerlik yoluyla nasıl bir takım uzay şekillerine geçebileceğimizi ortaya dökmektedir.

Müphem benzerlikler de ihmal edilmemelidir. Bununla beraber, onları itibarlı hale getirmek için izah etmeye çalışmalıdır.



Şek. 2.2. Genelleştirme, Özelleştirme, Benzerlik

5. Genelleştirme, Özelleştirme ve Benzetme ekseriya matematik problemlerinin çözülüşüne yardım ederler[1]. Bir misâl olarak elemanter geometrinin en iyi bilinen teoremi olan Pitagor teoremini alalım. Bu teoremin aşağıda münakaşa edeceğimiz ispatı yeni olmayıp, bizzat Öklid tarafından verilmiştir (Öklid VI, 31).

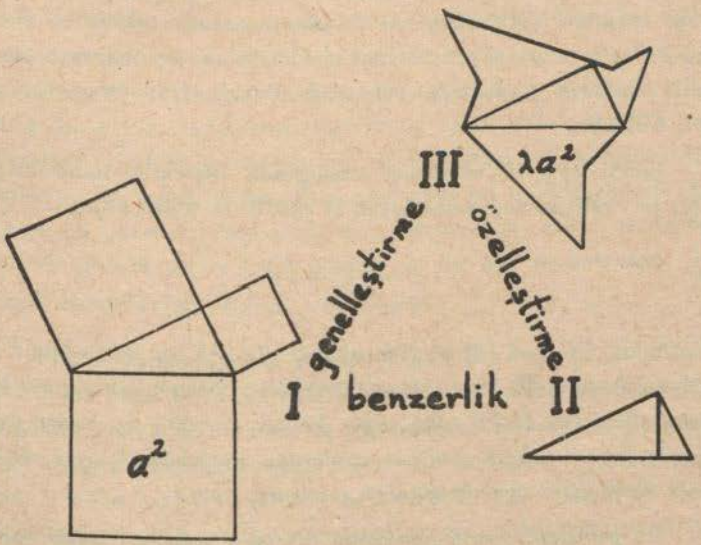
---

[1] Bu paragraf yazarın *American Mathematical Monthly*, Vol. 55 (1948), S. 241–243 te neşredilen bir notunun ufak bazı değişiklerle tekrarından ibarettir.

(1) İlki (a) hipotenüz olmak üzere, kenarları a, b, c ile verilen bir dik üçgeni nazarı itibara alalım. Burada

$$(A) \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bu hedef, dik üçgenimizin üç kenarı üzerine birer kare çizmeyi aklımıza getirir ve bu suretle Şek. 2.3 ün pek te yabancısı olmadığımız I. kısmını elde ederiz (Okuyucu bu şeklin muhtelif kısımlarını peyderpey ortaya çıktıkça çizmelidir ki, onu oluş halinde görebilsin).



Şek. 2.3

(2) En mütevazi bir keşifte bulunabilmek için bile bir şeye dikkat etmek, bir münasebetin farkına varmak lâzımdır. Aşağıdaki ispatı, şekilde evvelden tanıdığımız Kısım I ile ondan pek te az tanımadığımız Kısım II arasındaki benzerliği müşahede etmek suretiyle keşfedebiliriz. Bu benzerlik, I deki dik üçgenin aynısının II de kendi hipotenüzüne dik olan yüksekliği vâsıtayla iki parçaya ayrılmış olmasıdır.

(3) Okuyucu I ile II arasındaki benzerliği kavramakta belki güçlük çekiyordur. Bununla beraber, bu benzerlik I ve II nin III te ifade edilmiş olan bir ortak *genelleştirilmesi* ile açığa vurulabilir. III te de aynı dik üçgen bulunmakta ve bu üçgenin her üç kenarı üzerine sadece geometrik olarak birbirine benzer olma şartına bağlı, fakat başka bakımdan keyfî çokgenler çizilmiş bulunmaktadır.

(4) I de hipotenüz üzerine çizilmiş karenin alanı a^2 dir. III te hipotenüz üzerine çizilen gayrımuntazam çokgenin alanı λa^2 olup, burada λ çarpanı belirli iki alanın oranını gösterir. Buradan da a, b, c kenarları üzerine çizilmiş olan üç çokgenin alanları, bunların geometrik benzerliği dolayısıyla, sırasıyla λa^2, λb^2, λc^2 olur.

Şimdi, eğer (ispat etmek istediğimiz teoremin ifade ettiği gibi) (*A*) eşitliği doğru ise, aşağıki eşitlik te doğru olur:

$$(B) \qquad \lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2.$$

Hakikaten (*A*) dan (*B*) yi elde etmek için çok az cebir bilgisine ihtiyaç vardır. (*B*) ise başta verilmiş olan Pitagor teoreminin bir *genelleştirmesini* teşkil eder: *Eğer bir dik üçgenin kenarları üzerine üç benzer çokgen çizilirse, bunlardan hipotenüz üzerine çizileninin alanı diğer ikisinin alanları toplamına eşittir.*

Bu *genelleştirmenin* kendisine hareket noktası teşkil eden özel hale *denk* olduğuna dikkat etmek bilhassa öğreticidir. Hakikaten (*A*) ve (*B*) eşitliklerinin birinden diğerini elde etmek için bunları sırasıyle λ ile çarpmak veya bölmek kâfi gelir (λ iki alanın oranı olduğundan 0 dan farklıdır).

(5) (*B*) ile ifade edilen genel teorem sadece (*A*) özel haline değil, fakat herhangi bir diğer özel hale de denktir. Şu halde doğruluğu aşikâr olan bir özel hal bulunabilirse, genel hal de ispat edilmiş olur.

Şimdi, böyle faydalı bir özelleştirme yapabilmek üzere, uygun bir özel hal arayalım. Hakikaten Kısım II böyle bir özel hali göstermektedir. Çünkü iyice bilindiği ve kolayca görülebileceği üzere kendi hipotenüzü üzerine (içeriye doğru) çizilmiş olarak düşünülebilecek olan dik üçgen, kenarlar üzerine (içeriye doğru) çizilmiş dik üçgenlere geometrik olarak benzerdir. Büyük üçgenin alanı ise. onun parçaları olan diğer iki üçgenin alanları toplamına eşittir. Bu suretle Pitagor teoremi e ispat edilmiş olur.

Yukarıki muhakeme son derece öğreticidir. Eğer bir misâlden diğer hallere de tatbik edilebilecek bir şey öğrenirsek, o misâl öğreticidir, ve o misâlden öğrendiğimiz şeyin tatbik sahası ne kadar geniş olursa onun öğreticiliği de o kadar fazladır. İşte yukarıki misâlden genelleştirme, özelleştirme ve benzerliklerin farkına varma gibi temel zihin operasyonlarını öğrenebiliriz. Belki de, ne elemanter ne de yüksek matematikte, hattâ ne de başka bir branşta hiçbir keşif yoktur ki bu operasyonlardan, bilhassa benzerlikten müstağni kalabilsin.

Yukarıki misâl, I de gösterilen gibi bir özel halden, III te gösterilen daha genel bir hale genelleştirme vâsıtasıyla nasıl yükselebileceğimizi ve buradan da özelleştirme vasıtasıyla (I in benzeri olan) II deki hale tekrar nasıl inebileceğimizi göstermektedir. Bundan başka bu misâl, matematikte çok rastlanan fakat buna rağmen matematiğe yeni başlayanlar, hattâ kendilerini ilerlemiş sayan bazı filozoflar, için o derecede şaşırtıcı olan, *bâzan genel halin bir özel hale mantık bakımdan denk olabileceği* hakikatini de göstermektedir. Vermiş olduğumuz misâl, aranan çözüme varmak için sarfedilen gayrette genelleştirme, özelleştirme ve benzetmenin nasıl tabiî bir şekilde bir araya geldiklerini basit ve canlı olarak ortaya koymaktadır. Yukarıki muhakemeyi tamamen anlayabilmek için ancak pek az bir ön bilgiye ihtiyaç bulunduğuna dikkat ediniz.

6. Benzetme vasıtasıyla keşif. Benzetmenin bütün keşiflerde bir hisseye sahip bulunduğu görünüyor. Fakat bu hisse bazı keşiflerde aslan payını teşkil eder. Bu hususu pek elemanter olmayan, fakat tarihî önemi haiz ve tamamen elemanter bir misâlden çok daha tesirli bir misâlle aydınlatmak istiyoruz.

Newton ve Leibniz'in çağdaşı olan Jakob Bernoulli (1654 - 1705) adındaki İsviçreli matematikçi birçok sonsuz serilerin toplamını keşfetmiş, fakat kare sayıları terslerinin teşkil ettiği

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots$$

serisinin toplamını bulmaya muvaffak olamamıştı. Bu hususta Bernoulli şöyle yazmıştı: «Eğer bir kimse bizim bütün gayretlerimize mukavemet etmiş olan bu toplamı bulmaya muvaffak olur ve neticeyi bize bildirirse, kendisine çok minnettar kalacağız.»

Bu problem Leonhard Euler (1707 - 1783) adındaki diğer bir İsviçreli matematikçinin dikkatini çekti. L. Euler tıpkı Jakob Bernoulli gibi Basel'de doğmuştu ve Jakobun kardeşi olan Johann Bernoulli (1667 - 1748) nin talebesiydi. Aranan toplam için Euler evvelâ (belirli integraller, diğer sonsuz seriler gibi) muhtelif diğer ifadeler buldu, fakat bunların hiçbiri onu tatmin etmedi. Sonra bu ifadelerin birini, toplamın sayısal değerini yedi ondalık basamağa kadar hesabetmek için kullandı (1.644934). Fakat bu sadece yaklaşık bir değer olup, onun hedefi toplamın tam doğru değeri idi. Euler nihayet bu tam doğru değeri de keşfe muvaffak oldu. Burada benzerlik kendisini son derece cür'etkâr bir faraziyeye sevketmiştir. Şimdi Euler'in yaptığına bakalım.

(1) Evvelâ, Euler'in keşfinde kullanılan bazı elemanter cebir bilgilerini gözden geçirmekle işe başlıyalım. Eğer n. dereceden

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

denkleminin

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

gibi n tane farklı kökü varsa, bu denklemin sol tarafındaki polinom n tane farklı lineer çarpanın çarpımı şeklinde gösterilebilir:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n =$$

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Bu eşitliğin her iki tarafında x in aynı kuvvetlerini ihtiva eden terimleri birbirleriyle mukayese ederek bir denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki bilinen münasebetleri elde ederiz ki, bunların en basiti

$$a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n)$$

olup, x^{n-1} 'i ihtiva eden terimlerin mukayesesinden elde edilir.

Lineer çarpanlara ayrılışı başka bir şekilde de göstermek mümkündür. Eğer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ köklerinin hiçbiri 0 a eşit değilse, yahut (aynı şey demek olan) a_0, 0 dan farklı ise, şöyle de yazabiliriz:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$= a_0\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

ve

$$a_1 = -a_0\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Bu son yazış şeklinin bir değişik tarzı daha vardır. Denklemi $2n$. dereceden ve

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0$$

şeklinde, kökleri de birbirinden farklı farzedelim. Bu takdirde kökler, β ların hiçbiri 0 olmamak ve hepsi birbirinden farklı olmak üzere,

$$\beta_1, -\beta_1, \ \beta_2, -\beta_2, \ldots, \ \beta_n, -\beta_n$$

şeklinde olurlar. Bu takdirde

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n}$$

$$= b_0\left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

ve

$$b_1 = b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\beta_n^2}\right)$$

olur.

(2) Euler, $\sin x = 0$, veya

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \cdots = 0$$

denklemini nazarı itibara almaktadır. Bu denklemin sol tarafı sonsuz sayıda terim ihtiva etmektedir, yani bu denklemin «derecesi sonsuzdur». Şu halde, Euler'e göre, bu denklemin

$$0, \ \pi, \ -\pi, \ 2\pi, \ -2\pi, \ 3\pi, \ -3\pi, \ldots$$

gibi sonsuz sayıda kökü haiz olmasında şaşılacak bir şey yoktur. Euler 0 kökünü bir kenara bırakıyor ve denklemin sol tarafını bu köke tekabül eden x lineer çarpanı ile bölerek

$$1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6\,7}+\cdots=0$$

denklemini elde ediyor ki, bu sonuncu denklemin kökleri artık

$$\pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \ldots$$

den ibarettir. Daha evvel (1) de lineer çarpanlara ayrılışın son şeklini münakaşa ederken benzer bir durumla karşılaşmıştık. İşte Euler buradan hareket ederek, benzerlik yoluyla

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots7}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

olduğuna hükmediyor. Son seri ise, toplanması Jakob Bernoulli'nin bütün gayretlerine mukavemet etmiş olan seridir — fakat bu netice cür'etkâr bir yolla elde edilmiş oluyor.

(3) Euler tutmuş olduğu yolun ne kadar cür'etkâr olduğunun tamamen farkında idi. Hakikaten, o tarihten on sene sonra «bu metod yeni olup, böyle bir maksat için şimdiye kadar hiç kullanılmamıştı» diye yazmıştır. Euler, ispatında itiraz edilecek noktaların bir kısmını bizzat görmüş, birçok itirazlar da onun matematikçi dostları tarafından ilk sürpriz karşısındaki hayranlıkları geçer geçmez yapılmıştı.

Bununla birlikte Euler, keşfine itimat etmek için bazı se-

beplere malikti. Evvelâ serinin toplamı için daha önce hesaplamış olduğu sayısal değer $\pi^2/6$ ile son basamağına kadar intibak ediyordu. Bundan başka $\sin x$ için bulmuş olduğu çarpım ifadesindeki diğer terimlerin katsayılarını mukayese ederek, meselâ dördüncü kuvvet terslerinin toplamı olan

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

gibi diğer bâzı sayanı dikkat serilerin de toplamlarını bulmuş ve bu toplamların sayısal değerini hesaplayarak yukarda bulduğu değerlerle bu sayısal değerler arasında tam bir uygunluk bulunduğunu görmüştü.

(4) Bundan başka, Euler metodunu diğer misâller üzerinde de denemişti. Böyle yapmakla, Jakob Bernoulli serisinin toplamı olan $\pi^2/6$ yı ilk tutmuş olduğu yolun türlü değişik şekilleri vasıtasıyla da bulmaya, muvaffak oldu. Bundan başka Leibniz'e ait önemli bir serinin toplamını da kendi metodu ile yeniden bulmaya muvaffak oldu.

Şimdi bu son noktayı münakaşa edelim. Euler'in yaptığı gibi

$$1-\sin x=0$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin kökleri

$$\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2},\ -\frac{11\pi}{2},\ \cdots$$

dir. Bununla birlikte her kök bir ikikat köktür.

($y=\sin x$ eğrisi yukarda verilen absisleri haiz noktalarda $y=1$ doğrusunu kesmeyip, bu doğruya o noktalarda teğettir. Sol tarafın türevi aynı değerler için sıfır olur, fakat ikinci türev o değerler için sıfırdan farklıdır). Şu halde

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots=0$$

denkleminin kökleri

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2},\ \cdots$$

olup, Euler'in benzetme metodu bize aşağıki lineer çarpanlara ayrılışı verir:

$$1-\sin x=1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)^2\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)^2\left(1+\frac{2x}{7\pi}\right)^2\cdots$$

Her iki taraftaki x li terimin katsayılarını birbirine eşit kılarsak

$$-1=-\frac{4}{\pi}+\frac{3}{3\pi}-\frac{4}{5\pi}+\frac{4}{7\pi}-\cdots,$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

elde ederiz. Bu ise meşhur Leibniz serisidir. Euler'in cür'etkâr metodu bizi burada bilinen bir neticeye götürmüştür. Bu münasebetle Euler şunu söylemektedir: «Burada bazılarına yeteri kadar güvenilebilir görünmemesi mümkün olan metodumuza kuvvetli bir destek ortaya çıkmaktadır. Şu halde, aynı metodla elde edilen diğer şeylerden de hiç şüphelenmemeliyiz.»

(5) Bununla beraber, Euler şüphe etmekte devam etti. (3)'te anlatılan sayısal gerçeklemelere gittikçe daha fazla seriler tetkik etmek ve daha çok ondalık basamaklar hesabetmek suretiyle devam etti ve incelediği bütün hallerde daima uygunluk buldu. Bundan başka diğer metodlar da denedi ve sonunda Jakob Bernoulli serisinin $\pi^2/6$ toplamını haiz olduğunu sayısal olarak gerçeklemekle kalmayıp, bunu kat'î olarak ispata muvaffak oldu. Bu is-

pat derin ve ustalıklı olmakla beraber, daha ziyade alışılmış mülâhazalara dayanıyordu ve bu yüzden tamamen kesin bir ispat olarak kabûl edildi. Böylece, Euler'in keşfinin en göze çarpan neticesinin doğruluğu tatminkâr bir şekilde gerçeklenmiş oluyordu.

Bu mülâhazalar, neticesinin doğruluğu hakkında Euler'i de ikna etmiş görünüyorlar [2].

7. Benzetme ve Endüksiyon. Biz, keşfe götüren ve endüktif muhakemenin tabiatı hakkında bir şeyler öğrenmek istiyorduk. Yukarda anlattıklarımızdan buna dair ne öğrenebiliriz?

(1) Euler'in kat'î adımı cüı'etkârdı. Sırf mantık bakımından, bu adım doğrudan doğruya yanlıştır: Çünkü burada Euler bir kaideyi kendisi için yapılmamış olan bir hale, yani cebirsel denklemlere dair bir kaideyi cebirsel olmayan bir denkleme tatbik etmektedir. Şu halde sırf mantık bakımından, Euler'in atmış olduğu adım haklı görülemez. Bununla birlikte, bu adım benzerlik dolayısıyla haklı görülebilir. Bu benzerlik, kendisinin birkaç sene sonra «Sonsuzun Analizi» adını verdiği, yeni yükselen bir bilim dalının en başarılı buluşları iledir. Eulerden önceki matematikçiler sonlu farklardan sonsuz küçük farklara, sonlu sayıda terim ihtiva eden toplamlardan sonsuz sayıda terimli toplamlara, sonlu çarpımlardan sonsuz çarpımlara geçmişlerdi. Euler de sonlu için yapılan kaideleri sonsuza tatbik ederek, sonlu dereceli denklemlerden (cebirsel denklemler) sonsuz dereceli denklemlere geçmiştir.

---

[2] Çok sonra, ilk keşfi üzerinden hemen on sene geçtikten sonra, Euler aynı konuya dönmüş, itirazlara cevap vermiş, ispattan ziyade keşfe yarayan başlangıçtaki metodunu bir dereceye kadar tamamlamış, ve tamamen farklı yeni bir ispat vermiştir. L. Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, S. 73–86, 138–155 ve bu problemin tarihi hakkında Paul Stäckel'in bir notunu ihtiva eden S. 156–176 ya bakınız.

Bu benzetme, sonludan sonsuza bu geçiş, birçok tuzaklarla çevrilidir. Euler acaba bunlardan nasıl sakınabildi ? Bazıları «çünkü o bir dâhi idi» diyeceklerdir, fakat bu ifade tabiatıyla hiçbir şeyi izah etmez. Keşfine güvenmek için Euler'in elinde çok akıllıca sebepler vardı ki, bu sebep'leri dehaya has hiçbir hârika nüfuzu nazara ihtiyaç kalmadan biraz sağduyu ile anlıyabiliriz.

(2) Euler'in, keşfine güvenmesindeki sebepler yukarda [3] özetlenmiş olup, bunlar (mantık bakımından) *ispatlayıcı* değildir. Euler yapmış olduğu faraziyenin [4], sonludan sonsuza cür'et-kâr geçişinin, sebeplerini yeniden gözden geçirmemekte, sadece bunun neticelerini gözden geçirmektedir. Euler böyle herbir neticenin gerçekleşmesine kendi faraziyesinin lehinde bir delil gözüyle bakmaktadır. Euler hem yaklaşık, hem de kat'î gerçekleşmeleri kabûl etmektedir, fakat sonunculara daha fazla ağırlık verdiği görülüyor. Bundan başka ilk faraziyesi ile yakından alâkalı başka faraziyeleri [5] de tetkik etmekte ve böyle bir neticenin gerçekleşmesini kendi faraziyesinin doğruluğu için bir delil saymaktadır.

Euler'in sebepleri, aslında, endüktiftir. Bir faraziyenin neticelerini tetkik etmek ve onun hakkında bu tetkike göre hüküm vermek tipik bir endüktif usûldür. Âdi hayatta olduğu gibi, ilmî araştırmada da bir faraziyenin müşahede edilen neticeleri hakikatlere çok veya az uyduğuna göre, o faraziyeye çok veya az inanırız, daha doğrusu inanmalıyız.

Kısaca Euler, ilim adamı olsun veya olmasın. makûl insanların düşündüğü gibi düşünmektedir. Euler şöyle ifade edebileceğimiz bazı prensipleri kabûl ediyor görünmektedir:

---

[3] Paragraf 6 (3), (4), (5) e bakınız. Euler'in kendi özeti için *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, S. 140 'a bakınız.

[4] $\sin x$ 'in bir sonsuz çarpım olarak gösterilişi.

[5] Bilhassa $1 - \sin x$ 'e dair sonsuz çarpım.

1) *Bir faraziye herhangi bir yeni neticesinin gerçekleşmesi ile daha inanılabilir hale gelir.* 2) *Bir faraziyeye benzer başka bir faraziye daha inanılabilir hale gelirse, ilk faraziye de daha inanılabilir hale gelir.*

Endüksiyon metodunun dayandığı prensipler bu neviden midir?

II. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

BİRİNCİ KISIM

1. *Doğru genelleştirme*

A. Aşağıki denklem sistemini gerçekliyen üç, x, y, z sayısı bulunuz:

$$9x - 6y - 10z = 1,$$

$$-6x + 4y + 7z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

A yı çözmemiz icabettiği zaman, aşağıki üç B, C, D genelleştirmesinden hangisi bize daha faydalı bir fikir verir?

B. Üç denklem ihtiva eden bir sistemdeki üç bilinmiyenin değerlerini bulunuz.

C. İlk ikisi birinci, üçüncüsü ikinci dereceden olan üç denklemli bir sistemdeki üç bilinmiyenin değerlerini bulunuz.

D. İlk $n-1$ tanesi birinci dereceden olan ve n denklem ihtiva eden bir sistemdeki n bilinmiyenin değerlerini bulunuz.

2. Altıgen tabanlı bir «düzgün» piramitle bir nokta veril-

miştir. (Eğer bir piramidin tabanı düzgün bir çokgen ve bu düzgün çokgenin merkezi de piramidin yüksekliğinin dikme ayağı ise, o piramide düzgündür denir.) Verilen noktadan geçen ve verilen piramidi hacimca iki eşit parçaya bölen bir düzlem bulunuz.

Size yardım için şöyle bir soru soralım: Bu problemin doğru genelleştirmesi nedir?

3. A. Aynı düzlemde bulunmayan üç doğru aynı bir O noktasından geçmektedir. O dan öyle bir düzlem geçiriniz ki, bu üç doğru ile eşit açılar teşkil etsin.

B. Aynı düzlemde bulunmayan üç doğru aynı bir noktadan geçmektedir. P noktası bu doğrulardan birinin üzerindedir. P den öyle bir düzlem geçiriniz ki, bu üç doğru ile eşit açılar teşkil etsin.

A ve B problemlerini birbiri ile mukayese ediniz. Birinin çözümünü diğerinde kullanabilir misiniz? Bunlar arasındaki mantık bağı nedir?

4. A.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^{-3}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

B. p verilmiş bir pozitif sayı olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (p+x^2)^{-3}\,dx$$

integralini hesaplayınız. A ve B problemlerini mukayese ediniz. Birinin çözümünü ötekinde kullanabilir misiniz? Bunlar arasındaki mantık bağı nedir?

5. *Aşırı bir özel bir hal.* Dikdörtgen şeklindeki bir masaya iki kişi oturmuş olsun. Bunlardan biri masa üzerine (meselâ 25 kuruşluk) bir madenî para koyuyor. Sonra diğeri de masaya bir 25 kuruşluk koyuyor. Sonra gene birincisi, sonra gene ikincisi, ilâh... bu işi tekrar ediyorlar. Böylece konan 25 kuruşlukların her birininin masa üzerine yatırılmış olması ve bunlardan herhangi ikisinin üst üste binmemesi şarttır. Masanın üstünde hiç boş yer kalmayacak şekilde son parayı yerleştiren oyuncu masa üzerindeki bütün paraları kazanıyor. Her iki oyuncunun da mümkün olan en iyi şekilde oynadığını kabûl ettiğimiz takdirde, oyunu acaba hangisi kazanacaktır?

Bu eski, fakat mükemmel bir fikir sorusudur. Vaktiyle, hakikaten mümtaz bir matematikçiyi bir problem kendisine sorulduğu zaman gözlemek fırsatını bulmuştuk. Kendisi şöyle söyleyerek işe başlamıştı: «Masayı o kadar küçük farzedelim ki, üzeri ancak bir tane 25 kuruşluk alabilsin. Bu takdirde oyunu aşikâr olarak ilk oyuncu kazanacaktır.» Yani bahis konusu ettiğimiz matematikçi, çözümü aşikâr olan aşırı bir özel hali seçmek suretiyle işe başlamıştı.

Şimdi masanın, gittikçe daha çok 25 kuruşluklara yer vermek üzere tedricen genişlediğini tasavvur ederseniz, yukarıki özel halden genel haldeki çözüme varabilirsiniz. Problemi *genelleştirerek* çeşitli biçim ve büyüklükteki masaları ele almak daha da iyi netice verebilir. Verilen masanın bir simetri merkezini haiz olduğuna ve böyle bir masaya dair problemin *doğru genelleştirmesinin* bir simetri merkezini haiz bütün masaları ele almak olduğuna dikkat ederseniz, problemin çözümünü elde etmiş veya hiç olmazsa onu elde etmeye çok yaklaşmışsınız demektir.

6. Verilen iki dairenin bir ortak teğetini çiziniz.

Size yardım etmek üzere bir soru soralım: Burada çözümü daha kolay bulunabilecek bir aşırı özel hal mevcut mudur?

7. *Bir baş özel hal.* Bir çokgenin alanı A, ve düzleminin diğer bir düzlemle teşkil ettiği açının değeri de α olsun. Çokgenimizin ikinci düzlem üzerindeki dik izdüşümünün alanını bulunuz.

Burada şeklin biçiminin verilmemiş olduğuna dikkat ediniz. Halbuki şekil için sonsuz sayıda farklı biçim mümkündür. Hangi biçimi münakaşa etmeliyiz? Hangi biçimi en önce münakaşa etmeliyiz?

Bilhassa kolay ele alınabilecek bir özel biçim mevcuttur: Tabanı, izdüşümü alınan şeklin düzlemi ile üzerine izdüşürülen düzlemin l arakesitine paralel olan bir dikdörtgen. Böyle bir dikdörtgenin tabanı a, yüksekliği b ise alanı ab olur. İzdüşümde bunlara tekabül eden büyüklükler ise sırasıyla a, $b\cos\alpha$ ve $ab\cos\alpha$ dır. Şu halde böyle bir dikdörtgenin alanına A dersek, onun izdüşümünün alanı $A\cos\alpha$ olur.

Görmüş olduğumuz bu özel hal, yalnız bilhassa kolay ele alınabilecek bir özel hal olmakla kalmaz, bu aynı zamanda bir *baş özel hal*dir. Yani diğer bütün haller bundan elde edilebilir; *problemin baş özel haldeki çözümü, genel haldeki çözümün esasını ihtiva eder.* Hakikaten tabanı l ye paralel olan dikdörtgenden hareket ederek, «izdüşümün alanı $A\cos\alpha$ 'ya eşittir» kaidesini sırasıyla bütün diğer şekillere teşmil edebiliriz: Evvelâ (başlangıçtaki dikdörtgeni ikiye bölerek) bir dikkenarı l ye paralel olan bir dik üçgene, sonra (böyle iki dik üçgeni terkip ederek) bir kenarı l ye paralel olan bir üçgene, ve nihayet (biraz önce bahsettiğimiz tipten üçgenlere bölmek suretiyle) bir genel çokgene. Hattâ (çokgenlerin limiti olarak düşünmek suretiyle) kenarları eğri olan şekillere bile geçebiliriz.

8. Bir dairede herhangi bir merkez açısı, aynı kirişin, yani aynı yayın karşısındaki bir çevre açısının iki katıdır (Öklid III, 20).

Merkez açısı verilince çevre açısı henüz tamamen belirli olmayıp, birçok durumlar alabilir. Teoremin alışılagelmiş olan ispatında (Öklidin ispatı) kullanılan «baş özel hal» hangisidir?

9. Analitik Fonksiyonlar Teorisinin temelini teşkil eden Cauchy Teoremi, bir analitik fonksiyonun iç bölgesinde regüler bulunduğu keyfî bir kapalı eğri üzerinde alınan integralinin sıfıra eşit olduğunu ifade eder. Cauchy Teoreminin, kapalı eğrinin bir üçgenden ibaret olduğu özel halini bir baş özel hal olarak telâkki edebiliriz: Hakikaten, teoremi bir üçgen için ispat ettikten sonra, sırasıyla (üçgenleri terkip ederek) çokgenlere ve (çokgenlerin limitleri olarak düşünmek suretiyle) eğrilere teşmil edebiliriz. Misâl 7 ve 8 ile benzerliğe dikkat ediniz.

10. *Bir temsilî özel hal.* Meselâ n-kenarlı çokgenlere dair bir problemle karşı karşıyasınız. Evvelâ bir beşgen çizerek, problemi bu beşgen için çözüyorsunuz ve çözümünüzü inceleyince aynı çözümün genel halde de, yani herhangi bir n için de, tıpkı $n=5$ için olduğu gibi, işleyeceğini görüyorsunuz. Buradaki $n=5$ özel haline *temsilci özel hal* diyebilirsiniz: Bu özel hal size genel hali temsil ediyor. Tabiatıyle $n=5$ halinin hakikaten temsilci olabilmesi için, sizi yanlış yola sevkedebilecek hiçbir özel basitleşmeyi ihtiva etmemesi lâzımdır. Temsilci özel hal genel halden daha basit *olmamalıdır*.

Temsilci özel hâller öğretimde ekseriya kullanışlı olurlar. Meselâ n satır ve n sütunlu determinantlara dair bir teoremi 3 satır ve 3 sütunlu bir determinantı dikkatle incelemek suretiyle ispat etmeniz mümkün olabilir.

11. *Bir benzer hal.* Şöyle bir problem verilmiş olsun: Öyle bir uçak imâl etmeli ki, bir kaza vukuunda o uçakta bulunan bir kimsenin kafatasının kırılma tehlikesi asgarî olsun. Bu problemi inceleyen bir tıp doktoru, bir takım yumurtaları çeşitli

şartlar altında kırmak suretiyle tecrübeler yapmaktadır. Bu zatın yaptığı nedir? O, başlangıçta verilen problemde *değişiklik* yaparak, şimdi kafatasları yerine yumurtaları kırmak suretiyle bir *yardımcı problem* ile uğraşmaktadır. İki problem, yani başlangıçtaki ile yardımcı problem arasındaki bağ, *benzerlik*ten ibarettir. Mekanik bakımından bir insan başı ile bir tavuğun yumurtası aşağı yukarı birbirine benzer: Her ikisi de katı ve kırılabilir bir kabuk ile onun içindeki jelâtinî bir maddeden ibarettir.

12. Eğer uzaydaki iki doğru parçası birbirine paralel üç düzlemle kesilirse, meydana gelen karşılıklı doğru parçaları aralarında orantılıdır.

Bunun ispatını bulmanıza yardım etmek için, size bir soru soralım: Buna benzer daha basit bir teorem var mıdır?

13. Bir paralelyüzün dört köşegeni, herbirinin orta noktası olan, bir ortak noktayı haizdir.

Bunun daha basit olan bir benzer teoremi var mıdır?

14. Bir üçyüzlü açının iki yüz açısının toplamı üçüncü yüz açısından büyüktür. Buna benzer daha basit bir teorem var mıdır?

15. Bir dörtyüzlüyü üçgenin uzaydaki benzeri olarak düşünelim. Aşağıda vereceğimiz düzlem geometri kavramlarının uzay geometrideki benzerlerinin bir listesini yapınız: *Paralelkenar, dik dörtgen, kare, bir açının açı ortayı.* Düzlem geometrinin aşağıki teoremine benzer olan bir uzay geometri teoremi ifade ediniz: *Bir üçgenin üç açı ortayı, üçgenin içine çizilmiş dairenin merkezi olan, bir noktada kesişirler.*

16. Bir piramidi bir üçgenin benzeri olan bir cisim olarak düşünelim. Aşağıki düzlem şekillerin benzerleri olan cisimlerin bir listesini yapınız: *Paralelkenar, dikdörtgen, daire.* Düzlem

geometrinin aşağıki teoremine benzer olan bir uzay geometri teoremi ifade ediniz: *Bir dairenin alanı, tabanı dairenin çevresi ile, yüksekliği de dairenin yarıçapı ile aynı uzunlukta olan bir üçgenin alanına eşittir.*

17. Düzlem geometrinin aşağıki teoremine benzer olan bir uzay geometri teoremi icadediniz: *Bir ikizkenar üçgenin yüksekliği, o üçgenin tabanının orta noktasından geçer.*

Sizce hangi uzay şekli bir ikizkenar üçgenin benzeridir?

18. *Büyük benzerlikler.* (1) Yukarıki 12—17 misâllerinde *düzlem geometri* ile *uzay geometri* arasındaki benzerlik üzerinde durulmuştu. Bu benzerlik birçok veçheleri haizdir ve bundan dolayı ekseriya tek olarak belirli ve her zaman apaçık değildir, fakat yeni fikirler vermek ve yeni keşiflere götürmek hususunda tükenmez bir kaynaktır.

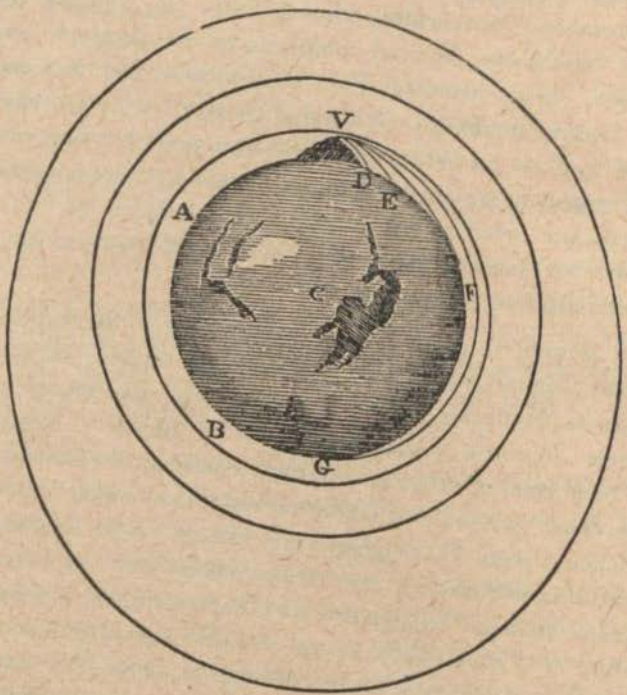
(2) Sayılar ve şekiller matematiğin yegâne malzemesi değildir. Matematik esas itibariyle mantıktan ayrılamaz ve kesin (exact) bir teoriye konu teşkil edebilecek her malzeme ile uğraşır. Bununla birlikte sayılar ve şekiller matematiğin en çok alışılmış malzemesidir ve matematikçiler sayıların özeliklerine dair vâkıaları şekillerin özellikleri ile ve şekillere dair vâkıaları da sayıların özellikleri ile aydınlatmaktan hoşlanırlar. Buna göre *sayılar* ve *şekiller* arasındaki benzerliğin sayılamıyacak kadar çok veçhesi vardır. Bu veçhelerin bazıları çok açıktır. Meselâ analitik geometride, cebirsel ve geometrik varlık ve münasebetler arasındaki iyi tarif edilmiş tekabüller incelenmektedir. Bununla beraber, gerek geometrik şekillerin, gerekse sayılarla yapılması mümkün olan operasyonların çeşitleri bitmek tükenmek bilmez sayıda bulunduğundan, bunlar arasındaki tekabüller de o kadar çoktur.

(3) Limitlerin ve limit operasyonlarının incelenmesi, *sonlu* ile *sonsuz* arasındaki benzerlik diyebileceğimiz, diğer bir benzer-

lik cinsi ortaya çıkarır. Meselâ, sonsuz seriler ve integraller, limitlerini teşkil ettikleri sonlu toplamların çeşitli tarzlarda benzerleridir; Diferansiyel Hesap, Sonlu Farklar Hesabının benzeridir; diferansiyel denklemler, bilhassa lineer ve homogen diferansiyel denklemler, cebirsel denklemlerin bir dereceye kadar benzeridir, ve s. Nispeten yeni olan önemli bir matematik branşı İntegral Denklemler Teorisidir. Bu teori şu soruya hayret edilecek ve güzel bir cevap verir: n bilinmiyenli n linear denklemin İntegral Hesaptaki benzeri nedir? Sonlu ile sonsuz arasındaki benzerlik kendine bâs zorlukları ve tehlikeleri ile bilhassa çekicidir. Bu benzerlik insanı keşfe olduğu gibi, hatâya da götürebilir. Misâl 46 ya bakınız.

(4) Mermilerin parabolik yolunu ve onların hareketlerinin kantitatif (kemmî) kanununu keşfetmiş olan Galileo, Astronomi alanında da büyük bir kâşifti. O tarihte yeni icadedilmiş olan teleskopla Jüpiterin peyklerini keşfetti ve Jüpiterin etrafında dönen bu peyklerin, dünyanın etrafında dönen ay ile güneşin etrafında dönen gezegenlerin benzerleri olduğuna dikkat etti. Galileo bundan başka Venüs gezegeninin safhalarını da keşfederek bunların ayın safhaları ile benzerliğine dikkat etti. Bu keşifler, o zamanlar şiddetle tartışılmakta olan Copernicus'ün, gezegenler sisteminin merkezine güneşi koyan, teorisini kuvvetle teyit ettiler. Galileo'nun gök cisimleri ile mermilerin hareketleri arasındaki, sezgi ile kolayca görülebilecek olan, benzerliğin farkına varamamış olması gariptir. Bir mermi yolunun çukur (konkav) kısmı dünyaya doğru dönük olduğu gibi, ayın yolu da aynı özeliği haizdir. Newton bu benzerlik üzerinde bilhassa durdu: «... atılan bir taş kendi ağırlığının tesiri ile, sadece atılışı neticesinde tâkip edeceği doğrusal yoldan ayrılmaya ve ... nih yet yere düşünceye kadar bir eğri çizmeye zorlanır; taşın atılış sür'ati ne kadar büyük olursa, yere düşünceye kadar o derece uzağa gider. Şu halde bu hızı öyle arttırdığımızı farzedebiliriz ki, taş yere düşmeden evvel 1, 2, 5, 10, 100, 1000 millik birer

eğri yayı çizsin. Nihayet bu hızı o kadar arttıralım ki, taş dünyanın sınırlarını aşarak ona dokunmadan uzaya geçsin.» (6) Şek. 2.4 'e bakınız.



Şek. 2.4. Bir taşın yolundan ayın yoluna geçiş. Newton'un *Principia*'sından.

Burada taşın yolu sürekli olarak değişmek suretiyle ayın yoluna dönüyor. Ve taş ile ayın dünyaya göre durumu ne ise, peyklerinin Jüpitere, yahut Venüs ile diğer gezegenlerin de güneşe göre durumları odur. Bu benzerliği göz önüne getirmeden,

(6) Sir Issac Newton's *Mashematical Principles of Natural Philosophy* and his System of the World. Translated by Motte, revised by Cajori, Berkeley, 1946 ; S. 551 'e bakınız.

kendisine hâlâ gelmiş geçmiş en büyük ilmî keşif gözüyle bakabileceğimiz, genel cazibe kanununun Newton tarafından keşfedilişini ancak pek noksan bir şekilde anlıyabiliriz.

19. *Açıklanmış (izah edilmiş) benzerlikler.* Benzeyiş ekseriya müphemdir. Neyin neye benzer olduğu sorusunun cevabı da ekseriya tek değildir. Bir benzerliğin müphem oluşunun, onun enteresanlığını veya faydasını azaltması icabetmez; bununla birlikte, benzerlik kavramının mantık ve matematik kavramlarındaki berraklığa eriştiği haller özel bir dikkate lâyıktır.

(1) Bizim benzerlikten kastettiğimiz şey, münasebetlerde benzerliktir. Böyle bir benzerlik, *bu münasebetlerin aynı kanunlara tâbi olması* halinde berrak bir mânayı haizdir. Bu anlamda, toplama ve çarpma aynı kanunlara tâbi olduğu nispette, sayıların toplanması, sayıların çarpılmasına benzer. Hem toplama, hem de çarpma hem komütatif, hem de assosiyatiftir, yani

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba,$$

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (ab)\,c=a\,(bc).$$

Her iki operasyon da birer ters operasyonu haizdir;

$$a+x=b, \qquad ax=b$$

denklemleri, herbirinin bir ve ancak bir çözümü haiz olması dolayısıyla, birbirine benzer. (Bu son kaideyi hiç istisnasız doğru olacak şekilde ifade edebilmek için, toplama halinde negatif sayıları da kabul etmeli, çarpma halinde ise $a=0$ halini ihraç etmelidir.) Bu münasebetle çıkarma da bölmeye benzer; hakikaten, yukarıki denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$x=b-a, \qquad x=\frac{b}{a}$$

dır. Bundan başka 0 sayısı 1 e benzer; hakikaten bir sayıya 0

ilâvesi, tıpkı bir sayının 1 ile çarpılması gibi, o sayıyı değiştirmez:

$$a+0=a, \qquad a\cdot 1=a.$$

Bu kanunlar çeşitli sayı sınıfları için aynıdır; burada rasyonel, reel, veya kompleks sayıları nazarı itibara alabiliriz. Umumî olarak, *aynı temel kanunlara (aksiyomlara) tâbi olan matematik varlık sistemleri* birbirinin benzeri olarak düşünülebilir ve bu tarz benzerlik tam mânasıyla açık bir mânayı haizdir.

(2) *Reel* sayılardaki toplama operasyonu *pozitif* sayılarla yapılan çarpma operasyonuna daha başka bir anlamda da benzerdir. Her r reel sayısı uygun bir p pozitif sayısının logaritmesidir:

$$r=\log p.$$

(Âdi logaritmeleri kullanırsak, $p=0{,}01$ olduğu takdirde $r=-2$ dir.) Bu münasebet yardımıyla her pozitif sayıya tamamen belirli bir reel sayı tekabül ettiği gibi, her reel sayıya da tamamen belirli bir pozitif sayı tekabül eder. Bu tekabülde, reel sayıların toplanmasına da pozitif sayıların çarpılması tekabül eder. Eğer

$$r=\log p, \qquad r'=\log p', \qquad r''=\log p''$$

ise, aşağıki münasebetlerin herbiri diğerini icabettirir:

$$r+r'=r'', \qquad pp'=p''.$$

Soldaki formülle sağdakisi aynı hikâyeyi iki ayrı dilde söylemektedir. Aralarında yukarıki tarzda bağlantı kurmuş olduğumuz iki sayıdan birine, diğerinin tercümesi diyelim; meselâ p nin logaritmesi olan r reel sayısına p nin *tercümesi*, ve p ye de r nin *aslı* diyelim. (Burada «asıl» ve «tercüme» kelimelerini aralarında değiştirebilirdik, fakat iki şıktan birini seçmek mecburiyetinde bulunuyorduk. Artık seçimimizi bir kere yaptıktan sonra hep ona bağlı kalacağız.) Bu terimlerle, toplama, çarpma-

nın tercümesi, çıkarma, bölmenin tercümesi, 0 da 1 in tercümesi olur. Reel sayılarla toplamaya dair komütatif ve assosiyatif kaideler de, pozitif sayılardaki çarpmaya dair aynı kaidelerin tercümeleri olurlar. Bu türlü tercüme tabiatıyle aslından farklıdır, fakat aşağıki mânada doğru bir tercümedir: Asl'daki elemanlar arasında câri herhangi bir münasebetten, tercümede onlara tekabül eden elemanlar arasında asıldaki münasebete tekabül eden münasebetin tercümesinin câri olduğuna kesin bir emniyetle hükmedebiliriz ve aynı şekilde, *bunun karşıtı da doğrudur*. Böyle bir doğru tercümeye, yani *belirli bir takım münasebetleri muhafaza eden bir bire-bir tekabüle* matematikçilerin teknik dilinde bir *izomorfi* denir. İzomorfi, tamamen açıklanmış bir benzerlik çeşididir.

(3) Tamamen açıklanmış üçüncü bir benzerlik çeşidi de matematikçilerin kendi teknik dillerinde *homomorfi* (yahut *meroedrik izomorfi*) dedikleri şeydir. Buna dair bir misâli yeteri derecede münakaşa etmek veya bunu kesin bir şekilde anlatmak çok fazla zaman alacağı için, aşağıki yaklaşık izahı anlamaya çalışalım. Homomorfi, bir nevi *sistematik olarak kısaltılmış tercüme*dir. Bu tercümede asıl yalnız başka bir dile tercüme edilmekle kalmıyor, fakat aynı zamanda kısaltılıyor, öyle bir tercüme ve kısaltma neticesinde asıl her tarafında ve sistemli olarak yarıya yahut üçte bire ve başka bir kesre teksif edilmiş oluyor. Böyle bir kısaltmada bazı incelikler kaybolabilir, fakat asıldaki her şey tercümede bir şeyle temsil edilmekte olup, münasebetler de, küçültülmüş olarak, muhafaza edilmektedir.

20. *İktibaslar.*

«İyi bir tesadüfün yardımı ile aslî problemi ihtiva eden ve çözümü ondan daha kolay diğer bir genel problemi aklımıza getirip getiremiyeceğimize bakalım. Meselâ bir eğrinin bir noktadaki teğetini ararken, verilen eğriyi verilen nokta ile o noktadan verilen uzaklıkta başka bir noktada kesen bir doğruyu aramak aklımıza gelebilir. Cebir yardımıyle her zaman kolayca çözüle-

bilecek olan bu ikinci problemi çözdükten sonra, teğet halinin çözümünü onun bir özel hali, yani verilen uzaklığın en küçük, bir noktaya müncer oluşu, sıfır oluşu hali olarak buluruz (LEIBNIZ).

«Genel problemin, doğrudan doğruya hücum edilecek özel problemden daha kolay oluşu ekseriya vakidir. (P. G. LEJEUNE - DIRICHLET, R. DEDEKIND).

«Cinsi bir takım nevilerine, hattâ birkaç nev'ine irca etmek faydalı olabilir. Fakat en faydalısı, cinsi tek bir minimal nev'e irca etmektir» (LEIBNIZ).

«Birbirinden çok uzak şeylerde bile benzerlikleri nazarı itibara almak, felsefede yerindedir». (ARISTOTELES).

«Mukayeseler, bilinmeyen münasebetleri bilinen münasebetlere irca etmek bakımından büyük değeri haizdir.

Bir şeyi hakkıyle anlamak, nihayet bir münasebetlerin kavranışından (un saisir de rapports) ibarettir. Fakat bir münasebetin çok değişik hallerde ve tamamen farklı şeyler arasında aynı şekilde cari olduğunun farkına varmak suretiyle, onu daha seçik ve daha saf olarak anlarız.» (ARTHUR SCHOPENHAUER).

