TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 30

G. POLYA

MATEMATİK VE AKLA YAKIN MUHAKEME

I. CİLT. MATEMATİKTE ENDÜKSİYON VE BENZETME

II. KISIM

Çeviren :

Orhan Ş. İÇEN

İstanbul — 1966

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 30

G. POLYA

MATEMATİK VE AKLA YAKIN MUHAKEME

I. CİLT. MATEMATİKTE ENDÜKSİYON VE BENZETME

II. KISIM

Çeviren :

Orhan Ş. İÇEN

İstanbul — 1966

Bu kitap Princeton University Press, Princeton, New Jersey tarafından 1954 te yayınlanan G. POLYA Induction and Analogy in Mathematics. Vol. I of Mathematics and Plausible Reasoning *adlı eserden Türkçeye çevrilmiştir. Eserin Türkiye için telif hakkını Derneğimize veren Princeton Universite Press Yayınevine teşekkürlerimizi sunarız.*

İstanbul Üniversitesi Döner Sermaye Matbaası

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM IX. FİZİKSEL MATEMATİK 1

1. Optik tefsir. 2. Mekanik tefsir. 3. Yeniden tefsir. Brakistokron (en kısa zamanda iniş) eğrisinin Johann Bernoulli tarafından keşfi. 5. İntegral Hesabın Arşimet tarafından keşfedilişi.

IX. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1-38. [3. Verilen bir üçgenin içine çizilmiş minimum çevreli üçgen. 9. Uzayda alınan dört noktanın trafik merkezi. 10. Düzlemdeki dört noktanın trafik merkezi. 11. Dört noktanın trafik şebekesi. 12. Katı açmak ve doğrultmak. 13. Bilârdo. 14. Jeofizik istikşaf. 23. Bir çokyüzlü üzerinde en kısa çizgiler. 24. Eğri bir