Bununla birlikte iki çeşit genelleştirme mevcut olduğunu unutmamalısınız. Bunların biri ucuz, diğeri değerlidir. *Sulandırmak* yoluyla genelleştirmek kolaydır; önemli olan, *teksif etmek* suretiyle genelleştirmektir. Bir parça şarabı bol su ile sulandırmak ucuz ve kolaydır. Bir takım iyi malzemeden ince ve teksif edilmiş bir hulâsa çıkarmak çok daha zor, fakat kıymetlidir. Teksif yoluyla genelleştirme önceleri dağınık görünen birçok fikirleri geniş tesir alanlı tek bir kavram haline sıkıştırır. Meselâ Gruplar Teorisi, evvelce Cebir, Sayılar Teorisi, Analiz, Geometri, Kristallografi ve diğer alanlara dağılmış fikirleri ortak bir ifade tarzına irca etmektedir. Diğer genelleştirme çeşidi şimdi eski zamana nazaran daha çok modadır. Bu tarz genelleştirme, küçük bir fikri büyük bir terimler takımı ile sulandırmaktadır. Böyle bir genelleştirmeyi yapan kimse ekseriya o küçük fikri bile başka birin-

den almakta, ona herhangi bir orijinal müşahede ilâve etmekten çekinmekte ve kendi ortaya attığı terimlerden doğan birkaç problemden başka herhangi bir problem çözmekten sakınmaktadır. Buna dair misâller zikretmek çok kolay olmakla beraber, kendime düşman kazanmak istemiyorum [7].

İKİNCİ KISIM

Bu ikinci kısımda verilen misâller ve tamamlayıcı bilgiler hep II. Bölümün 6. paragrafı ve birbirleri ile alâkalıdır. Bunların bir çoğu doğrudan doğruya veya bilvâsıta misâl 21 'e başvurmayı icabettirmektedir. Bu yüzden bu misâlin ilk önce okunması lâzımdır.

21. *E faraziyesi.*

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

eşitliğine bir faraziye gözüyle bakarak kendisine «*E* faraziyesi» diyeceğiz. Eulerle birlikte bu faraziyeyi endüksiyon yoluyla inceleyeceğiz.

Bir faraziyenin endüktif incelenmesi, onun neticelerinin vâkıalarla karşılaştırılmasını içine alır. Aşağıda ekseriya «*E* ye bakarak bir takım neticeleri önceden söyleyecek ve sonra bu neticeleri gerçekliyeceğiz». «*E* ye bakarak bir neticeyi evvelden söylemek» ten kastınız, *E* yi doğru kabûl ederek o neticeyi çıkarmak, «gerçeklemek» ten kastımız da, aynı neticeyi bu kabûlü kullanmadan elde etmektir. Eğer bir vâkıa, *E* nin doğru olduğu faraziyesinden (kolayca) çıkarılabilirse, ona «*E* ile uygunluk halindedir» denir.

[7] G. Polya and G. Szegö. *Aufgaben und Lehrsaetze aus der Analysis*, vol 1, S. VII ye bakınız.

Aşağıda (bu keşfin zamanında formel tarafı Euler tarafında tamamen bilinen) Diferansiyel ve İntegral Hesap başlangıcını (kendisi hakkında Euler'in hiçbir zaman tam bir berraklığa kavuşmamış olduğu) limit kavramı da dahil olmak üzere biliniyor kabûl edeceğiz. Aşağıda sadece, uygulanmalarının caiz olduğu (birçok hallerde kolayca) ispat edilebilen, fakat bu hususta teferruatlı ispatlara girişmiyeceğimiz limit operasyonlarını kullanacağız.

22. $\sin(-x) = -\sin x$ olduğunu biliyoruz. Bu vâkıa E ile uygunluk hâlinde midir?

23.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdots$$

sonsuz çarpımının değerini E ye bakarak önceden söyleyiniz ve bu iddianızı gerçekleyiniz.

24.

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{16}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{n^2}\right)\cdots$$

sonsuz çarpımının değerini E ye bakarak önceden söyleyiniz ve bu iddianızı gerçekleyiniz.

25. Misâl 23 ve 24 ü mukayese ediniz, ve genelleştiriniz.

26. E ye bakarak

$$\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdot\frac{8\cdot10}{9\cdot9}\cdots$$

sonsuz çarpımının değerini önceden söyleyiniz.

27. E faraziyesinin

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \lim_{n \to \infty} \frac{(z+n) \cdots (z+1)\, z\, (z-1) \cdots (z-n)}{(-1)^n (n!)^2}$$

eşitliğine denk olduğunu gösteriniz.

28. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ olduğunu biliyoruz. Bu vâkıa E ile uygunluk halinde midir?

29. Paragraf 6 (2) deki metod bizi

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \cdots$$

faraziyesine götürür. Bu faraziyenin, E faraziyesinin benzeri olmakla kalmayıp, aynı zamanda onun bir neticesi de olduğunu gösteriniz.

30.

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Bu vâkıa E ile uygunluk halinde midir?

31. E ye bakarak

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right)\left(1 - \frac{4}{49}\right) \cdots$$

sonsuz çarpımının değerini önceden söyleyiniz ve iddianızı gerçekleyiniz.

32.

$$\left(1 - \frac{16}{1}\right)\left(1 - \frac{16}{9}\right)\left(1 - \frac{16}{25}\right)\left(1 - \frac{16}{49}\right) \cdots$$

sonsuz çarpımının değerini E ye bakarak önceden söyleyiniz ve iddianızı gerçekleyiniz.

33. Misâl 31 ve 32 yi mukayese ediniz, ve genelleştiriniz.

34. $\cos(-x) = \cos x$ olduğunu biliyoruz. Bu vâkıa E ile uygunluk halinde midir?

35. $\cos(x+\pi) = -\cos x$ olduğunu biliyoruz. Bu vâkıa E ile uygunluk halinde midir?

36. Paragraf 6 (4) te faraziye olarak ileri sürülen $1 - \sin x$ e dair sonsuz çarpımı E den çıkarınız.

37. E den

$$\cot x = \cdots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \cdots$$

olduğunu çıkarınız.

38. E den

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\right)$$
$$- \frac{2x^3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \cdots\right)$$
$$- \frac{2x^5}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{729} + \cdots\right)$$
$$- \cdots$$

olduğunu çıkarınız ve sağ tarafta katsayı olarak ortaya çıkan sonsuz serilerin toplamlarını bulunuz.

39. E den

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{x-\frac{5\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{7\pi}{2}}+\cdots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$$

$$+\frac{8x}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots\right)$$

$$+\frac{16x^2}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\cdots\right)$$

$$+\frac{32x^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{81}+\frac{1}{625}+\cdots\right)$$

$$+\cdots$$

neticesini çıkarınız ve son ifadenin sağ tarafında katsayı olarak ortaya çıkan sonsuz serilerin toplamlarını bulunuz.

40.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots\right)$$

olduğunu gösteriniz. Bu formül soldaki serinin toplamını ikinci bir yoldan çıkarma imkânını verir.

41 (Devam).

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

ve $n=0, 1, 2, \ldots$ için

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,x^{2n+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\,dt = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

olduğu biliniyor kabûl ederek, 40 ın sol tarafındaki serinin toplamını üçüncü bir yoldan bulmaya çalışınız.

42 (Devam).

$$(\arcsin x)^2 = x + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{x^6}{3} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{x^8}{4} + \cdots$$

ve $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x^{2n}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\, dt = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}$$

olduğunu biliniyor kabûl ederek, aynı toplamı bir dördüncü yoldan bulmaya çalışınız.

43. Euler (*Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, S. 40—41)

$0 < x < 1$ için cari olan

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \log x \cdot \log(1-x) + \frac{x+(1-x)}{1} + \frac{x^2+(1-x)^2}{4} + \frac{x^3+(1-x)^3}{9} + \cdots$$

formülünü soldaki serinin değerini nümerik olarak hesaplamakta kullanmıştı.

(a) Bu formülü ispat ediniz.

(b) Soldaki toplamın hesabında x in hangi değerini almak en elverişlidir?

44. *Bir itiraz ve bir ispata ilk yaklaşma.* $\sin x$ fonksiyonunun,

$$\sin x = 0$$

denkleminin köklerine tekabül eden lineer çarpanlara ayrılabi-

leceği önceden mevcut (kablî) bir sebebe dayanmamaktadır. Bununla beraber, böyle bir imkânı kabûl etsek bile, geriye şöyle bir itiraz kalmaktadır: EULER.

$$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi, \ldots$$

sayılarının yukarıki denklemin *bütün* köklerinden ibaret bulunduğunu ispat *etmemiştir*. ($y = \sin x$ eğrisini münakaşa ederek) bu denklemin başka reel kökleri bulunmadığına kanaat getirebiliriz, fakat Euler kompleks köklerin mevcut olamıyacağını hiçbir şekilde göstermemiştir.

Bu itiraz (Johann Bernoulli'nin oğullarından) Daniel Bernoulli (1700—1788) tarafından ileri sürülmüştü. Euler buna

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / 2i$$

$$= \lim_{n \to \infty} P_n(x)$$

i nazarı itibara almak suretiyle cevap vermiştir ki, burada

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n\right]$$

(n tek olduğu takdirde n. dereceden) bir polinomdur.

$P_n(x)$ in hiçbir kompleks kökü bulunmadığını gösteriniz.

45. *Bir ispata ikinci bir yaklaşma.*

Misâl 44 teki n sayısını tek kabûl ederek $P_n(x)/x$ polinomunu öyle çarpanlara ayırınız ki, n ∞'a giderken her sabit k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) için k. çarpan $1 - x^2/k^2\pi^2$ ye yaklaşsın.

46. *Benzetmenin tehlikeleri.*

Kısaca, sonlu ile sonsuz arasındaki benzerlik Euler'i büyük bir keşfe sevketmiştir. Bununla beraber bu esnada Euler bir ha-

tânın da çok yakınından geçmiştir. Burada bu tehlikeyi daha küçük bir ölçüde gösteren bir misâl veriyoruz:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=l$$

serisi yakınsaktır. Bu serinin toplamı ilk iki terimi vasıtasıyla kabaca tahmin edilebilir:

$$\frac{1}{2}<l<1.$$

Şimdi

$$2l=\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

olup, bu seride paydası verilen bir çift sayıya eşit yalnız bir (negatif) terim, fakat gene paydası verilen bir tek sayıya eşit (biri pozitif, öteki negatif) iki terim vardır. Aynı tek paydayı haiz terimleri bir araya getirelim:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\cdots\\ &-\frac{1}{1}\quad\ -\frac{1}{3}\quad\ -\frac{1}{5}\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\\ &=l.\end{aligned}$$

Halbuki, $l\neq 0$ olduğundan, $2l\neq l$ dir. Burada hatâ nerede yapılmıştır ve bu hatâyı tekrarlamaktan kendinizi nasıl koruyabilirsiniz?

III

UZAY GEOMETRİDE ENDÜKSİYON

Matematik ilimlerde bile, hakikati keşfetmek için kullandığımız esas vâsıtalar endüksiyon ve benzetmedir. LAPLACE (1)

1. Çokyüzlüler. «Karışık bir çokyüzlünün birçok yüzleri, köşeleri ve kenarları vardır». Bunun gibi müphem bir ifade uzay geometri ile bir miktar temas etmiş olan hemen herkesin aklına kolayca gelebilir. Bununla birlikte, bu ifadeyi derinleştirmek ve onun arkasında daha sarih bir bilgi aramak için ciddî bir gayret sarfetmek isteyeceklerin sayısı o kadar çok değildir. Burada yapılması doğru olacak şey, işin içine giren büyüklükleri açık olarak ayırdetmek ve belirli bir soru sormaktır. Şu halde, çokyüzlünün yüz, köşe ve kenarlarının sayılarını sırasıyla F, V ve E ile gösterelim ve şöyle bir açık soru soralım: «Köşelerin sayısı arttıkça yüzlerin sayısının arttığı her zaman doğru mudur? F in V ile birlikte artması mutlaka şart mıdır?»

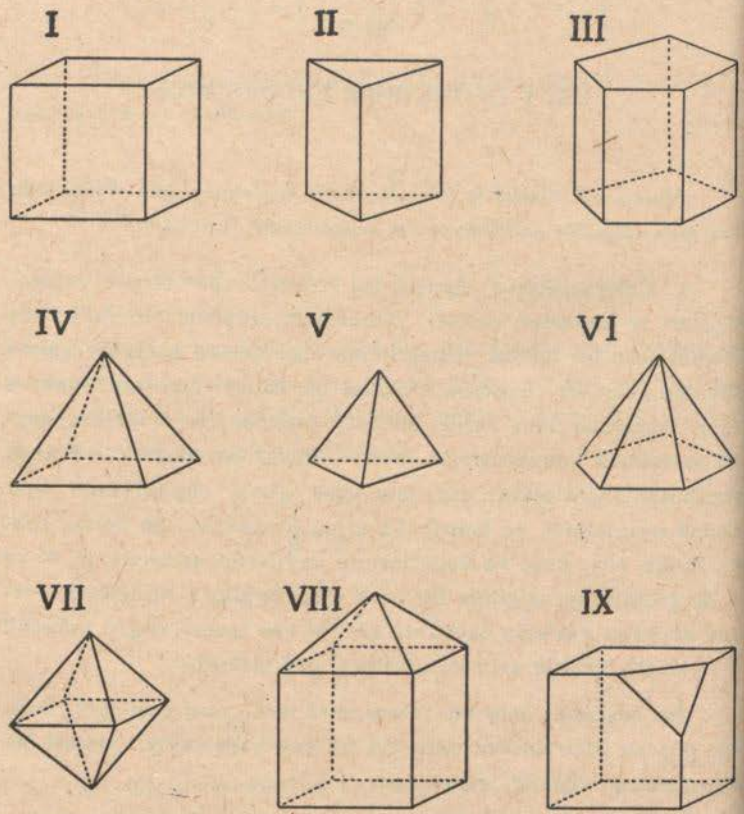
İşe başlamak için bir takım misâlleri, yani özel çokyüzlüleri gözden geçirmekten daha iyi bir şey yapamayız. Meselâ bir küp (Şek. 3.1 deki I. cisim) için

$$F=6, \qquad V=8, \qquad E=12 \qquad \text{dir.}$$

yahut üçgen tabanlı bir prizma (Şek. 3.1 deki II. cisim) için

$$F=5, \qquad V=6, \qquad E=9 \qquad \text{dur.}$$

(1) Essai philosophique sur les probabilités. *Oeuvres complètes de Laplace.* Vol. 7, S. V 'e bakınız.



Şek. 3.1. Çeşitli çokyüzlüler

Bu yönde işe giriştikten sonra, tabiî olarak çeşitli cisimleri muayene ve mukayese ederiz. Meselâ, yukarda bahsedilen I ve II den başka Şek. 3.1 de bulunan diğer şekiller, yani : beşgen tabanlı bir prizma (III), kare, üçgen veya beşgen tabanlı piramitler (IV, V, VI), bir sekiz yüzlü (VII), «çatısı ile birlikte bir kule» (VIII; kaideyi teşkil eden bir kübün üst yüzüne oturtulmuş bir piramit) ve bir kesik küp (IX).

Şimdi muhayyelemizi biraz zorlayalım ve bu cisimleri yüz, köşe ve kenarlarını sayabilecek kadar açık bir şekilde birbiri ardısıra gözönüne getirelim. Bulunan sayılar aşağıki listede verilmiştir:

Çokyüzlü	*F*	*V*	*E*
I. Küp	6	8	12
II. Üçgen tabanlı prizma	5	6	9
III. Beşgen tabanlı prizma	7	10	15
IV. Kare tabanlı piramit	5	5	8
V. Üçgen tabanlı piramit	4	4	6
VI. Beşgen tabanlı piramit	6	6	10
VII. Sekizyüzlü	8	6	12
VIII. «Kule»	9	9	16
IX. «Kesik küp»	7	10	15

Şek. 3.2 sathî olarak ufak bir mineraloji kolleksiyonuna benzer, yukarıki cedvel de bir fizikçinin tecrübe neticelerini kaydettiği not defterine bir parça benzer. Bir mineralog veya fizikçi bizimkine nazaran daha büyük bir zahmetle toplamış olduğu nümune ve verilerini nasıl muayene ve mukayese ederse biz de şekillerimizi ve cedveldeki rakamlarımızı öyle muayene ve mukayese edeceğiz.

Şimdi elimizde ilk sorumuza cevap verebilecek bir şey vardır : «V, F ile birlikte artıyor mu?» Hakikatte bunun cevabı

«Hayır» dır. Küp ile sekiz yüzlüyü (I ve VII) mukayese edersek, birinin köşelerinin, diğerinin ise yüzlerinin daha fazla olduğunu görürüz. Böylelikle, genel bir kaide kurmak için giriştiğimiz ilk teşebbüs muvaffak olamamıştır.

Bununla birlikte, başka bir şey deneyebiliriz: E, F ile birlikte artıyor mu? Yahut E, V ile birlikte artıyor mu? Bu sosoruları sistematik bir şekilde cevaplandırabilmek için cedvelimizi yeniden tanzim ederiz, öyle ki çokyüzlüler yukardan aşağı doğru okunduğu zaman, onlara ait E sayıları artsın:

Çokyüzlü	F	V	E
Üçgen tabanlı piramit	4	4	6
Kare tabanlı piramit	5	5	8
Üçgen tabanlı prizma	5	6	9
Beşgen tabanlı piramit	6	6	10
Küp	6	8	12
Sekizyüzlü	8	6	12
Beşgen tabanlı prizma	7	10	15
«Kesik küp»	7	10	15
«Kule»	9	9	16

Böylece daha uygun bir şekilde sıralanmış olan verilerimize bakarak, yukarda aranan cinsten bir kaidenin mevcut olmadığını kolayca müşahede edebiliriz. Meselâ E, 15 ten 16 ya yükselirken, V, 10 dan 9 a iniyor. Bundan başka, sekizyüzlüden beşgen tabanlı prizmaya geçerken, E, 12 den 15 e yükseliyor, fakat F, 8 den 7 ye düşüyor. Ne F, ne de V, E ile birlikte devamlı olarak artmamaktadır.

Bu defa da her zaman cari olan bir kaide bulmakta başarı sağlıyamadık. Buna rağmen, ilk başlangıçtaki fikrimizin tamamen yanlış olduğunu kabûl etmek istemiyoruz. Belki, fikrimizde yapılacak bir değişiklik onu doğru hale sokabilir. Ne F, ne de V nin E ile artmadığı pek doğru olmakla beraber, onların «umu-

miyetle» arttıkları müşahede edilmektedir. İyi tanzim edilmiş verilerimizi gözden geçirirsek, F ve V nin «bir arada» arttıklarını, yani cedvelin satırlarını yukardan aşağı doğru okudukça $F+V$ nin *arttığını* müşahede edebiliriz. Bundan sonra daha sarih bir kaide gözümüze çarpabilir: Bütün cedvel boyunca

$$F+V=E+2$$

dir. Bu münasebet cedvelde zikredilmiş olan dokuz halin hepsinde de gerçekleşir. Böyle ısrarlı bir intizamın sadece tesadüf olması pek muhtemel görünmemektedir. Bu suretle yalnız müşahede ettiğimiz haller için değil, fakat her çokyüzlü için şu *faraziye*ye varmış olduk: *Bir çokyüzlüde yüzlerin sayısı ile köşelerin sayısının toplamı, kenarların sayısının iki fazlasına eşittir.*

2. İlk destekleyici temas noktaları. İyi yetişmiş bir tabiat bilgini bir faraziyeyi kolay kolay kabûl etmez. Bu faraziye akla yakın gelse ve bir takım hallerde gerçekleşse bile, onun doğruluğundan gene şüphe eder ve onu muayene etmek üzere yeni müşahedeler toplar ve yeni tecrübeler tasarlar. Biz de tam aynı şeyi yapabiliriz. Bunun için daha da başka çokyüzlüleri muayene edecek ve onların yüz, köşe ve kenarlarını sayarak onlara ait $F+V$ ile $E+2$ yi mukayese edeceğiz. Bu sayılar eşit olabilir veya olmıyabilir. Bu iki halden hangisinin doğru olduğunu bulmak enteresan olacaktır.

Şek. 3.1 'e bakarsak, şimdiye kadar üç düzgün çokyüzlüyü, yani küp, düzgün dört yüzlü ve düzgün sekiz yüzlüyü (I, V ve VII) muayene etmiş olduğumuzu görürüz. Şimdi geri kalan iki düzgün çokyüzlüyü, yani düzgün yirmi yüzlü ile düzgün on iki yüzlüyü muayene edelim.

Düzgün yirmi yüzlünün, hepsi üçgenlerden ibaret, 20 tane yüzü vardır. Şu halde burada $F=20$ dir. Bu 20 üçgenin hep birlikte $3\times 20=60$ tane kenarı vardır ki, bunlar ikişer ikişer

bitişerek yirmi yüzlünün kenarlarını meydana getirirler. Şu halde yirmi yüzlünün kenar sayısı $60/2 = 30 = E$ dir. V yi de buna benzer tarzda bulabiliriz. Biliyoruz ki, yirmi yüzlünün her köşesi etrafında 5 tane yüz toplanmıştır. 20 üçgenin hep birlikte $3 \times 20 = 60$ tane açısı mevcut olup, bunlar beşer beşer aynı köşelerde bitişirler. Şu halde yirmi yüzlünün köşelerinin sayısı $60/5 = 12 = V$ dir.

Düzgün on iki yüzlünün, hepsi beşgen olmak üzere, 12 tane yüzü mevcut olup, bunlar köşeler etrafında üçer üçer toplanmışlardır. Buradan, yukarıki gibi

$$F = 12, \qquad V = \frac{12 \times 5}{3} = 20, \qquad E = \frac{12 \times 5}{2} = 30$$

olduğu neticesini çıkarırız.

Şimdi S. 36 daki listemize iki satır daha ilâve edebiliriz:

Çokyüzlü	F	V	E
Düzgün yirmiyüzlü.....	20	12	30
Düzgün oniki yüzlü.....	12	20	30.

$$F + V = E + 2$$

olduğuna dair faraziyemiz bu son iki halin her ikisinde de gerçekleşmektedir.

3. Daha başka destekleyici temas noktaları. Yukarıki gerçeklemeler sayesinde faraziyemizin doğruluk ihtimali hissedilir derecede artmaktadır. Fakat bu faraziye şimdi ispat edilmiş sayılabilir mi? Asla. Buna benzer bir durumda vicdanlı bir tabiat bilgini tecrübelerinin başarısından memnunluk duymakla beraber, yeni tecrübeler tasarlamaya devam edecektir. Öyleyse, biz de şimdi hangi çokyüzlüyü deneyelim?

Faraziyemiz şimdiye kadar o kadar güzel gerçeklenmiştir

ki, onu bir misâlde daha gerçeklemek ona karşı duyduğumuz itimada pek az şey katacaktır, belki o kadar az ki, bu katkı yeni bir çokyüzlü seçip, onun parçalarını saymanın zahmetine bile değmiyecektir. Faraziyemizi denemeye devam için daha zahmete değer başka bir yol bulamaz mıyız?

Şek. 3.1 'e bakarsak, ilk satırdaki bütün cisimlerin aynı tabiatta, yani prizmalar olduklarını görürüz. Aynı şekilde ikinci satırdaki bütün cisimler de hep piramitlerdir. Faraziyemiz Şek. 3.1 deki üç prizma ve üç piramit için elbette doğrudur; fakat acaba *bütün* prizma ve piramitler için de doğru mudur?

Eğer bir prizmanın n tane yan yüzü varsa, hep birden $n+2$ tane yüzü, $2n$ tane köşesi ve $3n$ tane kenarı mevcut olur. n tane yan yüzü haiz bir piramidin de, hep birden $n+1$ yüzü, $n+1$ köşesi ve $2n$ kenarı vardır. Bu suretle S. 55 teki listemize iki satır daha ilâve edebiliriz.

Çokyüzlü	F	V	E
n tane yan yüzlü prizma	$n+2$	$2n$	$3n$
n tane yan yüzlü piramit	$n+1$	$n+1$	$2n$

$F+V=E+2$ olduğunu iddia eden faraziyemiz, sadece yeni bir iki çokyüzlü için değil, fakat herbiri sonsuz sayıda çokyüzlü ihtiva eden iki çokyüzlü serisi için de doğru çıktı.

4. Sıkı bir deneme. Son ifade faraziyeye itimadımızı önemli bir miktar arttırmakla beraber, tabiatıyle onu ispat etmiş olmaz. Şimdi ne yapmalıyız? Diğer başka özel halleri muayeneye devam mı etmeliyiz? Faraziyemizin basit denemelere oldukça kolay dayandığı görülüyor. Şu halde onu, kendisini cerhedebilme hususunda oldukça büyük bir şansı haiz olan zor ve sıkı bir denemeye tâbi tutmalıyız.

Çokyüzlüler kolleksiyonumuza (Şek. 3.1) tekrar bakalım.

Orada prizmalar (I, II, III), piramitler (IV, V, VI), düzgün çokyüzlüler (I, V, VII) bulmaktadır. Bu cins bütün cisimleri zaten iyice muayene etmiştik. Kolleksiyonda başka ne var? Orada bir küpün üzerine bir «çatı» yerleştirmekle elde edilen bir «kule» (VIII) de bulunmaktadır. Burada bir genelleştirme imkânı farkedebiliriz. Küp yerine herhangi bir çok yüzlü alalım ve onun herhangi bir yüzünü seçerek, o yüzün üzerine bir «çatı» yerleştirelim. Başlangıçtaki çokyüzlünün yüz sayısı F, köşe sayısı V ve kenar sayısı da E olsun ve seçilen yüzün de n tane kenarı bulunsun. Bu yüzün üzerine n tane yan yüzü bulunan bir piramit koyalım ve bu suretle yeni bir çokyüzlü elde etmiş olalım. Bu yeni «çatılı» çokyüzlünün kaç yüzü, kaç köşesi ve kaç kenarı vardır? Kendisinin teşkili esnasında yüzlerden biri (seçilmiş olan yüz) ortadan kalkmış, fakat n tane yeni yüz (piramitin n tane yan yüzü) meydana gelmiş olduğundan, yeni çokyüzlünün $F-1+n$ tane yüzü vardır. Bundan başka eski çokyüzlünün bütün köşeleri yeniye de ait olup, bunlara bir de yeni köşe (piramidin tepesi) eklendiğinden, yeni çokyüzlünün köşelerinin sayısı $V+1$ dir. Aynı şekilde, eski çokyüzlünün bütün kenarları yeniye de ait olup, bunlara n tane yeni kenar (piramidin yan kenarları) ilâve edildiğinden, yeni çokyüzlü $E+n$ tane kenarı haizdir.

Şimdi durumu özetliyelim. Başlangıçtaki çokyüzlünün yüz, köşe ve kenar sayıları sırasıyla F, V ve E olduğuna göre, yeni «çatılı» çokyüzlünün bunlara tekabül eden sayıları sırasıyla

$$F+n-1, \quad V+1 \quad \text{ve} \quad E+n$$

dir. Acaba bu vâkıalar faraziyemizle uyuşma halinde midir?

Eğer $F+V=E+2$ münasebeti cari olursa, aşikâr olarak

$$(F+n-1)+(V+1)=(E+n)+2$$

münasebeti de cari olur. Yani faraziyemiz başlangıçtaki çokyüzlü

için gerçeklenirse, ondan elde edilen yeni «çatılı» çokyüzlü için de gerçeklenir. Faraziyemiz «çatılama» işleminden sonra da doğru kalıyor ve bu suretle hakikaten sıkı bir denemeyi başarı ile atlatmış oluyor. Daha önceden denenmiş olan çokyüzlülerden mükerrer «çatılama» işlemleri ile tükenmeyecek kadar çok çeşitli çokyüzlüler elde etmek mümkün olup, faraziyemizi bütün bunlar için ispat etmiş olduk.

Diğer taraftan Şek. 3.1 deki son cisim olan «kesik küp» (IX) te buna benzer mülâhazalara yol açar. Küp yerine, keyfî olarak seçeceğimiz bir köşesini kesip atmak suretiyle başka bir çokyüzlüyü «kesik» hale getirelim. İlk çokyüzlünün yüz, köşe ve kenar sayıları sırasıyla

$$F,\ V \quad \text{ve} \quad E$$

olsun ve n, seçmiş olduğumuz köşeden çıkan kenarların sayısını göstersin. Bu köşeyi kesip atmak suretiyle (n tane kenarlı) bir yeni yüz, n tane yeni kenar ve n yeni köşe kazanmış fakat 1 köşe kaybetmiş oluyoruz. Netice olarak yeni «kesik» çokyüzlünün sırasıyla

$$F+1, \qquad V+n-1, \qquad \text{ve} \qquad E+n$$

tane yüz, köşe, ve kenarı bulunmaktadır. Şimdi,

$$F+V=E+2$$

den

$$(F+1)+(V+n-1)=(E+n)+2$$

çıkar. Yani faraziyemiz, «kesme» işleminden de sonra da cari kalacak kadar inatçıdır. O, böylelikle diğer bir sıkı muayeneden daha başarı ile geçmiş oluyor.

Yukarda anlattıklarımıza faraziyemiz lehinde kuvvetli bir delil gözüyle bakmak tabiîdir. Hattâ onlarda başka bir şey de

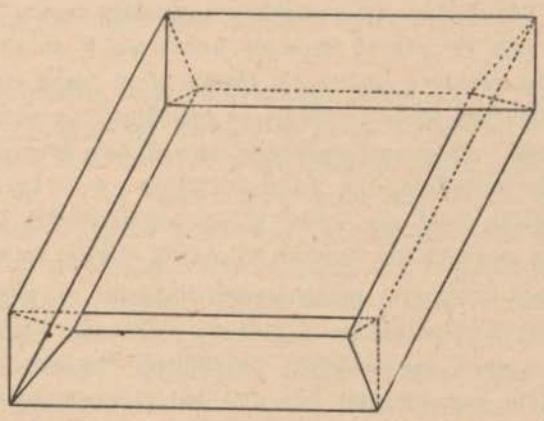
görebiliriz: Bir ispat için ilk ip uçları. Bir dörtyüzlü ve bir küp gibi, faraziyenin cari olduğu basit bir çokyüzlüden hareket ederek, «çatılama» ve «kesme» işlemleri vasıtasıyla gene faraziyenin cari olduğu çeşitli çokyüzlüleri ihtiva eden geniş bir çokyüzlü cümlesi elde ederiz. Acaba bu suretle *bütün* çokyüzlüleri elde edebilir miyiz? Eğer bu doğru ise, faraziyemizin bir ispatını elde etmiş olurduk! Bundan başka, faraziyemizdeki münasebeti muhafaza eden diğer bazı işlemler de mevcut olabilir.

5. Birbirinden farklı değerde gerçeklemeler. Yetişmiş bir tabiat bilgininin düşünme usûlleri vasatî bir insanın düşünme usûllerinden esas itibariyle farklı olmayıp, ancak ondan çok daha etraflıdır. Gerek vasatî insan, gerek ilim adamı birkaç müşahede neticesinde bir faraziyeye varırlar ve o faraziye ile uyuşma veya çatışma halinde olan müteakip bazı misâllere dikkat ederler. Faraziye ile uyuşma halinde olan bir misâl o faraziyenin doğruluğunu daha muhtemel kılar ve faraziye ile çatışma halinde olan bir misâl faraziyenin yanlış olduğunu ispat eder. İşte yukarda bahis konusu olan iki çeşit insan arasındaki fark ta burada başlar: İlim adamı olmayanlar daha ziyade birinci tip misâller aramak temayülündedirler, fakat ilim adamı umumiyetle ikinci tip misâller arar. Bunun sebebi, vasatî insan olsun, ilim adamı olsun, herkesin biraz gurur sahibi olması ve farklı kimselerin farklı şeylerden dolayı gururlanmalarıdır. İlim adamı olmayan bir kimse yanıldığını kendine bile itiraf etmekten çekindiğinden, faraziyesiyle çatışan misâlleri sevmez ve onlardan kaçınır, hattâ böylelerine rastladığı takdirde onları tevil etmek temayülündedir. İlim adamı ise bil'âkis, bir faraziyede yanıldığını teslim etmeğe yeter derecede hazırdır, fakat soruların kendileri hakkında karar verilmemiş halde bırakılmasından hoşlanmaz. Şimdi, faraziye ile uyuşan bir hâl onun doğruluğu hakkında kesin bir karar vermemize imkân vermez, fakat onunla çatışma halinde bir misâl onun yanlışlığını kesin olarak ispat eder.

Kesin bir karar peşinde olan ilim adamı, faraziyeyi cerh etmek şansı bulunan haller arar. Bu hallerin bu hususiaki şansı ne kadar büyükse, ilim adamı için onlar o kadar makbûldür. Burada dikkat edilecek önemli bir nokta vardır. Eğer bir faraziyeyi altüst etmekle tehdit eden bir halin, neticede onunla uyuşma halinde olduğu ortaya çıkarsa, faraziye denemeden gayet kuvvetlenmiş halde çıkar. Tehlike ne kadar büyük olursa, şeref te o kadar büyük olur; en tehditkâr muayeneden başarı ile çıkmak faraziye için en yüksek derecede kabûle şayan olmak ve onun doğruluğu hakkında en büyük tecrübî delil teşkil etmek neticesini doğurur. Misâlden misâle ve gerçeklemeden gerçeklemeye fark vardır. Faraziyeyi *cerhetmesi ihtimali daha kuvvetli* olan bir misâl her halûkârda, onu böyle bir ihtimali daha zayıf bulunan bir misâlden daha çok kesin karara yaklaştırır ki, bu da ilim adamının neye birinci tip misâlleri tercih ettiğini izah eder.

Şimdi kendi özel problemimize dönebilir ve yukarıki izahatın çokyüzlüler hakkında girişmiş olduğumuz «tecrübî araştırma» ya nasıl uygulandığına bakabiliriz. $F+V=E+2$ münasebetinin gerçeklendiği her yeni hal, bu münasebetin genel olarak doğruluğuna olan itimadımızı çoğaltır. Bununla beraber monoton bir gerçekleme serisi çok geçmeden bizi bıktırır. Daha evvel denenmiş misâllerden az farklı bir misâl, eğer faraziyemizle uyuşuyorsa, tabiî ona olan itimadımızı arttırır, fakat bu itimat artışı pek azdır. Hakikaten, böyle bir misâli daha denemeden evvel, onun da kendisinden az farklı bulunan diğer misâller gibi netice vereceğine kolayca inanırız. Bizim istediğimiz şey, başka bir gerçekleme daha değil, fakat *başka neviden bir gerçeklemedir*. Hakikaten, buraya kadar yapmış olduğumuz araştırmanın türlü safhalarına (2., 3. ve 4. paragraflar) geri bakarsak, bunların her birinin bize bir öncekini esaslı şekilde aşan yeni bir gerçekleme nev'i verdiğini görebiliriz. Bu safhaların her biri faraziyemizi, *bir öncekinden çok daha geniş ve çeşitli bir misâller grubu* için gerçeklemektedir.

6. Çok farklı bir hal. Çeşitliliğin önemini gördüğümüzden, şimdiye kadar elden geçirdiklerimizden çok farklı bir çokyüzlü arayalım. Bu suretle, bir resim çerçevesine de bir çok yüzlü gözüyle bakmak fikri aklımıza gelebilir. Üçgen kesitli çok uzun bir çubuk alarak, ondan dört parça kestikten sonra bu parçaların uçlarını çerçeve şeklinde bir çokyüzlü teşkil edecek surette birleştirebiliriz. Şek. 3.2 bu çerçevenin, evvelce kesilme-



Şek. 3.2. Simit biçiminde bir çokyüzlü

miş çubuk üzerinde de bulunmuş olan kenarlarının hepsi yatay duracak surette, bir masa üzerinde konulmasının uygun olacağını göstermektedir. Bu şekilde konmuş çerçevenin 4 kere 3 yani 12 tane yatay ve gene 4 kere 3 tane yatay olmayan kenarı mevcut olup, toplam kenar sayısı $E = 12 + 12 = 24$ tür. Aynı çerçevenin yüzlerini ve köşelerini sayarsak, $F = 4 \times 3 = 12$ ve $V = 4 \times 3 = 12$ buluruz. Şimdi, $F + V = 24$ sayısı $E + 2 = 26$ dan farklıdır. Şu halde, en genel haliyle alındığı takdirde faraziyemizin yanlış olduğu ortaya çıkmış bulunmaktadır.

Buna karşı, tabiatıyle faraziyemizi hiçbir zaman bu kadar genel bir şekilde ifade etmek niyetinde bulunmadığımızı ve her

zaman konveks, yani küreye benzer biçimde çokyüzlüleri kast ettiğimizi ve resim çerçevesi gibi simit biçimindeki çokyüzlüleri nazarı itibara almayı hiçbir zaman aklımızdan geçirmediğimizi ileri sürebiliriz. Fakat bunlar birer te'vildir. Hakikatte, mevkimizi değiştirmek ve ilk ifademizi tâdil etmek zorundayız. Çok mümkündür ki, yukarda yemiş olduğumuz darbe sonunda bize faydalı olsun ve bizi ilk faraziyemizin tadil edilmiş ve daha sarih bir şekline götürsün. Bununla birlikte, bunun itimadımıza indirilmiş bir darbe olduğu hakikati de hiçbir şekilde örtülemez.

7. **Benzerlik.** «Resim çerçevesi» misâli ilk şekliyle alınan faraziyemizi öldürmüş bulunuyor. Fakat bu faraziye, önemli bir tahdit ihtiva eden değiştirilmiş (ve ümit edelim ki, düzeltilmiş) bir şekilde derhal yeniden canlandırılabilir.

Dörtyüzlü ve küp konveks oldukları gibi, koleksiyonumuzdaki (Şek. 3.1) diğer çokyüzlüler de hep konvekstir. Aynı şekilde, bunlardan «kesme» ve mutedil «çatılama» (yani muhtelif yüzlerin üzerine *yeter derecede basık* çatılar kondurma) operasyonlarıyla elde edilebilecek bütün çokyüzlüler de konvekstir. Hiç değilse, bu operasyonların bizi konveks yahut «küre biçimindeki» çokyüzlülerden «simit biçiminde» çokyüzlülere götürmesi için hiçbir tehlike mevcut değildir.

Bu noktaya dikkat ederek, çok lûzumlu bir tasrîh yapacağız. Yeni faraziyemiz, her *konveks* çokyüzlünün yüz, köşe ve kenar sayıları arasında $F+V=E+2$ münasebetinin cari oluşudur (Faraziyemizin sınırlanışında konveks çokyüzlüler yerine «küre biçimindeki» çokyüzlüleri almak daha tercihe şayan olurdu, fakat bu son terimin mânasını tarif etmek üzere burada durmak istemiyoruz.)

Bu yeni faraziye doğru olma şansını haizdir. Bununla beraber, itimadımız evvelce sarsılmış olduğu için faraziyemiz hakkında yeni destekler aramak üzere etrafımıza bakarız. Evvelkilere ilâveten yapılacak bir takım gerçeklemelerden pek fazla yar-

dım bekliyemeyiz. En aşikâr kaynaklar da tükenmiş görünmektedir. Bununla birlikte, benzerlik'ten biraz yardım ümit edebiliriz. Bize birşey öğretebilecek daha basit bir benzer hal mevcut mudur?

Çokgenler, çokyüzlülerin benzerleridir. Nasıl bir çokyüzlü uzayın bir parçası ise, bir çokgen de düzlemin bir parçasıdır. Bir çokgenin V gibi belirli bir miktar köşesi (açıların köşeleri) ve E gibi belirli bir miktar kenarı vardır. Aşikâr olarak

$$V = E$$

dir. Bununla birlikte konveks poligonlar için cari olan bu münasebet çok basit görünmekte ve bütün konveks çokyüzlüler için cari olduğundan şüphelendiğimiz daha karışık

$$F + V = E + 2$$

münasebeti üzerine pek az ışık tutmaktadır.

Eğer problemle hakikaten yakından alâkadar isek, bu iki münasebeti birbirine daha fazla yaklaştırmaya çalışacağımız tabiîdir. Bunun yapmanın gayet incelikli bir yolu vardır. Evvelâ yukarda geçen muhtelif sayıları tabiî bir sıraya koymalıyız. Çokyüzlünün kendisi 3 boyutludur; tabiatıyle yüzleri (çokgenler) 2 boyutlu, kenarları 1 boyutlu ve köşeleri (noktalar) ise 0 boyutludur. Şimdi yukarıki sayıları artan boyutlara göre sıralamak suretiyle denklemlerimizi yeniden yazabiliriz. Çokgenlere dair münasebeti

$$V - E + 1 = 1$$

şeklinde yazarsak, bu münasebet

$$V - E + F - 1 = 1$$

şeklinde yazılacak olan çokyüzlülere dair münasebetle mukayese

edilebilir hale girer. Çokgenlere dair denklemin sol tarafındaki 1 rakamı, o halde bahis konusu olabilecek biricik iki boyutlu elemanı, yani çokgenin içini temsil eder. Çokyüzlülere dair denklemin sol tarafındaki 1 rakamı, bahis konusu biricik üç boyutlu elemanı, yani çokyüzlünün içini temsil eder. Denklemlerin sol tarafındaki sayılar, 0, 1, 2 ve 3 boyutlu elemanların sayılarını göstermekte olup, bu tabiî sırada sıralanmışlar ve bir pozitif, bir negatif işareti haiz bulunmaktadırlar. Sağ taraf her iki halde de aynıdır; benzerlik tam gibi görünmektedir. Çokgenlere dair olan ilk eşitlik aşikâr olarak doğru bulunduğundan, çokyüzlülere dair farzetmiş olduğumuz ikinci eşitliğe olan itimadımız da benzerlik dolayısıyle artmış bulunmaktadır.

8. **Uzayın parçalara ayrılışı.** Şimdi uzay geometride endüktif araştırmaya dair başka bir misâle geçelim. Önceki misâlimizde genel ve biraz müphem bir müşahededen hareket etmiştik. Şimdiki hareket noktamız özel ve belirli bir problemdir. Burada uzay geometrinin basit, fakat pek fazla alışılmamış bir problemini ele alacağız: *Uzay 5 düzlem vasıtasıyla kaç parçaya ayrılabilir?*

Verilen beş düzlemin birbirine paralel olduğu halde bu soru kolayca cevaplandırılabilir: Bu halde uzay aşikâr olarak 6 parçaya ayrılmıştır. Bununla birlikte, bu hal çok özeldir. Eğer düzlemlerimiz «genel durumda» iseler, bunların içinde birbirine paralel olan hiçbir düzlem çifti bulunmayacak ve uzay, 6 dan çok daha fazla parçayı ayrılacaktır. Problemimizi önemli bir ilâve yaparak daha sarih bir şekilde ifade etmeliyiz: *Genel durumda olan 5 düzlem uzayı kaç parçaya ayırır?*

«Genel durum» kavramı sezgiyle kolayca anlaşılabilir; birbirleriyle hiçbir özel münasebeti olmayan, müstakil olarak verilmiş, gelişigüzel seçilmiş düzlemler bu durumdadır. Bu terimin mânasını teknik bir tarifle tam bir açıklığa kavuşturmak zor değilse de, iki sebepten bunu yapmıyacağız. Birincisi, bu kita-

bın çok teknik olmaması icabettiğidir. İkincisi ise şudur: bu kavramı biraz sisli bırakırsak, ekseriya biraz sisli kavramlarla işe başlamak zorunda olan, fakat bunları ilerledikçe berraklaştıran bir tabiat bilgininin fikrî davranışına daha fazla yakınlaşmış oluruz.

9. Problemi tadil etmek. Dikkatimizi problemimiz üzerinde toplayalım. Bize genel durumda 5 düzlem verilmiştir. Bunlar düzlemi belirli bir sayıda bir takım parçalara ayırırlar. (Meselâ bir peynir parçasının keskin bir bıçakla beş defa kesilmek suretiyle parçalara ayrılışını düşünebiliriz). Çözeceğimiz problem, bu parçaların sayısını bulmaktır. (Peynir kaç parçaya ayrılmıştır?)

5 düzlemin meydana getirdiği bütün ayrılışları birden görmek güç görünmektedir. (Bunları «görmek» imkânsız da olabilir. Ne olursa olsun, geometrik tasavvur kabiliyetinizi zorlamayınız; daha ziyade, düşünmeye çalışınız. Aklınız sizi muhayyelenizden daha ileri götürebilir). Neden tam 5 düzlem olsun? Herhangi bir sayıda düzlem hali neden nazarı itibara alınmasın? Uzay, 4 düzlem tarafından kaç parçaya ayrılır? 3 düzlem tarafından, yahut 2 düzlem veya bir tek düzlem tarafından kaç parçaya bölünür?

Burada geometrik sezgimizle kolayca kavrayabileceğimiz hallere erişmiş bulunuyoruz. Bir düzlem uzayı aşikâr olarak 2 parçaya ayırır. İki düzlem, paralel oldukları takdirde uzayı üç parçaya bölerler. Bununla beraber, bu özel hali bir kenara bırakmalıyız; genel durumda iki düzlem birbirini keser ve uzayı 4 kısma ayırır. Genel durumda üç düzlem uzayı 8 parçaya ayırır. Daha güç olan bu son hali gözönünde canlandırmak için bir binanın içinde birbirini kesen iki düşey duvarla, bunların her ikisini de kesen, kirişlerle desteklenmiş bir yatay tabaka düşünelim, öyle ki tabaka her iki duvarı da kestiği noktada 4 tane odanın tavanı ile diğer 4 odanın tabanını teşkil etsin.

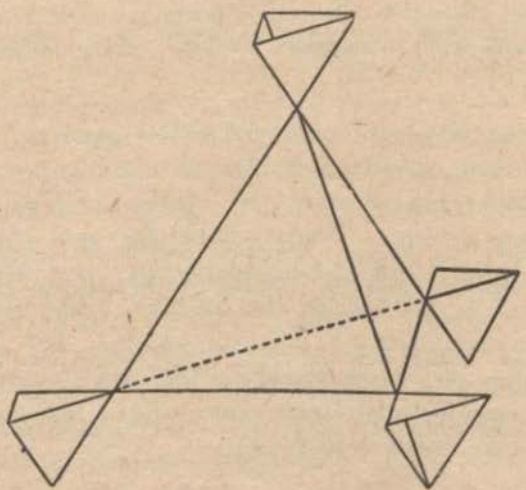
10. Genelleştirme, özelleştirme, benzetme. Problemimiz 5 düzleme dair olduğu halde, evvelâ 1, 2 ve 3 düzlemle oynadık. Acaba böyle yapmakla vaktimizi israf mı etmiş olduk? Asla. *Daha basit benzer halleri* gözden geçirmek suretiyle kendimizi esas problemimize hazırlamış olduk. Daha basit olan bu hallerde el alışkanlığı elde ettik; araya giren kavramları açık şekle soktuk ve karşılacağımız problem cinsi ile alışıklık peyda ettik.

Bizi bu daha basit benzer problemlere götürmüş olan yol bile tipik olup, dikkatimize lâyıktır. Evvelâ 5 düzlem halinden herhangi bir sayıda, meselâ n tane, düzlem haline geçtik, yani bir *genelleştirme* yaptık. Sonra n düzlemden gene geriye dönerek, 4, 3, 2 ve bir tek düzlem haline geçtik, yani genel problemde $n=4, 3, 2, 1$ koyduk, yani bir takım *özelleştirme*ler yaptık. Fakat uzayı, meselâ 3 düzlemle bölmeye dair problem 5 düzlem ihtiva eden başlangıçtaki problemimize *benzer*dir. Bu suretle benzerliğe tipik bir tarzda varmış olduk: *başlangıçta genelleştirme ve onu takiben özelleştirme.*

11. Benzer bir problem. Bundan sonraki ilk hal olan 4 düzlem halinde durum nasıldır?

Genel durumda bulunan dört düzlem, çeşitli uzay parçaları belirler, bunlardan biri sonlu olup, üçgen şeklinde dört tane yüzle sınırlanmıştır ki adına dörtyüzlü denir (Şek. 3.3 'e bakınız). Bu şekil bize bir düzlemde genel durumda bulunan üç doğruyu hatırlatır. Bu doğrular düzlemde çeşitli parçalar belirler ki bunların biri sonlu olup, üç tane doğru parçası tarafından sınırlanır, yani bir üçgendir (Şek. 3.4 'e bakınız). Şimdi uzayın dört düzlem tarafından bölünüşünde meydana gelen uzay parçalarının sayısını bulmamız lâzımdır. Evvelâ elimizi bunun benzeri olan aşağıki daha basit problemde alıştıralım: Düzlem, üç doğru tarafından kaç parçaya ayrılır?

Birçoklarımız cevabı bir şekil çizmeye bile lûzum kalmadan derhal görebileceklerdir ve herkes te kaba bir kroki (Şek. 3.4 e bakınız) çizmek suretiyle onu görebilir. Aranan düzlem parçaları sayısı 7 dir.



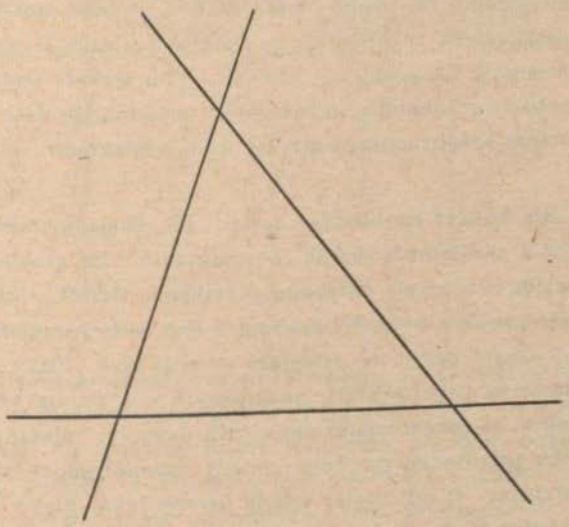
Şek. 3.3. Uzayın dört düzlem vasıtasıyla parçalara ayrılışı

Daha basit benzer problemin çözümünü bulduk; fakat bu çözümü acaba esas problemimizde kullanabilir miyiz? Evet, eğer iki şekil arasındaki benzerlikten zekice istifade edebilirsek. Burada düzlemin 3 doğru tarafından parçalara ayrılışını öyle ele almalıyız ki, aynı mülâhazaları daha sonra uzayın 4 düzlem vâsıtasıyla bölünüşüne uygulayabilelim.

Meselâ, düzlemin bir üçgen sınırlayan üç doğru tarafından parçalara ayrılışına tekrar bakalım. Bu parçalardan biri, üçgenin içi, sonludur. Geri kalan parçalar sonsuz olup, üçgenle ya ortak bir kenarı (böyle üç parça vardır), yahut ta ortak bir kö-

şeyi (bu türlü de üç parça vardır) haizdir. Böylelikle bütün parçaların sayısı $1+3+3=7$ olur.

Şimdi uzayın bir dörtyüzlü sınırlayan 4 düzlem vâsıtasıyla parçalara ayrılışını düşünelim. Bu parçalardan biri, yani dörtyüzlünün içi sonludur. Sonsuz bir parça bu dörtyüzlü ile ortak bir yüzü (sınırın 2 boyutlu bir parçası) haizdir (böyle 4 parça vardır), yahut ortak bir kenarı (sınırın 1 boyutlu bir parçası) haizdir (böyle 6 parça vardır), yahut ta ortak bir köşeyi (sınırın 0 boyutlu bir parçası) haizdir (böyle 4 parça olup, bunlar Şek. 3.3 te bilhassa belirtilmiştir). Bu suretle bütün uzay parçalarının sayısı $1+4+6+4=15$ olur.



Şek. 3.4. Düzlemin üç doğru vâsıtasıyla ayrılışı

Bu neticeye benzetme yoluyla vardık ve burada benzetmeyi tipik ve önemli bir tarzda kullandık. Evvelâ, daha kolay bir

benzer problem tasarlıyarak onu çözdük. Sonra, daha güç olan (dörtyüzlüye dair) ilk problemi çözmek için kolay olan (üçgen hakkındaki) yeni benzer problemi bir *model* olarak kullandık; zor problemi çözerken kolay problemin çözüm patronunu tâkip ettik. Fakat bunu yapmadan evvel kolay problemin çözümünü yeniden ele almaklığımız lâzım geldi. Bu çözümü yeniden tanzim ederek, taklide uygun gelecek yeni bir patron haline getirdik.

Daha kolay bir benzer problemi ortaya çıkararak onu çözmek ve bu çözümü bir model olarak hizmet görecek şekilde yeniden tanzim etmek ve nihayet bu suretle yaratılmış olan modeli tâkip ederek ilk problemi çözmek — bu metod tecrübesizlere dolambaçlı görünebilir, fakat gerek matematiğe dair ve gerek diğer ilmî araştırmalarda sık sık kullanılmaktadır.

12. Bir benzer problemler serisi. İlk başlangıçtaki problemimiz hâlâ çözülmemiş olarak durmaktadır. Bu problem uzayın 5 düzlem vâsıtasıyla parçalara ayrılışına dairdi. İki boyut için benzer problem nedir? Düzlemin 5 doğru ile parçalara ayrılışı mı? Yoksa 4 doğru ile parçalara ayrılışı mı? Bizim için bu problemlerin en genel şeklini, yani uzayın n düzlemle ve düzlemin n doğru ile parçalanışını ele almak daha iyi olacaktır. Tabiatıyla bu parçalanışı meydana geiiren doğrular genel durumda bulunmalıdırlar (yani bunlar içinde paralel olan hiçbir çift ve aynı noktadan geçen hiçbir üçlü bulunmamalıdır).

Eğer geometrik benzerliği kullanmaya alışmışsak, bir adım daha ileri gidebilir ve bir doğrunun n tane farklı nokta tarafından parçalara ayrılışını nazarı itibara alabiliriz. Bu problem oldukça trivial görünmekle beraber, öğretici olabilir. Kolayca görürüz ki, bir doğru 1 nokta vâsıtasıyla 2, 2 nokta vâsıtasıyla 3, 3 nokta vâsıtasıyla 4, ve genel olarak n nokta vâsıtasıyla $n+1$ farklı parçaya ayrılır.

Aynı şekilde, aşırı hallere dikkat etmeğe alışmışsak, hiç bölünmemiş uzay, düzlem ve doğruyu da ele alabilir ve onlara «0 tane bölücü eleman tarafından meydana getirilmiş birer ayrılış» gözüyle bakabiliriz.

Buraya kadar elde etmiş olduğumuz neticeleri gözönüne seren aşağıki cedveli tertip edelim:

Bölücü eleman sayısı	Uzayın düzlemler vâsıtasıyla parça sayısı	Düzlemin doğrular vâsıtasıyla parça sayısı	Doğrunun noktalar vâsıtasıyla parça sayısı
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
...	...	...	...
n			$n+1$

13. Çok problem, tek problemden daha kolay olabilir. (Uzayın 5 düzlemle parçalara ayrılışına dair) bir problem çözmeye giriştik. Bu problemi henüz çözmemiş olmakla beraber, bir çok yeni problem ortaya atmış bulunuyoruz. Yukarıki cedvelin boş olan her gözü açık bir probleme tekabül etmektedir.

Bir problemi çözmek için böylece yeni problemler yığmak tecrübesi az olanlara akılsız bir iş görünebilir. Fakat problem çözmek hususunda biraz tecrübe, bir arada nazarı itibara alınan birçok problemi çözmenin tek bir problemi çözmekten daha kolay olabileceğini bize öğretebilir — ancak çok problemler aralarında iyi koordine edilmiş ve tek problem de tek başına (münferit) bir problem ise. Bu suretle başlangıçtaki problemimiz, bir seri çözülmemiş problemin bir tanesi haline girer. Burada önemli

olan nokta bütün bu çözülmemiş problemlerin bir seri teşkil etmesi, yani bunların iyi sıralanmış ve gruplandırılmış olması ve gerek birbirleriyle ve gerek daha evvel çözülmüş birkaç problemle yakın benzerliği bulunmasıdır. Problemimizin şimdiki benzer problemlerin teşkil ettiği bir seri içine iyi yerleştirilmiş durumunu, tamamen münferit bir halde bulunduğu başlangıçtaki durumu ile mukayese edersek, problemin çözümü yolunda bir ilerleme kaydetmemiş olduğumuza hükmetmemiz bize tabiî gelir.

14. Bir faraziye. Cedvelimizde ortaya dökülen neticelere bir tabiat bilgininin kendi nümune kolleksiyonuna baktığı gibi bakalım. Bu cedvel buluş ve müşahede kabiliyetlerimize meydan okumaktadır. Onda bir bağ, bir intizam keşfedebilir miyiz?

İkinci sütuna (uzayın düzlemler vâsıtasıyla ayrılışı) bakarsak, 1, 2, 4, 8 dizisinde bir intizamın farkına varabiliriz — bu sayılar 2 nin müteakip kuvvetleridir. Fakat, ne büyük bir aldanış! Sütunun bundan sonraki rakamı, beklediğimiz gibi 16 olmayıp, 15 tir. İlk tahminimiz pek iyi çıkmadı. Onun için başka bir şey arayalım.

Nihayet, tesadüfen cedveldeki herhangi iki bitişik sayıyı toplayıp, bu toplamın cedvelde bulunduğunu görebiliriz. Bu suretle özel bir münasebetin farkına varmış oluyoruz: Cedveldeki bir sayıyı elde etmek için onun üstündeki sayı ile bu son sayının sağ tarafındaki sayıyı toplamalıdır. Meselâ

8 7

15

sayıları $8+7=15$ münasebeti ile birbirine bağlıdır. Bu şayanı dikkat bir münasebet, göze batan bir ip ucudur. Cedvelin şimdiye kadar hesaplanmış olan kısmında bu münasebetin baştanbaşa cari olmasının sırf tesadüf eseri bulunması pek muhtemel görünmemektedir.

Böylece, yukarıki durum müşahede etmiş olduğumuz kaidenin müşahede sınırlarımızın çok daha ötesine kadar cari olduğunu, cedvelde henüz hesaplanmamış sayılar arasında da aynı münasebetin bulunduğunu bize telkin eder ve biz de böylece tesadüfen üzerine düşmüş olduğumuz kanunun her zaman doğru olduğu faraziyesine varmış oluruz.

Eğer bu doğru ise, başlangıçtaki problemimizi artık çözebiliriz: Bitişik sayıları toplayarak cedvelimizi genişletir ve nihayet aradığımız sayıya varırız:

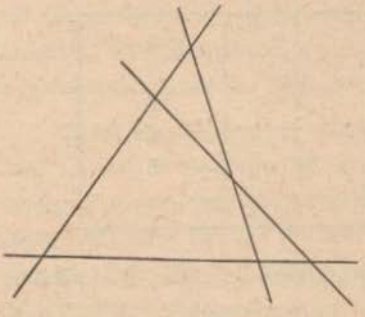
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11	5
5	26		

Burada verdiğimiz cedvelde toplama yoluyla hesaplanmış olan kalın puntolu iki rakam bulunmaktadır: $11 = 7 + 4$, $26 = 15 + 11$. Eğer faraziyemiz doğru ise, 26 sayısı uzayın genel durumda 5 düzlem tarafından ayrıldığı parçaların sayısı olmalıdır. Görünüşe göre problemi çözmüş oluyoruz. Yahut ta hiç olmazsa, buraya kadar toplayabildiğimiz bütün delillerle desteklenen akla yakın bir faraziye üzerine düşmeye muvaffak olduk.

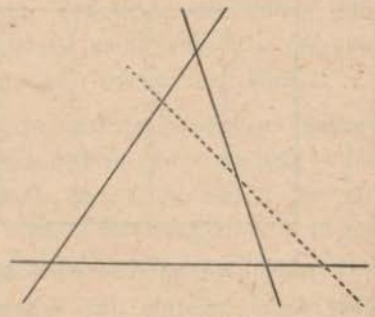
15. Önceden söylemek ve gerçeklemek. Yukarda sıkı sıkıya bir tabiat bilgininin tipik yolunu takip ettik. Eğer bir tabiat bilgini göze çarpan ve makûl bir şekilde sırf tesadüfe atfedilemiyecek olan bir intizam müşahede ederse, bu kaidenin kendi yaptığı müşahedelerin sınırlarının dışına kadar uzandığına dair bir faraziye yapar. Böyle bir faraziyenin yapılışı endüktif araştırmada ekseriya kat'î adımı teşkil eder.

Bunu takip eden adım, önceden söyleme (önceden kestirme)

olabilir. Tabiat bilgini daha evvelki müşahedelerine ve onların farzetmiş olduğu kanuna uygunluğuna dayanarak, onlardan sonra yapacağı bir müşahedenin neticesini önceden söyler. Bu sonuncu müşahedenin neticesi çok önemlidir. Acaba önceden söylediği şey doğru mu, yoksa yanlış mı çıkacaktır? Biz de tamamen aynı durumdayız. Biz de 11 'in bir düzlemin genel durumda 4 doğru tarafından ayrıldığı parça sayısı olduğunu bulduk, daha doğrusu tahmin ettik, yahut önceden söyledik. Acaba bu böyle midir? Yani önceden söylediğimiz şey doğru mudur?



Şek. 3.5. Düzlemin dört doğru vâsıtasıyla ayrılışı



Şek. 3.6. Üç doğrudan dört doğruya geçiş

Kaba bir krokiyi (Şek. 3.5) muayene etmek suretiyle tahminimizin iyi, yani 11 in aradığımız doğru sayı olduğuna kanaat getirebiliriz. Önceden söylemiş olduğumuz şeyin bu suretle teyit edilişi, kendisine dayanarak ön söyleyişi yapmış olduğumuz kaidenin doğruluğu lehinde bir delil teşkil eder. Bu muayeneden muvaffakiyetle geçen faraziyemiz, ondan kuvvetlenmiş olarak çıkar.

16. Tekrar ve daha iyi. Yukarıki 11 sayısını şekle bakarak saymak suretiyle gerçeklemiştik. Evet, genel durumda 4 doğru düzlemi 11 parçaya ayırıyor görünmektedir. Fakat bu işi

tekrar ve daha iyi yapalım. Yukarıki parçaları herhangi bir yolla saymıştık. Onlar şimdi tekrar sayalım ve bu sayışı öyle yapalım ki, karışıklıktan ve özel durumların doğurduğu yanlış sayma ve tuzaklardan sakınalım.

Evvelâ 3 doğrunun düzlemde tam 7 parça belirttiği vâkıasından hareket edelim. 4 doğrunun 11 parça belirttiğine inanmak için bâzı sebeplere mâlikiz. Aradaki fark neye tam 4 parçadır? Burada neden 4 sayısı araya giriyor? Neden yeni bir doğrunun ithâli parçaların sayısını tam 4 arttırıyor?

Şek. 3.5 teki bir doğruyu diğerlerine göre belirtmek için, onu tekrar kesik çizgilerle çizelim (Şek. 3.6). Yeni şekil evvelkinden pek farklı olmamakla beraber, tamamen ayrı bir fikri ifade eder. Kesik çizgili doğruya *yeni* ve diğer üçüne *eski* gözüyle bakalım. Eski doğrular düzlemi 7 parçaya ayırırlar. Bunlara yeni bir doğru ilâve edilince ne olur?

Keyfî olarak çizilen yeni doğru, eski doğruların herbirini ayrı bir noktada keser. Bunlar 3 nokta eder. Bu 3 nokta yeni doğruyu 4 parçaya ayırır. Şimdi bu doğru parçalarından herbiri düzlemin eski parçalarından birini ikiye bölerek, eski parçalardan biri yerine 2 yeni parça getirir. Netice olarak yeni doğrunun 4 parçası düzlemde 8 yeni parça meydana getirir ye 4 eski parçayı ortadan kaldırır — böylece düzlemin parçalarının sayısı 4 artar. Bu haldeki parça sayısının öncekinden 4 fazla oluşunun sebebi işte budur: $7 + 4 = 11$.

11 sayısına bu yolla varmak hem inandırıcı, hem de aydınlatıcıdır. Şimdi evvelce müşahede etmiş olduğumuz ve 11 sayısını kendisine dayanarak önceden söylemiş olduğumuz kaidenin bir sebebini görmeye başlayabiliriz. Böylece vâkıaların arkasında onların bir izahının bulunduğundan şüphelenmeye başlarız ve müşahede edilen kaidenin her zaman doğruluğuna itimadımız iyice kuvvetlenmiş olur.

17. Endüksiyon dedüksiyona, özel hal genel ispata yol gösterir. Buraya kadar hep bizim muhakeme tarzımızla tabiat bilgininin metodları arasındaki paralelliği belirtmeye dikkat ettik. Tıpkı bir tabiat bilgininin kendi merakını çeken bir müşahededen hareket etmesi gibi, işe özel bir problemle başladık. Deneme mahiyetinde genelleştirmeler yaparak, kolay çözülebilir özel hallere işaret ederek ve öğretici benzerlikleri müşahede ederek ilerledik. Bir kaide tahmin etmeye çalıştık, evvelâ muvaffak olamadı isek te, aynı şeye tekrar teşebbüs ettik ve bu defa daha iyi netice aldık ve elimizde bulunan bütün tecrübî deliller tarafından desteklenen bir genel kanunu faraziye olarak ortaya atmaya muvaffak olduk. Bundan sonra bir özel hali daha muayene ederek onu faraziyemizle tam uygunluk halinde bulduk, ki bu suretle faraziyenin kuvveti daha da artmış oldu. Nihayet bu genel kanun için bir sebep, bir nevi izah görmeğe başladık ve böylece ona olan itimadımız büyük mikyasta kuvvetlendi. Bir tabiat bilgininin yaptığı bir araştırma da tamamiyle aynı safhalardan geçebilir.

Bununla beraber, yolların ayrıldığı bir nokta vardır ki, orada matematikçi tabiat bilgininden keskin bir şekilde uzaklaşır. Müşahede tabiat bilgini için en yüksek otoritedir, halbuki matematikçi için bu böyle değildir. İyi seçilmiş bir çok misâl için gerçeklenmek, tabiî ilimlerde faraziye halindeki bir kanunun doğruluğunu tespit etmenin yegâne yoludur. Fakat matematik ilimlerde, bir faraziyenin iyi seçilmiş bir çok misâlde gerçeklenmesi cesaretimizi arttırmak hususunda çok faydalı olabilir, fakat bu faraziyeyi ispat etmeye hiçbir zaman yetmez. Yukarıki müşahhas misâlimizi ele alalım. Bir çok özel hali muayene edip, onları birbiriyle mukayese ederek öyle bir genel kaide farzetmeye varmış olduk ki, bundan başlangıçta sorulmuş olan problemin çözümünün 26 olduğu neticesi çıkacaktır. Acaba bütün müşahedelerimiz ve gerçeklemelerimiz bu genel kaideyi ispat etmeye kâfi midir? Yahut bunlar ilk problemin cevabının haki-

katen 26 olduğu özel neticesini ispat edebilir mi ? Aslâ. Sıkı ve kesin ölçülere sahip olan bir matematikçi için 26 sayısı sadece akıllı bir tahminden ibaret olup, gerçeklemelerin sayısı ne kadar çok olursa olsun, şüphelendiğimiz genel kaideyi ispata hiçbir zaman kâfi gelmez. Endüksiyon bu kaideden çıkarılacak neticeleri sadece daha muhtemel kılar, fakat onları aslâ ispat etmez.

Bununla beraber, matematikte endüktif araştırmanın şimdiye kadar bahsetmemiş olduğumuz daha başka bir bakımdan da faydalı olduğuna dikkat edilmelidir. Özel hallerin bizi genel bir matematik faraziyeye sevkeden dikkatli müşahedesi, bize onun bir *ispat yolunu da telkin edebilir*. Bir özel halin böyle bir niyetle muayenesinden genel bir kavrayış ortaya çıkabilir.

Hakikaten, bu durum bundan önceki paragrafta vukubulmuştur. Endüksiyonla keşfetmiş olduğumuz genel kaide, cedvelde 7 ve 4 gibi bitişik iki sayı ile onların toplamına (içinde bulunduğumuz halde 11) dairdi. O paragraftaki problemimizde 7, 4 ve 11 sayılarının geometrik mânasını göz önüne getirdik ve bunu yaparken, $7+4=11$ münasebetinin orada *nasıl* meydana geldiğini anladık. Aslında, düzlemi bölen 3 doğrudan bu türlü 4 doğruya geçiş problemi ile uğraştık ; fakat burada 3 ve 4 sayılarının hiçbir özel değeri mevcut olmayıp, aynı şekilde herhangi bir sayıdan onu takip eden sayıya, meselâ n den $n+1$ 'e geçebilirdik. Münakaşa etmiş olduğumuz özel hal, bir genel durumu temsil edebilir (Misâl 2.10). Önceki paragrafın özel müşahedesinden genel fikri tamamen çıkarma zevkini okuyucuya bırakıyoruz. Kendisi böyle yapmakla, endüktif yolla keşfedilmiş olan kaidenin, hiç olmazsa son iki sütun için, formel bir ispatını vermiş olur.

Bununla birlikte, ispatı tamamlamak için yalnız düzlemin doğrularla ayrılışını değil, uzayın da düzlemlerle ayrılışını ele almamız lâzımdır. Bununla beraber, bir düzlemin doğrularla ay-

rılışını açıklığa kavuşturabildiğimiz takdirde, uzayın da düzlemlerle ayrılışını çözmekte benzerliğin bize yardımcı olacağını ümit edebiliriz. Burada da benzetmenin rehberliğinden istifade zevkini okuyucuya bırakıyoruz.

18. Daha başka faraziyeler. Düzlem ve uzayın parçalara ayrılması konusunu henüz tamamen tüketmiş değiliz. Bu konuda yapılacak ve endüktif muhakemenin uygulanmasına müsait daha birkaç küçük keşif vardır. Özel hallerin dikkatli müşahede ve anlayışlı terkibi sayesinde onlara kolaylıkla ulaşabiliriz.

Düzlemin genel durumda olan n doğru vâsıtası ile bölündüğü parça sayısını ifade eden bir *formül* bulmak isteyebiliriz. Hakikaten, daha basit bir benzer hal için elimizde bir formül mevcuttur: n farklı nokta bir doğruyu $n+1$ parçaya ayırır. Bu yeni problemi çözmek için, yukarıki benzer formül, cedvelimizdeki özel haller, endüktif yolla keşfetmiş (ve hemen hemen ispat etmiş) olduğumuz genel kaide, kısaca buraya kadar elde etmiş olduğumuz bütün neticeler bize yardım edebilirler. Burada tafsilâta girmiyoruz. Burada sadece, yukarda gösterilen yolu takip ederek türlü şekillerde bulabileceğimiz, çözümü kaydedeceğiz.

Bir doğrunun n farklı nokta vâsıtasıyla bölündüğü parça sayısı $1+n$ dir.

Bir düzlemin genel durumda n doğru vâsıtasıyla bölündüğü parça sayısı

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}$$

dir.

Okuyucu bu son formülü kendisi çıkarabilir veya hiç olmazsa en basit hallerde, yani $n=0, 1, 2, 3, 4$ için gerçekleyebilir. Bundan başka aynı tipte, uzayın düzlemler vasıtasıyla parçalara ayrılışına dair bir üçüncü formülü keşif zevkini de

okuyucuya bırakıyoruz. O bu ufak keşfi yapmakla, kendisinin matematik alanındaki endüktif muhakeme tecrübesini genişletebilir ve benzerliğin, küçük veya büyük problemlerin çözümünde bize yaptığı yardımın zevkine varabilir.

III. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. paragrafta faraziye olarak ileri sürmüş olduğumuz $F+V=E+2$ formülü Euler tarafından keşfedilmiştir. Biz bu formüle «Euler formülü» diyecek ve ona bir faraziye gözüyle bakarak Misâl 1—10 da bâzan endüktif olarak bâzan da bir ispat aramak gayesiyle onu türlü şekillerde muayene edeceğiz. Aynı konuya Misâl 21—30 ve 31—41 de geri döneceğiz. Bu son iki grup misâllerin herhangi birine başlamadan evvel, sırasıyla Misâl 21 ve Misâl 31 'i okuyunuz.

1. Ortak tabanlarının iki karşılıklı tarafında bulunan iki piramit bir arada olarak bir «çifte piramit» teşkil eder. Meselâ bir sekizyüzlü, ortak tabanı kare şeklinde olan özel bir çifte piramittir. Euler formülü genel çifte piramit için doğru mudur?

2. Yüz sayısı F, köşe sayısı V ve kenar sayısı E olan bir konveks çokyüzlü alalım ve onun içinde bir P noktası (meselâ çokyüzlünün ağırlık merkezi) seçerek, bu nokta merkez olmak üzere bir küre çizelim. Sonra çokyüzlüyü P merkezinden kürenin yüzeyine izdüşürelim. Bu izdüşürme işlemi çokyüzlünün F tane yüzünü kürenin üzerinde F tane bölgeye yahut «memlekete» dönüştürür; bu işlem aynı şekilde E tane kenarın herbirini iki komşu memleketin ortak sınırına, V tane köşenin herbirini de bir «sınır köşesine», yani üç veya daha fazla sayıda memleketin ortak sınır noktasına («üç memleket sınır köşesi» yahut «dört memleket sınır köşesi», ilâh...) dönüştürür. Bu izdüşürme operasyonu bilhassa basit tabiatta (büyük daire yay-

ları) sınır çizgileri verir ; fakat aşikâr olarak, Euler formülünün *küre yüzeyinin bu tarz memleketlere bölünüşü* için cari olması sınır çizgilerinin sarih şeklinden müstakildir; F, V ve E sayıları bu çizgilerin sürekli deformasyonlara tâbi tutulması halinde değişmezler.

(1) Bir *meridyen*, iki kutbu (Kuzey ve Güney) birleştiren bir büyük dairenin yarısıdır. Bir *paralel daire*, küre yüzeyinin ekvatora paralel bir düzlemle arakesitidir. Dünyanın yüzü m meridyen ve p paralel daire vâsıtası ile F memlekete bölünmüş olduğuna göre, burada F, V ve E yi hesaplayınız. Bu halde Euler formülü cari midir?

(2) Bir sekizyüzlünün kendi P merkezinden küre yüzeyine izdüşümü (1) de anlatılan durumun bir özel halidir. Burada m ve p nin değerleri nedir?

3. Keşifte, tesadüfün bir rolü vardır. Endüksiyon yoluyla keşif, aşikâr olarak, müşahede neticelerine bağlıdır. Paragraf 1 de birtakım çokyüzlülerle karşı karşıya geldik, fakat başka çokyüzlülere de rastlıyabilirdik. Muhtemel olarak düzgün çokyüzlüler gene listemize girmekle beraber, bu liste şöyle olabilirdi:

Çokyüzlü	F	V	E
Dörtyüzlü	4	4	6
Küp	6	8	12
Sekizyüzlü	8	6	12
Beşgen tabanlı prizma	7	10	15
Beşgen tabanlı çifte piramit	10	7	15
On iki yüzlü	12	20	30
Yirmi yüzlü	20	12	30

Burada gözümüze bir kaide çarpıyor mu? Onu izah edebilir misiniz? Onun Euler formülü ile münasebeti nedir?

4. Misâl 3 teki cedvelde müşahede etmiş olduğunuz iki çokyüzlü arasındaki münasebeti genelleştirmeye çalışınız. [Misâl 3 ün çözümünde (2) de anlatılan münasebet çok «dar», çok «tafsilâtlı» dır. Bununla beraber, orada anlatılan durumda bir küp ve bir sekizyüzlü alarak birinin kenarlarını kırmızıya, ötekininkileri maviye boyadıktan sonra onları ortak P merkezinden Misâl 2 de anlatıldığı tarzda bir küre üzerine izdüşürünüz. Sonra bunu genelleştiriniz].

5. Euler formülünü özel bir halde ispat etmek yeter: yalnız üçgen şeklinde yüzleri haiz konveks çokyüzlüler halinde. Neden ? [Paragraf 4.]

6. Euler formülünü özel bir halde ispat etmek yeter: Yalnız üç kenarlı köşeleri haiz olan konveks çokyüzlüler halinde. Neden ? [Paragraf 4.]

7. Euler formülünü ispat ederken kendimizi bir düzlemde alınan şekillere hasredebiliriz. Hakikaten, çokyüzlünün yüzlerinden $F-1$ tanesinin mukavvadan, fakat bir tanesinin camdan yapılmış olduğunu tasavvur edelim. Bu son yüze «pencere» diyeceğiz. Şimdi gözlerinizi çokyüzlünün bütün içini görecek kadar pencereye yaklaştırarak çokyüzlünün içine bakın. (Çokyüzlü konveks olmadığı takdirde bu mümkün olmayabilir.) Görmüş olduğunuz şeyi, pencere düzlemi üzerine çizilmiş bir düzlem şekil olarak tefsir edebilirsiniz: Kendinizi pencerenin daha ufak bir takım çokgenlere *ayrılışını* görüyor sayabilirsiniz.

Bu ayrılışta N_2 tane çokgen, N_1 tane (bâzısı dış, bâzısı iç) doğru sınır çizgisi ve N_0 tane köşe mevcuttur.

(1) N_0, N_1, N_2 yi F, V, E cinsinden ifade ediniz.

(2) Eğer F, V, E için Euler formülü cari ise, N_0, N_1, N_2 arasında hangi formül cari olur ?

8. Bir dikdörtgenin uzunluğu l inç ve genişliği m inçtir.

l ve m burada tam sayılardır. Bu dikdörtgen, kenarlarına paralel doğrular vâsıtasıyla lm eşit kareye ayrılır.

(1) (Misâl 7 de tarif edilmiş olan) N_0, N_1 ve N_2 yi l ve m cinsinden ifade ediniz.

(2) Misâl 7 (2) deki münasebet bu halde cari midir?

9. Misâl 5 ve 7, bir üçgenin, köşelerin $N_0 - 3$ tanesi bu üçgenin içinde olmak üzere, N_2 tane üçgene ayrılışını ele almayı aklımıza getirir. Bu N_2 üçgendeki bütün açıların toplamını iki farklı şekilde hesaplıyarak Euler formülünü ispat edebilirsiniz.

10. Paragraf 7, Euler formülünün 4 ve daha yüksek boyut sayısına teşmilini aklımıza getirir. Böyle bir teşmili nasıl elle tutulur hale getirebiliriz? Onu nasıl gözönüne getirebiliriz?

Misâl 7, çokyüzlüler halinin bir düzlem çokgenin parçalara ayrılışına indirilebileceğini gösterir. Benzerlik te, dört boyutlu halin, bizim gözle görünür üç boyutlu uzayımızdaki bir çokyüzlünün parçalara ayrılışına indirilebileceğini bize ilham eder. Endüksiyon yoluyla gitmek istersek, böyle bir parçalanış misâlini gözden geçirmeliyiz. Benzerlik dolayısıyla, Misâl 7 bize şunu telkin eder:

Bir kutunun (yani bir dik paralelyüzün) boyutları l, m ve n olsun. Bunlar tam sayılar olsun. Kutu, yüzlerine paralel düzlemler vâsıtasıyla lmn eşit kübe ayrılır. N_0, N_1, N_2 ve N_3 sırasıyla bu ayrılışı teşkil eden köşe, kenar, yüz ve çokyüzlü (küp) lerin sayısı olsun.

(1) N_0, N_1, N_2 ve N_3 ü l, m, n cinsinden ifade ediniz.

(2) Burada Misâl 7 nin çözümündeki (2) münasebetine tekabül eden bir münasebet mevcut mudur?

11. P_n, bir düzlemin genel durumda n doğrusu tarafından ayrıldığı parçaların sayısı olsun.

$$P_{n+1} = P_n + (n+1)$$

olduğunu ispat ediniz.

12. S_n, uzayın genel durumda n düzlem tarafından ayrıldığı parçaların sayısı olsun. $S_{n+1} = S_n + P_n$ olduğunu ispat ediniz.

13. Faraziye olarak ortaya atılmış bulunan

$$P_n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

formülünü $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için gerçekleyiniz.

14. S_n için bir formül tahmin ederek, onu $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için gerçekleyiniz.

15. Bir düzlemin genel durumda 4 doğrusu tarafından bölündüğü 11 parçadan kaç tanesi sonludur? [Bu parçalardan kaç tanesi sonsuzdur?]

16. Bir önceki problemi genelleştiriniz.

17. Uzayın genel durumda 5 düzlem tarafından bölündüğü 26 parçadan kaç tanesi sonsuzdur?

18. Beş düzlem bir kürenin merkezinden geçmekte, fakat bundan başka bakımlardan genel durumda bulunmaktadırlar. Küre yüzeyinin bu beş düzlem vâsıtasıyla ayrılmış olduğu parçaların sayısını bulunuz.

19. Bir düzlem ikişer ikişer kesişen fakat başka bakımlardan genel durumda 5 dairesi vâsıtasıyla kaç parçaya ayrılır?

20. Bundan önceki problemleri genelleştiriniz.

21. *Endüksiyon: aklın intibakı, dilin intibakı.* Endüksiyon, aklımızı vâkıalara intibak ettirmekle neticelenir. Fikirlerimizi müşahedelerle karşılaştırınca, ikisi arasında uygunluk veya uyuşmazlık ortaya çıkar. Eğer uygunluk olursa fikirlerimize itimadımız artar; yok, eğer uyuşmazlık varsa fikirlerimizi tâdil ederiz. Bir takım tâdillerden sonra fikirlerimiz vâkıalara daha iyi uyabilir. Herhangi bir yeni konu hakkındaki ilk fikirlerimiz hemen daima — hiç olmazsa kısmen — yanlış olmak istidadındadır; endüksiyon işlemi bize onları düzeltmek, onları hakikate uydurmak hususunda bir imkân verir. Vermiş olduğumuz misâller bu işlemi küçük bir ölçüde, fakat iyice açık olarak göstermektedir. Paragraf 1 de iki veya üç yanlış faraziyeden sonra, nihayet doğru faraziyeye ulaştık. Ona tesadüfen ulaştığımızı söyleyebilirsiniz. Fakat, Lagrange'ın vaktiyle, Newton tarafından yapılmış olan bununla mukayese edilemiyecek kadar büyük bir keşfinin münakaşası sırasında söylemiş olduğu gibi, «böyle tesadüfler ancak onlara lâyık olanların karşılarına çıkar.»

Aklın intibakı, dilin intibakı ile aşağı yukarı aynı şey olabilir; hiç olmazsa her ikisi el ele gider. İlmin ilerleyişi, ilmî terimlerin ilerleyişinde kendini belli eder. Fizikçiler «elektrik», yahut hekimler «hastalıkların sirayeti» nden bahsetmeye başladıkları zaman bu terimler müphem, karanlık ve karışık idiler. Bugünkü âlimlerin kullandıkları «elektrik yükü», «elektrik cereyanı», «mantar enfeksiyonu», «virüs enfeksiyonu» terimleri öncekilerle mukayese kabul etmiyecek kadar daha açık ve daha belirlidir. Fakat bu iki terim grubu arasında ne kadar muazzam sayıda müşahede, ne kadar çok ince tecrübe, hattâ kaç büyük keşif bulunmaktadır! Endüksiyon terim dilini değiştirmiş ve kavramları açıklığa kavuşturmuştur. İşin bu veçhesini de, yani kavramların endüksiyon yardımı ile açıklığa kavuşturulmasını da uygun bir ufak mikyaslı matematik misâlle aydınlatabiliriz. Matematikte pek te seyrek rastlanılmayan bir durum şudur: Bir teorem formüle edilmiştir, fakat onu tam mânasıyla doğru

hale sokmak için teoremin ifadesine giren terimlere daha sarih bir mâna vermekliğimiz icabetmektedir. Bu, göreceğimiz gibi, endüktif bir işlemle kolaylıkla yapılabilir.

Şimdi geriye, Misâl 2 ve onun çözümüne bakalım. Orada, formel bir tarif vermeksizin «kürenin memleketlere ayrılması» ndan bahsetmiştik. F, V ve E sırasıyla böyle bir ayrılıştaki memleket, sınır ve köşelerin sayısını gösterdiği takdirde, bunlar arasında Euler formülünün cari olduğu ümidindeydik. Fakat bunun için gene sadece misâllere ve kaba bir tavsife dayanmış, ve F, V ve E nin formel tariflerini vermemiştik.

Kürenin (yani küre *yüzeyi*nin) bir parçalara ayrılışını ve ona tekabül eden F, V ve E yi ele aldığımızda, bunlar arasında Euler formülü cari ise bu ayrılışa «doğru», aksi takdirde «yanlış» diyelim. «Doğru» ve «yanlış» haller arasında açık ve basit bir farkın keşfinde bize yardım edebilecek ayrılış misâlleri veriniz.

22. Bütün küre yüzü tek bir memleketten ibarettir. Bu hal doğru mudur? (Burada «doğru» dan maksat, Euler formülü bakımından doğruluktur).

23. Küre yüzeyi batı yarımküresi ve doğu yarımküresi olmak üzere tam iki memlekete ayrılmıştır. Bu hal yanlış mıdır?

24. İki paralel daire küreyi üç memlekete ayırmaktadır. Bu hal doğru mudur, yoksa yanlış mıdır?

25. Üç meridyen küreyi üç memlekete ayırmaktadır. Bu hal doğru mudur, yoksa yanlış mıdır?

26. Kürenin m meridyen ve p paralel daire vâsıtasıyla ayrılışına «(m, p) ayrılışı» diyelim. (Misâl 2 (1) 'e bakınız). $(0, p)$ üç hali doğru mu, yoksa yanlış mıdır?

27. $(m, 0)$ uç hali doğru mu, yoksa yanlış mıdır? (Misâl 26 ya bakınız).

28. (m, p) ayrılışlarının (Misâl 26 ya bakınız) hangisi Misâl 2 de anlatılan işlemle meydana getirilebilir? (Bir konveks çokyüzlünün küre üzerindeki izdüşümünü aldıktan sonra, izdüşümdeki sınırların memleket sayısı ve her memleketin sınır sayısını değiştirmeyen sürekli deformasyonu.) m ve p ye dair hangi şartlar bu ayrılışları karakterize eder?

29. Euler formülünün cari olmadığı hallerdeki misâllerin ötekilerden farkı nedir? F, V ve E nin mânasını daha açık hale getiren hangi geometrik şartlar Euler formülünün cari oluşunu garanti eder?

30. Misâl 29 daki cevabı aydınlatacak daha başka misâller ileri sürünüz.

31. *Descartes'ın çokyüzlülere dair çalışmaları.* Descartes'ın bırakmış olduğu elyazıları arasında çokyüzlülerin genel teorisine dair kısa notlar bulunmakta idi. Bunların (Leibniz'in eliyle yapılmış) bir kopyesi, Descartes'in ölümünden iki yüz seneden fazla bir zaman sonra, 1860 ta keşfedilerek bastırılmıştı (Descartes. *Oeuvres*, vol. 10, S. 257—276 ya bakınız). Bu notlar Euler teoremine çok yakın konulara dair olup, bu teorem onlarda açık olarak ifade edilmemiş olmakla beraber, onların ihtiva ettiği bazı neticelerden derhal çıkarılabilir.

Descartes ile birlikte bir konveks çokyüzlü ele alalım. Bu çokyüzlünün herhangi bir yüzündeki herhangi bir açısına bir *yüzey açısı* diyelim ve çokyüzlünün bütün yüzey açılarının toplamını $\Sigma\,\alpha$ ile gösterelim. Descartes $\Sigma\,\alpha$ yı iki farklı tarzda hesaplamakta olup, Euler teoremi bu iki ifadenin karşılaştırılmasından derhal elde edilebilir.

Aşağıki misâller okuyucuya Descartes'in bazı neticelerini

yeniden bulmak fırsatını verecektir. Bu misâllerde şu yazış tarzını kullanacağız:

F_n, n kenarlı yüzlerin,

V_n, n kenarlı (yani kendisinde n tane kenarın son bulduğu) köşelerin sayısını gösterecektir, ki neticede

$$F_3 + F_4 + F_5 + \cdots = F,$$

$$V_3 + V_4 + V_5 + \cdots = V$$

olacaktır. Çokyüzlünün bütün kenarlarının sayısını E ile göstermekte devam edeceğiz.

32. Bir çokyüzlüdeki bütün yüzey açılarının sayısını üç tarzda ifade ediniz: F_3, F_4, F_5, ... cinsinden, V_3, V_4, V_5, ... cinsinden ve nihayet E cinsinden.

33. $\Sigma\alpha$ yı beş düzgün çokyüzlü, yani düzgün dörtyüzlü, küp, düzgün sekiz, on iki ve yirmi yüzlüler için hesaplayınız.

34. $\Sigma\alpha$ yı F_3, F_4, F_5, ... cinsinden hesaplayınız.

35. $\Sigma\alpha$ yı E ve F cinsinden ifade ediniz.

36. *Bütünleyici uzay açıları, bütünleyici küresel çokgenler.* Daha alışılmış bir terim olan «çokyüzlü açı» yerine, burada «uzay açısı» diyeceğiz.

Öyle iki konveks uzay açısı alalım ki, bunlar aynı yüz sayısını ve aynı köşeyi haiz olsunlar, fakat bunların ortak köşeden başka hiçbir ortak noktası bulunmasın. Bu iki uzay açısından birinin herbir yüzüne ikincisinin bir kenarı tekabül etsin ve bu yüz o kenara daima dik olsun. (İki uzay açısı arasındaki bu münasebet karşılıklıdır: birinci uzay açısındaki, o açının iki bitişik yüzünün arakesiti olan, e kenarı da ikinci uzay açısında

bir f' yüzüne tekabül eder, öyle ki f', birinci açının yukarda bahsedilen iki bitişik yüzüne ikinci açıda tekabül eden iki kenarın sınırladığı yüz olsun.) Karşılıklı olarak bu durumda olan iki uzay açısına *bütünleyici* uzay açıları denir. (Bu terim pek alışılmış olmamakla beraber, düzlemdeki âdi iki bütünleyici açı buna benzer bir duruma sokulabilir). Bütünleyici iki açıdan herbirine diğerinin bütünleyeni denir.

İki bütünleyici uzay açısının ortak köşesi merkez olmak üzere çizilen 1 yarıçaplı küre bu açılar tarafından iki küresel çokgen boyunca kesilir. Bu çokgenlere de bütünleyici çokgenler denir.

İki bütünleyici küresel çokgen ele alalım. Birinci çokgenin kenarlarını $a_1, a_2, \ldots, a_n$, açılarını $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alanını A, çevresini P ile gösterelim. İkinci çokgenin bunlara tekabül eden parçalarını da sırasıyla $a', a_2', \ldots, a_n', \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', A', P'$ ile gösterelim. Bu takdirde, eğer indeksler uygun seçilmişse

$$a_1 + \alpha_1 = a_2 + \alpha_2' = \cdots a_n + \alpha_n' = \pi,$$
$$a_1' + \alpha_1 = a_2' + \alpha_2 = \cdots a_n' + \alpha_n = \pi$$

olur. Bunlar iyi bilinen ve kolayca görülebilen münasebetlerdir. Şimdi

$$P + A' = P' + A = 2\pi$$

olduğunu ispat ediniz.

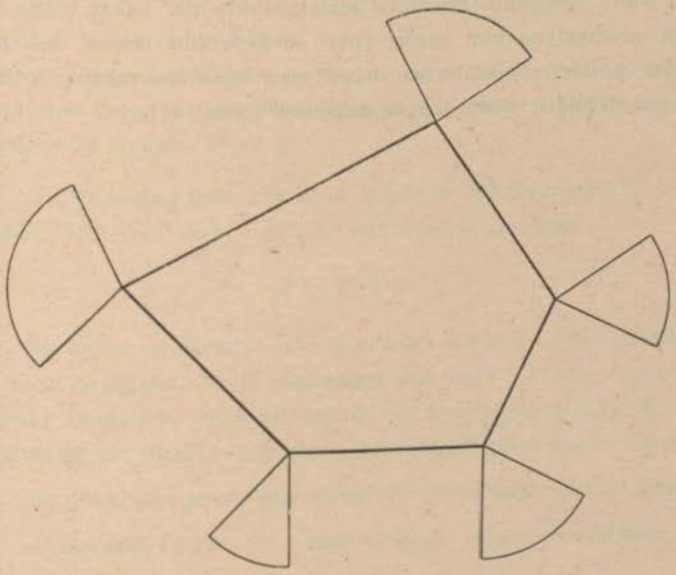
[Açıları α, β, γ olan bir küresel üçgenin alanının, o üçgenin $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ «küresel fazlalığı» na eşit olduğunu biliniyor kabûl ediniz].

37. «Nasıl bir düzlem şekildeki bütün dış açıların toplamı 4 dik açıya eşitse, bir uzay şeklinde de bütün dış uzay açılarının toplamı da 8 dik açıya eşittir». Descartes'ın notlarında bulunan bu cümleyi, ispat edebileceğiniz bir teorem şeklinde tefsir etmeye çalışınız [Şek. 3.7 ye bakınız].

38. $\Sigma \alpha$ yı V cinsinden ifade ediniz.

39. Euler teoremini ispat ediniz.

40. Paragraf 1 deki ilk cümle müphem olmakla beraber, bize birçok sarih ifadeler telkin edebilir. Bunlardan, o paragrafta bahsetmemiş olduğumuz bir tanesi şudur: «F, V ve E sayılarından herhangi biri ∞'a giderse, diğer ikisi de ∞'a gitmek zorun-



Şek. 3.7. Bir çokgenin dış açıları

dadır.» Konveks çokyüzlüler için genel olarak cari bulunan ve ve yukarıkinden de daha sarih bilgi veren aşağıki eşitsizlikleri ispat ediniz:

$$2E \geq 3F, \quad 2V \geq F+4, \quad 3V \geq E+6,$$

$$2E \geq 3V, \quad 2F \geq V+4, \quad 3F \geq E+6.$$

Yukarıki eşitsizliklerde eşitlik hali hiç cari olabilir mi? Olursa, hangi nevi çokyüzlüler için?

41. Bütün yüzleri aynı cinsten, yani aynı sayıda kenarı haiz, çokgenlerden ibaret olan konveks çokyüzlüler mevcuttur. Meselâ bir dörtyüzlünün bütün yüzleri üçgenlerden, bir dik paralelyüzün bütün yüzleri dörtgenlerden, bir düzgün on iki yüzlünün bütün yüzleri beşgenlerden ibarettir. «Ve bu böylece devam eder» demekten kendinizi alamıyabilirsiniz. Fakat böyle bir basit endüksiyon bizi yanlış yola sevkedebilir. Meselâ aslında, bütün yüzleri altıgenlerden ibaret olan *hiçbir* konveks çokyüzlü mevcut değildir. Bunu ispata çalışınız. [Misâl 31].

IV

SAYILAR TEORİSİNDE ENDÜKSİYON

Endüksiyon yoluyla en zarif yeni hakikatlerin beklenmedik bir talih eseri olarak ortaya çıkması, Sayılar Teorisinde oldukça sık vukubulan bir olaydır. GAUSS [1]

1. Kenarları tam sayılarla ölçülen dik üçgenler [2]. Kenarları 3, 4 ve 5 olan üçgen bir dik üçgendir, çünkü

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

dir. Bu üçgen, kenarları tam sayılarla ölçülen dik üçgenlerin en basit örneğidir. Böyle «kenarları tam sayı olan dik üçgenler» Sayılar Teorisinde eskidenberi bir rol oynamışlardır; hattâ eski Babilonyalılar bile bu üçgenlerin bazı özeliklerini keşfetmişlerdi.

Bu türlü üçgenlere dair en aşikâr problemlerden biri şudur:

Hipotenüsü verilen bir n tam sayısına eşit olan tam sayı kenarlı bir dik üçgen var mıdır?

Şimdi dikkatimizi bu problem üzerinde toplayalım. Hipotenüsü verilen n tam sayısı ve dik kenarları da x ve y gibi diğer

---

[1] *Werke*, vol. 2, S. 3.

[2] Bu bölümün bazı parçaları daha önce *Études de philosophie des sciences en hommage à Ferdinand Gonseth.* Éditions du Griffon, 1950 adlı kitapta «Let us teach guessing» (tahmin etmeyi öğretelim) başlığı altında yayınlanmıştır. Bu kitabın 147—154 sahifelerine bakınız.

iki tam sayı ile ölçülen bir dik üçgen arıyoruz. x'in iki dik kenardan uzununu gösterdiğini kabûl edebiliriz. Şu halde, n verildiğine göre aşağıki şartlara uyan iki x, y (pozitif) tam sayısı arıyoruz :

$$n^2 = x^2 + y^2, \quad 0 < y \leq x < n.$$

Probleme endüksiyonla hücum edebiliriz. Zaten, konuya has belirli bir bilgimiz olmadığı takdirde elimizde başka bir yol da yoktur. Şu halde bir misâl alalım, meselâ $n = 12$ olsun. Bu takdirde $x \geq y$ ve

$$144 = x^2 + y^2$$

olacak şekilde iki x, y pozitif tam sayısı arıyoruz.

Burada x^2 hangi değerleri alabilir? Şüphesiz ancak şunları:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121. Acaba $x^2 = 121$ olabilir mi? Yani

$$144 - x^2 = 144 - 121 = y^2$$

bir tam kare midir? Hayır, 23 bir tam kare değildir. Şimdi x^2 nin diğer değerlerini de denememiz lâzımdır, fakat aslında bunlardan pek fazla miktarını denemeye hacet yoktur. Çünkü $y \leq x$ olduğundan

$$144 = x^2 + y^2 \leq 2x^2,$$

$$x^2 \geq 72$$

dir. Şu halde geriye ancak $x^2 = 100$ ve $x^2 = 81$ imkânları kalmaktadır. Halbuki

$$144 - 100 = 44 \quad , \quad 144 - 81 = 63$$

sayılarının da hiçbiri tam kare değildir. Neticede sorumuza şu

cevabı elde etmiş olduk: Hipotenüsü 12 olan tam sayı kenarlı hiçbir dik üçgen yoktur.

Hipotenüsün 13'e eşit olması halinde de aynı şekilde hareket ederiz.

$$169 - 144 = 25, \quad 169 - 121 = 48, \quad 169 - 100 = 69$$

sayılarından sadece bir tanesi tam kare olduğundan, hipotenüsü 13 olan bir tane tam sayı kenarlı üçgen vardır:

$$169 = 144 + 25$$

(Yani bu üçgenin dik kenarları $x = 12$ ve $y = 5$ tir).

Aynı yolla ve biraz sabırla meselâ 20 gibi çok yüksek olmayan (verilmiş) bir sınırın altındaki bütün sayıları elden geçirebiliriz. Bu suretle 20 nin altında ancak beş tane «hipotenüs» bulabiliriz ki, onlar da 5, 10, 13, 15 ve 17 den ibarettir:

$$25 = 16 + 9$$
$$100 = 64 + 36$$
$$169 = 144 + 25$$
$$225 = 144 + 81$$
$$289 = 225 + 64$$

Bu arada 10 ve 15 hallerinin pek enteresan olmadıklarını söyleyebiliriz. Çünkü kenarları 10, 8 ve 6 olan üçgen, kenarları 5, 4, 3 olan daha basit üçgene benzer olduğu gibi, aynı şey kenarları 15, 12 ve 9 olan üçgen için de vâkidir. Hipotenüsleri sırasıyla 5, 13 ve 17 olan geri kalan üç dik üçgen aralarında esastan farklıdır, yani içlerinde hiçbiri diğerine benzer değildir.

Bundan başka buradaki 5, 13 ve 17 sayılarının her üçünün de *tek asal sayılar* olduğu gözümüze çarpabilir. Bununla birlikte, bunlar 20 nin altındaki bütün tek asal sayıların tamamını teşkil etmezler; geriye 3, 7, 11 ve 19 kalır. Fakat bu sonuncuların

hiçbiri bir «hipotenüs» değildir. Acaba neden? Yukarıki iki asal sayı takımı arasında ne gibi bir fark vardır? *Ne zaman (hangi şartlar altında) bir tek asal sayı tam sayı kenarlı bir dik üçgenin hipotenüsü olur, ne zaman olmaz?*

Bu, başlangıçtaki sorumuzun tadil edilmiş bir şeklidir. Bu şekil daha ümit verici görünebilir; hiç olmazsa yenidir. Bu şekli gene endüksiyon yoluyla araştıralım. Biraz sabırla aşağıki cedveli inşa edebiliriz (— işareti p nin o değerini hipotenüs olarak kabûl eden hiçbir tam sayı kenarlı dik üçgen bulunmadığını gösterir):

p tek asal sayısı	Hipotenüsü p olan dik üçgenler
3	—
5	$25 = 16 + 9$
7	—
11	—
13	$169 = 144 + 25$
17	$289 = 225 + 64$
19	—
23	—
29	$841 = 441 + 400$
31	—

Bir asal sayı ne zaman bir hipotenüstür, ne zaman değildir? İki hal arasındaki fark nedir? Bir fizikçi de kendi kendisine buna çok benzer bazı sorular sorabilir. Meselâ kristallerde çift kırılmayı araştırırken bazılarının çift kırılma özeliğini haiz olduğunu, diğerlerinde ise bu özeliğin bulunmadığını görür. Acaba hangi kristallerde çift kırılma olur, hangilerinde olmaz? Bu iki hal arasındaki fark nedir?

Nasıl fizikçi kristallerine bakarsa, biz de aşağıki iki asal sayı takımımıza bakarız:

5, 13, 17, 29, ... ve 3, 7, 11, 19, 23, 31, ...

Bu iki takım arasında karakteristik bir fark arıyoruz. Her iki takımdaki asal sayılar gayrı muntazam sıçramalarla artmaktadır. Şimdi bu sıçramaların uzunluklarına, yani bu takımlardaki sayıların müteakip farklarına bakalım:

5	13	17	29		3	7	11	19	23	31
	8	4	12			4	4	8	4	8

Bu farkların bir çoğu 4 e eşittir ve kolayca görüleceği üzere, *hepsi de 4 ile (tam olarak) bölünebilmektedir.* Başında 5 bulunan birinci takımdaki asal sayılar 4 ile bölününce hep 1 kalanını bırakırlar, yani n tam olmak üzere $4n + 1$ şeklindedirler. Başında 3 bulunan ikinci takımdaki asal sayılar ise $4n + 3$ şeklindedirler. Acaba bu, aradığımız karakteristik fark olabilir mi? Eğer bu imkânı baştan bir kenara bırakmazsak, şu faraziyeye varmış oluruz: *$4n + 1$ şeklindeki bir asal sayı bir tek tam sayı kenarlı dik üçgenin hipotenüsüdür; $4n + 3$ şeklinde bir asal sayı ise böyle hiçbir üçgenin hipotenüsü olamaz.*

2. Kare toplamları. Bir veçhesini biraz önce (paragraf 1 de) münakaşa etmiş olduğumuz tam sayı kenarlı dik üçgenler problemi, evvelce söylemiş olduğumuz gibi, Sayılar Teorisi tarihinde önemli bir rol oynamıştır. Hakikaten, bu problem diğer birçok sorulara yol açmaktadır. Tam kare olsun veya olmasın, hangi sayılar iki kare toplamına ayrılabilir? İki kare toplamına ayrılamıyan sayılar ne olur? Belki bunlar üç kare toplamına ayrılabilir; bu takdirde üç kare toplamına ayrılamıyan sayılarda durum nasıldır?

Bu sorulara sonsuz devam edebilirdik; fakat burada şayanı dikkat olan nokta, buna ihtiyacımız bulunmadığıdır. (Matematik eğlencelere dair ilk basılı kitabın müellifi olan) Bachet de

Méziriac, *her sayının* (yani her pozitif tam sayının) *ya bir tam kare, yahut ta iki veya üç veya dört tam karenin toplamı olduğunu* kaydetmiştir. Bachet, bu hususa dair bir ispata sahip bulunduğu iddiasında olmayıp, kendisini bu iddiaya sevkeden ipuçlarını Diophantos'un bazı problemlerinde bulmuş ve onu 325' e kadar gerçeklemişti.

Kısaca, Bachet'nin ifadesi (endüksiyonla bulunmuş) bir faraziyeden ibaretti. Bence Bachet'nin yapmış olduğu esas iş şu soruyu sormuş olmaktır: *Bütün pozitif tam sayıları göstermek için* KAÇ TANE *kareye ihtiyacımız vardır?* Bir kere bu soru açık olarak ortaya konduktan sonra, onun cevabını endüksiyonla keşfetmekte fazla bir güçlük yoktur. Bunun için şu şekilde başlayan bir cedvel tertip ederiz:

$$1 = 1$$
$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 1 + 1 + 1$$
$$4 = 4$$
$$5 = 4 + 1$$
$$6 = 4 + 1 + 1$$
$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$
$$8 = 4 + 4$$
$$9 = 9$$
$$10 = 9 + 1$$

Burada iddia 10' a kadar gerçeklenmiş oluyor. Yalnız 7 sayısı için dört kare lâzım olup, diğerleri bir, veya iki veya üç karenin toplamı olarak gösterilebiliyor. Bachet bu cedveli 325' e kadar uzatmış olup, dört kare toplamı olan daha birçok sayılar bulmuş, fakat dörtten fazla kareye ihtiyaç gösteren hiçbir sayıya rastlamamıştır. Bu kadar endüktif delilin onu hiç olmazsa bir dereceye kadar tatmin etmiş olduğu görülüyor. Bundan dolayıdır ki iddiasını yayınlamıştır. Bachet bu iddiasında talihli

olmuştur, çünkü faraziyesi doğru çıkmış ve bu suretle, aşağıki şekilde de ifade edebileceğimiz «dört kare teoremi» nin kâşifi olmuştur: n verilmiş herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denkleminin x, y, z, w ye göre negatif olmayan tam sayılı çözümleri mevcuttur.

Bir sayının bir kareler toplamına ayrılışının başka veçheleri de vardır. Meselâ,

$$n = x^2 + y^2$$

denkleminin x, y ye göre tam sayılı çözümlerinin sayısını da araştırabiliriz. Burada ya yalnız pozitif tam sayıları, yahut pozitif, negatif veya 0 olmak üzere bütün tam sayıları çözüm olarak kabûl edebiliriz. Eğer problemi ikinci şekilde alırsak, meselâ $n = 25$ için

$$25 = x^2 + y^2$$

denkleminin aşağıki 12 çözümünü buluruz;

$$\begin{aligned} 25 &= 5^2 + 0^2 = (-5)^2 + 0^2 = 0^2 + 5^2 = 0^2 + (-5)^2 \\ &= 4^2 + 3^2 = (-4)^2 + 3^2 = 4^2 + (-3)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 \\ &= 3^2 + 4^2 = (-3)^2 + 4^2 = 3^2 + (-4)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 \end{aligned}$$

Bu arada, bu çözümlerin enteresan bir geometrik tefsirinin mevcut olduğunu da söyleyelim. Fakat onu burada münakaşa etmemize lûzum yoktur. (Misâl 2 ye bakınız.)

3. Dört tek kare toplamına dair. Kare toplamlarına dair birçok problem arasında biraz uzak görünen, fakat fevkalâde öğretici olduğu meydana çıkacak olan bir problem seçeceğiz.

u bir tek pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denkleminin x, y, z, w ye göre tek pozitif tam sayılı çözümlerinin sayısını endüksiyon yoluyla araştırınız.

Meselâ, $u = 1$ olduğu takdirde

$$4 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denklemini elde ederiz ki, bunun, aşikâr olarak, $x=y=z=w=1$ den ibaret yalnız bir tane çözümü vardır. Hakikaten burada

$$x = -1, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad w = 1$$

yahut

$$x = 2, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

takımlarına x, y, z, w için tek pozitif tam sayı olmak şartını koştuğumuzdan, birer çözüm gözüyle bakmıyoruz. $u = 3$ e tekabül eden denklem

$$12 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

dir ve bunun

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad w = 1 \qquad \text{ile}$$

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 1, \quad w = 1$$

den ibaret iki farklı çözümü vardır.

x, y, z ve w nin değerleri üzerine koymuş olduğumuz tahdidi belirtmek üzere «çözüm» terimini kullanmaktan kaçınacağız ve onun yerine «$4u$ nun dört tek kare toplamı şeklinde gösterilişi» gibi daha özel bir ifade kullanacağız. Fakat bu ifade de uzun olduğundan, onu birçok şekillerde kısaltacağız, hattâ bazan «gösteriliş» ten ibaret tek bir kelimeye indireceğiz.

4. Bir misâlin muayenesi. Kendimizi problemimizin manâsına alıştırmak için, bir misâl ele alalım: $u = 25$ olsun. Bu

takdirde $4u = 100$ olur ki, şimdi 100 ü dört tane tek karenin toplamı olarak göstermemiz icabeder. Bu maksat için elimizde hangi tek kareler vardır? Bu tek kareler

$$1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81$$

den ibarettir. Eğer 81, toplamı 100 eden dört kareden biri ise, geri kalan üçünün toplamı

$$100 - 81 = 19$$

olmalıdır. 19 dan küçük olan 1 ve 9 olup, $19 = 9 + 9 + 1$, terimler büyüklük sırasına göre sıralandığı takdirde, 19 u üç tek karenin toplamı olarak göstermek için yegâne imkândır. Neticede

$$100 = 81 + 9 + 9 + 1$$

elde ederiz. Benzer tarzda

$$100 = 49 + 49 + 1 + 1,$$
$$100 = 49 + 25 + 25 + 1,$$
$$100 = 25 + 25 + 25 + 25$$

buluruz.

Evvelâ en büyük kareyi ayırmak suretiyle sistemli olarak hareket edersek, 4 karenin azalan (daha doğrusu artmayan) büyüklüklere göre sıralanması şartıyla yukarda bütün imkânları tüketmiş olduğumuza kanaat getirebiliriz. Fakat, terimlerin her türlü sıralanmasını hesaba kattığımız takdirde - ki bu lâzımdır - daha fazla imkânlar mevcuttur. Meselâ:

$$\begin{aligned} 100 &= 49 + 49 + 1 + 1 \\ &= 49 + 1 + 49 + 1 \\ &= 49 + 1 + 1 + 49 \\ &= 1 + 49 + 49 + 1 \\ &= 1 + 49 + 1 + 49 \\ &= 1 + 1 + 49 + 49 \end{aligned}$$

Bu 6 toplam aynı terimleri haizdir, fakat bu terimlerin sırası değişiktir; problemimizin ifadesine göre bunlar 6 tane farklı gösteriliş sayılmalıdır. Terimleri artmayan

$$100 = 49 + 49 + 1 + 1$$

gibi bir gösteriliş diğer 5 gösterilişin kaynağı olup, hepsi birden 6 gösteriliş eder. Benzer şekilde hareket ederek şu cedveli yapabiliriz :

Artmıyan büyüklüklere göre sıralanmış terimler	*Onlardan sadece sıra değişiklikleriyle fark eden gösterilişlerin sayısı*
$81 + 9 + 9 + 1$	12
$49 + 49 + 1 + 1$	6
$49 + 25 + 25 + 1$	12
$25 + 25 + 25 + 25$	1

Hepsini toplarsak, $u = 25$ ve $4u = 100$ halinde $4u = 100$ ün 4 tek karenin toplamı olarak gösterilişlerinin miktarı için

$$12 + 6 + 12 + 1 = 31$$

sayısını buluruz.

5. Müşahede neticelerinin cedvel halinde tertiplenmesi. $4u = 100$ ve gösteriliş sayısının 31 olduğu $u = 25$ özel hali problemin manâsını bize açık olarak göstermişti. Şimdi en basit halleri, yani $u = 25$ ' e kadar $u = 1, 3, 5, \ldots$ hallerini sistematik olarak araştırabiliriz. Bunlara dair Cedvel I i inşa edelim (okuyucu bu cedveli kendisi hesaplamalıdır, yahut hiç olmazsa aşağıda verilen rakamların bir kısmını kontrol etmelidir.)

Cedvel I

u	$4u$	Artmayan sıralama	Yandaki artmayan sıralamadan elde edilen değişik sıramaların sayısı	Toplam gösteriliş sayısı
1	4	1 + 1 + 1 + 1	1	1
3	12	9 + 1 + 1 + 1	4	4
5	20	9 + 9 + 1 + 1	6	6
7	28	25 + 1 + 1 + 1	4	8
		9 + 9 + 9 + 1	4	
9	36	25 + 9 + 1 + 1	12	13
		9 + 9 + 9 + 9	1	
11	44	25 + 9 + 9 + 1	12	12
13	52	49 + 1 + 1 + 1	4	14
		25 + 25 + 1 + 1	6	
		25 + 9 + 9 + 9	4	
15	60	49 + 9 + 1 + 1	12	24
		25 + 25 + 9 + 1	12	
17	68	49 + 9 + 9 + 1	12	18
		25 + 25 + 9 + 1	6	
19	76	49 + 25 + 1 + 1	12	20
		49 + 9 + 9 + 9	4	
		25 + 25 + 25 + 1	4	
21	84	81 + 1 + 1 + 1	4	32
		49 + 25 + 9 + 1	24	
		25 + 25 + 25 + 9	4	
23	92	81 + 9 + 1 + 1	12	24
		49 + 25 + 9 + 9	12	
25	100	81 + 9 + 9 + 1	12	31
		49 + 49 + 1 + 1	6	
		49 + 25 + 25 + 1	12	
		25 + 25 + 25 + 25	1	

6. Kaide nedir? u tek sayısı ile, $4u$ nun dört tek kare toplamı olarak gösterilişi arasında göze çarpan bir kanun, basit bir bağ var mıdır?

Bu soru problemimizin özüdür. Bu soruya önceki paragrafta toplanmış ve cedvel haline sokulmuş müşahedelere dayanarak cevap vermeliyiz. Biz burada, tecrübî verilerinden bir kaide çıkarmaya çalışan bir tabiat bilgininin durumundayız. Şu anda elimizde bulunan tecrübî malzeme iki paralel sayı sırasından ibarettir.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31

Birinci sıra müteakıp tek sayılardan mürekkeptir, fakat ikinci sıraya hâkim olan kaide nedir?

Bu soruyu cevaplandırmaya çalışırsak, ilk duyacağımız his yeise çok yakın bir şey olabilir. İkinci sıra o kadar intizamsız görünmekte ve onun meydana geliş tarzı o kadar karışıktır ki, onda herhangi bir kaide bulmak ümidini pek besleyemeyiz. Bununla birlikte, onun karışık meydana geliş tarzını unutur ve dikkatimizi sadece önümüzdeki rakamlar üzerinde toplarsak, farkına varılabilecek kadar kolay bir nokta gözümüze ilişir. İkinci sıradaki bir terimin kendisine birinci sırada tekabül eden terimden tam bir birim fazla oluşu oldukça sık tekrarlanmaktadır. Bu halleri belirtmek için kalın rakamlar kullanmak suretiyle yukarıki tecrübî malzeme şu şekle girer:

1	**3**	5	7	9	**11**	**13**	15	**17**	**19**	21	**23**	25
1	4	6	8	13	12	14	25	18	20	32	24	31.

Burada dikkatimizi çeken kalın rakamları tanımak güç değildir: Onlar hep *asal*dır. Hakikaten onlar, cedvelin kapsadığı kadar, birinci sıradaki *bütün* asal sayılardır. Bu nokta, sıramızın

meydana geliş tarzını hatırladığımızda, bizde hayret uyandırabilir. O zaman sadece kareleri nazarı itibara almış olup, asal sayılarla hiçbir alâkamız olmamıştı. Şimdi asal sayıların problemimizde bir rol oynaması garip değil midir? Yukarıki müşahedemizin önemli olduğu ve onun arkasında şayanı dikkat bir şey bulunduğu intibaından kaçınmak güçtür.

Birinci sıradaki kalın olmayan rakamlar için durum nasıldır? Onlar hep tek sayılar olmakla beraber, asal değildirler. Onların ilki 1, yani birim olup, diğerleri mürekkep sayılardır:

$$9=3\times 3,\quad 15=3\times 5,\quad 21=3\times 7,\quad 25=5\times 5.$$

İkinci sırada bunlara tekabül eden sayıların tabiatı nedir?

Eğer u tek sayısı asal ise, ona ikinci sırada tekabül eden sayı $u+1$ idi; eğer u asal değilse ona tekabül eden sayı artık $u+1$ değildir. Bunu zaten yukarda görmüştük. Burada ufak bir ihtar ilâve edebiliriz: $u=1$ ise, ona tekabül eden sayı gene 1 dir, yani $u+1$ den daha küçüktür, fakat u nun asal olmadığı bütün diğer hallerde ikinci sıradaki sayı $u+1$ den *büyüktür*. Yani u birim, asal veya mürekkep bir sayı olduğuna göre, u ya tekabül eden sayı $u+1$ den küçük, $u+1$ e eşit, veya $u+1$ den büyüktür. Burada bir intizam göze çarpıyor.

Şimdi dikkatimizi birinci sıradaki mürekkep sayılarla, bunlara ikinci sırada tekabül eden sayılar üzerinde toplayalım:

3×3	3×5	3×7	5×5
13	24	32	31

Burada garip bir şey var. İlk sıradaki karelere ikinci sırada asal sayılar tekabül ediyor. Fakat elimizdeki müşahede sayısı henüz pek az bulunduğundan, bu ifadeye belki de fazla bir ağırlık vermemeliyiz. Bununla birlikte, karşıt olarak, birinci

sıranın kare olmayan mürekkep sayılarının altındaki ikinci sıraya ait sayılar da asal değildir:

$$3 \times 5 \qquad 3 \times 7$$
$$4 \times 6 \qquad 4 \times 8.$$

Burada gene garip bir şey var. İkinci sıradaki sayıların her çarpanı, birinci sırada kendisine tekabül eden çarpandan tam bir birim fazladır. Fakat müşahedelerimiz henüz pek az olduğundan, bu ifadeye pek fazla ağırlık vermemek daha doğrudur. Bununla birlikte bu iddia, evvelki bir iddia ile bir parça paralellik göstermektedir. Evvelce, p asal olmak üzere,

$$p$$
$$p+1$$

in farkına varmıştık; şimdi ise, p ve q asal olmak üzere

$$pq$$
$$(p+1)(q+1)$$

gözümüze çarpıyor. Burada bir intizam mevcuttur.

pq ye tekabül eden sayıyı başka bir tarzda yazdığımız takdirde, belki durumu daha berrak görebiliriz:

$$(p+1)(q+1) = pq + p + q + 1.$$

Burada ne görebiliriz? Bu pq, p, q, 1 sayıları nedir? Her halukârda

$$9 \qquad 25$$
$$13 \qquad 31$$

halleri hâlâ izah edilmemiş olarak kalmaktadır. Hakikaten, evvelce

görmüş olduğumuz gibi 9 ve 25 'e tekabül eden sayılar sırasıyla $9+1$ ve $25+1$ den daha büyüktür:

$$13=9+1+3, \qquad 31=25+1+5$$

Bu sayılar nedir?

Eğer başka bir yerden bir ufak kıvılcım daha gelirse, belki yukarıki parça parça iddiaları bir tutarlı bütün haline, elimizdeki dağınık ipuçlarını tekabülün tamamını aydınlatan bir bütün haline sokabiliriz:

p	pq	9	25	1
$p+1$	$pq+p+q+1$	$9+3+1$	$25+5+1$	1.

BÖLENLER! İkinci sıradaki sayılar birinci sıradakilerin bölenler toplamlarını göstermektedir. Bu, aranan kaide, bir keşif, hakikî bir keşif olabilir: *Birinci satırdaki her sayıya, kendisinin bölenlerinin toplamı tekabül ediyor.*

Böylece bir faraziyeye, belki de Gauss'un «en zarif yeni hakikatler» inden birine sevkedilmiş olduk: *Eğer u bir tek sayı ise, $4u$ nun dört tek kare toplamı olarak gösterilişlerinin sayısı u nun bölenlerinin toplamına eşittir.*

7. Endüktif keşfin tabiatı hakkında. (3 ten 6 ya kadar) gerideki paragraflara tekrar bakarsak, sorulacak bir çok sorular bulabiliriz.

Orada ne elde ettik? Tabiatıyle ne bir ispat, hattâ ne de bir ispatın gölgesi, fakat sadece bir faraziye. Bu faraziye, tecrübî malzememizin sınırları içindeki vâkıaların basit bir tasviri ile, bu tasvirin o sınırların dışında da doğruluğuna dair bir ümitten ibarettir.

Faraziyemizi nasıl elde ettik? Tıpkı vasatî insanlar, yahut

matematik dışı bir alanda çalışan bilim adamlarının kendi faraziyelerini elde ettikleri tarzda. Biz yukarda alâka alanımıza dair müşahedeler topladık, onları muayene ve mukayese ettik, onlarda parça parça kaideler gördük, tereddüt ettik, yanıldık, ve nihayet *dağınık teferruatı mânalı bir bütün intibaı veren* bir şekle soktuk. Buna tamamen benzer tarzda, bir arkeolog da aşınmış bir taş üzerinde okuyabildiği birkaç dağınık harften bütün bir kitabeyi ortaya çıkarabilir, yahut ta bir paleontolog fosil haline gelmiş birkaç kemikten hareket ederek nesli tükenmiş bir hayvanın canlı haldeki durumunun anahatlarını meydana çıkarabilir. Bizim uğraştığımız haldeki mânalı bütün, bu hale uygun birleştirici kavram olan bölenlerin farkına vardığımız zaman ortaya çıkmıştır.

8. Endüktif delilin tabiatı hakkında. Geriye birkaç soru daha kalıyor.

Elimizdeki delil ne derece kuvvetlidir?

Bu sorunuz eksiktir. Siz burada tabiatıyle paragraf 6 da ifade edilmiş olan faraziyemiz hakkında paragraf 5 teki Cedvel I den çıkarabileceğimiz endüktif delilden bahsediyorsunuz; bu anlaşıldı. Fakat «kuvvetli» den maksat nedir? Bir delil ikna edici olduğu zaman kuvvetlidir; onun ikna edici olması için ise, bir kimseyi ikna etmesi lâzımdır. Fakat siz, onun kimi ikna etmesi lâzımgeldiğini söylemediniz: beni, yahut sizi, yahut Euler'i veya matematikte henüz ilerlememiş bir kimseyi mi? Yoksa kimi?

Ben şahsen bu delili pek alâ ikna edici bulmaktayım. Euler'in de ona çok değer vereceğine eminim. (Burada Eulerden bahsetmemizin sebebi, onun faraziyemizi keşfe çok yaklaşmış olmasıdır; Misâl 6.24 'e bakınız.) Sayıların bölünebilmesi hakkında biraz birşey bilen müptedi bir matematikçinin de bu delili pek alâ ikna edici bulacağından eminim. Mükemmel bir matematikçi

olan, fakat Sayılar Teorisinin bu köşesine yabancı bulunan bir meslektaşım bu delili «yüzde yüz ikna edici» bulmuştu.

Ben burada sübjektif intibalarla alâkadar değilim. Endüktif delilin bize hak kazandırdığı akli inanışın sarih, objektif ölçülmüş derecesi nedir? Siz bana (A) gibi bir şeyi veriyor, fakat (B) gibi diğer bir şeyi vermiyorsunuz ve bana (C) gibi üçüncü bir şeyi soruyorsunuz.

(A) Siz bana tamamen endüktif delili veriyorsunuz: Faraziyemiz 4, 12, 20, ..., 100 olmak üzere ilk on üç hal için gerçeklenmiştir. Bu husus çok açık anlaşılmaktadır.

(B) Siz benden bu delilin haklı kıldığı aklî inanışın derecesini ölçmemi istiyorsunuz. Fakat böyle bir inanış delili alan kimsenin, vesvese ve mizacına değilse, muhakkak ki *bilgi*sine dayanmalıdır. O şahıs faraziye şeklinde ileri sürülen teoremin bir ispatını veya onu suya düşüren bir aksi misâli bilebilir. Bu iki halde, onun sağlam bir şekilde yerleşmiş olan inanışının derecesi endüktif delil neticesinde değişmiyecektir. Bununla birlikte, o kimse teoremin tam bir ispatına veya tam bir cerhine çok yakın bir şey biliyorsa inanışı henüz değiştirilebilir ve bu inanış ortaya atılan endüktif delilin tesirine mâruz kalacaktır, her ne kadar o şahıs elindeki bilginin nevine göre neticede farklı inanış derecelerine varsa da. Şu halde, eğer belirli bir cevap isterseniz, (A) endüktif delilinin kendisine göre muhakeme edileceği belirli bir bilgi seviyesini de açıkça belirtmeniz lâzımdır. Siz bana konuya dair belirli bir bilinen vâkıalar cümlesi (belki de Sayılar Teorisine dair bilinen elemanter teoremlerin bir listesini) vermelisiniz.

(C) Siz benden, endüktif delilin haklı kıldığı aklî inanış derecesini kesin olarak ölçmemi istiyorsunuz. Acaba ben onu size «tam inanış» ın yüzdeleriyle ifade ederek mi vereyim? («Tam inanış» ın, bahis konusu teoremin tam bir matematik ispatının

hak kazandırdığı inanış derecesi olduğu üzerinde anlaşabiliriz.) Şu halde, siz benden verilen delilin «tam inanış» ın % 99, yahut % 2,875 veya % 0,000001 ini teşkil eden bir inanışa hak verdiğini mi söylememi bekliyorsunuz?

Kısaca, siz benim şu problemi çözmemi istiyorsunuz: (A) endüktif delil, (B) belirli bir bilinen vâkıa veya teorem cümlesi verildiğine göre, (C) bu ikisinden aklî olarak çıkacak «tam inanış» yüzdesini hesaplamak.

Bu problemi çözmek benim kudretimi çok aşar. Ne bu işi yapabilecek, ne de ona cesaret edebilecek bir kimse bilmiyorum. Çok genel bir çerçeve içinde bu biçim bir şey yapmayı vadeden bazı filozoflar biliyorum. Fakat onlar, müşahhas bir problemle karşılaşınca büzülerek kabuklarına girmekte ve tam da o problemi yapmamak için binbir mazeret bulmaktadırlar.

Belki de bu problem, hakkında genel bir şekilde çok şey konuşabileceğiniz, hattâ onun için kendinizi samimî olarak sıkıntıya sokacağınız, fakat müşahhas hale getirmek istediğiniz zaman eriyerek hiçliğe müncer olan bir takım tipik felsefe problemlerinden biridir.

Elinizdeki endüktif istidlâl halini bir standard hal ile mukayese ederek bu delilin kuvveti hakkında makûl bir tahmine varamaz mıydınız? Faraziyemize dair endüktif delili, Bachet'nin kendi faraziyesi için ileri sürmüş olduğu delille mukayese edelim.

Bachet'nin faraziyesi şu idi: $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denklemi x, y, z, w ye göre en az bir tane negatif olmayan tam sayılı çözümü haizdir. Bachet bu faraziyeyi $n = 1, 2, 3, \ldots, 325$ için gerçeklemişti. (Paragraf 2, bilhassa oradaki kısa cedvele bakınız.)

Bizim faraziyemiz ise şudur: Verilen bir u tek sayısı için

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denkleminin x, y, z ve w cinsinden tek pozitif tam sayılı çözümlerinin sayısı u nun bölenlerinin toplamına eşittir. Biz bu faraziyeyi $u = 1, 3, 5, 7, \ldots, 25$ için hepsi birden 13 halde gerçeklemiştik (Paragraf 3 ten 6 ya bakınız.)

Ben bu iki faraziye ile onların gerçeklenişlerinin verdiği endüktif delilleri üç bakımdan mukayese edeceğim.

Gerçeklemelerin sayısı. Bachet'nin faraziyesi 325 halde, bizimki sadece 13 halde gerçeklenmişti. Burada avantaj açık olarak Bachet'nin tarafındadır.

Önceden söylemenin sıhhatı. Bachet faraziyesi çözüm sayısının ≥ 1 olduğunu, bizimki ise çözüm sayısının belirli bir büyüklüğe tam olarak eşit olduğunu önceden söylemektedir. Bence, *daha sıhhatli bir önceden söylemenin gerçeklenmesinin, daha az sıhhatli bir önceden söylemenin gerçeklenmesinden daha büyük bir ağırlık taşıdığını* kabûl etmenin makûl bir iş olduğu aşikârdır. Bu hususta avantaj açıkça bizim tarafımızdadır.

Rakip faraziyeler. Bachet'nin faraziyesi keyfî bir pozitif tam sayıyı göstermek için gerekli olan kare sayısının maksimumu - ki buna M diyelim - ile alâkadardır. Hakikaten Bachet'nin faraziyesi $M = 4$ olduğunu ifade etmektedir. Bachet'nin $M=4$ ü, meselâ $M = 5$ veya $M = 6$ yahut $M = 7$ gibi herhangi bir değere tercih etmesi için *önceden* (kablî) bir sebebe sahip bulunduğunu zannetmiyorum; hattâ $M = \infty$ bile *önceden* reddedilemez. (Tabiatiyle $M = \infty$ 'un mânası, tam sayılar arttıkça gittikçe daha fazla sayıda kareye ihtiyaç gösterecek olan tam sayılara rastlanacağıdır. Sathî olarak, $M = \infty$ en muhtemel faraziye olarak görünebilir.) Kısaca Bachet faraziyesinin birçok aşikâr rakipleri

vardır. Fakat bizimkinin hiçbir rakibi yoktur. Gösteriliş sayısının teşkil ettiği dizideki (Paragraf 6) intizamsızlığa bakarak, herhangi bir kaide bulmaya belki de muvaffak olamıyacağımızı zannetmiştik. Şimdi hayran olunacak derecede açık bir kaide bulmuş oluyoruz. Artık başka bir kaide bulmayı pek bekleyemeyiz.

Eğer etrafta seçilebilecek evsafta bir çok genç kız bulunursa onlardan bir nişanlı seçmek zor olabilir, fakat böyle bir tek kız varsa, karar çok daha çabuk verilebilir. Bence, faraziyeler karşısındaki tutumumuz da biraz buna benzemektedir. Diğer şeyler eşit olduğu takdirde, birçok aşikâr rakibi bulunan bir faraziyeyi kabûl etmek, rakipsiz bir faraziyeyi kabûl etmekten daha güçtür. Siz de benim gibi düşünüyorsanız, bu bakımdan avantajı Bachet'ninkinin değil, bizim faraziyemizin tarafında bulursunuz.

Lûtfen Bachet'nin faraziyesine dair delilin bir bakımdan, fakat bizim faraziyemize dair delilin diğer bakımlardan daha kuvvetli olduğuna dikkat edin ve cevaplandırılamıyacak sorular sormayın.

IV. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. *Yazış tarzı.* n ve k pozitif tam sayılar olsun ve

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$$

Diophante denklemini ele alalım. Bunun $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ve $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ gibi iki çözümüne ancak ve ancak $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2, \ldots, x_k = x'_k$ olduğu zaman, eşittir denir. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ değer olarak, pozitif, negatif veya sıfır, bütün tam sayıları alabildiği takdirde, böyle çözümlerin sayısına $R_k(n)$ diyelim. Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sadece tek pozitif sayıları değer olarak alabildiği takdirde, bu türlü çözümlerin sayısına $S_k(n)$ diyelim. Aşağıdaki problemlerin ekserisi için bu yazış tarzı önemlidir.

Bu yazış tarzıyla, Bachet'nin faraziyesi

$$n = 1,\ 2.\ 3,\ \ldots \text{ için } R_4(n) > 0$$

eşitsizliği ile ifade edilir. Paragraf 6 da keşfetmiş olduğumuz faraziye $S_4\ (4\ (2n-1))$ in $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ için $2n-1$ in bölenleri toplamına eşit olduğunu iddia etmektedir.

$R_2\ (25)$ ve $S_3\ (11)$ i bulunuz.

2. x ve y bir düzlemde dik koordinatlar olsun. x ve y nin her ikisinin de tam olduğu noktalara düzlemin «kafes noktaları» denir. Uzaydaki kafes noktaları da benzer şekilde tarif edilir.

$R_2\ (n)$ ve $R_3\ (n)$ i kafes noktaları cinsinden geometrik olarak tefsir ediniz.

3. Paragraf 1 de rastlanılan faraziyeyi $R_2\ (n)$ sembolünü kullanarak ifade ediniz.

4. Bir tek asal sayı ne zaman iki kare toplamıdır? Bu soruyu aşağıdaki cedveli muayene ederek endüksiyon yoluyla cevaplandırmaya çalışınız:

$$\begin{aligned}
3 &\quad - \\
5 &= 4 + 1 \\
7 &\quad - \\
11 &\quad - \\
13 &= 9 + 4 \\
17 &= 16 + 1 \\
19 &\quad - \\
23 &\quad - \\
29 &= 25 + 4 \\
31 &\quad -
\end{aligned}$$

Lûzumu halinde bu cedveli uzatınız ve onu paragraf 1 deki cedvelle mukayese ediniz.

5. Misâl 4 ün endüksiyonla bulmuş olduğunuz cevabının herhangi bir kısmını matematik dedüksiyonla gerçekliyebilir misiniz? Böyle bir gerçeklemeden sonra, faraziyeye olan itimadınızda değişiklik yapmak makûl olur mu?

6. Bachet'nin faraziyesini (paragraf 2) 30 a kadar (30 dahil) gerçekleyiniz. Bunlar içinde hakikaten dört kareyi gerektiren sayılar hangileridir?

7. Paragraf 5 teki Cedvel I' i daha iyi anlayabilmek için a^2, b^2, c^2 ve d^2 dört farklı tek sayı karesi göstermek üzere

$$(1) \qquad a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$(2) \qquad a^2+a^2+b^2+c^2$$

$$(3) \qquad a^2+a^2+b^2+b^2$$

$$(4) \qquad a^2+a^2+a^2+b^2$$

$$(5) \qquad a^2+a^2+a^2+a^2$$

toplamlarını nazarı itibara alalım. Bunların her birinden terimleri aralarında değiştirmek suretiyle (paragraf 3 mânasında) kaç tane değişik gösteriliş elde edebilirsiniz?

8. $4u$ 'nun dört tek karenin toplamı olarak gösterilişlerinin sayısı, ancak ve ancak u nun kendisinin bir tam kare olması halinde bir tek sayıdır. (Paragraf 3 teki yazış tarzını takip ederek u yu tek farzediyoruz.) Bu ifadeyi ispat ediniz ve onun paragraf 6 daki faraziye ile uygunluk halinde bulunduğunu gösteriniz. Bu ihtar sizin faraziyeye olan itimadınıza nasıl tesir eder?

9. Şimdi a, b, c, d (tek veya çift) dört tane farklı pozitif tam sayı olsun. Misâl 7 de bahsedilen beş toplamla birlikte şu toplamları da nazarı itibara alalım:

(6) $a^2+b^2+c^2$ (9) a^2+b^2

(7) $a^2+a^2+b^2$ (10) a^2+a^2

(8) $a^2+a^2+a^2$ (11) a^2

Bu onbir halden herbirinin $R_4(n)$ 'e yaptığı katkıyı bulunuz. Aşağıki aşikâr işlemler vâsıtasıyla bu toplamların herbirinden mümkün olan bütün gösterilişleri elde ediniz: terim sayısını 4 'e çıkarmak için lûzumu kadar 0^2 ilâve ediniz, terimlerin sıralarını değiştiriniz, a, b, c, d sayılarından bazısını (hiçbirini, veya hepsini) sırasıyla $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ ile değiştiriniz. (Cedvel II deki misâlleri bu suretle kontrol ediniz).

10. $n=x^2+y^2+z^2+w^2$ denkleminin x, y, z, w ye göre (pozitif, negatif veya 0) tam sayılı çözümlerinin sayısını endüksiyonla araştırınız. İşe Cedvel I 'e benzer bir cedvel inşa etmekle başlayınız.

11 (devam). Paragraf 6 nın metodunu, yahut neticesini kullanmaya çalışınız.

12 (devam). Paragraf 6 ya olan benzerliğin veya Cedvel II de yapacağınız kendi müşahedenizin rehberliği ile, uygun tam sayı sınıfları ayırarak, her sınıfı kendi başına araştırınız.

13 (devam). Gayretinizi en inatçı sınıf üzerinde teksif ediniz.

14 (devam). Bütün parça parça kaideleri özetliyerek, kanunu tek bir cümle ile ifade ediniz.

15 (devam). Bulduğunuz kaideyi Cedvel II de bulunmayan ilk üç halde kontrol ediniz.

16. R_8 (5) ve R_8 (40) ı bulunuz.

17. Sahife 119 daki Cedvel III 'ün verdiği, Cedvel I ve II de bulunmayan bilgileri en az iki satır için kontrol ediniz.

18. Cedvel III 'ü kullanarak $R_8(n)$ ve $S_8(8n)$ i endüksiyon yoluyla araştırınız.

19 (devam). Paragraf 6 ve misâl 10—15 'in metodunu veya neticesini kullanmaya çalışınız.

20 (devam). Benzerlik veya müşahedenin rehberliği ile uygun tam sayı sınıfları ayırarak, her sınıfı kendi başına araştırınız.

21 (devam). Yanına en fazla yanaşılabilir halde bir ip ucu keşfetmeye çalışınız.

22 (devam). Parça parça kaideleri özetliyebilecek olan birleştirici bir kavram bulmaya çalışınız.

23 (devam). Bu kanunu bir cümlede ifade etmeye çalışınız.

24. x ve y negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, hangi sayılar $3x + 5y$ şeklinde gösterilebilir, hangileri gösterilemez?

25. Aşağıki cedveldeki kanunu tahmin etmeye çalışınız:

a	b	$ax + by$ şeklinde ifade edilmeyen son tam sayı
2	3	1
2	5	3
2	7	5
2	9	7
3	4	5
3	5	7
3	7	11
3	8	13
4	5	11
5	6	19

Burada x ve y negatif olmayan tam sayılardır. Birkaç satırı kontrol ediniz ve lûzum görürseniz cedveli uzatınız. [a ve b sayılarından yalnız bir tanesi değiştiği zaman son sütunda husûle gelen değişikliğe dikkat ediniz.]

26. *Endüksiyonun tehlikeleri.* Aşağıki iddiaları endüksiyon yoluyla muayene ediniz:

(1) $(n-1)!+1$ sayısı n asal olduğu zaman n ile bölünebilir, fakat n mürekkep olduğu zaman n ile bölünemez.

(2) $2^{n-1}-1$ sayısı n bir tek asal sayı olduğu zaman n ile bölünebilir, fakat n mürekkep olduğu zaman n ile bölünemez.

Cedvel II

n	Artmayan büyüklüklere göre sıralanmış gösterilişler	Gösteriliş sayısı	$R_4(n)/8$
1	1	4×2	1
2	$1+1$	6×4	3
3	$1+1+1$	4×8	4
4	4	4×2	3
	$1+1+1+1$	1×16	
5	$4+1$	12×4	6
6	$4+1+1$	12×8	12
7	$4+1+1+1$	4×16	8
8	$4+4$	6×4	3
9	9	4×2	13
	$4+4+1$	12×8	
10	$9+1$	12×4	18
	$4+4+1+1$	6×16	
11	$9+1+1$	12×8	12
12	$9+1+1+1$	4×16	12
	$4+4+4$	4×8	
13	$9+4$	12×4	14
	$4+4+4+1$	4×16	
14	$9+4+1$	24×8	24
15	$9+4+1+1$	12×16	24

Cedvel II den devam

n	Artmayan büyüklüklere göre sıralanmış gösterilişler	Gösteriliş sayısı	$R_4(n)/8$
16	16	4×2	3
	$4+4+4+4$	1×16	
17	$16+1$	12×4	18
	$9+4+4$	12×8	
18	$16+1+1$	12×8	39
	$9+9$	6×4	
	$9+4+4+1$	12×16	
19	$16+1+1+1$	4×16	20
	$9+9+1$	12×8	
20	$16+4$	12×4	18
	$9+9+1+1$	6×16	
21	$16+4+1$	24×8	32
	$9+4+4+4$	4×16	
22	$16+4+1+1$	12×16	36
	$9+9+4$	12×8	
23	$9+9+4+1$	12×16	24
24	$16+4+4$	12×8	12
25	25	4×2	31
	$16+9$	12×4	
	$16+4+4+1$	12×16	
26	$25+1$	12×4	42
	$16+9+1$	24×8	
	$9+9+4+4$	6×16	
27	$25+1+1$	12×8	40
	$16+9+1+1$	12×16	
	$9+9+9$	4×8	
28	$25+1+1+1$	4×16	24
	$16+4+4+4$	4×16	
	$9+9+9+1$	4×16	
29	$25+4$	12×4	30
	$16+9+4$	24×8	
30	$25+4+1$	24×8	72
	$16+9+4+1$	24×16	

Cedvel III

n	$R_4(n)/8$	$R_8(n)/16$	$S_8(8n)$	$S_4(4(2n-1))$	$2n-1$
1	1	1	7	1	1
2	3	7	8	4	3
3	4	28	28	6	5
4	3	71	64	8	7
5	6	126	126	13	9
6	12	196	224	12	11
7	8	344	344	14	13
8	3	583	512	24	15
9	13	757	757	18	17
10	18	882	1008	20	19
11	12	1332	1332	32	21
12	12	1988	1792	24	23
13	14	2198	2198	31	25
14	24	2408	2752	40	27
15	24	3528	3528	30	29
16	3	4679	4096	32	31
17	18	4914	4914	48	33
18	39	5299	6056	48	35
19	20	6860	6860	38	37
20	18	8946	8064	56	39

V

ENDÜKSİYONA DAİR ÇEŞİTLİ MİSÂLLER

Bir teoremin doğruluğuna kanaat getirince, onu ispat etmeye başlarsınız. GELENEKSEL MATEMATİK PROFESÖRÜ. (1)

1. Açılımlar. Herhangi bir çeşit problemle uğraşırken, bir çeşit endüktif muhakemeye ihtiyacımız vardır. Matematiğin çeşitli dallarında tipik bir tarzda endüktif muhakemeye ihtiyaç gösteren bazı problemler mevcuttur. Bu bölümde bu hususu aydınlatan bazı misâller verecek ve işe nispeten basit bir misâlle başlıyacağız.

$\frac{1}{1-x+x^2}$ *fonksiyonunu x in kuvvetlerine göre açmak.*

Bu problem birçok yollardan çözülebilir. Aşağıki çözüm pek kısa ve güzel olmamakla beraber, sağlam bir prensibe dayanmakta olup, pek fazla birşey bilmeyen fakat hiç olmazsa geometrik serinin $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$ toplam formülünü

(1) Tanınmış pedagogun bu kaidesinden önce (*How to Solve It*, S. 181) bâzan şu nasihat gelir: «Bir teoremi ispat etmeniz lâzım geldiği takdirde, acele etmeyiniz. Herşeyden evvel teoremin ne demek istediğini tamamiyle anlayınız, teoremin mânasını açık olarak görmeye çalışınız. Sonra teoremi kontrol ediniz, çünkü o yanlış olabilir. Onun neticelerini muayene ediniz. Onun doğruluğuna kanaat getirmeniz için muhtaç bulunduğunuz kadar çok sayıda özel halde onu gerçekleyiniz. Bu suretle teoremin doğruluğuna kanaat getirince...»

bilen zeki bir müptedinin de tabiî olarak aklına gelebilir. Bu toplam formülünü problemimizde kullanmak fırsatını aşağıda bulacağız:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-x(1-x)}$$

$$= 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + x^3(1-x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + x - x^2$$

$$+ x^2 - 2x^3 + x^4$$

$$+ x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6$$

$$+ x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8$$

$$+ x^5 - 5x^6 + 10x^7 - 10x^8 + \cdots$$

$$+ x^6 - 6x^7 + 15x^8 - \cdots$$

$$+ x^7 - 7x^8 + \cdots$$

$$+ x^8 - \cdots$$

$$\cdots$$

$$= 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - \cdots .$$

Bu, göze çarpan bir neticedir. Burada sıfırdan farklı olan her katsayı ya 1, yahut ta -1 değerini haizdir. Birbirini tâkip eden katsayılarda, daha çok sayıda terim hesaplayınca daha da açığa çıkan, bir kaide görülüyor:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{12} + x^{13} - \cdots .$$

Burada katsayılar dizisi peryodiktir! Bu dizinin peryot uzunluğu 6 olup, peryotları şöyledir:

$$1, 1, 0, -1, -1, 0 \mid 1, 1, 0, -1, -1, 0 \mid 1, 1, \cdots .$$

Tabiatıyle, müşahede etmiş olduğumuz bu peryodik özeli-

ğin müşahedelerimizin sınırlarından öteye de devam etmesini bekleriz. Fakat bu, yerinde bir şüphe ile karşılamaklığımız icabeden endüktif bir netice, yahut sadece bir tahmindir. Bununla beraber, bu tahmin vâkıalara dayanmakta olup, bu yüzden ciddî bir şekilde incelenmeye lâyıktır. Onu incelemek ise, diğer şeyler arasında, onu başka bir şekilde ifade etmek demektir. Faraziyemizi başka bir şekilde ifade etmenin enteresan bir tarzı vardır:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \cdots$$
$$+ x - x^4 + x^7 - x^{10} + x^{13} - \cdots .$$

Şimdi, sağ tarafta kolayca iki geometrik seri farkedebiliriz. Bunların her ikisinin de ortak çarpanı $-x^3$ olup, onların toplamlarını hesaplıyabiliriz. Böylece faraziyemiz şu eşitliğe dökülür:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1+x^3} + \frac{x}{1+x^3} = \frac{1+x}{1+x^3}.$$

Bu ise tabiatıyla doğru olup, faraziyemizi ispat etmiş olduk.

Misâlimiz basit olmakla beraber, birçok bakımlardan tipiktir. Verilen bir fonksiyonu seriye açmamız lâzım gelirse, ilk birkaç katsayıyı fazla sıkıntı çekmeden bulabiliriz. Bu katsayılara bakarak, yukarıki misâlde yapmış olduğumuz gibi, açılımın kanununu tahmin etmeye çalışmalıyız. Kanunu tahmin ettikten sonra, gene orada yapmış olduğumuz gibi, onu ispat etmeye çalışmalıyız. Orada olduğu gibi, faraziyenin uygun ve açık bir ifadesinden hareket ederek ispatı geriye doğru işlemek büyük bir fayda sağlıyabilir.

Bu arada, misâlimizin bayağı semereli olduğunu da işaret edelim (Bu husus ta tipiktir). Hakikaten misâlimiz bizi binom katsayıları arasında meraklı bir münasebete sevketmektedir.

Verilen bir fonksiyonu bir seriye açma probleminin mate-

matiğin birçok dallarında sık sık ortaya çıktığını ilâve etmek lûzumsuz bir söz değildir. Bu hususta gelecek paragrafla, VI. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgilere bakınız.

2. Yaklaşık Formüller. [2] Yarım eksen uzunlukları a ve b olan bir elipsin çevre uzunluğunu E ile gösterelim. E yi a ve b cinsinden ifade eden basit bir formül mevcut değildir, fakat bu hususta bir çok yaklaşık formül teklif edilmiş olup, içlerinde belki en aşikâr olanları şu ikisidir:

$$P = \pi (a + b), \qquad P' = 2\pi (ab)^{1/2}.$$

Şimdi P ve P', elipsin çevre uzunluğunun birer yaklaşık değeri, E ise aynı şeyin tam doğru değeridir. Eğer a, b ye eşit olursa, P ve P' de E ye eşit olurlar.

a nın b den farklı olması halinde P ve P', E ye ne kadar yaklaşırlar? Bunların hangisi, yani P mi, yoksa P' mü hakikî değere daha yakındır? Bu türlü sorular Tatbikî Matematiğin birçok dallarında sık sık ortaya çıkar ve onlarla başa çıkmak için, aşağıda kabaca anlatacağımız, geniş bir kabûle mazhar olmuş bir usûl vardır: *$(P-E)/E$ yi, yani yaklaşık değerin izafi hatasını, uygun bir küçük değerli parametrenin kuvvetlerine göre açınız ve hükmünüzü bu açılımın başlangıç terimine (yani sıfırdan farklı ilk terimine) dayandırınız.*

Misâlimize uygulandığı zaman bunun mânasının ne olacağına ve bu usûlün nasıl işleyeceğine bakalım. Evvelâ «uygun bir küçük parametre» seçmeliyiz. Bunun için (ε ile göstereceğimiz) elipsin nümerik eksantrisitesini deneyelim. Bu eksantrisite, a elipsin büyük, b de küçük eksenlerinin yarım uzunluklarını göstermek üzere

$$\varepsilon = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a}$$

---

[2] Putnam, 1949 'a bakınız.

ile tarif edilir, a, b ye eşit (ve neticede elips bir daire) olduğu zaman $\varepsilon = 0$ olur. Eğer elips daireden pek farklı değilse, ε küçüktür. Şu halde, izafî hatayı ε nun kuvvetlerine açalım. Netice olarak (tafsilâtı burada atlıyoruz)

$$\frac{P-E}{E} = -\frac{1}{64}\varepsilon^4 + \cdots, \qquad \frac{P'-E}{E} = -\frac{3}{64}\varepsilon^4 + \cdots.$$

elde ederiz. Burada yalnız bağlangıç terimlerini hesabettik ki, her ikisi de 4. mertebedendir, yani ε^4 ü ihtiva etmektedir. Daha yüksek mertebeden, yani ε^5, ε^6, ... yı ihtiva eden terimleri her iki açılımda da bir kenara bıraktık. r çok küçük (sonsuz küçük) olduğu zaman, yani elips hemen hemen bir daire şeklinde olduğu zaman, bu terimler başlangıç terimlerine nazaran ihmal edilebilir. Şu halde, hemen hemen daire şeklindeki elipsler için P, E nin hakikî değerine P' den daha çok yaklaşır. (Hakikaten ε, 0'a yaklaştığına göre hataların oranı da 1 : 3 'e yaklaşır.) Hem P, hem de P', E ye alttan yaklaşır :

$$E > P > P'.$$

Bu neticeler çok küçük ε lar, yani hemen hemen daire şeklindeki elipsler için doğrudur. Fakat ε o kadar küçük olmadığı zaman onların doğru ne dereceye kadar doğru kaldığını henüz bilmemekteyiz. Hakikaten, şimdilik sadece $\varepsilon \to 0$ için cari olan limit münasebetlerini bilmekteyiz. Fakat $\varepsilon = 0{,}5$ veya $\varepsilon = 0{,}1$ halinde yaklaşık formüllerimizin hatası hakkında henüz hiçbir kesin bilgimiz yoktur. Halbuki, tatbikatta asıl muhtaç olduğumuz şey bu türlü müşahhas hallere dair bilgidir.

Böyle hallerde pratik kimseler formülleri nümerik bir denemeye tâbi tutarlar. Biz de onları tâkip edebiliriz, fakat acaba ilk önce hangi hali deneyelim? Uç hallerini gözden uzak tutmamalıdır. Nümerik eksantrite 0 ile 1 uç değerleri arasında değişir. $\varepsilon = 0$ olduğu zaman $b = a$ olup, elips bir daireye döner. Bu-

nunla beraber, buraya gelinceye kadar bu hali oldukça iyi öğrenmiş bulunduğumuzdan, diğer uç haline dönelim. $\varepsilon = 1$ için $b = 0$ olur ve elips, $2a$ uzunluğunda bir doğru parçasına döner. Bu takdirde elipsin çevre uzunluğu da $4a$ ya döner. Şu halde $\varepsilon = 1$ için

$$E = 4a, \qquad P = \pi a, \qquad P' = 0$$

dır. Her iki uç halinde de, yani hem $\varepsilon = 1$ için, hem de ε nın çok küçük bulunduğu halde $E > P > P'$ olduğu dikkate değer. Acaba bu çifte eşitsizlik her zaman doğru mudur?

Bu çifte eşitsizliğin ikinci yarısı için cevap kolaydır. Hakikaten $a > b$ için

$$P = \pi (a + b) > 2\pi (ab)^{1/2} = P'$$

dür, çünkü bu eşitsizlik

$$(a + b)^2 > 4ab,$$

yahut ta

$$(a - b)^2 > 0$$

a denktir.

Şimdi dikkatimizi sorunun geri kalan kısmı üzerinde toplayalım. Acaba $E > P$ eşitsizliği genel olarak doğru mudur? Uç hallerinde (yani küçük ε'lar ve $\varepsilon = 1$ için) bulmuş olduğumuz neticenin ara hallerde de (ε'nun 0 ile 1 arasındaki bütün değerleri) doğru kalacağını farzetmek tabiî bir şeydir. Faraziyemizin çok sayıda müşahede ile desteklenmediği doğru olmakla beraber, bu faraziye benzerlik tarafından desteklenmektedir. Aynı zamanda sormuş olduğumuz ve benzer sebeplere dayanan ($P > P$'ye dair) benzer bir soru müspet şekilde cevaplanmıştı.

Şimdi bir hali nümerik olarak deneyelim. ε nun 0'a yakın olduğu hal hakkındaki bilgimiz, onun 1'e yakın olduğu haldekin-

den biraz daha fazladır. Şimdi ε nun 1 e 0 dan daha yakın bulunduğu basit bir değerini seçelim:

$$a=5, \qquad b=3, \qquad \varepsilon=\frac{4}{5}.$$

(Uygun cedvelleri kullanarak) ε nun bu değeri için

$$E=2\pi\times 4{,}06275, \qquad P=2\pi\times 4.00000$$

buluruz. Bu halde $E>P$ eşitsizliği gerçeklenmiştir. Faraziyemizin bu nümerik gerçeklenişi başka bir yönden, değişik bir kaynaktan gelmekte olup, bu yüzden epeyce ağırlığı haizdir. Bundan başka

$$(P-E)/E=-0{,}0155, \qquad -\varepsilon^4/64=-0{,}0064$$

olduğunu da kaydedelim. Buradaki izafî hata % 1,5 civarındadır. Bu hata kendi açılımının başlangıç teriminden oldukça büyüktür, fakat onunla aynı işareti haizdir. $\varepsilon=4/5=0{,}8$ çok küçük olmadığından yukarıki gerçekleme genel çerçeveye uymakta olup, faraziyemize olan itimadımızı arttırma yönünde tesir eder.

Yaklaşık formüller Tatbikî Matematikte önemli bir rol oynarlar. Böyle bir formül hakkında hüküm vermek için, pratikte ekseriya bu paragraftaki yol tutulur. İzafî hatanın açılımındaki başlangıç terimi hesaplanmak suretiyle kazanılan bilgi nümerik denemeler, benzerlik mülâhazaları v.s., kısaca, ispat edici olmayan, endüktif muhakeme ile tamamlanır.

3. Limitler. Endüktif muhakemenin işleyişini başka bir alanda daha görmek için, aşağıki problemi ele alalım. (3)

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ keyfî bir pozitif sayı dizisi olsun.

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq e$$

olduğunu gösteriniz.

(3) Putnam, 1948 'e bakınız.

Bu problem biraz ön bilgiye, bilhassa «lim sup» yahut «üst belirsizlik limiti (= üst limit)» kavramıyla tanışıklığa ihtiyaç gösterir. (4) Fakat bu kavramı iyice bilseniz bile, yukarıki eşitsizliğin bir ispatını bulmakta güçlük çekebilirsiniz. Bu problemi kendi vâsıtalarıyla birkaç saat içinde çözebilen bir matematik öğrencisini tebrik ederim.

Eğer siz de bu problemle bir parça mücadele etmişseniz, aşağıki paragraflarda anlatacağımız mücadeleyi daha fazla sempati ile takip edeceksiniz.

4. İddiayı cerhetmeye çalışmak. Evvelâ mûtad sorularla işe başlayacağız.

Faraziye nedir? Sadece, $a_n > 0$.

Hüküm nedir? Sağında e ve solunda o karışık limiti ihtiva eden eşitsizlik.

İddia ile alâkalı bir teorem biliyor musunuz? Hayır. O, benim bildiğim şeylerin hepsinden çok farklı.

Onun doğru olması muhtemel midir? Yoksa yanlış olması mı daha muhtemeldir? Tabiatıyle yanlış olması. Çünkü $a_n > 0$ gibi son derece genel bir faraziyeden bu kadar sarih bir hüküm çıkarılabileceğine inanamamaktayım.

Sizden istenen şey nedir? İddia edilen teoremi ispat etmek. Yahut onu cerhetmek. Ben onun cerhedilmesine çok taraftarım.

Bu teoremin herhangi bir özel halini deneyebilir misiniz? Evet. Ben de şimdi bunu yapacağım.

[Formülleri basitleştirmek için

$$\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n = b_n$$

vaz'edelim ve $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ yerine $b_n \to b$ yazalım.]

(4) Meselâ G. H. Hardy, *Pure Mathematics*, paragraf 82 ye bakınız.

$n=1, 2, 3, \ldots$ için $a_n=1$ dersek,

$$b_n=\left(\frac{1+1}{1}\right)^n=2^n \to \infty$$

olur. Demek ki teorem bu özel halde doğrudur.

Fakat, $a_1=0$ ve $n=2, 3, 4, \ldots$ için $a_n=1$ diyebilirdik. Bu takdirde

$$b_n=\left(\frac{0+1}{1}\right)^n=1^n \to 1<e$$

olur. Öyleyse teorem suya düştü! Fakat hayır, teorem suya düşmedi. Çünkü teoremin faraziyesi $a_1=0{,}00001$ 'e müsade etmekle beraber $a_1=0$ 'ı yasaklamaktadır. Ne yazık!

Başka bir şey denememe müsade edin: $a_n=n$ diyelim. Bu takdirde

$$b_n=\left(\frac{1+(n+1)}{n}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

olur. Teorem bu halde de gerçeklenmiştir.

Şimdi, $a_n=n^2$ olsun. Bu takdirde

$$b_n=\left(\frac{1+(n+1)^2}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n}\,\frac{n+1}{n}\right)^n \to e^2$$

olur ve teorem gene gerçeklenir. Hattâ gene aynı e^2 limiti bulunur. Acaba genel eşitsizliğin sağ tarafında e yerine e^2 mi bulunmalıydı?

Şimdi *bir parametre ithâl edelim*. c yi istediğim gibi seçmek üzere, $a_1=c$ ve $n=2, 3, 4, \ldots$ için $a_n=n$ diyelim. Bu halde

$$b_n=\left(\frac{c+(n+1)}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1+c}{n}\right)^n \to e^{1+c}$$

olur. Bu limit ise, $c=a_1>0$ olduğundan her zaman e den bü-

yüktür. Fakat c yi istediğimiz kadar küçük seçebildiğimizden, bu limiti e ye istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. Demek ki iddiayı henüz ne cerhedebiliyoruz, ne de ispat edebiliyoruz.

Son bir deneme daha yapalım. $a_n = n^c$ alalım. Bu takdirde [bazı ara hesapları atlıyoruz]

$$b_n = \left[\frac{1+(n+1)^c}{n^c}\right]^n \to \begin{cases} \infty, & \text{eğer } 0 < c < 1 \text{ ise} \\ e^2, & \text{eğer } c = 1 \text{ ise} \\ e^c, & \text{eğer } c > 1 \text{ ise} \end{cases}.$$

Gene burada da limit e ye istediğimiz kadar yakın olabiliyor, fakat daima e nin üstünde kalıyor. Bu limiti e nin altına indirmeye hiçbir zaman muvaffak olamıyacağız. Şu halde artık öbür ihtimale (yani teoremin doğru olması ihtimaline) dönmenin zamanı gelmiştir.

5. İddiayı ispata çalışmak. Hakikaten buraya kadarki yolumuzdan *güzgeri* etmek için kuvvetli sebepler vardır. Üst üste yığılan endüktif deliller karşısında teoremi cerhetme ümidi o kadar sönük görünüyor ki, bunun yanında onu ispat etme ümidi nispeten parlak görünmektedir.

Şu halde geriye, teoremin tekrar incelenmesine başlamaktan, yani onun ifadesinin, faraziyesinin, hükmünün, orada bahis konusu olan kavramların, ... tekrar ele alınmasından başka birşey kalmıyor.

Faraziyeyi gevşetebilir misiniz? Hayır, gevşetemem. Eğer bir n için bile $a_n = 0$ olmasını kabûl edersek, hüküm artık cari olmaz ve teorem yanlış olur ($a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 1$).

Hükmü keskinleştirebilir misiniz? e yerine daha büyük bir sayı koyarak hükmü keskinleştirmeme tabiatıyle imkân yoktur, çünkü o takdirde hüküm artık cari kalmaz ve teorem yanlış olur (yukarıki 4. paragrafın misâlleri).

Problemin içinde geçen bütün esas kavramları hesaba kattınız mı ? Hayır. İşte sıkıntımız buradan doğabilir.

Neyi hesaba katmayı ihmal ettiniz ? lim sup'un tarifi, *e* sayısının tarifi.

lim sup b_n nedir ? Bu, n sonsuza gittiğine göre b_n nin üst belirsizlik limitidir.

e nedir ? e yi çeşitli tarzlarda tarif edebilirim. Yukarıki misâller, *e* nin en alıştığımız tarifinin bu problem için en iyi tarif olabileceğini aklımıza getirir :

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Teoremi başka bir şekilde yeniden ifade edebilir misiniz ? .....

.....

Teoremi bize daha kolay gelecek bir şekilde yeniden ifade edebilir misiniz ?.....

Hükmü yeniden ifade edebilir misiniz ? Hüküm nedir ? Hüküm *e* yi ihtiva ediyor. *e* nedir ? (Ben eskiden bunu sormayı ihmâl etmiştim). Evet — hüküm şudur :

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bunu şöyle de ifade edebilirim :

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]^n \geqq 1.$$

Bu son şekil çok daha iyi görünüyor !

Faraziyenin şartı yerine geldiği zaman hüküm yanlış olabilir mi ? İşte mesele budur. Bunu araştırayım. İddianın tam aksine cesaretle bakayım. Bu aksi iddiayı şöyle yazabilirim :

$$(?) \qquad \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]<1.$$

Bu ifade tam şüpheli noktayı teşkil ettiği için önüne bir soru işareti koyuyorum. Bu formüle «(?) formülü» diyelim. (?) formülünün mânası nedir? Tabiatıyla şu: Öyle bir N vardır ki

$$n\geq N \text{ için } \left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]^n<1$$

olsun. Buradan

$$n\geq N \text{ için } \frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}<1$$

olduğu çıkar. Bundan sonra.... Bir deneme yapayım. Evet, bundan sonra (?) eşitsizliğinden şöyle bir düzgün ifade elde edebilirim

$$n\geq N \text{ için } \frac{a_1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_n}{n},$$

yahut

$$n\geq N \text{ için } \frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}<-\frac{a_1}{n+1}.$$

Bunu daha uzun bir halde yazayım:

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}<-\frac{a_1}{n}$$

$$\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}<-\frac{a_1}{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{N+1}}{N+1}-\frac{a_N}{N}<-\frac{a_1}{N+1}$$

ve buradan da

$$\frac{a_n}{n}<\frac{a_N}{N}-a_1\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=C-a_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

olur ki, burada C, n ye bağlı olmayan bir sabittir, yeter ki $n \geqq N$ olsun. Pek önemi olmamakla beraber,

$$C = \frac{a_N}{N} + a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$$

dir. Fakat, n nin istenildiği kadar büyük alınabileceği ve armonik serinin ıraksak olması önemlidir. Şu halde bunlardan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$$

neticesi çıkar. Bu ise, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $a_n > 0$ dan ibaret olan faraziyemize açıkça aykırıdır. Fakat bu tenakuz (?) formülünden hatasız bir şekilde elde edilmiştir. Şu halde, bu tenakuzdan aslında (?) mes'ul olmalıdır; (?), $a_n > 0$ faraziyesiyle uyuşamaz; şu halde (?) nin aksi doğru olmalıdır — bu suretle teorem ispat edilmiş oldu!

6. Endüksiyon safhasının rolü. Yukarıki çözüme sathî bir şekilde baktığımız takdirde, çözümün birinci, endüksiyon, safhasının (paragraf 4) ikinci, ispat, safhasında (paragraf 5) hiç kullanılmadığını zannedebiliriz. Fakat iş böyle değildir. Endüksiyon safhası birçok bakımlardan faydalı olmuştur.

Evvelâ, teoremin müşahhas özel hallerini muayene etmek suretiyle onu iyice anladık ve onun tam mânasını kavradık. Onun faraziyesinin mutlaka lûzumlu olduğuna ve neticesinin keskinliğine kanaat getirdik. Bu bilgi ikinci safhada bize yardımcı oldu: Bu safhada bütün faraziyeyi kullanmamız lâzımgeldiğini ve e sabitinin tam değerini hesaba katmak mecburiyetinde olduğumuzu evvelden bilmiş olduk.

İkinci olarak, teoremi birçok özel halde gerçeklemekle onun lehinde kuvvetli endüktif deliller toplamış olduk. Endüktif safha teorem hakkında başlangıçtaki şüphemizi yenerek, onun hakkın-

da bize kuvvetli bir itimat verdi. Böyle bir itimat olmadan, bu teoremin öyle günlük bir işe benzemeyen ispatına girişmek cesaretini kendimizde kolay kolay bulamazdık. «Bir teoremin doğru olduğuna kanaat getirince, onu ispata başlarsınız» — geleneksel matematik profesörü tamamiyle haklıdır.

Üçüncü olarak, içinde e nin alışık olduğumuz limit formülünün üst üste ortaya çıktığı misâller, bu limit formülünü teoremin ifadesine sokmak için bize makûl bir sebep teşkil etti. Ve bu da ispata giden yoldaki hayatî adımı teşkil etti.

Netice olarak: ispat safhasından önce endüksiyon safhasının gelmesi tabiî ve mantıkîdir. Önce tahmin edin, sonra ispatlayın.

V. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. $$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{3}{4}x^4+\cdots$$

ve $$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\cdots$$

serilerini birbiriyle çarparak

$$y=(1-x^2)^{-1/2}\arcsin x=x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$$

açılımının ilk terimlerini bulursunuz.

(a) Birkaç terim daha hesaplıyarak genel terimi tahmin etmeye çalışınız.

(b) y nin

$$(1-x^2)y'-xy=1$$

diferansiyel denklemini gerçeklediğini gösteriniz ve bunu tahminlerinizi ispat için kullanınız.

2.

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \cdots$$

ile

$$\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots$$

serisini birbiriyle çarparak

$$y = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

açılımının ilk terimlerini bulursunuz.

(a) Birkaç terim daha hesaplıyarak genel terimi tahmin etmeye çalışınız.

(b) Tahmininiz, eğer doğru ise, y nin basit bir diferansiyel denklem gerçeklediğini aklımıza getirir. Bu diferansiyel denklemi teşkil ederek, tahmininizi ispat ediniz.

3.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\,f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

fonksiyonel denklemi

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{64}x^4 + \frac{25}{256}x^6 + \frac{1225}{16384}x^8 + \cdots$$

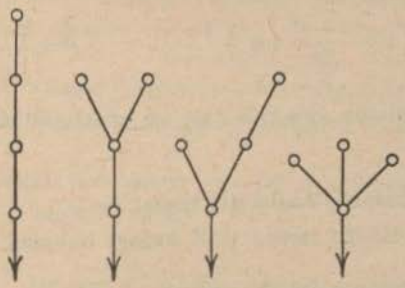
kuvvet serisi tarafından gerçeklenmektedir. Bu katsayıları kontrol ediniz ve, lâzım olduğu takdirde birkaç katsayı daha hesaplıyarak, genel terimi tahmin etmeye çalışınız.

4. $$f(x) = 1 + \frac{x}{6}\left[f(x)^3 + 3f(x)\,f(x^2) + 2f(x^3)\right]$$

fonksiyonel denklemi

$$f(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

kuvvet serisi tarafından gerçeklenmektedir. Buradaki a_n nin, aynı $C_n H_{2n+1}OH$ kapalı kimya formülünü haiz olan birbirinden farklı yapıda kimyasal bileşiklerin (alifatik alkoller) sayısını gösterdiği ileri sürülmektedir. $n=4$ halinde bu doğrudur. Bu halde hakikaten $a_4=4$ tane farklı C_4H_9OH alkolü mevcut olup, bunlar Şek. 5.1 de gösterilmiştir. Bu şekilde her bileşik bir «ağaç», her C ufak bir daire veya «düğüm» ve — OH radikali bir ok ile gösterilmiş olup, H 'ler hiç gösterilmemiştir. Siz n nin diğer değerlerini deneyiniz.



Şek. 5.1. C_4H_9OH bileşikleri

5. $n\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \pmod 6$ olduğuna göre

$$\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\binom{n-k}{k}=1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0$$

dır.

6. Bir elips kendi büyük, veya küçük ekseni etrafında döndürüldüğüne göre, ya uzun veya basık bir sferoit (elipsoit) çizer.

Uzun sferoit yüzeyinin alanı için

$$E = 2\pi ab\left[(1-\varepsilon^2)^{1/2} + (\arcsin \varepsilon)/\varepsilon\right], \quad P = 4\pi (a^2 + 2b^2)/3$$

formülleri bu alanın sırasıyla tam ve yaklaşık değerlerini verirler (a, b ve ε paragraf 2 deki gibidir).

(a) İzafî hatânın başlangıç terimi ile

(b) $b = 0$ olduğu zaman izafî hatayı bulunuz.

Bu izafî hatanın işareti nedir ?

7. Basık elipsoit yüzeyinin alanına dair

$$E = 2\pi a^2\left[1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right], \qquad P = \frac{4\pi(2a^2+b^2)}{3}$$

formülleri, bu alanın sırasıyla tam ve yaklaşık değerlerini verirler.

(a) İzafî hatanın başlangıç terimi ile

(b) $b = 0$ olduğu zaman izafî hatayı bulunuz.

Bu izafî hatanın işareti nedir ?

8. Misâl 6 ve 7 yi mukayese ederek, yarı eksenleri a, b, c olan genel bir elipsoit yüzeyinin alanı için hangi yaklaşık formülü teklif edersiniz ?

Bu formüldeki hatânın işareti nedir ?

9. [Paragraf 2.] Elipsin $x = a\sin t$, $y = b\cos t$ şeklindeki parametrik gösterilişinden hareket ederek

$$E = 4a\int_0^{\pi/2} (1 - \varepsilon^2\sin^2 t)^{1/2}\,dt$$

$$= 2\pi a\left[1 - \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right]$$

olduğunu gösteriniz ve buradan paragraf 2 de ispatsız olarak verilmiş olan başlangıç terimlerini çıkarınız.

10 (devam). ε 'nun kuvvetlerine göre açılımları kullanarak, $0 < \varepsilon \leq 1$ için $E > P$ olduğunu ispat ediniz.

11. [Paragraf 2.] α sayısını o suretle tayin ediniz ki,

$$P'' = \alpha P + (1 - \alpha) P'$$

ifadesi E nin küçük ε lar için en iyi yaklaşık değerini versin. (Yani $(P'' - E)/E$ nin başlangıç teriminin mertebesi mümkün olduğu kadar yüksek olsun.)

12 (devam). Paragraf 2 deki metodu takip ederek P'' nün E ye ne kadar yaklaştığını araştırınız. (Endüksiyonla!)

13. Bir p pozitif tam sayısı ve bir $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ pozitif sayılar dizisi verilmiş olsun.

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+p}}{a_n} \right)^n \geq e^p$$

olduğunu gösteriniz.

14 (devam). Öyle bir $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisi gösteriniz ki, onun için « $=$ » işareti cari olsun.

15. *Müşahede edilen kaideleri izah etmek.* Fizikte bir keşfe ekseriya iki adımda varılır. Evvelâ müşahede neticelerinde herhangi bir kaidenin farkına varılır. Sonra bu kaide bir genel kanunun neticesi olarak izah edilir. Bazan bu iki adım arasında büyük bir zaman aralığı bulunup, bunlar farklı iki kimse tarafından atılabilir. Buna büyük bir misâl Kepler ve Newton'unkidir. Gezegenlerin hareketinde Kepler tarafından müşahede edilmiş olan kaideler, Newton'un keşfettiği cazibe kanunu ile izah edilmiştir. Buna benzer birşey bir matematik araştırmasında da ge-

çebilir. İşte buna dair, fazla ön bilgiye ihtiyaç göstermeyen, temiz bir misâl :

Mûtat bir 4 basamaklı adî logaritme cedvelinde 100 den 999 'a kadarki tam sayılara ait olmak üzere 900 tane mantis bulunur. Bunlara bakmadan evvel, 0, 1, . . ., 9 dan ibaret olan on tane rakamın bu cedvellerde aşağı yukarı eşit sayıda tekerrür ettiğini zannedebiliriz. Fakat hakikat bu merkezde değildir : bu rakamlar mantisin *ilk* basamağında hiç te eşit sayıda tekerrür etmezler. Birinci basamağında aynı rakamı haiz mantisleri herbir rakam için saymak suretiyle aşağıki cedveli elde ederiz. (Bu cedveli kontrol ediniz !)

Cedvel I. Dört basamaklı logaritme cedvelinde aynı ilk rakamı haiz mantislerin sayısı

İlk rakam	Mantis sayısı	Oranlar
0	26	
		1,269
1	33	
		1,242
2	41	
		1,268
3	52	
		1,250
4	65	
		1,262
5	82	
		1,256
6	103	
		1,252
7	129	
		1,271
8	164	
		1,250
9	205	
Toplam	900	

Cedvel I in ikinci sütununa bakarsak, oradaki herhangi iki müteakip sayının oranının aşağı yukarı aynı kaldığını farkedebiliriz. Bu bizi, bu oranları birkaç basamağa kadar hesaplamaya

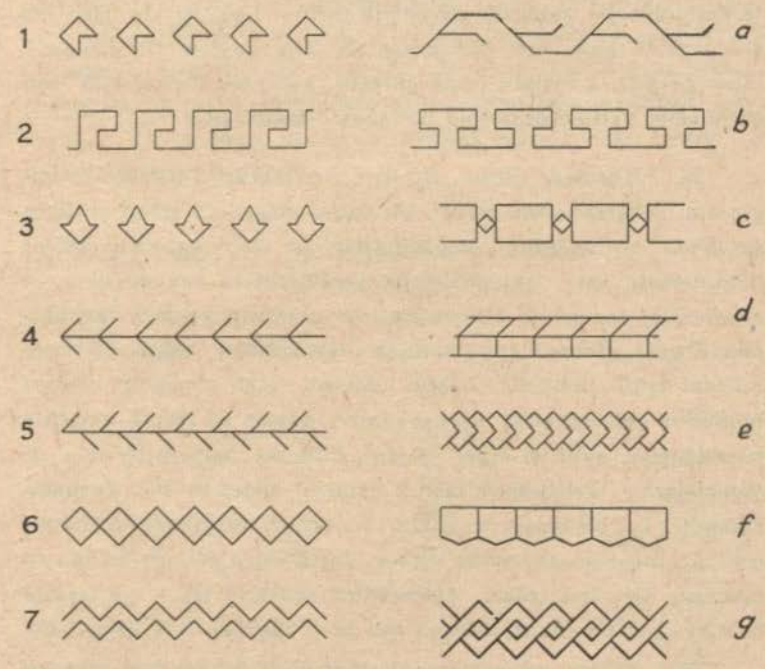
sevkeder: bu hesap neticeleri Cedvel I 'in son sütununda gösterilmiştir.

Bu oranlar neye aşağı yukarı eşittir? Bu yaklaşık intizamın arkasında sarih bir kaide sezmeye çalışınız. Cedvel I 'in ikinci sütunundaki sayılar aşağı yukarı bir geometrik dizinin terimleridir. Bu yaklaşık geometrik dizinin terimleriyle basit bir münasebeti haiz tam bir geometrik dizi keşfedebilir misiniz? [Tam geometrik dizinin ortak çarpanı, belki de, Cedvel I in son sütununda verilen oranların bir nevi ortalamasıdır.]

16. *Müşahede edilen vâkıaları tasnif etmek.* Bir tabiat bilgininin çalışmalarının büyük bir kısmı müşahede ettiği şeylerin tasvirine ve tasnifine yöneltilmiştir. Bu türlü çalışma, tabiat bilginlerinin esas faaliyetlerinin yeni bitki ve hayvan nevi ve cinslerinin tasviri ve bilinen nevi ve cinslerin yeniden tasnifinden ibaret bulunduğu Linnaeus zamanından sonra da uzun müddet tabiî ilimlerde hâkim çalışma şekli olmuştur. Tabiat bilginleri sadece bitki ve hayvanları tasvir ve tasnif etmekle kalmamışlar, aynı işi diğer şeyler, bilhassa mineraller için de yapmışlardır; kristallerin tasnifi onların simetrilerine dayandırılmıştır. İyi bir tasnif önemlidir; bu tasnif, müşahede edilebilir çokluğu nispeten az sayıda açıkça karakterize edilmiş ve iyi sıralanmış tipe irca eder. Matematikçi ekseriya tasvir ve tasnife dalmaya fırsat bulmaz, fakat bazan bu iş matematikte de olabilir.

Eğer düzlem geometriye ait bazı basit kavramları (simetri doğrusu, simetri merkezi) biliyorsanız, tezyinat şekilleri ile meşgul olmaktan zevk duyabilirsiniz. Şek. 5.2, herbiri basit bir şeklin (yatay) bir doğru boyunca peryodik olarak tekrarlanmasıyla meydana gelmiş on dört tezyinat şeridi göstermektedir. Şek. 5.2 nin sol tarafındaki (bir rakamla işaretlenmiş) her şeridi sağ taraftaki (bir harfle işaretlenmiş) bir şeritle öyle eşleştiriniz ki, iki eş şerit *aynı simetri tipini* haiz olsun. Bundan başka her çeşit eşyanın üzerinde veya eski mimarî eserlerde bulabileceğimiz

tezyinat şeritlerini inceleyiniz ve onların herbirini Şek. 5.2 deki bir şeritle eşleştirmeye çalışınız. Nihayet bir şeridin haiz olabileceği çeşitli simetri tiplerinin tam bir listesini ve herbir simetri tipinin tam bir tasvirini veriniz. [Bir şeridi her iki yönde de sonsuz olarak, ve peryodik tekrarı ile şeridi meydana geti-

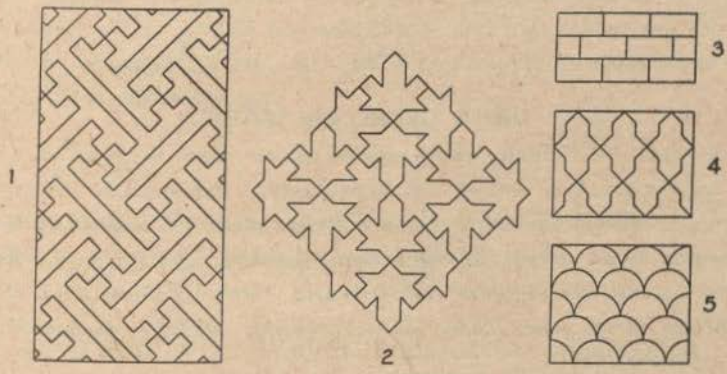


Şek. 5.2

ren şekli de sonsuz kere tekrarlanmış olarak düşünün. «Simetri tipi» teriminin formel olarak tarif edilmemiş olduğuna dikkat ediniz: bu terimin uygun bir şekilde tefsiri vazifenizin önemli bir parçasıdır.]

17. Şek. 5.3 te aynı simetri tipini haiz iki tezyinat bulu-

nuz. Oradaki her tezyinatın, hep aynı şeklin tekrarlanması suretiyle bütün düzlemi kapladığı düşünülecektir.



Şek. 5.3

18. *Aradaki fark nedir?* (İngilizce) alfabenin yirmi altı harfi aşağıki şekilde beş gruba ayrılmıştır:

A M T U V W Y
B C D E K
N S Z
H I O X
F G J L P Q R.

Gruplar arasındaki fark nedir? Yukardaki tasnifin basit bir dayanağı ne olabilir? [Aşağıki beş denkleme bakınız:

$$y = x^2, \quad y^2 = x, \quad y = x^3, \quad x^2 + 2y^2 = 1, \quad y = x + x^4.$$

Bunların arasındaki fark nedir?]

VI

DAHA GENEL BİR İFADE

O [Euler] talebelerini hayrete düşürmek yerine, onları yetiştirmeyi tercih etmişti. Eğer ilmi zenginleştirdiği keşiflerine kendisini bu keşiflere sevkeden fikirlerin açık kalple anlatışını ilâve etmezse, ilme yeteri kadar hizmet etmemiş olacağını düşünürdü.
— CONDORCET

1. Euler. Eserlerini azçok tanıdığım bütün matematikçiler içinde, Euler diğerleri ile kıyas kabûl etmiyecek derecede en önemlisi olarak görünmektedir. Matematikte endüktif araştırmanın büyük bir ustası olan Euler (sonsuz serilerde, Sayılar Teorisinde, ve matematiğin diğer dallarında) endüksiyon, yani müşahede, cür'etkâr tahmin ve zekice gerçeklemeler, vâsıtasıyla önemli keşifler yapmıştır. Bununla birlikte, bu hususta Euler tek değildir; büyük ve küçük diğer matematikçiler de çalışmalarında endüksiyonu geniş ölçüde kullanmışlardır.

Bununla beraber, bence Euler bir noktada tektir:

O, keşiflerine dair endüktif delilleri dikkatli, ayrıntılı ve düzenli bir şekilde sunmak için hiçbir eziyetten kaçınmamakta, onları hakikî bir ilim adamının yapması lâzım geldiği üzere ikna edici, fakat namuslu bir tarzda ortaya koymaktadır. Onun anlatışı «kendisini bu keşiflere sevkeden fikirlerin hâlisane hikâye edilişi» olup, kendine has bir çekiciliği haizdir. Tabiatıyle, herhangi bir başka müellif gibi, o da okuyucuları üzerinde tesir yapmak istemektedir; fakat o, hakikaten iyi bir müellif gibi,

okuyucularını ancak kendisi üzerinde tesir etmiş olan şeylerle tesir altında bırakmak istemektedir.

Bundan sonraki paragrafta Euler'in yazılarından bir nümune verilecektir. Bunun için seçtiğimiz muhtıra çok az bir ön bilgi ile okunabildiği gibi, tamamı da endüktif bir muhakemenin anlatılışına hasredilmiştir.

2. Euler'in muhtırasının burada, onu bugünkü okuyucu için daha anlaşılabilir hale getirmek maksadıyla yapılmış birkaç önemsiz değişiklik istisna edilirse, *hiç kısaltılmamış* İngilizce tercümesinin Türkçeye çevrilmiş şeklini veriyoruz. (1)

SAYILARIN BÖLENLERİNİN TOPLAMINA DAİR ÇOK OLAGANÜSTÜ BİR KANUNUN KEŞFİ

1. Matematikçiler, asal sayı dizisinde bir nizam keşfetmek için şimdiye kadar boşuna uğraşmış olup, burada insan dimağının hiçbir zaman nüfuz edemiyeceği bir sır bulunduğuna inanmaklığımız için her türlü sebep mevcuttur. Buna kanaat getirmek için, bazı kimselerin yüzbinin ötesine kadar hesaplamak zahmetinde bulundukları, bir asal sayılar cedveline bakmalıdır. Bu suretle orada hiçbir nizam ve kaidenin bulunmadığı görülecektir. Aritmetiğin, asal sayılar dizisini istediğimiz kadar uzatabilmemizi temin eden kesin kaideler verdiği gözönüne getirilirse, bu duruma daha da çok hayret etmek lâzımgelir. Ben, asal sayılar dizisinde bir nizam bulmak hedefinden muhakkak çok uzak

(1) Bu muhtıranın aslı Fransızcadır (Euler. *Opera Omnia*. Ser. 1, vol. 2, S. 241–253) Burada yapılmış değişiklikler, farklı bir yazış tarzı (dip notu 2), (dip notu 3 te izah edilen) bir cedvelin tanzimi, birkaç formülde yapılan ufak değişiklikler ve muhtıranın son 13. paragrafından önceki bâzı muhakemelerin tekrarından ibaret kısımların çıkarılmasından ibarettir. Okuyucu muhtıranın kolayca bulunabilen aslında bu hususlara bakabilir.

bulunmakla beraber, ilk bakışta asal sayılar dizisi kadar intizamsız görünen ve hattâ bir mânada onu ihtiva eden, tam sayıların bölenlerinin toplamlarına dair son derece garip bir kanunu tesadüfen keşfetmiş bulunuyorum. Birazdan anlatacağım bu kanunun, hakkında tam bir ispat verilmeden de doğruluğuna inanabileceğimiz bir tabiatta olması, onu kanaatımca daha da şayanı dikkat kılar. Bununla beraber, onun hakkında hemen hemen kesin bir ispata denk sayılabilecek deliller ileri süreceğim.

2. Asal bir sayının birimle kendisinden başka hiçbir böleni yoktur; bu özelik asal sayıları öteki sayılardan ayırır. Meselâ 7 bir asal sayıdır, çünkü yalnız 1 ve kendisi ile bölünebilir. Birimle kendisinden başka bölen veya bölenleri haiz bir sayıya mürekkep sayı denir; meselâ 15 sayısı, 1 ve 15 ten başka 3 ve 5 bölenlerini haiz olduğundan mürekkeptir. Şu halde, genel olarak: p sayısı asal ise sadece 1 ve p tarafından, mürekkep ise 1 ve p nin yanısıra diğer bazı sayılar tarafından bölünür. Şu halde birinci şıkta p nin bölenlerinin toplamı $1+p$ olacak, fakat ikinci şıkta bu toplam $1+p$ 'yi geçecektir. Aşağıda birçok sayıların bölenler toplamını nazarı itibara almamız lâzım geleceğinden, n sayısının bölenler toplamını göstermek üzere $\sigma(n)$ işaretini kullanacağım. [2] Böylece $\sigma(12)$, 12 nin bütün bölenlerinin toplamını göstermekte olup, bu bölenler 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 olduğundan $\sigma(12)=28$ dir. Aynı şekilde $\sigma(60)=168$ ve $\sigma(100)=217$ olduğu görülebilir. Birim sadece kendisiyle bölünebildiğinden, $\sigma(1)=1$ dir. 0 (sıfır) ise, bütün sayılarla bölünebilir. Şu halde, aslına bakılırsa $\sigma(0)$ sonsuz olmalıdır. (Bununla beraber ona sonradan, değişik hallerde değişik olmak üzere, sonlu bir değer vereceğim ve bu değerlendirme bizim için elverişli olacaktır.)

3. $\sigma(n)$ sembolünün değerini yukarıki şekilde tarif ettikten

---

[2] Bölenler toplamı için bir sembolü ilk ithal eden Euler olmuştur; Euler, metnimizdeki modern $\sigma(n)$ yerine $/n$ işaretini kullanıyordu.

sonra, p asal ise $\sigma(p) = 1 + p$ olduğunu açık bir şekilde görüyoruz. Bununla birlikte $\sigma(1)$, $1 + 1$ 'e eşit olmayıp, ancak 1 'e eşittir; buradan, 1 in asal sayılar dizisinden ihraç edilmesi lâzım geldiğini anlarız; 1 tam sayıların başlangıcı olup, kendisi ne asal, ne de mürekkeptir. Eğer n mürekkep ise, $\sigma(n)$, $1 + n$ den büyüktür.

Bu sonuncu halde $\sigma(n)$ 'yi n 'nin çarpanlarından kolayca bulabiliriz. Eğer a, b, c, d, ... birbirinden farklı asal sayılar ise

$$\sigma(ab) = 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) = \sigma(a)\,\sigma(b),$$

$$\sigma(abc) = (1 + a)(1 + b)(1 + c) = \sigma(a)\,\sigma(b)\,\sigma(c)$$

$$\sigma(abcb) = \sigma(a)\,\sigma(b)\,\sigma(c)\,\sigma(d),$$

ilâh... olduğunu kolayca görürüz. Asal sayı kuvvetleri için

$$\sigma(a^2) = 1 + a + a^2 = \frac{a^3 - 1}{a - 1},$$

$$\sigma(a^3) = 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

gibi özel kaidelere ihtiyacımız vardır. Genel olarak

$$\sigma(a^n) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

dir. Bunu kullanarak, herhangi bir mürekkep sayının bölenler toplamını bulabiliriz. Bu husus

$$\sigma(a^2b) = \sigma(a^2)\,\sigma(b)$$

$$\sigma(a^3b^2) = \sigma(a^3)\,\sigma(b^2)$$

$$\sigma(a^3b^4c) = \sigma(a^3)\,\sigma(b^4)\,\sigma(c)$$

ve genel olarak

$$\sigma(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon) = \sigma(a^\alpha)\,\sigma(b^\beta)\,\sigma(c^\gamma)\,\sigma(d^\delta)\,\sigma(e^\varepsilon)$$

formüllerinden anlaşılır. Meselâ $\sigma(360)$ 'ı bulmak için, 360, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ şeklinde çarpanlara ayrıldığından

$$\sigma(360) = \sigma(2^3)\,\sigma(3^2)\,\sigma(5)$$ 'i kullanırız ki, buradan

$$\sigma(360) = 15.13.16 = 1170$$

buluruz.

4. Bölenler toplamlarının teşkil ettiği diziyi göstermek üzere, 1 den 99 'a kadarki bütün tam sayıların bölenler toplamlarını ihtiva eden aşağıki cedveli [3] ilâve ediyorum.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	1	**3**	**4**	7	**6**	12	**8**	15	13
10	18	**12**	28	**14**	24	24	31	**18**	39	**20**
20	42	32	36	**24**	60	31	42	40	56	**30**
30	72	**32**	63	48	54	48	91	**38**	60	56
40	90	42	96	**44**	84	78	72	**48**	124	57
50	93	72	98	**54**	120	72	120	80	90	**60**
60	168	**62**	96	104	127	84	144	**68**	126	96
70	144	**72**	195	**74**	114	124	140	96	168	**80**
80	186	121	126	**84**	224	108	132	120	180	**90**
90	234	112	168	128	144	120	252	**98**	171	156

Eğer bu sayı dizisini biraz muayene edersek, âdeta yeise düşeriz. Orada en ufak bir intizam keşfetmeyi ümit edemeyiz. Asal sayılar dizisinin intizamsızlığı burada o kadar derin olarak işin içine girer ki, bu son dizinin tâbi olduğu kanunu bilmeden önceki diziye dair herhangi bir kanun meydana çıkarmayı im-

[3] 60 işaretli satır ile 7 işaretli sütunun üzerinde kesiştikleri sayı, yani 68, $\sigma(67)$ dir. p asal olduğu takdirde $\sigma(p)$ kalın punto ile basılmıştır. Cedvelin bu şekilde tertibi, orijinal tertibinden biraz daha mücmeldir.

kânsız bulmamız icabeder. Hattâ önümüzdeki dizi asal sayılar dizisinden bile daha esrarengiz görülebilir.

5. Buna rağmen, bu dizinin tamamen belirli bir kanuna tâbi olduğunu, hattâ ona bir *rekürrans* dizisi gözüyle bakılabiceğini müşahede ettim. Bu matematik ifadenin mânası, her terimin kendisinden evvel gelen terimlerden değişmez bir kaideye göre hesaplanabileceğidir. Hakikaten, $\sigma(n)$ bu dizinin herhangi bir terimini, $\sigma(n-1)$, $\sigma(n-2)$, $\sigma(n-3)$, $\sigma(n-4)$, $\sigma(n-5)$, ... de ondan önce gelen terimleri gösterdiğine göre, $\sigma(n)$ nin değerinin her zaman aşağıki formüle göre, önceki bazı terimlerin değerlerinden teşkil edilebileceğini iddia ediyorum:

$$\begin{aligned}\sigma(n) = {} & \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) \\ & + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) \\ & + \sigma(n-35) + \sigma(n-40) - \sigma(n-51) - \sigma(n-57) \\ & + \sigma(n-70) + \sigma(n-77) - \sigma(n-92) - \sigma(n-100) \\ & + \cdots .\end{aligned}$$

Bu formül hakkında aşağıki hususlara dikkat etmeliyiz:

I. + ve − işaretleri birbirini ikişer ikişer tâkip eder.

II. n den çıkartmamız lâzımgelen 1, 2, 5, 7, 12, 15,... sayılarının tâbi bulundukları kanun, onların farklarını teşkil ettiğimiz zaman açıklığa kavuşur.

Sayılar: 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100,...

Farklar: 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8,..,

Burada birbiri arkasından gelmek üzere bütün 1, 2, 3, 4, 5, 6,... tabiî sayıları ile bütün 3, 5, 7, 9, 11,... tek sayıları bulunmaktadır. Buna bakarak yukarıki sayı dizisini istediğimiz kadar uzabiliriz.

III. Yukarıki dizi sonsuza kadar gitmekle beraber, herbir halde sadece σ işaretinin içindeki sayıların pozitif bulunduğu terimleri almalı, bunların negatif olduğu terimleri bırakmalıdır.

IV. Eğer $\sigma(0)$ işareti formülde zuhûr ederse, değeri belirsiz olan bu işaret yerine, başlangıçtaki n sayısının kendisi konulmalıdır.

6. Bu ihtarlardan sonra formülü herhangi bir özel hale uygulamak güç değildir ve herkes istediği kadar misâl hesaplıyarak formülün doğruluğu hakkında kendini tatmin edebilir. Ben de bu formüle dair kesin bir ispat verecek durumda bulunmadığımı kabûl etmek zorunda olduğumdan, onu yeter derecede çok sayıda misâl vermek suretiyle haklı göstermiye çalışacağım:

$$
\begin{aligned}
\sigma(1) &= \sigma(0) && = 1 && = 1\\
\sigma(2) &= \sigma(1) + \sigma(0) && = 1 + 2 && = 3\\
\sigma(3) &= \sigma(2) + \sigma(1) && = 3 + 1 && = 4\\
\sigma(4) &= \sigma(3) + \sigma(2) && = 4 + 3 && = 7\\
\sigma(5) &= \sigma(4) + \sigma(3) - \sigma(0) && = 7 + 4 - 5 && = 6\\
\sigma(6) &= \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1) && = 6 + 7 - 1 && = 12\\
\sigma(7) &= \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \sigma(0) && = 12 + 6 - 3 - 7 && = 8\\
\sigma(8) &= \sigma(7) + \sigma(6) - \sigma(3) - \sigma(1) && = 8 + 12 - 4 - 1 && = 15\\
\sigma(9) &= \sigma(8) + \sigma(7) - \sigma(4) - \sigma(2) && = 15 + 8 - 7 - 3 && = 13\\
\sigma(10) &= \sigma(9) + \sigma(8) - \sigma(5) - \sigma(3) && = 13 + 15 - 6 - 4 && = 18\\
\sigma(11) &= \sigma(10) + \sigma(9) - \sigma(6) - \sigma(4) && = 18 + 13 - 12 - 7 && = 12\\
\sigma(12) &= \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + \sigma(0) && = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 && = 28\\
\sigma(13) &= \sigma(12) + \sigma(11) - \sigma(8) - \sigma(6) + \sigma(1) && = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 && = 14\\
\sigma(14) &= \sigma(13) + \sigma(12) - \sigma(9) - \sigma(7) + \sigma(2) && = 14 + 28 - 13 - 8 + 3 && = 24\\
\sigma(15) &= \sigma(14) + \sigma(13) - \sigma(10) - \sigma(8) + \sigma(3) + \sigma(0) && = 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 && = 24\\
\sigma(16) &= \sigma(15) + \sigma(14) - \sigma(11) - \sigma(9) + \sigma(4) + \sigma(1) && = 24 + 24 - 12 - 13 + 7 + 1 && = 31\\
\sigma(17) &= \sigma(16) + \sigma(15) - \sigma(12) - \sigma(10) + \sigma(5) + \sigma(2) && = 31 + 24 - 28 - 18 + 6 + 3 && = 18\\
\sigma(18) &= \sigma(17) + \sigma(16) - \sigma(13) - \sigma(11) + \sigma(6) + \sigma(3) && = 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 && = 39\\
\sigma(19) &= \sigma(18) + \sigma(17) - \sigma(14) - \sigma(12) + \sigma(7) + \sigma(4) && = 39 + 18 - 24 - 28 + 8 + 7 && = 20\\
\sigma(20) &= \sigma(19) + \sigma(18) - \sigma(15) - \sigma(13) + \sigma(8) + \sigma(5) && = 20 + 39 - 24 - 14 + 15 + 6 && = 42
\end{aligned}
$$

Bu misâllerin herhangi bir kimseyi, vermiş olduğum kaide ile hakikat arasındaki uygunluğun salt tesadüften ibaret bulunduğu zehabına kapılmaktan alıkoymaya yeteceğini umarım.

7. Buna rağmen, çıkarılacak olan 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... sayılarına dair kanunun tam benim verdiğim kanun olduğundan şüphelenecek bir kimse çıkabilir, çünkü yukarda verilen misâllerde bu sayıların ancak ilk altısı geçmektedir. Bundan dolayı o kanun henüz yeter derecede tesis edilmemiş görülebileceğinden, daha büyük sayılar ihtiva eden bazı misâller vereceğim:

I. 101 sayısı verildiğine göre, onun bölenlerinin toplamını bulmak. Burada

$$\begin{aligned}\sigma(101) &= \sigma(100) + \sigma(99) - \sigma(96) - \sigma(94)\\ &\quad + \sigma(89) + \sigma(86) - \sigma(79) - \sigma(75)\\ &\quad + \sigma(66) + \sigma(61) - \sigma(50) - \sigma(44)\\ &\quad + \sigma(31) + \sigma(24) - \sigma(9) - \sigma(1)\\ &= 217 + 156 - 252 - 144\\ &\quad + 90 + 132 - 80 - 124\\ &\quad + 144 + 62 - 93 - 84\\ &\quad + 32 + 60 - 13 - 1\\ &= 893 - 791\\ &= 102\end{aligned}$$

olup, buradan, eskiden bilmemiş olsaydık, 101 in asal olduğu neticesini çıkarabilirdik.

II. 301 sayısının bölenler toplamını bulmak.

Farklar :

$$\sigma(301) = \sigma(300) + \overset{1}{\sigma}(299) - \overset{3}{\sigma}(296) - \overset{2}{\sigma}(294) + \overset{5}{}$$

$$+ \overset{3}{\sigma}(289) + \overset{7}{\sigma}(286) - \overset{4}{\sigma}(279) - \overset{9}{\sigma}(275) +$$

$$+ \overset{5}{\sigma}(266) + \overset{11}{\sigma}(261) - \overset{6}{\sigma}(250) - \overset{13}{\sigma}(244) +$$

$$+ \overset{7}{\sigma}(231) + \overset{15}{\sigma}(224) - \overset{8}{\sigma}(209) - \overset{17}{\sigma}(201) +$$

$$+ \overset{9}{\sigma}(184) + \overset{19}{\sigma}(175) - \overset{10}{\sigma}(156) - \overset{21}{\sigma}(146) +$$

$$+ \overset{11}{\sigma}(125) + \overset{23}{\sigma}(114) - \overset{12}{\sigma}(91) - \overset{25}{\sigma}(79) +$$

$$+ \overset{13}{\sigma}(54) + \overset{27}{\sigma}(41) - \overset{14}{\sigma}(14) - \sigma(0).$$

Bu misâlden, farkları kullanmak suretiyle formülü her özel halde lâzım olduğu kadar uzatabileceğimizi görüyoruz. Hesapları yaparak

$$\sigma(301) = 4939 - 4587 = 352$$

buluruz. Buradan 301 'in asal olmadığını görürüz. Hakikaten $301 = 7.43$ olup,

$$\sigma(301) = \sigma(7)\,\sigma(43) = 8.44 = 352$$

elde ederiz ki, bu da kaidenin verdiği değerin aynıdır.

8. Biraz önce etraflı olarak açıklamış olduğum misâller, teklif etmiş olduğum formülün doğruluğu hakkında arta kalmış bütün şüpheleri dağıtacaktır. Şimdi, sayıların bu güzel özeliği, formülümüzün yapısı ile burada toplamını teşkil ettiğimiz bölenlerin

tabiatı arasında hiçbir anlaşılabilir bağ görmediğimizden dolayı daha da hayret vericidir. 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... sayı dizisinin elimizdeki malzeme ile herhangi bir münasebeti mevcut gibi görünmemektedir. Bundan başka, bu sayıların tâbi olduğu kanunda bir «kesiklik» mevcut olduğundan, ve onların dizisi hakikatte, düzgün birer kanunu haiz iki dizinin, yani 1, 5, 12, 22, 35, 51, ... ve 2, 7, 15, 26, 40, 57, ... dizilerinin karışımı olduğundan, böyle bir intizamsızlığın Analizde zuhûr etmesini bekliyemeyiz. Bir dedüktif ispatın mevcut olmayışı hayretimizi daha arttırmalıdır, çünkü böyle bir özeliği, mükemmel bir ispatın yerini tutabilecek güvenilir bir metodun rehberliği olmadan keşfedebilmek tamamen imkânsız görünmektedir. Ben bu keşfin üzerine sırf tesadüf neticesi düşmediğimi, fakat bu güzel özeliğe diğer bir iddianın yol açmış olduğunu itiraf ederim. Bu diğer iddia aynı tabiatta olup, onu ispat edememekliğimle beraber, onun doğru olarak kabul edilmesi lâzımdır. Ve burada, Diferansiyel ve İntegral Hesabın kendilerine uygulanamaz göründüğü, tam sayıların tabiatıyla uğraşmaklığımıza rağmen, ben neticeme türev alma ve diğer işlemleri kullanmak suretiyle vardım. Başka bir kimsenin, belki benim tutmuş olduğum yoldan da biraz faydalanarak, daha kısa ve daha tabiî bir yol bulmasını temenni ederim.

9. Uzun bir zaman önce, sayıların (diğer bir takım sayıların toplamlarına) ayrılışlarını ele aldığım zaman çarpanlarının sayısı sonsuz olarak alınacak olan

$$(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\,(1-x^4)\,(1-x^5)\,(1-x^6)\,(1-x^7)\,(1-x^8)\ldots$$

ifadesini incelemiştim. Buradan ne türlü bir seri çıkacağını görmek için, birçok çarpanı doğrudan doğruya birbiriyle çarptım ve şu seriyi buldum:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$$

Burada x 'in üsleri yukarıki (yani 5. teki) formüle giren sayıların

aynı olup, terimlerin önündeki + ve — işaretleri de birbirlerini ikişer ikişer tâkip ederler. Yukarıki çarpımları yapmaya girişmek ve bu işe serinin doğruluğuna inanmak için uygun görülecek yere kadar devam etmek yeter. Bu hususta, bu terimlerin ve onların üslerinin tâbi olduğu kanunun doğruluğundan hiçbir surette şüphelenmeme yer bırakmıyacak kadar ilerletmiş olduğum uzun bir endüksiyondan başka elimde hiçbir delil yoktur. Bu seri ile yukarıki $(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ldots$ sonsuz çarpımının eşit olduklarına dair kesin bir ispatı uzun zaman boşuna aradım, ve aynı soruyu bu konulardaki meharetlerini bildiğim bazı dostlarıma da sordum, fakat hepsi de, ispatına dair herhangi bir ip ucu verememekle beraber, bu sonsuz çarpımın verdiğimiz seriye dönüştürülüşünün doğruluğu üzerinde benimle birleştiler. Böylelikle

$$s=(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ (1-x^4)\ (1-x^5)\ (1-x^6)\ldots$$

vaz'ettiğimiz takdirde, aynı S büyüklüğünün

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$$

şeklinde de ifade edilebileceği bilinen, fakat heuüz ispat edilememiş bir hakikat oluyor. Çünkü her birimiz çarpımı istediğimiz kadar ilerleterek bunun doğruluğuna kanaat getirebiliriz; ve keşfedilmiş olan kanunun 20 terim için cari olduktan sonra, müteakip terimlerde doğru olmaması insana imkânsız geliyor.

10. İki sonsuz ifadenin eşitliğini, onu ispat edemesek bile, böylece keşfetmiş olduğumuzdan, bundan çıkarılabilecek bütün neticeler de aynı tabiatta, yani doğru, fakat ispat edilmemiş olacaktır. Yahut, bu neticelerden biri ispat edilebilirse, ondan, karşılıklı olarak, ilk eşitliğin ispatına dair bir ip ucu elde edilir; zaten bu iki ifadeyi türlü yollarla türlü şekillere soktuğum zaman aklımdaki maksat bu idi ve bu suretle, diğer keşifler arasında. yukarda açıkladığıma da sevkedilmiş oldum; şu halde onun doğruluğunun iki sonsuz ifadenin eşitliği kadar güvenilebilir

olması icabeder. Ben, bu eşitlikten bölen toplamlarına dair kanunu şöyle hareket etmek suretiyle elde ettim:

I. $s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots$ ve

II. $s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$

ifadelerinin eşit olduğu verildiğine göre, logaritmeler almak suretiyle birinci ifadeyi çarpanlardan kurtardım:

$$\log s=\log(1-x)+\log(1-x^2)+\log(1-x^3)+\log(1-x^4)+\cdots .$$

Logaritmelerden kurtulmak için her iki tarafın türevini alarak

$$\frac{1}{s}\,\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{3x^2}{1-x^3}-\frac{4x^3}{1-x^4}-\frac{5x^4}{1-x^5}-\cdots,$$

yahut

$$-\frac{x}{s}\,\frac{ds}{dx}=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\cdots$$

eşitliğini elde ederiz. s 'ye dair ikinci ifadeden, yani sonsuz seriden yukarıki son ifadenin başka bir değerini çıkarırız:

$$-\frac{x}{s}\,\frac{ds}{dx}=\frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots}.$$

11. Şimdi

$$-\frac{x}{s}\,\frac{ds}{dx}=t$$

vaz'edelim. Yukarıda aynı t büyüklüğü için iki ifadeye sahip bulunuyoruz. Birinci ifadedeki her terimi geometrik seriye açarak

$$\begin{array}{llllllllll}
t= x & +\,x^2 & +\,x^3 & +\,x^4 & +\,x^5 & +\,x^6 & +\,x^7 & +\,x^8 & +\cdots \\
 & +\,2x^2 & & +\,2x^4 & & +\,2x^6 & & +\,2x^8 & +\cdots \\
 & & +\,3x^3 & & & +\,3x^6 & & & +\cdots \\
 & & & +\,4x^4 & & & & +\,4x^8 & +\cdots \\
 & & & & +\,5x^5 & & & & +\cdots \\
 & & & & & +\,6x^6 & & & +\cdots \\
 & & & & & & +\,7x^7 & & +\cdots \\
 & & & & & & & +\,8x^8 & +\cdots
\end{array}$$

elde ederiz. Burada x 'in her kuvvetinin kendi üssünün bölenler sayısı kadar zuhûr ettiğini ve o üssün her böleninin x in o kuvvetinin katsayısı olarak ortaya çıktığını kolayca görürüz. Şu halde benzer terimleri toplarsak, x in herbir kuvvetinin katsayısı o kuvvete ait üssün bölenler toplamına eşit olacaktır. Şu halde, n nin bölenler toplamı için evvelce ithâl etmiş olduğumuz $\sigma(n)$ işaretini kullanırsak,

$$t = \sigma(1)\,x + \sigma(2)\,x^2 + \sigma(3)\,x^3 + \sigma(4)\,x^4 + \sigma(5)\,x^5 + \cdots$$

elde ederiz. Bu serinin kanunu açıktır. Ve, katsayıların belirlenmesinde bir miktar endüksiyon kullanılmış gibi görünse de, bu kanunun zarurî bir netice olduğuna kolayca kanaat getirebiliriz.

12. t nin tarifi dolayısıyla No. 10 nun son formülü şöyle yazılabilir :

$$t\,(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots)$$

$$- x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - 12x^{12} - 15x^{15} + 22x^{22} + 26x^{26} - \cdots = 0.$$

t nin No. 11 in sonunda elde edilmiş değerini burada yerine koyarsak,

$$0 = \sigma(1)\,x + \sigma(2)\,x^2 + \sigma(3)\,x^3 + \sigma(4)\,x^4 + \sigma(5)\,x^5 + \sigma(6)\,x^6 + \cdots$$

$$- x - \sigma(1)\,x^2 - \sigma(2)\,x^3 - \sigma(3)\,x^4 - \sigma(4)\,x^5 - \sigma(5)\,x^6 - \cdots$$

$$- 2x^2 - \sigma(1)\,x^3 - \sigma(2)\,x^4 - \sigma(3)\,x^5 - \sigma(4)\,x^6 - \cdots$$

$$+ 5x^5 + \sigma(1)\,x^6 + \cdots$$

buluruz. Terimleri toplayarak, x in verilen herhangi bir kuvvetinin katsayısını buluruz. Bu katsayı bir çok terimden meydana gelir. Evvelâ x 'in üssünün bölenler toplamı, sonra bu üsten sırasıyla 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, ... çıkarmak suretiyle elde edilen sayıların bölenler toplamları gelir. Nihayet, eğer bu diziye aitse, üssün kendisi zuhûr eder. Yukarda sıralanan terimlere

verilecek işaretleri tekrar açıklamamıza lûzum yoktur. Şu halde, genel olarak, x^n nin katsayısı

$$\sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) - \sigma(n-12) - \sigma(n-15) + \cdots$$

dır. Bu toplama σ işaretinin içindeki rakamların işareti negatif olmadığı müddetçe devam edilir. Eğer $\sigma(0)$ terimi zuhûr ederse, onun yerine n koymamız lâzımdır.

13. Önceki N. 12 de göz önüne alınan sonsuz serinin toplamı x in her değeri için 0 olduğundan, x in herbir kuvvetinin katsayısı da 0 'a eşit olmalıdır. Buradan yukarda No. 5 te açıklamış olduğum kanunu elde ederim; burada bölenler toplamının tâbi olduğu ve bu toplamı bütün sayılar için rekürans yoluyla hesaplamaya imkân veren kanunu kastediyorum. Yukarıki açıklamalarda gerek işaretler, gerek

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, ...

dizisi için, ve bilhassa, vermiş olduğum kaidenin en garip tarafı olarak görülebilecek olan, $\sigma(0)$ yerine n konulması için bazı sebepler bulabiliriz. Mükemmel bir ispattan hâlâ pek uzak olan bu muhakeme, burada anlatmış olduğum en olağanüstü kanun hakkındaki bazı şüpheleri muhakkak ki ortadan kaldıracaktır.

3. Daha genel bir noktai nazara geçiş. Euler'e ait olan yukarıki metin son derecede öğreticidir. Ondan gerek matematik, gerek keşif psikolojisi, gerek endüktif muhakeme hakkında bir hayli şey öğrenebiliriz. Bu bölümün sonundaki örnekler ve tamamlayıcı bilgiler Euler'in bazı matematik fikirlerini incelemeye fırsat vermektedir; biz şimdi burada dikkatimizi onun endüktif muhakeme tarzı üzerinde toplayacağız.

Euler'in araştırdığı teorem birçok bakımlardan şayanı dik-

kat olup, bugün bile büyük bir matematik alâkayı haizdir. Bununla birlikte, biz burada bu teoremin matematik muhtevasından ziyade, Euler'in bu teoreme daha henüz ispat edilmemiş halde iken inanmasına yol açan sebeplerle meşgûl olacağız. Bu sebeplerin mahiyetini daha iyi anlamak için, Euler'in muhtırasının matematik muhtevasını nazarı itibara almaksızın, Euler'in endüktif muhakeme tarzının genel bir veçhesi üzerinde de durarak, onun şematik bir özetini vereceğiz.

Münakaşa edeceğimiz muhtelif teoremlerin matematik muhtevasını nazarı itibara almıyacağımızdan, onları T, T^*, C_1, C_2, ..., C_1^*, C_2^*, ... gibi işaretlerle göstermemiz uygun olacaktır. Okuyucu bu harflerin mânasını tamamen bilmemezlikten gelebilir. Fakat onları Euler'in metninde tanımak isterse, anahtar şudur:

T,

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots$$

teoremi olup, 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... sayılarının tâbi bulundukları kanun paragraf 2, No. 5, II de anlatılmıştı.

C_n, x^n nin yukarıki denklemin her iki tarafındaki katsayılarının eşit bulunduğu iddiasıdır. Meselâ C_6, sol taraftaki çarpım açıldığı takdirde x^6 nın katsayısı için 0 değerinin bulunacağını iddia etmektedir. C_6 nın T teoreminin bir neticesi olduğuna dikkat ediniz.

C_n^*, paragraf 2, No. 5 te uzun azadıya anlatılmış olan

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \cdots$$

eşitliğidir. Meselâ, C_6^*,

$$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1)$$

olduğunu ifade eder.

T^*, C_1^*, C_2^*, C_3^* ... ın hepsinin doğru olduğunu iddia eden «çok olağanüstü kanun» dur. C_n^* 'ın T^* teoreminin bir neticesi (özel hali) olduğuna dikkat ediniz.

4. Euler'in muhtırasının şematik özeti [4]. *T* teoremi öyle bir tabiattadır ki, hakkında mükemmel bir ispat vermeden de doğruluğuna emin olabiliyoruz. Bununla birlikte, onun için kesin bir ispata hemen hemen denk olan deliller vereceğim.

T teoremi C_1, C_2, C_3, ... *gibi sonsuz sayıda özel hal ihtiva eder. Karşıt olarak* C_1, C_2, C_3, ... *özel halleri T teoremine denktir.* C_1 *in doğru olup olmadığını basit bir hesapla bulabiliriz. Diğer bir hesap neticesinde* C_2 *nin doğru olup olmadığı anlaşılır. Aynı şekilde* C_3, *ilâh... için de hareket edilir. Ben bu hesapları yaptım ve* C_1, C_2, C_3, ... C_{40} *ın hep doğru olduğunu buldum.* Bu doğruluğun *ilânihaye devam ettiğine* kanaat getirmek için lûzumlu görülen yere kadar bu hesapları yapmak yetişir. Bununla beraber, C_1, C_2, ... nin *özel halleri bulunduğu* kanundan hiçbir suretle şüphe edemiyeceğim yere kadar yapmış olduğum uzun bir endüksiyondan başka elimde bir delil yoktur. *T teoreminin* kesin bir ispatını uzun müddet boşuna aradım ve aynı problemi bu hususiaki kabiliyetlerini bildiğim bazı dostlarıma da sordum. Fakat onların hepsi de bir ispata dair herhangi bir ipucu meydana çıkaramamakla beraber *T teoreminin* doğruluğu üzerinde benimle birleştiler. Bu suretle o teorem bilinen, fakat henüz ispat edilememiş bir hakikat olmaktadır ; fakat her birimiz C_1, C_2, C_3, ... *hallerinden istediğimiz kadarını fiilen hesaplamak* suretiyle onun doğruluğuna kanaat getirebiliriz ; ve 20 terim için doğruluğu meydana çıkmış olan kanunun onları takip eden terimlerde müşahede edilmemesi imkânsız görünmektedir.

---

[4] Bu özet ilk defa «Heuristic Reasoning and the Theory of Probability», *Amer. Math. Monthly*, vol. 48, 1941, S. 450–465 adlı makalemde yayınlanmıştır. İtalikler, Euler'e ait olmayan ibareleri göstermektedir.

Bu suretle T teoremini ispat edememekle beraber onun doğruluğunu keşfetmiş olunca, ondan çıkarılabilecek bütün neticeler de aynı tabiatta, yani doğru, fakat ispat edilmemiş olacaktır. Yahut, bu neticelerden biri ispat edilebilirse, karşıt olarak ondan *T teoreminin* ispatına dair bir ip ucu elde edilebilir; ben de bu maksatla T teoremi ile birçok işlemler yaparak, diğerleri arasında, doğruluğu T teoremi kadar kesin olan T^* teoremini keşfettim.

T ve T^* teoremleri denk olup, aynı zamanda doğru veya aynı zamanda yanlıştır. Onlar aynı zamanda uyakta durur, yahut aynı zamanda düşerler. T de olduğu gibi, T^* teoremi de $C_1^*, C_2^*, C_3^*, \ldots$ gibi sonsuz sayıda özel hal ihtiva eder, ve bu özel haller dizisi T^* teoremine denktir. Burada da basit bir hesap C_1^* ın doğru olup olmadığını gösterir. Benzer şekilde C_2^* ın da doğru olup olmadığını tayin etmek mümkündür, ilâh.... T^* teoremini verilmiş herhangi bir özel hale tatbik etmek güç değildir, ve böylece herkes hesaplamak istediği kadar çok misâl üzerinde onun doğruluğuna kanaat getirebilir. Ben de kesin bir ispat verebilecek durumda olmadığımı kabûl etmek zorunda bulunduğumdan, teoremin doğruluğunu, yeter derecede çok sayıda misâlle, $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_{20}^*$ ile göstereceğim. Bu misâllerin, verdiğim kaidenin sadece tesadüf neticesi hakikat ile uygunluk halinde bulunduğunu tasavvur etmek için herhangi bir kimseye cesaret vermemeye kâfi olduğunu zannederim.

Eğer bir kimse, aradığımız kanunun tam benim vermiş olduğum kanun olduğundan hâlâ şüphe ederse, daha büyük sayılara dair misâller verebilirim. *Hesap yapmak suretiyle C_{101}^* ve C_{301}^* in de doğru olduğuna, yani T^* teoreminin evvelce incelemiş olduğumuz hallerin çok uzaklarında bile cari olduğunu bulayorum.* Şimdiye kadar açıklamış olduğum misâller, *T ve T^* teoremleri*nin doğruluğu hakkında beslemiş olabileceğimiz şüphenin bulutlarını tamamiyle dağıtacaktır.

VI. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

Euler «Sayıların çok olaganüstü bir kanunu» nu keşfederken her ne kadar «Diferansiyel ve İntegral Hesap tam sayıların tabiatına uygulanabilecek gibi görünmese bile, neticeye türev alma ve diğer vasıtalarla» varmıştı. Eulerin metodunu anlamak için onu benzer bazı misâllere uygulayacağız. Evvelâ onun esas «vâsıta» veya matematik âletine bir ad vermekle işe başlıyacağız.

1. *Doğuray fonksiyonlar.* Eulerin muhtırasında No. 11 deki neticeyi bugünkü yazış tarzı ile tekrar ifade edelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sigma(1)\,x + \sigma(2)\,x^2 + \cdots + \sigma(n)\,x^n + \cdots .$$

Sağ taraf x 'e göre bir kuvvet serisidir. Bu kuvvet serisinde x^n nin katsayısı $\sigma(n)$, yani n nin bölenlerinin toplamıdır. Bu denklemin her iki tarafı x 'in aynı fonksiyonunu gösterir. Bu fonksiyonun x in kuvvetlerine göre açılımı $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n), \ldots$ dizisini «doğurduğundan» ona $\sigma(n)$ nin *doğuray fonksiyonu* diyeceğiz. Genel olarak, eğer

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

ise, $f(x)$ 'e a_n nin doğuray fonksiyonu, veya $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisini doğuran fonksiyon denir.

«Doğuray fonksiyon» adı Laplace tarafından takılmıştır. Fakat Euler, doğuray fonksiyonlar metodunu kendisine bir ad vermeden Laplace'tan çok zaman evvel, bir tanesini paragraf 2 de görmüş olduğumuz, birçok muhtıralarda kullanmıştı. Euler bu matematik âleti Kombinasyonlar Analizi ve Sayılar Teorisinin birçok problemlerine uygulanmıştır.

Bir doğuray fonksiyon biraz da bir çantaya benzer. Birçok

küçük eşyayı ayrı ayrı taşıyarak kendimizi sıkıntıya sokacağımız yerde, onların hepsini bir çantaya koyarsak, taşıyacak tek bir şeyimiz (çantanın kendisi) olur. Buna tamamen benzer şekilde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisinin her terimini ayrı ayrı ele alacağımız yerde, onların hepsini bir $\Sigma a_n x^n$ serisine koyarsak, elimizde incelenecek tek bir matematik şey, yani bu kuvvet serisi, bulunmuş olur.

2. n nin doğuray fonksiyonunu bulunuz. Yahut ta, aynı şey demek olan, $\Sigma n x^n$ serisinin toplamını bulunuz.

3. $f(x)$ 'in $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisini doğurduğu verildiğine göre

$$0\,a_0,\ 1a,\ 2a_2, \ldots, na_n, \ldots$$

dizisinin doğuray fonksiyonunu bulunuz.

4. $f(x)$ 'in $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisini doğurduğu verildiğine göre

$$0,\ a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots$$

dizisinin doğuray fonksiyonunu bulunuz.

5. $f(x)$ 'in a_n nin doğuray fonksiyonu olduğu verildiğine göre

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

dizisinin doğuray fonksiyonunu bulunuz.

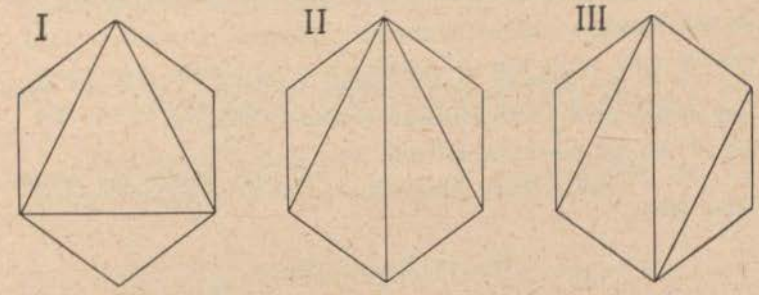
6. $f(x)$ ve $g(x)$ 'in sırasıyla a_n ve b_n nin doğuray fonksiyonu olduğu bilindiğine göre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$$

ın doğuray fonksiyonunu bulunuz.

7. *Düzlem geometriye ait bir kombinasyon problemi.* n kenarlı bir konveks çokgen köşegenlerinden $n-3$ tanesi vâsıtasıyla $n-2$ tane üçgene ayrılır (Şek. 6.1 'e bakınız). Bu türlü bütün birbirinden farklı ayrılışların sayısına D_n diyelim.

$n=3, 4, 5, 6$ için D_n nin değerini bulunuz.



Şek. 6.1. Bir altıgene ait üç ayrılış tipi

8 (Devam). Misâl 7 de gözönüne alınan değerlere dayanarak D_n için genel ve açık bir ifade tahmin etmek kolay değildir. Bununla beraber D_3, D_4, D_5, ... dizisi aşağıki çok genel mânada bir rekürrans dizisidir: Her terim değişmez bir kaideye, bir «rekürrans formülü» ne göre kendisinden önce gelen terimlerden hesaplanabilir.

$D_2=1$ olarak tarif ediniz ve $n\geq 3$ için

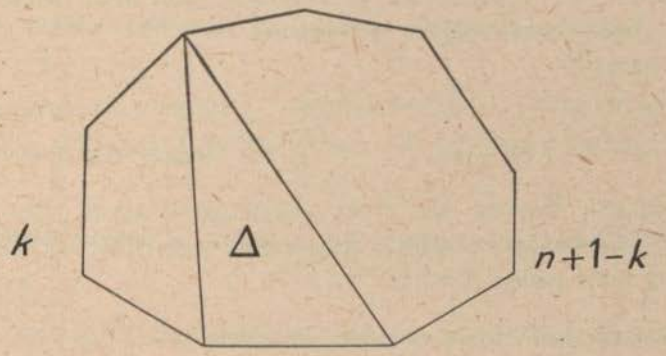
$$D_n = D_2D_{n-1} + D_3D_{n-2} + D_4D_{n-3} + \cdots + D_{n-1}D_2$$

olduğunu gösteriniz. [İlk halleri kontrol ediniz. Şek. 6.2 ye müracaat ediniz].

9 (Devam). Misâl 8 deki rekürrans formülünden D_n için açık bir ifade çıkartılması aşikâr değildir. Bununla beraber

$$g(x) = D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + \cdots + D_nx^n + \cdots$$

doğuray fonksiyonunu nazarı itibara alarak, $g(x)$ in ikinci dereceden bir denklem gerçeklediğini gösteriniz ve oradan da $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$ için



Şek. 6.2. n kenarlı bir çokgenin ayrılış başlangıcı

$$D_n = \frac{2}{2}\,\frac{6}{3}\,\frac{10}{4}\,\frac{14}{5}\cdots\frac{4n-10}{n-1}$$

neticesini çıkarınız.

10. *Kare toplamları.* $R_k(n)$ nin tarifini hatırlayarak (Misâl 4.1) bu tarifi $R_k(0) = 1$ vaz'etmek suretiyle $n = 0$ haline genişletiniz (ki bu makûl bir genişletmedir) ve sonra

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_k(n)\,x^n = R_k(0) + R_k(1)\,x + R_k(2)\,x^2 + \cdots$$

doğuray fonksiyonunu ithâl ederek

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_3(n)\,x^n = (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots)^3$$

olduğunu gösteriniz.

[$R_3(n)$ nedir? $u^2+v^2+w^2+n$ denkleminin u, v, w ye göre pozitif, negatif veya 0 olmak 4zere tam sayılı çözümlerinin sayısı.

İspat etmeniz istenen eşitliğin sağ tarafındaki serinin rolü ne olabilir?

$$1+2x+2x^4+2x^9+\cdots=\sum_{u=-\infty}^{\infty}x^{u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}R_1(n)\,x^n.$$

Hedefiniz olan eşitliğin sağ tarafını nasıl telâkki etmelisiniz? Belki şöyle: $\Sigma x^{u^2}\cdot\Sigma x^{u_2}\cdot\Sigma x^{u_3}$.]

11. Misâl 10 'un neticesini genelleştiriniz.

12. $S_k(n)$ nin tarifini hatırlayarak (Misâl 4.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_k(n)\,x^n$$

doğuray fonksiyonu için bir ifade bulunuz.

13. $n\geq 1$ ise $R_2(n)$ nin 4, $R_4(n)$ nin 8 ve $R_8(n)$ nin 16 ile ile bölünebildiğini ispat etmek için Misâl 11 'i kullanınız. (Bu netice Bölüm IV teki Cedvel II ve III te daha evvel kullanılmıştır).

14. Eğer n,

$8m+2$ şeklinde değilse $S_2(n)=0$,

$8m+4$ şeklinde değilse $S_4(n)=0$,

$8m$ şeklinde değilse $S_8(n)=0$

olduğunu ispat etmek için Misâl 12 yi kullanınız.

15.

$$R_{k+l}(n) = R_k(0)\,R_l(n) + R_k(1)\,R_l(n-1) + \cdots + R_k(n)\,R_l(0)$$

olduğunu ispat etmek için Misâl 11 'i kullanınız.

16.

$$S_{k+l}(n) = S_k(1)\,S_l(n-1) + S_k(2)\,S_l(n-2) + \cdots S_k(n-1)\,S_l(1)$$

olduğunu ispat ediniz.

17. Bölüm IV teki Cedvel III 'ü aynı bölümün I ve II numaralı cedvellerinden hesabetmek için basit bir metod teklif ediniz.

18. $\sigma_k(n)$, n sayısının bölenlerinin k. kuvvetleri toplamını göstersin. Meselâ

$$\sigma_3(15) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 15^3 = 3528;$$

$\sigma_1(n) = \sigma(n)$ dir.

(1) Paragraf 4.6 ve Misâl 4.23 te bulunan faraziyelerin, u bir tek tam sayı göstermek üzere

$$\sigma(1)\,\sigma(2u-1) + \sigma(3)\,\sigma(2u-3) + \cdots + \sigma(2u-1)\,\sigma(1) = \sigma_3(u)$$

eşitliğini icabettirdiğini gösteriniz.

(2) (1) de bulunmuş olan münasebetin özel hallerini nümerik olarak kontrol ediniz.

(3) Böyle bir gerçekleme, gerçeklenmiş münasebetin kendilerinden elde edilmiş bulunduğu faraziyelere olan itimadımıza nasıl tesir eder?

19. *Diğer bir rekürrans formülü.*

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} S_1(m)\,x^m, \qquad H = \sum_{m=1}^{\infty} S_4(m)\,x^m$$

doğuray fonksiyonlarını düşünelim. u bir tek tam sayı olmak üzere, $S_4(4u) = s_u$ vaz'edelim. Bu takdirde Misâl 14 ve 12 dolalayısıyla

$$G = x + x^9 + x^{25} + \cdots + x^{(2n-1)^2} + \cdots,$$
$$H = s_1 x^4 + s_3 x^{12} + s_5 x^{20} + \cdots + S_{2n-1} x^{8n-4} + \cdots,$$
$$G^4 = H$$

dır. Logaritme ve sonra türev alarak son denklemden

$$4 \log G = \log H,$$

$$\frac{4G'}{G} = \frac{H'}{H},$$

$$G \cdot xH' = 4 \cdot xG' \cdot H,$$

$$(x + x^9 + x^{25} + \cdots)(4s_1 x^4 + 12s_3 x^{12} + 20s_5 x^{20} + \cdots)$$
$$= 4(x + 9x^9 + 25x^{25} + \cdots)(s_1 x^4 + s_3 x^{12} + s_5 x^{20} + \cdots)$$

neticesini çıkarırız. Yukarıki denklemin her iki tarafındaki x^5, x^{13}, x^{21}, ... in katsayılarını mukayese ederek, basit bazı işlemlerden sonra şu münasebetleri buluruz:

$$\begin{aligned}
0s_1 &= 0 \\
1s_3 - 4s_1 &= 0 \\
2s_5 - 3s_3 &= 0 \\
3s_7 - 2s_5 - 12s_1 &= 0 \\
4s_9 - 1s_7 - 11s_3 &= 0 \\
5s_{11} - 10s_5 &= 0 \\
6s_{13} + 1s_{11} - 9s_7 - 24s_1 &= 0 \\
7s_{15} + 2s_{13} - 8s_9 - 23s_3 &= 0 \\
8s_{17} + 3s_{15} - 7s_{11} - 22s_5 &= 0 \\
9s_{19} + 4s_{17} - 6s_{13} - 21s_7 &= 0 \\
10s_{21} + 5s_{19} - 5s_{15} - 20s_9 - 40s_1 &= 0 \\
11s_{23} + 6s_{21} - 4s_{17} - 19s_{11} - 39s_3 &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Bu sistemin ilk denklemi her s_1 değeri için kendiliğinden gerçekleştiğinden, ondan s_1 'in değerini bulmak mümkün değildir ve burada bu denklemi yazmaktan maksadımız sadece genel kanunu belirtmektir. Fakat biz $s_1 = 1$ olduğunu bilmekteyiz. Bunu bilince ikinci denklemden s_2 ü elde ederiz. s_2 'ü bilince ondan sonraki denklemden s_3 'i elde ederiz. Ve böylece $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin terimlerini yukarıki sistemden istediğimiz yere kadar birbiri arkası sıra, yani *rekürrans* yoluyla hesaplıyabiliriz.

Bu sistemin dikkate değer bu yapısı vardır. $s_1, s_2, s_3, \ldots$ büyüklüklerinden yalnız 1 tanesini ihtiva eden 1 denklem, iki tanesini ihtiva eden 2 denklem, üç tanesini ihtiva eden 3 denklem vardır, ilâh... Bir satırdan onun altındakine geçince her sütundaki katsayılar 1, indeksler de 2 artar. Her sütunun başındaki terimin indeksi 1 olup, o terimin katsayısı, kendisinin içinde bulunduğu satırdaki ilk katsayının -4 katıdır.

Bütün sistemi tek bir denklemde toplayabiliriz (rekürrans formülü); bu denklemi yazınız.

20. *Sayıların bölenler toplamına dair diğer bir çok olağanüstü kanun.*

Eğer paragraf 4.6 daki faraziye doğru ise

$$s_{2n-1} = S_4(4(2n-1)) = \sigma(2n-1)$$

olup, bu suretle Misâl 19, $\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5), \sigma(7), \ldots$ dizisinin terimleri arasında bir rekürrans formülü verir ki, bu formül birçok bakımlardan Euler'in formülüne göze batacak derecede benzer.

İşaret ettiğimiz formülü tafsilâtlı şekilde yazınız ve onun ilk özel hallerini nümerik olarak gerçekleyiniz.

21. Bizim için, Euler'in $\sigma(n)$ için verdiği rekürrans formülü (paragraf 2) ile $\sigma(2n-1)$ için yukarıki rekürrans formülü (Misâl

20) arasında bu formüllerin bulunuşu bakımından da bir benzerlik vardır. Bizim için sonuncu formül bir faraziye olup, bu faraziyeyi, Euler'in kendi faraziyesi için yapmış olduğu gibi, başka bir faraziyeden «türev alma ve diğer vâsıtalar» ile elde ettik.

$\sigma(2n-1)$ hakkında Misâl 20 de işaret edilen rekürrans formülünün, paragraf 4.6 da elde etmiş olduğumuz

$$S_4(4(2n-1)) = \sigma(2n-1)$$

formülüne denk olduğunu gösteriniz. Yani bu iki iddiadan biri doğru ise, diğeri de ister istemez doğrudur.

22. Misâl 19 'u genelleştiriniz.

23. $R_8(n)$ yi $R_4(n)$ den müstakil olarak hesaplamayı temin edecek bir metod veriniz.

24. *Euler bir keşfi nasıl kaçırdı?* Misâl 19 ve 23 te birer misâlle aydınlatılan ve Misâl 22 de genel olarak ifade edilen metod Euler'e aittir [5] Euler, bu metodu geliştirirken dört kare problemi ve onunla alâkalı bazı problemleri kendisine hedef olarak almıştı. Hakikaten Euler metodunu dört kare problemine uygulamış ve gösteriliş sayısını endüksiyonla araştırmıştır, fakat $R_4(n)$ ye dair endüksiyonla keşfi (Misâl 4.10—4.15) pek te güç olmayan şayanı dikkat kanunu bulmaya muvaffak olamamıştır. Bu neden böyle olmuştur?

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

denklemini incelerken türlü noktai nazarlar seçebiliriz ki, bunlar arasında bilhassa şu ikisi de vardır:

(1) x, y, z ve w için sadece negatif olmayan tam sayıları değer olarak kabûl ederiz.

---

[5] *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 4, S. 125—135.

(2) x, y, z ve w için, pozitif, negatif veya sıfır, bütün tam sayıları değer olarak kabûl ederiz.

İkinci noktainazar daha az aşikâr olabilir, fakat bizi $R_4(n)$ ve $R_4(n)$ ile n nin bölenleri arasındaki şayanı dikkat bağa götürür. İlk noktainazar daha aşikârdır, fakat bu halde çözümlerin sayısı göze çarpacak herhangi bir basit özeliği haiz olacak gibi görünmemektedir. Euler (2) değil de, (1) noktainazarını seçerek Misâl 22 de anlatılan metodunu

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)^4$$

yerine

$$(1+x+x^4+x^9+\cdots)^4$$

ifadesine tatbik etti ki, bu suretle büyük bir keşfin kendisine rastlamadan yanından geçmiş oldu. Başlangıçta birbirine o kadar benzer görünen, fakat bir tanesi harikulâde semereli, diğeri hemen tamamiyle kısır olan iki araştırma yolunu mukayese etmek çok öğreticidir.

$R_4(n)$, $S_4(n)$, $R_8(n)$ ve $S_8(n)$ nin Bölüm IV (Misâl 4.10—4.15, paragraf 4.3—4.6, Misâl 4.18—4.23) te araştırılmış olan özelikleri Jacobi tarafından, endüksiyon yoluyla değil de, kendisinin eliptik fonksiyonlara dair araştırmalarının arızî neticeleri olarak keşfedilmiştir. Bu teoremlerin o zamandanberi birçok ispatları bulunmuş olmakla beraber, bunların arasında hiçbiri tamamen elemanter ve doğrudan doğruya değildir. [6]

25. *Euler'in* $\sigma(n)$ *'e dair teoreminin bir genelleştirmesi.* k verildiğine göre

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^k = 1-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

[6] Bu hususta başka bilgi için G. H. Hardy ve E. M. Wright, *An introduction to the theory of Numbers*, Oxford, 1938, chapter XX ye bakınız.

vaz'ediniz ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\sigma(n) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sigma(n-m) + n a_n / k.$$

olduğunu gösteriniz.

Hangi özel hâl paragraf 2 deki Euler teoremini verir?

VII

MATEMATİK EDÜKSİYON

Jakob Bernoulli'nin metodu tabiat bilginleri için de önemlidir. [Tabiat ilimlerinde] Bir B kavramının A gibi bir özeliği olarak görünen şeyi B nin, C_1, C_2, C_3, ... özel hallerini müşahede etmek suretiyle bulmaktayız. Bernoulli'nin metodundan öğrendiğimize göre, matematik olmayan, noksan bir endüksiyonla bulunmuş böyle bir A özeliğini B kavramına affetmemeliyiz, meğer ki A özeliğinin B nin karakteristikleri ile bağlantılı ve bir özel halden diğerine geçişten müstakil olduğunu farketmiş olalım. Matematik, diğer bir çok hususlarda olduğu gibi, burada da tabiat ilimlerine bir model vermektedir. — ERNST MACH [1]

1. Endüktif safha. Burada da işe bir misâl ile başlıyalım. İlk n tane pozitif tam sayının toplamını bulmakta bir güçlük yoktur. Biz burada türlü yollarla keşif ve ispat edilebilen

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

formülünü biliniyor kabul edeceğiz. İlk n tane karenin toplamı olan

$$1+4+9+16+\cdots+n^2$$

---

[1] *Erkenntnis und Irrtum*, 4. Aufl., 1920, S. 312.

[2] *How to Solve It*, S. 107 ye bakınız.

için bir formül bulmak daha güçtür. Bu toplamı n nin küçük değerleri için hesaplamak kolaydır, fakat bunlardan bir kaide çıkarmak o kadar kolay değildir. Bununla beraber, yukarıki iki toplam arasında bir nevi paralellik aramak ve onları beraberce göz önüne getirmek gayet tabiîdir:

n	1	2	3	4	5	6 ···
$1+2+\cdots+n$	1	3	6	10	15	21 ···
$1^2+2^2+\cdots+n^2$	1	5	14	30	55	91 ···

Son iki satır arasında nasıl bir münasebet vardır? Aklımıza onların oranını incelemek gelebilir:

n	1	2	3	4	5	6 ···
$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$ ···.

Burada kaide aşikâr olup, yukarıki oranlar şu şekilde yazılırsa onu gözden kaçırmaya imkân yoktur:

$$\frac{3}{3}\quad\frac{5}{3}\quad\frac{7}{3}\quad\frac{9}{3}\quad\frac{11}{3}\quad\frac{13}{3}.$$

Buradan

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

faraziyesini çıkarmaktan kaçınamayız. Sol taraftaki paydanın, ispatsız olarak kabul etmiş olduğumuz, değerini kullanmak suretiyle faraziyemizi şu yeni şekle dökmeye sevkedilmiş olduk.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bu doğru mudur? Yani, genel olarak doğru mudur? Bu formül, onu ilham etmiş olan $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ özel hallerin-

de tabiatıyle doğrudur. Acaba bunlardan sonra gelen $n = 7$ halinde de doğru mudur? Faraziyemiz bizi

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6}$$

olduğunu iddia etmeye sevkediyor ve hakikaten her iki tarafın da 140 a eşit olduğu hesapla anlaşılır.

Tabiatıyle bundan sonra gelen $n = 8$ halini ele alır ve onu inceleyebilirdik. Fakat bu yolda kuvvetli bir istek duymamaktayız. Daha ziyade, formülün nasıl olsa müteakıp halde de gerçekleşeceğine inanmak temayülündeyiz. Şu halde böyle bir gerçekleme formüle olan güvenimize pek az bir şey kalacaktır — hattâ o kadar az ki, bu hususta hesaplara girişmek zahmetine bile değmiyecektir. O halde faraziyemizi tesirli olarak nasıl muayene edebiliriz?

Eğer faraziyemiz hakikaten doğru ise, özel bir halden diğerine geçişten müstakil olmalı, yani böyle bir geçişten sonra da cari kalmalıdır. Farzedelim ki

$$1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olsun. Eğer bu formül genel olarak doğru ise, *yukarıkinden sonra gelen halde de cari olduğundan*

$$1 + 4 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

olur. Burada faraziyeyi tesirli bir şekilde kontrol etmek için bir fırsat ortaya çıkıyor: Yukarıki satırı aşağıkinden çıkarırsak

$$(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

elde ederiz. Faraziyenin bu neticesi doğru mudur?

Sağ tarafta yapılacak kolay bir düzenleme

$$\frac{n+1}{6}\left[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)\right]$$

$$=\frac{n+1}{6}\left[2n^2+3n+4n+6-2n^2-n\right]$$

$$=\frac{n+1}{6}\left[6n+6\right]$$

$$=(n+1)^2$$

verir. Bu suretle muayene edilmiş olan netice itiraz götürmez suretle doğru olup, faraziyemiz güç bir denemeyi başarı ile atlatmış oldu.

2. İspat safhası. Bir faraziyenin herhangi bir neticesinin gerçeklenmesi, o faraziyeye olan güvenimizi arttırır, fakat biraz evvel incelemiş olduğumuz neticenin gerçeklenmesi ondan daha fazla bir şey yapabilir: bu gerçeklenme faraziyeyi *ispat* edebilir. Bunun için sadece, noktai nazarımızı biraz değiştirmeye ve yukarda söylediklerimizi biraz yeniden düzenlemeye ihtiyacımız vardır.

Farazi olarak

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliği doğrudur.

Kesin olarak (itiraz götürmez bir şekilde)

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliği doğrudur.

Bunların neticesi olarak

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

eşitliği doğrudur. (Sonuncu eşitlik ilk ikisinin toplamıdır). Bunun mânası şudur: Eğer faraziyemiz herhangi bir n tam sayısı için doğru ise, onu tâkip eden $n+1$ tam sayısı için de ister istemez doğrudur.

Faraziyenin $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için doğru olduğunu ise biliyoruz. Şu halde o, 7 için doğru olduğundan 8 için de doğru olmalıdır; 8 için doğru olunca 9 için de doğru olmalıdır; 9 için doğru olunca 10 için de, şu halde 11 için de ilâh... doğru olmalıdır. Böylece faraziyemiz bütün pozitif tam sayılar için doğru olup, onu en genel şekliyle ispata muvaffak olduk.

3. Geçişlerin incelenmesi. Önceki paragrafın muhakemesi biaaz basitleştirilebilir. Faraziye hakkında iki şey bilmek kâfidir:

1) Onun $n=1$ için doğru olduğu,

2) n için doğru olursa, $n+1$ için de doğru olacağı. Bu takdirde faraziye bütün tabiî sayılar için doğru olur: 1 için doğrudur, şu halde 2 için de doğru olur; 2 için doğru olunca 3 için de doğru olur, ilâh...

Burada esaslı şekilde önemli bir ispat metodu ile karşı karşıya bulunmaktayız. Bu metoda «n den $n+1$ e geçiş» diyebilirdik, fakat onun umumiyetle kullanılan adı «matematik endüksiyon» dur. Bu mûtad ad, bir ispat metodu için de hiç te münasip olmayan bir isimdir, çünkü endüksiyon (en çok kullanıldığı mânada alınırsa) sadece inanılabilir hale getiren, fakat ispat edici olmayan bir istidlâl yoludur.

Acaba matematik endüksiyonun, endüksiyon ile bir alâkası var mıdır? Evet, vardır ve zaten biz de onu burada isminden ziyade bu sebepten dolayı nazarı itibara alıyoruz.

Önceki misâlde paragraf 2 deki ispat edici muhakeme, paragraf 1 deki endüktif muhakemeyi tamamlamaktadır ve bu, tipik bir durumdur. Paragraf 2 deki ispat «endüksiyonun bir matematik tamamlayıcısı» olarak görünmektedir; eğer «matematik endüksiyon» u bu mânada bir kısaltma olarak alırsak, bu terim, neticede pek âlâ uygun görünebilir. (Şu halde onu bu mânada alalım — yerleşmiş teknik terimler üzerinde çekişmenin faydası yoktur.) Matematik endüksiyon ekseriya bir endüktif araştırmayı sona erdiren adım, yahut böyle bir araştırmanın son safhası olarak ortaya çıkar ve bu son safhada, ekseriya önceki safhalarda zuhûr etmiş olan fikirler kullanılır.

Matematik endüksiyonu bu çerçeve içinde ele almak için diğer ve daha da iyi bir sebep, bu bölümün başlangıcında zikretmiş olduğumuz Ernst Mach'tan alınan pasajda ima edilmektedir [3].

Bir faraziyeyi muayene ederken, bu faraziyenin tatbik edilebileceği kabûl edilen türlü halleri araştırırız. Biz böylece, faraziye tarafından iddia edilen münasebetin *kararlı* olup olmadığına, yani bir halden diğerine geçişten müstakil ve bundan müteessir olmaz karakterde olup olmadığına bakarız. Bu suretle dikkatimiz tabiî olarak böyle bir halden diğerine *geçişe* çevrilmiş olur. Newton, «Mermilerin hareketini gözönüne getirirsek, gezegenlerin merkezcil kuvvetler vâsıtasıyla belirli yörüngelerde tutulabileceklerini kolayca anlıyabiliriz» dedikten sonra, bir taşın gittikçe daha büyük başlangıç sür'atiyle atıldığını tasavvur etmektedir, öyle ki en sonunda taşın yörüngesi, tıpkı ayın yö-

---

[3] Mach, matematik endüksiyon metodunun Jakob Bernoulli tarafından icadedilmiş olduğunu zannediyordu, fakat bu icattaki büyük payın Pascal'a ait olduğu, görünüyor. H. Freudenthal, *Archives internationales d'historie des sciences*, no. 22, 1953, S. 17–37 ye bakınız. Bundan başka Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, Genève 1744, vol. I, S. 282–283 e de bakınız.

rüngesi gibi dünyanın etrafında dolaşsın (Misâl 2.18 (4) e bakınız). Bu suretle Newton, bir merminin hareketinden bir gezegenin hareketine sürekli bir geçişi gözönünde canlandırmaktadır. O, ispatını üzerine almış olduğu umumî cazibe kanununun aynı şekilde uygulanabilmesi gereken iki hal arasındaki geçişi nazarı itibara almaktadır. Matematik endüksiyonu bir elemanter teoremin ispatında kullanılan herhangi bir müptedi de bu bakımdan Newton gibi hareket ederek n den $n+1$ 'e geçişi, yani ispatını üzerine almış olduğu teoremin aynı şekilde uygulanabilmesi gerektiği iki hal arasındaki geçişi nazarı itibara alır.

4. Matematik endüksiyonun tekniği. İyi bir matematikçi, yahut iyi bir kumarbaz, veya herhangi bir işte iyi olabilmek için iyi bir tahminci olmalısınız. İyi bir tahminci olabilmeniz için de, bence evvelâ tabiaten akıllı olmanız lâzımdır. Fakat tabiaten akıllı olmanız muhakkak ki kâfi değildir. Bundan başka, tahminlerinizi muayene etmeli, onları vâkıalarla mukayese etmeli ve gerekirse onları tâdil etmelisiniz ve böylece kâh muvaffak olmamış, kâh doğru çıkmış tahminlere dair genişliğine (ve derinliğine) tecrübe kazanmış olmalısınız. Arkanızda böyle bir tecrübe ile, hangi tahminin doğru çıkma şansını haiz olduğu ve hangisinin olmadığı hakkında daha salâhiyetli bir şekilde hüküm verebilirsiniz.

Matematik endüksiyon, endüktif bir usûlle varmış olduğumuz matematik faraziyeleri gerçeklemekte ekseriya faydalı olan bir ispat usûlüdür. Şu halde, eğer matematikteki endüktif araştırmalar hakkında biraz tecrübe kazanmak istiyorsak, matematik endüksiyonun tekniği ile biraz alışıklık peyda etmemiz şayanı arzudur.

Bu paragraf ve onu tâkip eden örnekler ve tamamlayıcı bilgiler bu tekniği elde etmenize yardımcı olabilirler.

(1) *Endüksiyon safhası.* Paragraf 1 ve 2 de münakaşa edilmiş olana çok benzer bir misâlle işe başlayacağız. İlk n tam

kare ile alâkalı diğer bir toplamı kısa bir şekilde ifade etmek istiyelim. O toplam şudur:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=$$

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}.$$

Bu toplamı ilk birkaç özel hâl için hesaplıyarak neticeleri bir cedvel şeklinde ifade edeceğiz:

$$n \qquad\qquad =1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ldots .$$

Burada aşikâr bir tahmin yapılabilir:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}.$$

Buna benzeyen eski problemimizle yapmış olduğumuz tecrübeden istifade ederek, bu faraziyeyi baştan itibaren elimizden geldiği kadar te'rli bir şekilde kontrol edebiliriz, yani n den $n+1$'e geçişi inceleyebiliriz. Eğer faraziyemiz genel olarak doğru ise, onun hem n, hem de $n+1$ için doğru olması gerekir:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1} \qquad =\frac{n}{2n+1},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

Birinci eşitliği ikinciden çıkararak:

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

elde ederiz. Faraziyemizin bu neticesi doğru mudur? Bunun

için bu eşitliğin her iki tarafında onları birbirine yaklaştırmak üzere değişiklik yapalım:

$$\frac{1}{(2n+2)^2-1}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Bu son eşitliğin iki tarafının birbirinin hakikaten aynı olduğunu görmek için pek az cebir bilgisi yetişir. Şu halde muayene ettiğimiz netice itiraz götürmez şekilde doğrudur.

(2) *İspat safhası.* Şimdi, paragraf 2 de vermiş olduğumuz misâlde yaptığımız gibi ihtarlarımızı tekrar düzenliyelim: Kabûl edelim ki

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

olsun. İtiraz götürmez şekilde

$$\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}$$

dir.

Neticede

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2n+3}$$

olur. n için doğru kabûl edilen faraziye, bu kabûlün neticesi olarak $n+1$ için de doğru olur. Diğer taraftan faraziye $n=1$ doğru olduğundan, her n için doğru olur.

(3) *Daha kısa.* Çözümünün endüktif safhasına daha az zaman sarfedebilirdik. Faraziyeyi tasarladıktan sonra, onun ispatı için matematik endüksiyon metodunun uygun olacağı aklımıza gelebilirdi. Bu takdirde matematik endüksiyonu hiçbir deneme yapmadan aşağıki şekilde doğrudan doğruya uygulamayı deneyebilirdik.

Farzedelim ki

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

olsun. Bunun neticesi olarak

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+2)^2-1}$$

$$=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

olup, n için doğru kabûl ettiğimiz münasebeti $n+1$ için de elde etmiş olduk. Bu da tam bizden istenen şey idi. Bu suretle faraziyeyi ispat etmiş olduk.

Çözümün bu hafif değişik şeklinde tekrarlar daha az bulunmakla beraber, (1) ve (2) de verilmiş olan ilk çözüm şekline nazaran bu ikinci şekil belki daha az tabiîdir.

(4) *Daha da kısa.* Eğer

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

olduğuna dikkat edersek, çözümü hemen bir bakışta görebiliriz. (Rasyonel fonksiyonların kısmî kesirlere ayrılışını bilirsek, bu

formüle tamamen tabiî bir şekilde ulaşabiliriz.) $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ vaz'edip elde edilen eşitlikleri toplıyarak

$$\frac{1}{4-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{36-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$$

$$=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+2}\right)\right]$$

$$=\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

elde ederiz.

Burada vukubulmuş olan şey, pek seyrek olan bir iş değildir. Matematik endüksiyonla ispat edilmiş olan bir teorem ekseriya başka bir metodla daha kısa bir şekilde ispat edilebilir. Hattâ matematik endüksiyonla yapılan ispatın dikkatle gözden geçirilişi bile bizi böyle bir kestirme yola sevkedebilir.

(5) *Diğer bir misâl.* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ eşitsizliklerine uyan iki a, b sayısı ele alalım. Bu takdirde tabiatıyle

$$(1-a)(1-b) = 1-a-b+ab > 1-a-b$$

olur. Bunun tabiî bir genelleştirmesi bizi şu ifadenin doğru olduğunu tahmine sevkeder: *Eğer* $n \geq 2$ *ve* $0<a_1<1$, $0<a_2<1$, ..., $0 < a_n < 1$ *ise*

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-a_1-a_2-\cdots-a_n$$

dir.

Bunu ispat için matematik endüksiyon metodunu kullanacağız. Tatbik edilebileceği iddia edilen ilk halde, yani $n=2$ için bu eşitsizliğin doğru olduğunu görmüştük. Şu halde, $n \geq 2$ olmak üzere, onun n için doğru olduğunu kabûl ederek $n+1$ için de doğru olacağını ispat etmemiz lâzımdır.

Kabûl ettiğimize göre

$$(1-a_1)\cdots(1-a_n) > 1-a_1-\cdots-a_n$$

dir ve diğer taraftan

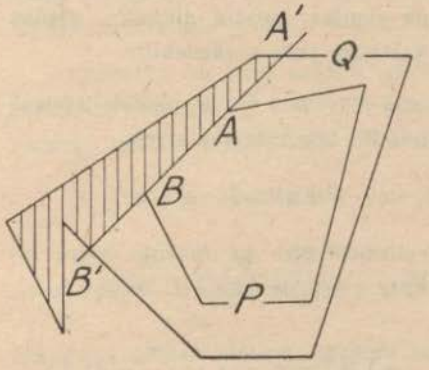
$$0 < a_{n+1} < 1$$

olduğunu biliyoruz.

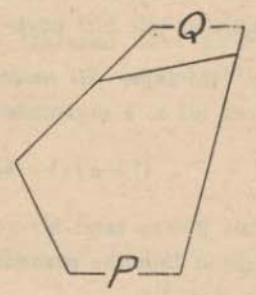
Bunun neticesinde

$$\begin{aligned}(1-a_1)\cdots(1-a_n)(1-a_{n+1}) &> (1-a_1-\cdots-a_n)(1-a_{n+1})\\ &= 1-a_1-\cdots-a_n-a_{n+1}+(a_1+\cdots+a_n)a_{n+1}\\ &> 1-a_1-\cdots-a_n-a_{n+1}\end{aligned}$$

olur. Böylece n için farzetmiş olduğumuz şeyi $n+1$ 'için çıkarmış olduk: İspat tamamlanmıştır.



Şek. 7.1. n den $n+1$ 'e geçiş



Şek. 7.2. $n=1$ hali

Matematik endüksiyonun mutlaka bütün pozitif tam sayılara değil, fakat belirli bir pozitif tam sayıdan sonra gelen bütün pozitif tam sayılara dair olan teoremleri de ispat etmekte kullanılabileceğine dikkat edelim. Meselâ biraz önce ispat edilen teorem yalnız $n \geq 2$ sayılarına dairdi.

(6) *n nedir?* Şimdi bir düzlem geometri teoremini inceleyelim.

Eğer P çokgeni konveks ise ve Q çokgeninin içinde bulunuyorsa, P nin çevresi Q nünkinden daha kısadır.

İçteki P çokgeninin alanının dıştaki Q çokgeninin alanından daha küçük olması aşikârdır. Fakat yukarda ifade edilen teorem o kadar aşikâr değildir; hattâ P nin konveks olması şartı koşulmazsa yanlış olur.

Şek. 7.1 ispatın esas fikrini göstermektedir. Q dış çokgeninden orada taranmış olan parçayı ayırsak, geriye Q nün bir parçası olan ve şu iki özeliği haiz yeni bir Q' çokgeni kalır:

Evvelâ Q', konveks olduğundan dolayı AB kenarının uzatılışının teşkil ettiği $A'B'$ doğrusunun tamamen bir tarafında kalan P çokgenini ihtiva etmekte devam eder.

Sonra, Q' nün çevresi Q nünkinden daha küçüktür. Hakikaten Q' nün çevresi Q nünkinden ancak birincinin A' ve B' noktalarını birleştiren doğru parçasını, diğerinin ise aynı noktaları birleştiren (taranmış parçanın uzak tarafındaki) kırık çizgiyi ihtiva etmesiyle farkeder. Doğru parçası ise A' ve B' noktaları arasındaki en kısa yoldur.

Q den Q' ye geçtiğimiz gibi, Q' den de diğer bir Q'' çokgenine geçebiliriz. Bu suretle Q, Q', Q'', ... gibi bir çokgen dizisi elde ederiz. Bu çokgenlerin herbiri bir öncekinin içinde bulunup, onunkinden daha kısa bir çevreyi haizdir ve bu dizinin son çokgeni P dir. Şu halde P nin çevresi Q nünkinden daha kısadır.

Yukarıki ispatın tabiatını tanımamız lâzımdır: Bu hakikatte matematik endüksiyonla yapılmış bir ispattır. Fakat burada n nedir? Endüksiyon burada hangi büyüklüğe göre yapılmaktadır?

Bu, ciddî bir sorudur. Matematik endüksiyon türlü alanlarda ve bazan çok güç ve muğlak problemlerde kullanılır. Gizli bir ispatı ortaya çıkarmaya çalışırken, şu hayatî soruyla karşılaşabiliriz: n ne olmalıdır? Hangi büyüklüğe göre matematik endüksiyon yapmalıyız?

Önceki ispatta n olarak *iç konveks çokgenin kenarlarından dış çokgenin çevresine tamamen ait olmayanların sayısını* almak şayanı tavsiyedir. Şek. 7.2 $n=1$ hâline örnek teşkil etmektedir. Şek. 7.1 de neye n demenin şayanı tavsiye olacağını bulmayı okuyucuya bırakıyoruz.

VII. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1.

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1+2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1+2+3+4)$$

olduğuna dikkat ediniz. Bu misâllerin ilham ettiği genel kanunu tahmin ederek, uygun bir matematik yazış tarzı ile ifade ediniz ve onu ispat ediniz.

2. P_n, S_n ve S_n^∞ için sırasıyla misâl 3.13, 3.14 ve 3.20 de tahmin edilen açık formülleri ispat ediniz [Misâl 3.11, 3.12.]

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

için bir ifade tahmin ediniz ve bunu matematik endüksiyonla ispat ediniz. [Misâl 1.4.]

4. $n \geq 2$ için

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

yi veren bir ifade tahmin ederek bunu matematik endüksiyonla ispat ediniz.

5. $n \geq 1$ için

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)$$

yi veren bir ifade tahmin ediniz ve onu matematik endüksiyonla ispat ediniz.

6.

$$\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\frac{8x^8}{1+x^8}=\frac{x}{1-x}-\frac{16x^{16}}{1-x^{16}}$$

münasebetini genelleştiriniz ve bulduğunuz genelleştirmeyi matematik endüksiyonla ispat ediniz.

7.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

dizisinden genel terimi

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

olan

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

dizisine geçiş işlemini ele alalım. Bu işleme (yani $s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisinin teşkili işlemine) «$a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisini toplamak» de-

nir. Bu terimi kullanarak evvelce (Misâl 1.3 te) müşahede etmiş olduğumuz bir vâkıayı aşağıki şekilde ifade edebiliriz.

Bütün pozitif tam sayıların teşkil ettiği 1, 2, 3, 4, ... dizisinden 1, 4, 9, 16, ... tam kareler dizisine iki adımda geçebilirsiniz:

(1) Sıra numarası çift olan terimleri diziden çıkarmak (2) geri kalan diziyi toplamak. Hakikaten, şu cedvele bakınız.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
1		3		5		7		9		11		13 ...
1		4		9		16		25		16		49 ...

Bu iddiayı matematik endüksiyon ile ispat ediniz.

8 (devam). Bütün pozitif tam sayıların teşkil ettiği 1, 2, 3, 4, ... dizisinden 1, 8, 27, 64, ... tam küpler dizisine şu dört adımda geçebilirsiniz: (1) Sıra numarası 3 ün katı olan terimleri diziden çıkarmak (2) gerikalan diziyi toplamak (3) Bu son dizide sıra numarası çift olan terimleri diziden çıkarmak (4) gerikalan diziyi toplamak. Aşağıki cedveli incelendikten sonra bunu matematik endüksiyonla ispat ediniz:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
1	2		4	5		7	8		10	11		13 ...
1	3		7	12		19	27		37	48		61 ...
1			7			19			37			61 ...
1			8			27			64			125 ...

9 (devam). Bütün pozitif tam sayıların teşkil ettiği 1, 2, 3, 4, ... dizisinden 1, 16, 81, 256,... tam dördüncü kuvvetler dizisine aşağıki cedvelde görülebilecek olan altı adımda geçebilirsiniz:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
1	2	3		5	6	7		9	10	11		13 ...
1	3	6		11	27	24		33	43	44		67 ...
1	3			11	17			33	43			67 ...
1	4			15	32			65	108			175 ...
1				15				65				175 ...
1				16				81				256 ...

Bu vâkıalar size neyi telkin eder?

10.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1-5 &= -4\\
1-5+10 &= 6\\
1-5+10-10 &= -4\\
1-5+10-10+5 &= 1\\
1-5+10-10+5-1 &= 0
\end{aligned}
$$

olduğuna dikkat edersek, $0<k<n$ ve $n=1, 2, 3, \ldots$ için şu genel ifadeye sevkedilmiş oluruz:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{n-1}{k}$$

Bu ifadeyi matematik endüksiyonla ispat ederken n den $n+1$ 'e geçmeyi mi, yoksa k dan $k+1$ 'e geçmeyi mi tercih edersiniz?

11. Bir tenis turnuvasına $2n$ kişi katılmaktadır. Turnuvanın ilk devresinde her oyuncu bir defa oynamakta olup, neticede bu devrede herbiri bir çift oyuncuya ait n tane oyun mevcuttur. Birinci devrede oyuncuların tam

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)$$

ayrı şekilde birbiri ile eşleştirilebileceğini gösteriniz.

12. *Daha fazla şey ispat etmek daha az zahmetli olabilir.*

$$\frac{1}{1-x} = f_0(x)$$

olsun ve $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... dizisini $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için

$$f_{n+1}(x) = x \frac{df_n(x)}{dx}$$

şartı ile tarif edelim (Böyle bir tarife *rekürrans* tarifi denir: f_{n+1} 'i bulmak için f_n 'yi kullanmamız lâzımdır.)

$$f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad f_2(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad f_3(x) = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$$

olduğuna dikkat ederek, $n \geq 1$ için $f_n(x)$ 'in payının sabit terimi 0 ve diğer katsayıları pozitif tam sayılar olan bir polinom olduğunu matematik endüksiyonla ispat ediniz.

13 (devam). $f_n(x)$ e ait diğer bir takım özelikleri endüksiyon yoluyla bulunuz ve matematik endüksiyonla ispat ediniz.

14. *Teoreminizi dengeleyiniz.* Matematik endüksiyonun uygulanabileceği tipik A teoremi A_1, A_2, A_3, ... A_n, ... gibi sonsuz sayıda özel hali haizdir. A_1 hali ekseriya kolaydır; hiç olmazsa olmazsa A_1 belirli vâsıtalarla ispat edilir. A_1 bir kere ispat edildikten sonra A_n yi doğru kabûl ederek A_{n+1} 'i ispat etmemiz gerekir. A dan daha kuvvetli olan bir A' teoremi bazan A dan daha kolaylıkla ispat edilebilir.[4] Hakikaten A', A_1' A_2', ..., A_n', ... özel hallerinden ibaret olsun. A dan A' ye geçerken is-

[4] Bu «mucidin paradoksu» dur; *How to Sole It*, S. 110 'a bakınız.

patın yükünü ağırlaştırıyoruz: A_{n+1} yerine ondan daha kuvvetli A'_{n+1} i ispat etmemiz gerekiyor. Bununla beraber ispatın dayanağını da daha kuvvetlendirmiş oluyoruz: A_n yerine daha çok bilgi ihtiva eden A_n' yi kullanabiliriz.

Misâl 12 nin çözümü bu noktayı aydınlatmaktadır. Fakat ilâve ihtarlarla bir netice şeklinde ispatı daha uygun olan misâl 13 teki özelikleri de işin içine sokmak çözümü lûzumsuz derecede yüklü hâle getirirdi.

Matematik endüksiyonla bir ispat kurmaya çalışırken, umumiyetle birbirine zıt iki sebep yüzünden başarısızlığa uğrayabilirsiniz. Ya çok fazla şey ispat etmek istediğiniz için başarısızlığa uğrayabilirsiniz: A_{n+1} iniz lûzumundan fazla ağır bir yük olabilir. Yahut lûzumundan az şey ispat etmek istediğiniz için başarısızlığa uğrayabilirsiniz: A_n niz lûzumundan zayıf bir dayanaktır. Teoreminizin ifadesini öyle dengelemek zorundasınız ki, dayanak yük taşımaya tam tamına yeterli olsun. Böylece ispat mekanizması, sizi vâkıalara dair daha dengeli ve onlara daha uydurulmuş bir görüşe götürür. Bu, ispatların ilmin kuruluşundaki rolü bakımından tipik bir durum olabilir.

15. *İleriye bakış.* Daha güç alanlardaki daha karışık problemler, daha işlenmiş bir matematik endüksiyon tekniğine ihtiyaç gösterirler ve bizi bu önemli ispat metodunun çeşitli değişik şekillerine götürürler. Gruplar Teorisi bize en şayanı dikkat misâllerin bazılarını verir. Enteresan bir değişik şekil «geriye doğru matematik endüksiyon» veya «n den $n-1$ 'e geçiş» tir; buna dair enteresan bir elemanter misâl için G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pòlya, *Inequalities*, S. 17 ve S. 20 ye bakınız.

16. $Q_1 = 1$ ve $n = 2, 3, \ldots$ için

$$Q_{n-1}\, Q_n = \frac{1}{2^{n(n-1)}} \frac{n!}{0!} \frac{(n+1)!}{1!} \frac{(n+2)!}{2!} \cdots \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

olduğu verildiğine göre, Q_n için genel bir ifade bulunuz ve onu ispat ediniz.

17. *Herhangi n sayı birbirine eşit midir?* Siz buna, hayır diye cevap vereceksiniz. Fakat biz, bunun aksini matematik endüksiyonla ispat etmeye çalışabiliriz. Bununla beraber şu iddiayı ispat etmek daha cazip olacaktır: «Herhangi n tane kızın gözleri aynı renktedir.»

$n = 1$ için iddia aşikâr (yahut «boş») olarak doğrudur. Geriye n den $n + 1$ 'e geçmek kalıyor. Müşahhas bir hali gözönüne getirmek için burada 3 ten 4 e geçecek ve genel hali size bırakacağım.

Sizi Ann, Berthe, Carol ve Dorothy, yahut kısalık için A, B, C, D gibi herhangi dört kıza takdim edeyim. Kabûl ettiğimize göre ($n = 3$) A, B ve C nin gözleri aynı renktedir. Aynı şekilde gene kabul ettiğimize göre ($n = 3$) B, C ve D nin gözleri de aynı renktedir. Neticede dört kızın da, yani A, B, C ve D nin gözleri aynı renkte olmalıdır; tam açıklık için şu diyagrama bakabilirsiniz:

$$\overbrace{A,\ \underbrace{B,\ C,}\ D.}$$

Bu, iddiayı $n + 1 = 4$ için ispat etmekte olup, meselâ 4 ten 5 e geçmek te aşikâr olarak yukarıki geçişten daha güç değildir.

Bu paradoksu izah ediniz. Birçok kızın gözlerine bakmak suretiyle deneysel yolu da tutabilirsiniz.

18. Paralel doğrulara (sonsuzda) kesişiyor gözüyle bakılırsa, «Bir düzlemdeki herhangi n doğru ortak bir noktayı haizdir.» şeklindeki bir iddia $n = 1$ için (boş olarak) ve $n = 2$ için (yukarıki tefsirimiz sayesinde) doğru olur. Bu iddianın matematik endüksiyonla bir (paradoksal) ispatını inşa ediniz.

VIII

MAKSİMUMLAR ve MİNİMUMLAR

Dünyanın yapısı en mükemmel bir yapı olduğundan ve en akıllı yaratan tarafından kurulmuş bulunduğundan, bu dünyada içinde bir maksimum veya minimum sebebinin açığa çıkarılamıyacağı hiçbir hâdise vukubulmaz. — EULER

1. Modeller. En büyük ve en küçük değerlere dair problemler, yani maksimum ve minimum problemleri aynı güçlükteki diğer matematik problemlerinden belki de daha câzip olup, bu husus tamamen ilkel bir sebebe bağlanabilir. Hakikaten, hepimizin şahsî problemlerimiz vardır. Bunlara dikkat edersek, ekseriya onların bir nevi maksimum veya minimum problemleri olduklarını görürüz. Meselâ belirli bir şeyi mümkün olan en ucuz fiyata satın almak, veya belirli bir gayretle mümkün olan en büyük tesiri elde etmek, yahut verilen bir zamanda mümkün olduğu kadar çok iş yapmak ve, tabiatıyle en az rizikoya girmek isteriz. Bence, maksimum veya minimuma dair matematik problemlerinin bize câzip gelmesi, onların günlük problemlerimizi idealize etmelerindendir.

Biz hattâ, Tabiatın da bizim yapacağımız gibi, yani en az gayretle en çok tesir elde edecek şekilde hareket ettiğini tasavvur etmeye meyyaliz. Fizikçiler bu nevi fikirlere berrak ve yararlı şekiller vermeyi başarmışlardır; onlar bir takım fizik hâdiselerini «minimum prensipleri» vâsıtasıyla tasvir etmektedirler. Bu neviden ilk prensip (Maupertuis adına izafe edilmesi âdet

olan «En küçük tesir prensibi») esas itibariyle Euler tarafından geliştirilmiştir; onun bu bölümün başında zikredilmiş olan sözleri maksimum ve minimum problemlerinin, içinde yaşamış olduğu yüzyılın bir çok âlimlerine hitap etmiş olduğunu tahmin edebileceğimiz, belirli bir yönünü canlı bir şekilde anlatmaktadır.

Bundan sonraki bölümde elemanter fizikte ortaya çıkan birkaç maksimum ve minimum problemi ile meşgûl olacağız. Şimdiki bölüm, bizi bir sonrakine hazırlıyacaktır.

Diferansiyel Hesap bize maksimum ve minimum problemlerini çözmek için genel bir metod verir. Burada bu metodu kullanmıyacağız. Onun yerine kendimizin birkaç «model» ini geliştirmek daha öğretici olacaktır.

Bir problemi hakikî bir anlayış ve alâka ile çözünce, değerli bir mala sahip olursunuz: benzer problemleri çözerken taklit edebileceğiniz bir model. Eğer bir modeli tâkip etmeye çalışırsanız, eğer onu tâkip ederken bir başarı elde ederseniz, eğer başarınızın sebepleri, çözülmüş olan problemlerin birbirine benzerliği, bir problemin bu türlü çözülmesini temin eden şartlar, v.s. üzerinde düşünürseniz, o modeli geliştirmiş olursunuz. Böyle bir modeli geliştirmekle belki de sonunda hakikî bir keşfe ulaşabilirsiniz. Hiç olmazsa, düzenli ve hemen kullanılabilir bir bilgi elde etmek için bir fırsata sahip olmuş olursunuz.

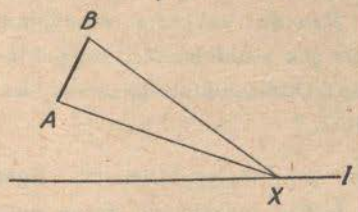
2. Misâl. *Hepsi aynı düzlemde bulunan iki nokta ile bir doğru verilmiş olup, noktaların her ikisi doğrunun aynı tarafındadır. Verilen doğru üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, verilen iki noktayı birleştiren doğru parçası o noktadan en büyük açı altında görülsün.*

Çözmek istediğimiz problem budur. Şimdi bir şekil çizerek (Şek. 8.1), uygun bir yazış tarzı ithâl edeceğiz:

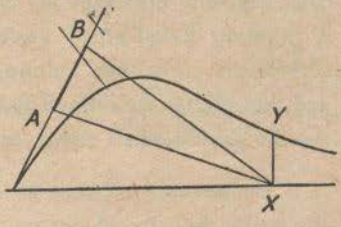
A ve B verilmiş noktalar,

l verilmiş doğru,

X te l üzerinde değişen bir nokta olsun. Verilmiş AB doğru parçasının X değişen noktasından göründüğü $\sphericalangle AXB$ açısını nazarı itibara alalım. Bizden X noktasının l doğrusu üzerinde bu açıyı maksimum yapan mevkiini bulmaklığımız isteniyor.



Şek. 8.1. En iyi görünüşü aramak



Şek. 8.2. Açının değişiminin grafiği böyle olabilir

l yi bir düz cadde olarak tasavvur edelim. Eğer l üzerinde bir noktadan A dan B ye kadar uzanan bir hedefe ateş etmek isterseniz, bizim aradığımız noktayı seçmeniz icabeder; çünkü o nokta size en büyük isabet şansını verir. Eğer köşeleri A ve B de bulunan bir bina cephesinin l yolundan resmini çekmek gibi daha sûlhçu bir niyetiniz varsa, gene aradığımız noktayı seçmelisiniz, çünkü bu nokta en geniş görünüşü verir.

Problemimizin çözümü hemen derhal görülmemektedir. Fakat, maksimuma *nerede* ulaşıldığını henüz görmemekle beraber, ona *bir yerde* ulaşıldığından şüphe etmemekteyiz. Bu husus neden bu derece akla yakın gelmektedir?

Eğer maksimumunu aradığımız açının değişimini gözönüne getirirsek, bu hususu izah edebiliriz. Şimdi l doğrusu boyunca AB doğru parçasına bakarak yürüdüğümüzü tasavvur edelim. Hareket noktamız olarak l doğrusu ile A ve B den geçen doğrunun kesişme noktasını seçelim ve sağa doğru yürüyelim. Başlangıçta AB nin göründüğü açı sıfır olup, sonra bu açı artmaya başlar;

nihayet AB den çok uzak olduğumuz zaman bu açı tekrar azalmalıdır, zira onun sonsuzdaki değeri gene sıfır olur. (1)

Her nekadar l doğrusu üzerinde maksimumu veren noktayı çok muhtemel olarak ihtiva etmeyen uzun doğru parçaları verebilirsek te, bu soruya tam cevap vermek kolay değildir. l doğrusu üzerinde herhangi bir nokta seçelim ve bu noktanın adına X diyelim. Gelişi güzel seçilmiş olan bu noktanın aradığımız maksimum mevkiinde bulunmaması çok muhtemeldir. Bu noktanın maksimum mevkiinde bulunup bulunmadığına tamamen kesin bir şekilde nasıl karar verebiliriz?

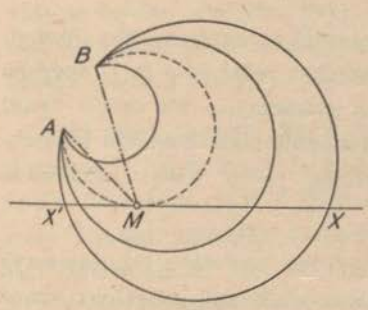
Bu hususta oldukça kolay bir şey söyleyebiliriz (2). Eğer bir nokta maksimum durumunda *değilse*, maksimum durumunun öteki tarafında bahis konusu açının aynı değeri aldığı diğer bir nokta mevcut olmalıdır. Acaba l doğrusu üzerinde, AB doğru parçasını X noktasının gördüğü açının aynısı altında gören diğer bir X' noktası var mıdır? Nihayet, işte hemen cevap verebileceğimiz bir soru: (eğer bir X' varsa) X ve X', bir daire içine çizilmiş açıların bilinen bir özeliğine (Öklid III, 21) göre, A ve B noktalarından geçen aynı bir daire üzerinde bulunmalıdır.

Ve şimdi fikir ortaya çıkabilir: A ve B noktalarından geçen birçok daireler çizelim. Eğer böyle bir daire doğruyu Şek. 8.3 teki X ve X' gibi iki noktada keserse, AB doğru parçası X ve X' noktalarından aynı açı altında görünür, fakat bu açı mümkün olan en büyük açı değildir. Zira l yi X ile X' arasında kesen bir daire daha büyük bir açı verir. Şu halde doğruyu kesen

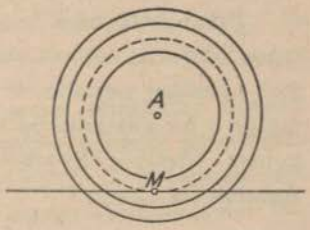
(1) Eğer $\sphericalangle AXB$ yi l doğrusu üzerinde ölçülen uzaklığın fonksiyonu olarak düşünürsek, alışık olduğumuz gibi bu fonksiyonu (dik koordinat eksenlerine göre) bir grafikle gösterebiliriz. Şek. 8.2 bu grafiğin kalitatif bir krokisini vermekte olup, orada $\sphericalangle AXB$, XY ordinatıyla gösterilmektedir.

(2) Şek 8.2 ye bakarsak çok kolay.

daireler işimizi görmez; en büyük açının tepesi A ve B den geçen ve l ye teğet olan bir dairenin l ye *değdiği* noktadadır (Şek. 8.3 teki M noktası).



Şek. 8.3. Teğet olan bir tesviye çizgisi



Şek. 8.4. Diğer bir teğet tesviye çizgisi

3. Teğet tesviye çizgisi modeli. Bulmuş olduğumuz çözüme bakalım. Ondan ne öğrenebiliriz? Onda önemli olan nedir? Onun hangi karakteristikleri uygun bir şekilde genelleştirilebilir?

Biraz düşündükten sonra en esaslı görünen adım pek göze çarpan bir şey değildir. Bence hayatî adım noktai nazarımızı genişletmek, l doğrusunun dışına çıkarak maksimum yapılması istenen büyüklüğün (AB yi gören açı) düzlemin l dışındaki noktalarda da değerlerini nazarı itibara almak olmuştur. Biz bu açının tepesi düzlem üzerinde dolaştırıldığına göre değerinin değişimini, yani bu açının değerinin kendi tepesinin durumuna nasıl bağlı bulunduğunu ele aldık. Kısaca, biz bu açıyı *değişken bir noktanın* (yani açının tepesi) *fonksiyonu* olarak düşündük ve bu noktaya *düzlem üzerinde* değişiyor gözüyle baktık.

Bu açı, tepesi A ve B yi birleştiren bir daire yayı üzerinde hareket ettikçe sabit kalır. Böyle bir daire yayına bir *tesviye çizgisi* diyelim. Bu ifade erişmek üzere olduğumuz genel noktai

nazarı belirtir. Değişken bir noktanın bir fonksiyonunun kendileri üzerinde sabit kaldıkları eğrilere genellikle o fonksiyonun tesviye çizgileri denir.

Fakat problemimizin bilinmeyenini de unutmayalım. Bizden, tepesi düzlemde serbest olarak hareket edemeyip te l doğrusu gibi evvelden verilmiş bir yoldan ayrılamıyan bir açının (yani değişken bir noktanın bu fonksiyonunun) maksimumunu bulmaklığımız isteniyor. Evvelden verilmiş yolun hangi noktasında maksimuma ulaşılır?

Cevabı şimdiden bilmekle beraber, onu daha iyi anlamaya ve ona daha genel bir noktai nazardan bakmaya çalışalım. Bunun için ona benzer daha genel ve çok müşahhas bir misâl ele alalım.

Bir haritada ve o haritanın gösterdiği arazide (dağlık bir memleket düşünelim) «tesviye eğrileri» nin ne olduğunu biliyorsunuz. Bu eğriler sabit yükseklik eğrileridir; harita üzerinde bir tesviye eğrisi, yeryüzünde deniz seviyesinden eşit yükseklikte bulunan noktalara haritada tekabül eden noktaları birleştirir. Denizin 100 ayak (ft) yükseldiğini tasavvur ederseniz, koyların vâdileri doldurması neticesinde yeni deniz seviyesinde yeni bir sahil hattı teşekkül eder. Bu yeni sahil hattı 100 yüksekliğine tekabül eden tesviye çizgisidir. Harita yapanlar harita üzerine, meselâ 100, 200, 300, ... yüksekliklerine tekabül eden, eşit aralıklı birkaç tesviye çizgisi çizerler; fakat biz herbir yükseklik için, arazinin herbir noktasından geçen bir yükseklik çizgisi tasavvur edebiliriz. Haritacı için, veya arazi üzerinde dolaşırken sizin için, önemli olan değişken nokta fonksiyonu deniz seviyesinin üzerindeki yüksekliktir; bu fonksiyon herbir tesviye çizgisi boyunca sabit kalır.

Şimdi, evvelce (paragraf 2 de) münakaşa etmiş olduğumuz probleme benzer bir problem ortaya atalım: Bir şose, yani evvelden verilmiş bir yol, üzerinde yürümektesiniz. Bu yolun hangi noktasında yüksekliğin maksimumuna erişirsiniz?

Bu maksimum yüksekliğe nerede erişmediğinizi söylemek çok kolaydır. Üzerinden geçerken aşağıya indiğiniz veya yukarıya çıktığınız bir nokta muhakkak ki ne maksimum, ne de minimum noktası olabilir. Böyle bir noktada yolunuz bir tesviye eğrisini keser: *Maksimuma* (yahut minimuma) *verilmiş golun bir tesviye çizgisini kestiği bir noktada erişilemez.*

Bu esaslı hususu kaydettikten sonra, misâlimize dönelim (Paragraf 2, Şek. 8.1, 8.2, 8.3). Evvelden verilmiş yolu bütünüyle düşünelim, yani l doğrusunu A ile B yi birleştiren doğruyu kestiği noktadan (sağa doğru) sonsuz uzaklığa kadar nazarı itibara alalım. Bu yol, bir tanesi müstesna her noktasında bir tesviye çizgisini (uçları A ve B olan bir daire yayı) keser, istisna edilen noktada ise bir tesviye çizgisine (böyle bir daireye) teğettir. Eğer herhangi bir yerde maksimum varsa, bu noktada olmalıdır: *Maksimuma veren noktada evvelce verilmiş yol bir tesviye çizgisine teğettir.*

Bu ifade misâlimizin arkasındaki genel fikri çok kuvvetle îma ediyor. Fakat bu îmayı inceleyelim. Onu basit bir benzer hale tatbik ederek, nasıl işlediğine bakalım. İşte kolay bir misâl:

Verilmiş bir doğru üzerinde ve verilmiş bir noktadan en küçük uzaklıkta bulunan noktayı bulunuz.

A verilen nokta,

a verilen doğru olsun.

Verilen A noktasının a doğrusu üzerinde olmadığı farzedilmektedir. Bizden istenilen şey, A dan a ya olan en kısa uzaklığı bulmaktır.

Bunun çözümünü herkes bilmektedir. Sakin bir denizde yüzmekte olduğunuzu ve şu anda A noktasında bulunduğunuzu tasavvur ediniz. a doğrusu düz bir sahili gösterin. İçinize ansızın bir korku giriyor ve kendinizi mümkün olduğu kadar çabuk sahile atmak istiyorsunuz. Sahildeki en yakın nokta neredediir?

Onu düşünmeden bilirsiniz. Bir köpek te onu bilir. Suya atılmış olan bir köpek veya bir inek te A dan a ya çizilen dik boyunca yüzmeye başlardı.

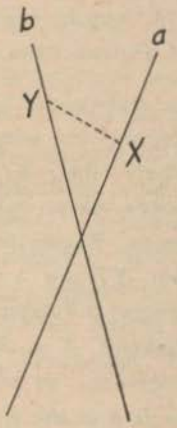
Fakat bizim buradaki maksadımız çözümü bulmaktan ziyade, onu bulurken genel bir fikri incelemektir. Minimum yapmak istediğimiz büyüklük değişken bir noktanın A noktasına olan uzaklığıdır. Bu uzaklık değişen noktanın durumuna tâbidir. Bu uzaklığa ait tesviye çizgileri aşikâr olarak ortak merkezleri A olan dairelerdir. «Verilmiş yol» a doğrusudur. Verilmiş yolun bir tesviye çizgisini kestiği bir noktada minimuma erişilemez. Hakikaten minimum, verilmiş yolun bir tesviye çizgisine teğet olduğu (tek) noktada zuhûr eder (Şek. 8.4 ün M noktası). A noktasından a doğrusuna olan en kısa uzaklık - ilk baştan da bildiğimiz gibi - merkezi A olan ve a ya teğet bulunan dairenin yarıçapıdır. Gene de yeni bir şey öğrenmiş olduk. Şimdi genel fikri daha açık olarak görünmekte olup, onu tam açıklığa kavuşturmayı okuyucuya bırakabiliriz.

Önceki problemlerin esas karakteristiklerini açık bir şekilde kafamıza yerleştirdikten sonra, tabiatıyle aynı çözüm modelinin uygulanabileceği benzer problemler ararız. Öncekilerde bir düzlemde değişen bir nokta nazarı itibara alarak, o noktanın bir fonksiyonunun verilmiş bir eğri boyunca maksimum veya minimumunu aradık. Fakat, uzayda değişen bir noktayı da ele alabilir ve böyle bir noktanın bir fonksiyonunun verilmiş bir eğri veya verilmiş bir yüzey boyunca maksimum veya minimumunu da arayabilirdik. Düzlemde teğet tesviye çizgileri özel bir rol oynamışlardı. Benzerlik, bizi teğet tesviye yüzeylerinin de uzayda buna benzer bir rol oynamalarını beklemeye sevkeder.

4. Misâller. Şimdi aynı metodla incelenebilen, fakat bundan başka pek az ortak şeyi bulunan iki misâli münakaşa edeceğiz.

(1) *Verilen iki aykırı doğru arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.*

Verilen iki aykırı doğruya a ve b, a üzerinde değişen bir noktaya X, b üzerinde değişen bir noktaya Y diyelim (Şek. 8.5 e bakınız). Bizden XY doğru parçasının en kısa olduğu durumu tayin etmemiz isteniyor.



Şek. 8.5. İki aykırı doğru

XY uzaklığı her ikisi de değişken olan X ve Y uç noktalarının mevkilerine tâbidir. Burada bir yerine iki tane değişken nokta mevcuttur ki, bu da problemin karakteristik güçlüğünü teşkil edebilir. Eğer iki noktadan biri sabit, diğeri değişken olarak verilmiş olsa idi, iş kolay olacaktı. Hakikaten, bu takdirde problem yeni bile olmıyacaktı ve biraz önce (paragraf 3) çözmüş olduğumuz bir problemin aynı olacaktı. Başlangıçta değişken olarak verilmiş noktalardan birini, meselâ Y yi bir an için *sabit* tutalım. Bu takdirde XY doğru parçası sabit Y noktası ile verilmiş a doğrusundan geçen düzlem içinde bulunup, uçlarından biri, yani X, a doğrusu boyunca hareket etmektedir. Aşikâr olarak, (paragraf 3, Şek. 8.4 dolayısıyla) XY, a ya dik olduğu zaman minimum olur.

Şimdi X ile Y nin rollerini değiştirelim ve X i sabit tutarak Y yi tek değişken bırakalım. Aşikâr olarak, XY doğru parçası, b ye dik olduğu zaman en kısa olur.

Bununla beraber, XY nin minimum durumu bizim keyfimizden ve X ile Y ye vereceğimiz rollerden müstakil olduğundan, bu durumun hem a ya, hem de b ye dik olduğunu tahmine sevkedilmiş oluruz. Fakat duruma daha yakından bakalım.

Hakikaten, yukarıki muhakeme bize minimumun nerede *olamıyacağını* doğrudan doğruya (ve nerede olması lâzım geleceğini ancak bilvâsıta) gösterir. Ben, X noktasında a doğrusuna dik olmayan bir XY doğru parçasının minimum durumunda *olamıyacağını* iddia ediyorum. Hakikaten, bu halde Y noktasını sabit tutar ve X noktasını XY nin a ya dik olduğu başka bir noktaya götürürsem (paragraf 3 dolayısıyla) XY yi daha kısa yapmış olurum. Bu muhakeme X e olduğu gibi Y ye de aynı şekilde tatbik edilebileceğinden, şu neticeyi elde ederiz: *XY doğru parçası hem a, hem de b ye dik olmadıkça, bu doğru parçasının uzunluğu minimum olamaz.* Eğer bir minimum uzaklık varsa, bu uzaklık verilen doğruların ortak dikmesi boyunca ölçülen uzaklıktan başkası olamaz.

Hiçbir şeyi ispatsız olarak kabûl etmemize lüzûm yoktur. Hakikaten, ortak dikmenin sabiden en küçük uzaklık olduğunu bir bakışta anlıyabiliriz. Şek. 8.5 te şekil düzleminin verilmiş a ve b doğrularının her ikisine de (a üste, b altta olmak üzere) paralel olduğunu farzedelim. Uzaydaki herhangi bir nokta veya doğrunun Şek. 8.5 te dik izdüşümü ile gösterildiğini düşünebiliriz. XY doğru parçasının hakikî uzunluğu öyle bir dik üçgenin hipotenüsüdür ki, bu üçgenin bir dik kenarı XY nin Şek. 8.5 te görülen dik izdüşümü, diğer dik kenarı da biri a dan diğeri b den şekil düzlemine paralel olarak geçirilen iki düzlemin arasındaki en kısa (dik) uzaklıktır. Şu halde, Şek. 8.5 te gösterilen XY izdüşümü ne kadar kısa olursa, XY nin kendisi de o kadar

kısa olur. XY ancak ve ancak şekil düzlemine ve böylece a ve b doğrularının her ikisine birden dik olduğu zaman, XY doğru parçasının izdüşümü bir noktaya, yani bu izdüşümün uzunluğu sıfıra müncer olur ve neticede XY uzunluğu minimum olur.

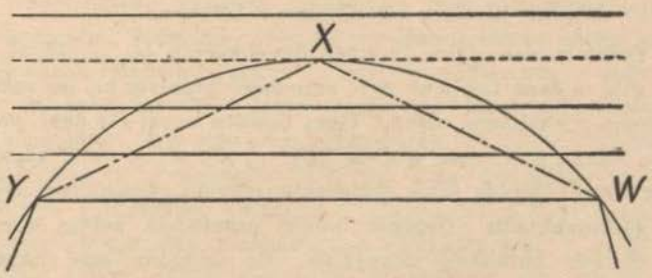
Bu suretle, başka bir metodla yapmış olduğumuz keşfi doğrudan doğruya gerçeklemiş olduk.

(2) *Verilmiş bir dairenin içine çizilen ve kenar sayısı verilmiş olan bir çokgenin alanının maksimumunu bulunuz.*

Verilmiş olan daire üzerinde bir çokgenin $U, \ldots, W, X, Y$ ve Z gibi n tane köşesini öyle seçmemiz isteniyor ki, bu çokgenin alanı maksimum olsun. Tıpkı bundan evvel (1) deki problemde olduğu gibi, esas güçlük ($U, \ldots, W, X, Y$ ve Z köşeleri olmak üzere) birden fazla değişkenin mevcut olmasından doğuyor görünmektedir. Öyleyse önceki problemde netice vermiş olan metodu burada da deneyelim. Bu metodun esas noktası nedir?

Evvelâ problemi *hemen hemen çözülmüş* farzedelim. Bir tanesi, meselâ X müstesna, bütün diğer köşelerin aradığımız yerlerinin bulunmuş olduğunu tasavvur edelim. $n-1$ tane olan bu $U, \ldots, W, Y$ ve Z noktalarını bu yerlerde sabit tutalım. Bundan sonra değişken X noktasını öyle seçmemiz icabediyor ki, çokgenin alanı maksimum olsun. Bütün alan iki parçadan teşekkül eder: $n-1$ sabit köşenin teşkil ettiği $U \ldots WYZ$ çokgeni ki, X 'e tâbi değildir; ve X 'e tâbi olan WXY üçgeni. Biz dikkatimizi, bütün çokgenin alanının maksimum olabilmesi için kendi alanının maksimum olması gereken bu üçgen üzerinde toplayacağız (Şek. 8.6 ya bakınız). ΔWXY nin WY tabanı sabittir. X tepesi WY tabanına paralel bir doğru üzerinde hareket ederse, üçgenin alanı sabit kalır: WY ye paralel olan bu doğrular tesviye çizgileridir. Bunlar içinden teğet tesviye çizgisini seçeceğiz ki, bu da verilmiş dairenin WY ye paralel teğetinden ibarettir. Bu teğetin değme noktası aşikâr olarak, X in ΔWXY

nin alanını maksimum kılan mevkiini verir. X in bu durumunda üçgen ikizkenardır: $WX = XY$. Eğer çokgenin alanı maksimum olacaksa bu iki bitişik kenarın birbirine eşit olması gerekir. Fakat aynı muhakeme her bitişik kenar çiftine uygulanabilir. Şu halde alanın maksimumuna ulaşıldığı zaman bütün kenarlar eşit olmalı, bu suretle dairenin içine çizilmiş olan maksimum alanlı çokgen *düzgün* olmalıdır.



Şek. 8.6. Maksimum alanlı üçgen

5. Kısmî değişim modeli. Önceki paragrafta (paragraf 4) münakaşa edilmiş olan iki misâli mukayese edersek, bunların bazı ortak yönleri bulunduğunu ve ortak bir çözüm modeline uyduklarını kolayca görürüz. Her iki problemde de *birçok* değişken elemana tâbi olan bir büyüklüğün ekstremumu (maksimum veya minimumu) aranmaktadır. Her iki çözümde de bir an için, başlangıçta değişken olan elemanlar bir tanesi müstesna olmak üzere sabit tutulmakta ve bu tek elemanın değişiminin tesiri incelenmektedir.

Bütün değişken elemanların aynı zamanda değişiminin, yani *külli* değişimin incelenmesi o kadar kolay göz önüne alınamaz. Biz, ele aldığımız son misâlde yalnız bir elemanın değiştiği ve diğerlerinin sabit tutulduğu haldeki *kısmî* değişimi inceleyerek iyi neticeler aldık. Usûlümüzün temelinde şu prensibin bulunduğu görülmektedir: *Çok değişkenli bir f fonksiyonu teker*

teker her değişkenine göre maksimum olmadıkça, bir arada bütün değişkenlerine göre de maksimum olamaz.

Bu ifade, bir noktada lûzumundan fazla sınırlanmış olmakla beraber oldukça geneldir; bu sınırlama, bir defada ancak bir elemanın değişmesine müsaade ettiğimiz önceki misâllere çok fazla yapışıp kalmasıdır. Bununla beraber diğer bazı misâllerde tam iki elemanı değiştirip, ötekileri sabit tutmanın yahut belki de üç elemanı değiştirip, diğerlerini sabit tutmanın, ilâh... belki daha avantajlı olacağını tasavvur edebiliriz. Böyle hallerde gene «kısmî değişim» den bahsetmek uygun olacaktır. Şimdi genel fikir oldukça berrak görünüyor ve biz bir misâl daha verdikten sonra, okuyucu onu kendi kendine tamamen açık bir şekle sokmak işine girişebilir.

l uzunluğunda bir doğru n parçaya bölünmüştür. Bu n parçanın çarpımının maksimumunu bulunuz.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bu n parçanın uzunluklarını göstersin; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toplamı verilmiş n tane pozitif sayıdır:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = l.$$

$x_1 x_2 \cdots x_n$ çarpımını maksimum yapmamız isteniyor.

Evvelâ en basit özel hâli inceleriz: İki pozitif büyüklüğün $x_1 + x_2$ toplamı verildiğine göre, onların $x_1 x_2$ çarpımının maksimumunu bulmak. x_1 ve x_2 yi bir dik dörtgenin bitişik kenarları olarak tefsir edersek, problemi daha câzip olan şu şekle sokabiliriz: Bir dik dörtgenin L çevre uzunluğu verildiğine göre, bu dik dörtgenin alanının maksimumunu bulunuz. Hakikaten, bu takdirde yukarda bahsedilen iki kenarın toplamı verilmiştir:

$$x_1 + x_2 = \frac{L}{2}.$$

Burada aşikâr bir tahmin yapılabilir: Dik dörtgen bir kare

olduğu zaman alanı maksimum olur. Bu tahminin gerçeklenmesi zor olamaz. Çevresi L olan karenin her kenarı

$$\frac{L}{4}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

ye eşittir. Şimdi karenin alanının dik dörtgenin alanından daha büyük olduğunu, yahut aynı şey demek olan

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2$$

farkının pozitif olduğunu göstermeliyiz. Bu hakikaten böyle midir?

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$$

olduğunu görmek için pek az cebir bilgisi kâfidir. Bu formül bütün durumu bir bakışta gösterir. $x_1=x_2$ ve neticede dikdörtgen bir kare olmadıkça sağ taraf pozitiftir.

Kısaca, çevre uzunluğu verilmiş bir dik dörtgen bir kare olması halinde maksimum alanı haizdir; toplamı verilmiş iki pozitif büyüklüğün çarpımı bu büyüklüklerin birbirine eşit olması halinde maksimum olur.

Biraz önce çözmüş olduğumuz özel problemi genel halin çözümünü elde etmek için bir sıçrama tahtası olarak kullanmaya çalışalım. Problemi hemen hemen çözülmüş olarak düşünelim. İlk iki kısım, yani x_1 ve x_2 müstesna bütün kısımların aranan değerlerinin elde edilmiş olduğunu tasavvur edelim. Böylece x_1 ve x_2 ye değişkenler, fakat $x_3, x_4, \ldots, x_n$ ye sabitler gözüyle bakabiliriz. İki değişken kısmın toplamı sabittir:

$$x_1+x_2=l-x_3-x_4-\cdots-x_n\ .$$

Şimdi ilk iki kısmın x_1x_2 çarpımı maksimum olmadıkça, bütün kısımların

$$x_1x_2(x_3x_4\cdots x_n).$$

çarpımı da maksimum olamaz. x_1x_2 nin maksimum olması ise $x_1=x_2$ olmasını gerektirir. Başka bir kısım çiftinin de bundan farklı davranması için hiçbir sebep yoktur. Şu halde, toplamı verilen bütün büyüklükler birbirine eşit olmadıkça çarpım istenilen maksimuma ulaşamaz. Yukarıki muhakemenin sahibi Colin Maclaurin'den (1698—1746) aşağıki satırları zikredelim: «Eğer AB doğrusu AC, CD, DE, EB gibi herhangi bir sayıda bir takım parçalara ayrılırsa, bütün bu parçaların birbirleriyle çarpımı bu parçaların aralarında eşit olmaları halinde maksimum olur.»

Okuyucu yukarıki ispatı açıklığa kavuşturuken bir hayli şey öğrenebilir. Acaba bu ispat tamamen tatminkâr mıdır?

6. Aritmetik ve geometrik ortalamalar teoremi ve onun ilk neticeleri. Yukarıki paragrafın neticesini tekrar nazarı itibara alalım: Eğer

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=l$$

ise,

$$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=\frac{l}{n}$$

olmadıkça

$$x_1x_2x_3\ldots x_n<\left(\frac{l}{n}\right)^n$$

dir. l yi yok etmek suretiyle bu neticeyi şu şekilde tekrar ifade edebiliriz:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif sayılarının hepsi birbirine eşit olmadığı takdirde

$$x_1x_2\cdots x_n<\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

yahut

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

dir; eğer bu büyüklükler birbirlerine eşit ise, eşitsizlik bir eşitliğe döner. Son eşitsizliğin sol tarafına $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin geometrik, sağ tarafına da aynı sayıların aritmetik ortalaması denir. Bu yüzden yukarda ifade etmiş olduğumuz teoreme bazan «aritmetik ve geometrik ortalamalar teoremi», yahut kısaca «ortalamalar teoremi» denir.

Ortalamalar teoremi birçok bakımlardan enteresan ve önemlidir. Bu teoremin iki farklı şekilde ifade edilebildiğinden bahsetmeye değer:

Toplamı verilmiş olan n tane pozitif sayının çarpımı, bu sayıların hepsinin birbirine eşit olması halinde maksimum olur.

Çarpımı verilmiş olan n tane pozitif sayının toplamı, bu sayıların hepsinin birbirine eşit olması halinde minimum olur.

Birinci ifade bir maksimuma, ikincisi de ona tekabül eden minimuma dairdir. Önceki paragrafta birinci ifadenin çıkarılışı hedef alınmıştır. Bu çıkarılışı sistematik olarak değiştirmek suretiyle ikinci ifadeye varabilirdik. Fakat ortalamalar arasındaki eşitsizliğin her iki ifadeyi de tarafsız bir şekilde verdiğine dikkat etmek daha basittir: bu ifadelerin biri veya diğerini elde etmek için bu eşitsizliğin bir veya diğer tarafına verilmiş gözüyle bakmamız yeter. (Esas itibariyle denk olan) bu iki ifadeye *konjüge (eşlenik) ifadeler* diyeceğiz.

Ortalamalar teoremi minimum ve maksimumlara dair birçok geometrik problemin çözümünü verir. Burada sadece bir misâl münakaşa edeceğiz (diğer birçokları bu bölümün sonunda bulunabilir).

Bir kutu yüzeyinin alanı verildiğine göre, o kutunun hacmının maksimumunu bulunuz.

Burada «dik paralelyüz» kelimesi yerine «kutu» kelimesini kullanmamızın sebebi bu son kelimenin ifade kudretinin kâfi olması ve resmî terimden çok daha kısa bulunmasıdır.

Problemin çözümü önceden kolayca görülebilir ve bu çözüm görüldükten sonra, aşağıki şekilde kolayca ortalamalar teoremine dökülebilir:

a, b, c kutunun aynı köşesinden çıkan üç kenarın uzunluklarını,

S yüzeyin alanını,

V hacmi göstersin.

Aşikâr alarak

$$S = 2(ab + ac + bc), \qquad V = abc$$

dir. ab, ac ve bc nin toplamının $S/2$ ve çarpımının V^2 olduğuna dikkat edersek, ortalamalar teoremi aklımıza gelir ki, o da

$$ab = ac = bc$$

yahut aynı şey demek olan,

$$a = b = c$$

olmadıkça

$$V^2 = (abc)^2 < \left(\frac{ab + ac + bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^3$$

verir. Yani kutu bir küp olmadıkça

$$V < \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

dir. Kutunun küp olması halinde eşitlik vardır. Bu neticeyi (esas itibarıyle denk olmakla beraber) iki farklı şekilde ifade edebiliriz:

Aynı yüzey alanını haiz bütün kutular içinde küp en büyük hacmı haizdir.

Aynı hacmı haiz bütün kutular içinde küp en küçük yüzey alanını haizdir.

Yukarda olduğu gibi, bu iki ifadeye eşlenik ifadeler diyebiliriz. Gene yukardaki gibi bu iki eşlenik ifadeden biri bir maksimum, öteki bir minimuma dairdir.

Ortalamalar teoreminin yukarıki tatbikatının kendine mahsus meziyetleri vardır. Bu tatbikata bir model gözüyle bakabilir ve ortalamalar teoreminin benzer şekilde uygulanabildiği halleri bir araya toplayabiliriz.

VIII. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. *Düzlem geometride en küçük ve en büyük uzaklıklar.* (1) iki nokta, (2) bir nokta ile bir doğru, (3) iki paralel doğru arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

(4) bir nokta ile bir daire, (5) bir doğru ile bir daire, (6) iki daire arasındaki en küçük ve en büyük uzaklıkları bulunuz.

Bütün bu hallerde çözüm aşikârdır. Hiç olmazsa bazı hallerin elemanter ispatlarını hatırlamaya çalışınız.

2. *Uzay geometride minimum ve maksimum uzaklıklar.* (1) iki nokta, (2) bir nokta ve bir düzlem, (3) iki paralel düzlem, (4) bir nokta ve bir doğru, (5) bir düzlem ve ona paralel bir doğru, (6) iki aykırı doğru arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

(7) Bir nokta ve bir küre, (8) bir düzlem bir küre, (9) bir doğru ve bir küre, (10) iki küre arasındaki en küçük ve en büyük uzaklıkları bulunuz.

3. *Bir düzlemdeki tesviye çizgileri.* Değişen bir noktanın (1) verilmiş bir noktadan, (2) verilmiş bir doğrudan, (3) verilmiş bir daireden uzaklığını düşünelim. Bu hallerde tesviye çizgileri hangileridir?

4. *Uzayda tesviye yüzeyleri.* Değişen bir noktanın (1) verilmiş bir noktadan, (2) verilmiş bir düzlemden, (3) verilmiş bir doğrudan, (4) verilmiş bir küreden uzaklığını düşününüz. Bu hallerde tesviye çizgileri hangileridir?

5. Misâl 1 in sorularını tesviye çizgilerini kullanmak suretiyle cevaplandırınız.

6. Misâl 2 nin sorularını tesviye yüzeylerini kullanmak suretiyle cevaplandırınız.

7. Bir üçgenin iki kenarı verilmiş olduğuna göre, bu üçgenin alanının maksimumunu tesviye çizgilerini kullanmak suretiyle bulunuz.

8. Bir kenarı ve çevre uzunluğu verilmiş olan bir üçgenin alanının maksimumunu tesviye çizgilerini kullanmak suretiyle bulunuz.

9. Alanı verilmiş olan bir dik dörtgenin çevresinin minimumunu tesviye çizgilerini kullanmak suretiyle bulunuz. (Bir dik koordinat sisteminde dik dörtgenin köşelerine $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$, (x, y) diyerek analitik geometriyi kullanınız).

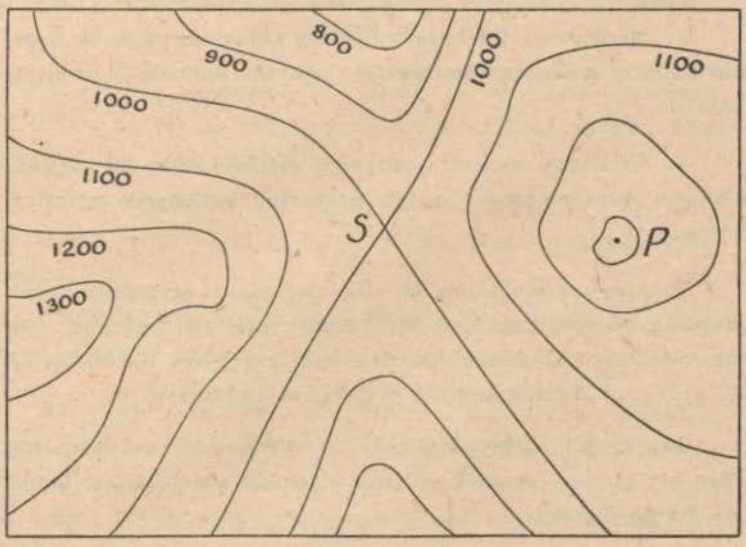
10. Aşağıki ifadeyi inceleyiniz: «Verilen bir noktadan verilen bir eğriye olan en kısa uzaklık, o noktadan eğriye indirilen dikten ibarettir».

11. *Kesen tesviye çizgisi prensibi.* Bir düzlem üzerinde değişen bir noktanın f fonksiyonunu ve bu fonksiyonun verilmiş bir yol boyunca maksimum ve minimumunu ve f nin düzlemi iki bölgeye ayıran bir tesviye çizgisini düşünelim; f fonksiyonu bu bölgelerden birinde tesviye çizgisi üzerindeki değerinden daha yüksek, diğerinde daha düşük değerler alır.

Eğer verilmiş yol tesviye çizgisini keserse, kesişme noktasında f ne maksimum ne de minimum değerini haiz olamaz.

12. Şek. 8.7 deki topoğrafya haritası bir P tepesi ile bir S geçidini (yahut ufkî teğet düzlemini haiz bir semer noktasını) göstermektedir. Böyle bir arazide gezinirken, yolunuzun en yüksek noktasına mutlaka yolun bir tesviye çizgisine teğet olduğu bir noktada mı erişirsiniz?

13. A ve B bir düzlemde verilmiş iki nokta, X te aynı düzlemin değişen bir noktası olsun. AB doğru parçasının X noktasından görüldüğü açı ($0°$ ile $180°$ arasında (sınırları dahil) her



Şek. 8.7. Bir topoğrafya haritasında tesviye çizgileri

hangi bir değeri alabilen $\sphericalangle AXB$ açısı) değişen X noktasının bir fonksiyonudur.

(1) Bu fonksiyona ait tesviye çizgilerini tafsilâtı ile anlatınız.

(2) İki farklı tesviye çizgisinden hangisi açının daha yüksek değerine tekabül eder?

Burada Şek. 8.1 ve 8.3 ü kullanabilirsiniz, fakat şimdi AB doğru parçasına *her iki* taraftan bakabileceğinize dikkat etmelisiniz.

14. Şek. 8.1, 8.2, 8.3 ü nazarı itibara alarak $\measuredangle AXB$ yi Misâl 13 teki gibi alınız ve bu açının l boyunca minimumunu bulunuz. Netice Misâl 11 deki prensibe uygun mudur?

15. Bir kutunun (dik paralelyüz) hacmı verildiğine göre, kısmî değişim metodunu kullanarak yüzeyinin minimumunu bulunuz.

16. Verilmiş bir çevre uzunluğunu haiz bütün üçgenler içinde, maksimum alanı haiz olanı hangisidir? [Misâl 8.]

17. Verilen bir kürenin içine çizilmiş bütün dörtyüzlüler arasında maksimum hacmı haiz olanı hangisidir? [Bununla alâkalı başka bir problem biliyor musunuz?]

18. Bir dörtyüzlünün aynı köşesinden çıkan üç kenarının a, b, c, uzunlukları verildiğine göre, bu dörtyüzlünün hacmının maksimumunu bulunuz. [Buna benzer bir problem biliyor musunuz?]

19. Bir küre ile bir silindir arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz. (Burada silindirden maksat, daire kesitli sonsuz silindirdir.)

20. Eksenleri birbirine aykırı durumda olan iki silindir arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

21. Aşağıki iddiayı inceleyiniz: «Verilen iki yüzey arasındaki en küçük uzaklık, onların her ikisine de dik olan doğru boyunca ölçülen uzaklıktır.»

22. *Kısmî değişim prensibi.* Birden fazla $X, Y, Z, \ldots$ değişkeninin $f(X, Y, Z, \ldots)$ fonksiyonu maksimum değerine $X = A$,

$Y=B$, $Z=C$, ... için erişmektedir. Bu takdirde tek bir X değişkeninin fonksiyonu olan $f(X, B, C, ...)$ maksimumuna $X=A$ için erişir; aynı şekilde iki X ve Y değişkeninin fonksiyonu olan $f(X, Y, C, ...)$ maksimumuna $X=A$, $Y=B$ için erişir; ilâh...

Birden fazla değişkenin bir fonksiyonu, bu değişkenlerin herhangi bir alt cümlesine göre maksimuma erişmedikçe bu değişkenlerin hepsine göre de maksimuma erişemez.

23. *Ekstremumun varlığı.* Gerek tesviye çizgisi, gerek kısmî değişim prensipleri umumiyetle sadece «menfi bilgi» verirler. Bu prensipler direkt olarak, verilen bir f fonksiyonunun hangi noktalarda maksimum olamıyacağını gösterirler ve biz de buradan f nin nerede maksimum olma ihtimalinin mevcut bulunduğu neticesini çıkarırız. Fakat, f nin herhangi bir yerde *mutlaka* bir maksimumu haiz olması icabettiği, sadece bu prensiplerden çıkarılamaz. Bununla beraber, maksimumun varlığı bazan muhakemenin uygun bir tâlili sayesinde ispat edilebilir. Bundan başka, maksimumun varlığı ekseriya çok değişkenli sürekli fonksiyonlara dair genel teoremlerden çıkarılır. [3] Her ne olursa olsun, maksimumun varlığı sezgi yoluyla aşikâr göründüğü takdirde, özel bir usûl veya genel bir teoremin tatbik edilebileceği ve maksimumun varlığının böylece ispat edilebileceğini ümit etmek için elimizde iyi bir sebep mevcut demektir.

24. *Kısmî değişim modelinin bir değişik şekli: Bir sonsuz işlem.* $x+y+z=l$ olduğu verildiğine göre xyz çarpımının maksimumunu bulunuz.

Burada x, y, z pozitif ve l verilmiş olarak alınacaktır. Bu

---

[3] Birden fazla değişkenin kapalı (ve sınırlı) bir cümlede sürekli olan fonksiyonu, o cümlede en küçük üst ve en büyük alt sınırlarına erişir. Bu, G. H. Hardy, *Pure Mathematics*, S. 194, Teorem 2 yi genelleştirmektedir.

problem paragraf 5 teki problemin bir özel halidir. Orada kullanılan metodu tâkip ederek, x, y, z sayılarından birini sabit tutar ve diğer ikisini değiştiririz. Bu sonuncuların birbirine eşit olması çarpımın değerini arttırır. Şimdi herhangi bir (x, y, z) sisteminden hareket edelim; söylediğimiz değişikliği yaparak diğer bir (x_1, y_1, z_1) sistemine geçeriz; oradan diğer bir (x_2, y_2, z_2) ve bundan da bir (x_3, y_3, z_3) sistemine, ilâh... geçeriz. Bu esnada üç terimi sırayla sabit bırakalım: Evvelâ x terimi, sonra y, sonra z; sonra tekrar x, sonra y, sonra z; sonra tekrar x, ilâh..... Bu suretle

$$x_1 = x\ , \qquad y_1 = z_1 = \frac{y+z}{2}\ ,$$

$$y_2 = y_1\ , \qquad z_2 = x_2 = \frac{z_1+x_1}{2}\ ,$$

$$z_3 = z_2\ , \qquad x_3 = y_3 = \frac{x_2+y_2}{2}\ ,$$

$$x_4 = x_3\ , \qquad y_4 = z_4 = \frac{y_3+z_3}{2}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vaz'edelim. Bu adımların herbiri toplamı değiştirmez, fakat çarpımı arttırır:

$$x+y+z = x_1+y_1+z_1 = x_2+y_2+z_2 = \cdots$$

$$xyz < x_1y_1z_1 < x_2y_2z_2 < \cdots$$

Biz burada $y+z$ ve x_1+z_1 farzettik. (Bu, istisnaî olmayan haldir; istisnaî halde hedefimize daha kolay varırız). Tabiatıyle, n arttıkça x_n, y_n ve z_n sayılarının gittikçe birbirinden daha az farklı hale gelmelerini bekleriz.

Eğer nihayet

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

olduğunu ispat edebilirsek, bundan derhal

$$xyz < \lim_{n\to\infty} x_n y_n z_n = (l/3)^3$$

neticesini çıkarırız. Bu neticeyi oldukça büyük bir zahmet karşılığında, fakat, *maksimumun mevcudiyetini önceden kabûl etmeden* elde etmiş bulunuyoruz.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} y_n = \lim_{x\to\infty} z_n$$

olduğunu ispat ediniz.

25. *Kısmî değişim modelinin diğer bir değişik şekli: Bir sonlu işlem.* Misâl 24 teki problemle hâlâ meşgûl olmakta devam ediyoruz; fakat şimdi paragraf 5 teki metodun daha karışık bir tâdil edilmiş şeklini kullanacağız.

$l = 3A$ olsun; böylece A, x, y, z nin aritmetik ortalaması olur ve

$$(x - A) + (y - A) + (z - A) = 0$$

bulunur. Olabilir ki, $x = y = z$ dir. Eğer bu hâl vâki değilse, yukarıki denklemin sol tarafındaki farklardan hiç olmazsa biri negatif ve biri pozitif olmalıdır. Yazış tarzımızı öyle seçelim ki,

$$y < A < z$$

olsun. Şimdi

$$x' = x, \quad y' = A, \quad z' = y + (z - A)$$

vaz'etmek suretiyle (x, y, z) sisteminden (x', y', z') sistemine geçelim; burada ilk büyüklük sabit tutulmuştur. Bu takdirde

$$x + y + z = x' + y' + z'$$

ve

$$y'z' - yz = A(y + z - A) - yz$$
$$= (A - y)(z - A) > 0,$$

yani

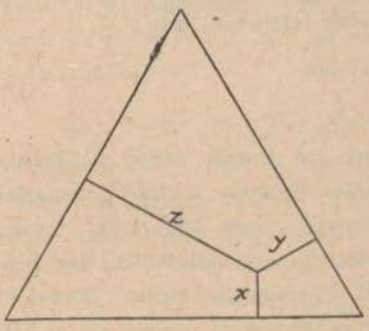
$$xyz < x'y'z'$$

olur.

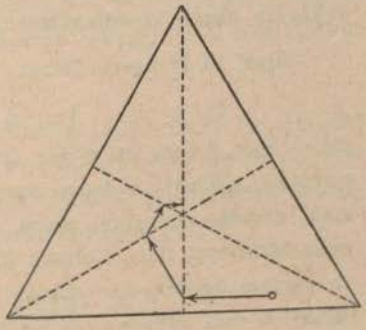
Olabilir ki, $x' = y' = z'$ dür. Eğer bu hal mevcut değilse,

$$y'' = y', \qquad z'' = x'' = \frac{z' + x'}{2}$$

vaz'etmek suretiyle (x', y', z') den (x'', y'', z'') ye geçeriz ki, bu da bize



Şek. 8.8. Üçgen koordinatlar



Şek. 8.9. Merkeze yaklaşan müteakıp adımlar

$$x'' = y'' = z'' = A$$

verir ve (paragraf 5 ten bildiğimiz gibi) çarpımı gene arttırır. Böylece

$$xyz < x'y'z' < x''y''z'' = A^3$$
$$= \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$$

elde edilir.

Bu suretle, istenilen neticeyi *maksimumun mevcudiyetini önceden kabûl etmeden* ispat etmiş olduğumuz gibi, bu ispat esnasında *hiçbir limit mülâhazası* da yapılmamıştır.

Bu usûlü uygun bir şekilde genişleterek n tane büyüklüğe dair genel ortalama teoremini (paragraf 6) ispat ediniz.

26. *Grafik yoluyla mukayese.* P, yüksekliği l olan bir eşkenar üçgenin içinde alınan bir nokta, ve x, y, z de P nin üç kenarına olan uzaklıkları olsun; Şek. 8.8 e bakınız. Bu takdirde

$$x+y+z=l$$

dir. (Neden ?) x, y, z sayıları P noktasının *üçgen koordinatları* dır. Toplamı l olan herhangi üç pozitif x, y, z sayısının teşkil ettiği sistem, üçgen içinde bu sayılarla tek olarak belirlenen bir noktanın üçgen koordinatları olarak tefsir edilebilir.

Misâl 24 te nazarı itibara alınan

$$(x,\ y,\ z),\qquad (x_1,\ y_1,\ z_1),\qquad (x_2,\ y_2,\ z_2),\ \ldots$$

dizisi Şek. 8.9 da bir nokta dizisi ile temsil edilir. Müteakıp noktaları birleştiren doğru parçaları üçgenin muhtelif kenarlarına, evvelâ birinciye, sonra ikinciye, sonra üçüncüye, tekrar gene birinciye, ilâh... olmak üzere sırasıyla paraleldir; her doğru parçası üçgenin bir yüksekliği üzerinde son bulur. (Neden ?) Misâl 25 teki usûl ise, üç nokta ve iki doğru parçası ile temsil edilir. (Nasıl ?)

27. Paragraf 4 (2) deki muhakemeyi tekrar ele alınız ve evvelâ Misâl 24, sonra Misâl 25 i model alarak onu tâdil ediniz.

28. Bir $f(x,\ y,\ z)$ fonksiyonunun $(a,\ b,\ c)$ noktasında bir maksimum veya bir minimumu haiz olabilmesi için bir gerek şart,

$$\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}$$

türevlerinin $x=a$, $y=b$, $z=c$ için sıfır olmasıdır.

Bu teoremin mûtad ispatı yukarıki modellerimizden birine bir misâl teşkil eder. Hangisine ?

29. $f(x, y)$ fonksiyonunun x ve y nin $g(x, y) = 0$ denklemiyle birbirine bağlı olmaları yan (yahut tâli) şartı altındaki bir maksimum veya minimumuna dair bildiğimiz gerek şartı ifade ediniz. Bunun teğet tevsiye çizgisi modeli ile alâkasını izah ediniz.

30. Misâl 12 nin çözümünde bahsedilen halleri, Misâl 29 da bahsedilen şartın ışığında yeniden gözden geçiriniz. Burada bir tenakuz var mıdır?

31. Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun $g(x, y, z) = 0$ yan şartı altında bir maksimum veya minimumuna dair bildiğimiz gerek şartı ifade ediniz. Bunun teğet tesviye yüzeyi modeli ile alâkasını izah ediniz.

32. Bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun aynı zamanda cari iki $g(x, y, z) = 0$ ve $h(x, y, z) = 0$ yan şartı altında bir maksimum veya minimumuna dair bildiğimiz gerek şartı ifade ediniz. Bunun teğet tesviye yüzeyi modeli ile alâkasını izah ediniz.

İKİNCİ KISIM

Aşağıda kullanılan terimler ve yazış tarzı Misâl 33 te izah edilmiş olduğundan, ilk önce o misâl okunmalıdır.

33. *Çokgenler ve çokyüzlüler. Alan ve çevre. Hacım ve yüzey alanı.* Çokgenlerle uğraşırken ekseriya aşağıki yazış tarzını kullanacağız:

Alan için A,

çevre uzunluğu için L.

Çokyüzlülerle uğraşırken de

hacım için V,

yüzey alanı için S

harflerini kullanacağız.

Aşağıda A ve L, yahut V ve S ye dair maksimum ve

minimum problemlerini inceleyeceğiz. Bu türlü problemler Eski Yunanlılarca bilinmekte idi.[4] Burada başlıca, Simon Lhuilier ve Jacob Steiner'in uğraştıkları problemleri inceleyeceğiz. [5] Bazı elemanter cebirsel eşitsizlikler, bilhassa ortalamalar teoremi (paragraf 6), aşağıki problemlerin ekserisinin çözümünde işe yarayacaktır.

Bu problemlerin büyük kısmı, en basit çokgenler (üçgenler ve dörtgenler) ve en basit çokyüzlülere (prizmalar ve piramitler) dairdir. Şimdi az alışılmış bazı terimler öğrenmemiz lâzımgeliyor :

Ortak bir tabanı haiz ve bu tabanın değişik taraflarında bulunan iki piramit bir arada bir *çifte piramit* teşkil eder. Eğer ortak tabanın n kenarı varsa, çifte piramidin $2n$ yüzü, $n+2$ köşesi ve $3n$ kenarı vardır. Ortak taban çifte piramidin bir yüzü *değildir*.

Eğer bir prizmanın yan yüzleri o prizmanın tabanına dikse, o prizmaya bir *dik prizma* denir.

Eğer bir piramidin tabanı bir dairenin içine çizilmiş ise ve piramidin yüksekliği tabanı o dairenin merkezinde delerse, o piramide bir *dik piramit* denir.

Eğer bir çifte piramit teşkil eden iki piramit dik piramitler ise ve ortak tabana göre simetrik iseler, bu çifte piramide bir *dik çifte piramit* denir.

«Dik» olmayan bir prizma, piramit, veya çifte piramide «eğik» sıfatı takılır. Beş düzgün çokyüzlü arasında tam bir tane prizma, tam bir tane piramit ve tam bir tane çifte piramit vardır :

---

(4) Pappus, *Collectiones*, Kitap V.

(5) Simon Lhuilier, *Polygonométrie et Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*, Genève, 1789.

J. Steiner, *Gesammelte Werke*, vol. 2, S. 177-308.

Sırayla küp, düzgün dörtyüzlü ve düzgün sekizyüzlü. Bu üç cismin herbiri kendi cinsinde diktir.

Bunlardan başka bir takım silindirler, koniler ve çifte koniler ele alacağız; aksi söylenmedikçe bunların tabanları daire olarak alınacaktır.

34. *Kare tabanlı prizma.* Verilmiş bir hacmı haiz bütün kare tabanlı dik prizmalar içinde en küçük yüzey alanını haiz olanı küptür.

Evvelce ispat edilmiş olan bir teoremin (paragraf 6, Misâl 15) bu özel halini ortalamalar teoremini kullanmak suretiyle doğrudan doğruya ispat ediniz.

Aşağıki gibi hareket etmekten kendinizi alamıyabilirsiniz: V, S, x ve y prizmanın sırasıyla hacmını, yüzey alanını, tabanının kenarını ve yüksekliğini göstersin. Bu takdirde

$$V = x^2y, \qquad S = 2x^2 + 4xy$$

olur. İkinci eşitliğe ortalamalar teoremini uygularsak,

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 = \left[(2x^2 + 4xy)/2\right]^2 \geq 2x^2 \cdot 4xy = 8x^3y$$

elde ederiz. Fakat bunun $V = x^2y$ ile faydalı bir münasebeti yoktur. Ortalamalar teoremi problemimize uygulanabilir gibi görünmüyor.

Fakat bu yapmış olduğumuz şey, ortalamalar teoreminin acele, düşüncesiz ve acemice bir uygulanışı idi. Aynı teoremi başka bir şekilde olmak üzere tekrar uygulamaya çalışın. [İstenilen netice nedir?]

35. *Dik silindirler.* Misâl 34 te ele alınan bütün prizmalar içinde sadece küpün bir küre dışına çizilebildiğine dikkat ediniz ve şunu ispat ediniz: Verilmiş bir hacim haiz bütün dik silindirler içinde bir küre dışına çizilmiş olanı en küçük yüzey alanını haizdir. [İstenilen netice nedir?]

36. *Genel dik prizma.* Bir dik prizmanın hacmı ve tabanının biçimi verilmiş, fakat tabanın büyüklüğü verilmemiştir. Bu prizmanın yüzey alanının minimum olması halinde taban alanının bütün yüzey alanına oranı nedir? [Bununla ilgili bir problem biliyor musunuz?]

37. *Kare tabanlı dik çifte piramit.* Şunu ispat ediniz: Verilmiş bir hacmı haiz olan bütün kare tabanlı dik çifte piramitler içinde, düzgün sekizyüzlü en küçük yüzey alanını haizdir.

38. *Dik çifte koni.* Düzgün sekizyüzlünün içine çizilmiş olan kürenin sekizyüzlünün her yüzüne o yüzün, yüksekliğini 1:2 oranında bölen, ağırlık merkezinde değdiğine dikkat ediniz ve şunu ispat ediniz: Verilmiş bir hacmı haiz bütün dik çifte koniler içinde yüzey alanının minimumuna, doğuraylarının kendisinin içine çizilmiş küreye değdiği noktalar vâsıtasıyla 1:2 oranında bölündüğü çifte koni halinde erişilir.

39. *Genel dik çifte piramit.* Bir dik çifte piramidin hacmı ve tabanının biçimi verilmiş, fakat tabanın büyüklüğü verilmemiştir. Bu çifte piramidin yüzey alanının minimum olması halinde, taban alanının bu yüzey alanına oranı nedir?

40. Bir üçgenin alanı verildiği takdirde, onun çevresinin minimumunu bulunuz. [Neticeyi önceden söyleyebilir misiniz? Eğer ortalamalar teoremini kullanmak isterseniz, üçgen alanını kenarlar cinsinden veren ifadeye (Heron formülüne) ihtiyacınız olabilir].

41. Bir dörtgenin alanı verildiğine göre, onun çevresinin minimumunu bulunuz. [Neticeyi evvelden söyleyebilir misiniz? Dörtgenin kenarlarına a, b, c, d, iki karşılıklı açısının toplamına ε deyiniz ve dörtgenin A alanını a, b, c, d ve ε cinsinden ifade ediniz. Bu, Heron formülü vâsıtasıyla yürütülen bir evvelki çözümün bir genelleştirmesidir.]

42. Bir dik prizma ile bir eğik prizma aynı hacım ve aynı tabanı haizdir. Bu takdirde dik prizmanın yüzey alanı diğerinkinden daha küçüktür.

Bir dik piramit ile bir eğik piramit aynı hacım ve aynı tabanı haizdir. Bu takdirde dik piramidin yüzey alanı diğerininkinden daha küçüktür.

Bir dik çifte piramit ile bir eğik çifte piramit aynı hacım ve aynı tabanı haizdir. Bu takdirdd dik çifte piramidin yüzey alanı diğerininkinden daha küçüktür.

Yukarıki her üç ifadede de ikişer ikişer cisimlerin tabanları hem biçim, hem de büyüklük bakımından aynıdır. (Hacımlar ise, tabiatıyle, sadece büyüklük bakımından aynıdır.)

Yukarıki üç ifadeden size en kolay gelenini seçerek ispat ediniz.

43. *Geometriyi cebire uygulamak.* $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ reel sayılar oldukları takdirde

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$
$$\geqq\sqrt{(u_1+u_2+\cdots+u_n)^2+(v_1+v_2+\cdots+v_n)^2}$$

olduğunu ve burada eşitliğin ancak ve ancak

$$u_1 : v_1 = u_2 : v_2 = \cdots = u_n : v_n$$

halinde vâki olduğunu ispat ediniz. [Bir dik koordinat sisteminde $n+1$ tane $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktası ve $P_0P_1P_2\ldots P_n$ kırık çizgisinin uzunluğunu düşününüz.]

44. Misâl 43 teki eşitsizliği geometrik mülâhazalardan müstakil olarak ispat ediniz. [Eşitsizliğin geometrik ispatında baş özel hal, $n=2$ halidir].

45. *Cebiri geometriye uygulamak.* İspat ediniz ki, tabanı ve alanı verilmiş bütün üçgenler içinde ikizkenar olanı en kısa çevreyi haizdir. [Misâl 43.]

46. V, S, A ve L, bir P piramidinin sırasıyla hacmı, bütün yüzeyinin alanı, tabanının alanı ve tabanının çevre uzunluğunu göstersin. V_0, S_0, A_0 ve L_0 başka bir P_0 piramidine ait öncekilere tekabül eden büyüklükler olsun.

$$V = V_0, \qquad A = A_0, \qquad L \geq L_0$$

ve P_0 ın bir dik piramit olduğunu farzederek,

$$S \geq S_0$$

olacağını ispat ediniz. Burada eşitliğe ancak ve ancak $L = L_0$ ve P nin de bir dik piramit olması halinde erişilir. [Misâl 43.]

47. V, S, A ve L, bir D çifte piramidinin sırasıyla hacmı, yüzeyinin alanı, tabanının alanı ve tabanının çevre uzunluğunu göstersin. V_0, S_0, A_0 ve L_0 da diğer bir D_0 çifte piramidine ait öncekilere tekabül eden büyüklükler olsun.

$$V = V_0, \qquad A = A_0, \qquad L \geq L_0$$

ve D_0 ı bir dik çifte piramit farzederek

$$S \geq S_0$$

olduğunu ispat ediniz. Burada eşitliğe ancak ve ancak $L = L_0$ ve D nin de dik çifte piramit olması halinde erişilir. [Misâl 45, 46.]

48. Verilmiş bir hacmı haiz bütün dörtgen tabanlı prizmalar içinde, en küçük yüzey alanını haiz olanı küptür. [Bunu Misâl 34 ile karşılaştırınız; hangi ifade daha kuvvetlidir?]

49. İspat ediniz ki, verilmiş bir hacmı haiz bütün dörtgen tabanlı çifte piramitler içinde, en küçük yüzey alanını haiz olanı düzgün sekizyüzlüdür. [Bunu Misâl 37 ile karşılaştırınız; hangi ifade daha kuvvetlidir?

50. İspat ediniz ki, verilmiş bir hacmı haiz bütün üçgen

tabanlı piramitler içinde en küçük yüzey alanını haiz olanı düzgün dörtyüzlüdür.

51. *Kare tabanlı dik piramit.* İspat ediniz ki, verilmiş bir hacmı haiz bütün kare tabanlı dik piramitler içinde, taban alanı bütün yüzey alanının 1/4 üne eşit olan piramit en küçük yüzey alanını haizdir.

52. *Dik koni.* Verilmiş bir hacmı haiz bütün dik koniler içinde, taban alanının bütün yüzey alanına oranı 1/4 olan koni en küçük yüzey alanını haizdir.

53. *Genel dik koni.* Bir dik konide, bu koninin hacmı ile tabanının biçimi verilmiş olup, tabanın büyüklüğü verilmemiştir. Bu piramidin yüzey alanı minimum olduğu takdirde, taban alanının bu yüzey alanına oranı nedir? [Bir özel hal biliyor musunuz?]

54. Yukarıda prizmalar, piramitler ve çifte piramitlere dair vermiş olduğumuz türlü problemleri tekrar ele alarak, bunlar arasındaki karşılıklı münasebetlere dikkat ediniz ve o misâlleri *neticelerin* benzerliğini ortaya çıkaracak bir cedvel halinde düzenleyiniz. Bu cedveldeki, daha başka neticelerle doldurmayı ümit edeceğiniz, boşluklara işaret ediniz.

55. *Kapağı açık kutu.* Bir kutunun beş yüzünün S_5 alanlar toplamı verilmiştir. Kutunun V hacmının maksimumunu bulunuz. [Bununla ilgili bir problem biliyor musunuz? O problemin netice veya metodunu burada kullanabilir misiniz?]

56. *Su yalağı.* Üçgen tabanlı bir dik prizmanın dörtyüzünün S_4 alanlar toplamı verilmiştir; burada noksan olan yüz *yan yüzlerden* biridir. Prizmanın V hacmının maksimumunu bulunuz.

57. *Bir parça.* Üçgen tabanlı bir bir dik prizmada üç bitişik yüzün (yani, iki yan yüz ile bir tabanın) alanlarının S_3

toplamı verilmiştir. Prizmanın V hacmı maksimum olduğu zaman, bu üç yüzün alanlarının eşit ve durumlarının birbirlerine dik olduğunu gösteriniz. [Bu bir parçadır — acaba neyin parçası?]

58. Bir daire sektörünün alanı verilmiş olsun. Bu sektörün çevresi minimum olduğu zaman, sektöre ait merkez açısının değeri nedir?

59. Bir üçgenin alanı ile bir açısı verilmiştir.

(1) Aralarında verilen açıyı ihtiva eden iki kenarın toplamının,

(2) Verilen açının karşısındaki kenarın,

(3) Bütün çevrenin

minimumunu bulunuz.

60. Bir düzlemde mevkii ile verilmiş bir açı ve aynı düzlemde verilen açının içinde bulunan bir nokta alalım. O noktadan geçen değişen bir doğru açıdan bir üçgen ayırır. Bu üçgenin alanının minimumunu bulunuz.

61. Bir kutunun 12 kenarının E uzunluklar toplamı verildiğine göre

(1) kutunun V hacmının,

(2) kutunun S yüzey alanının,

maksimumunu bulunuz.

62. *Bir postahane problemi.* Uzunluğu ile kuşak genişliğinin (yani uzunluğa dik kesitin çevresinin) toplamı l inç'i geçmeyen bir kutunun hacmının maksimumunu bulunuz.

63. *Keplerin bir problemi.* (İki taraftan sınırlı) bir dik silindirin merkezi ile o silindirin merkeze en uzak noktası arasındaki d uzaklığı verilmiş olsun. Bu silindirin hacmının maksimumunu bulunuz.

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatâlar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
16 — Rasyonel ve İrrasyonel sayılar (600 Krş.)
17 — Çeşitli Geometriler (750 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş)
21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
22 — Algoritmalar ve otomatik hesap makinaları (400 Krş.)
23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
24 — Matematiksel sonsuz (100 Krş.)
25 — Sayılar ve şekiller (850 Krş.)
26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen şekiller (300 Krş.)
27 — Oyunlar teorisine giriş (300 Krş.)
28 — İhtimaliyet ve Enformasyon (Basılmaktadır)

Türk Matematik Derneğinin adresi:
Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü
Vezneciler—İstanbul

Fiatı 750 Krş.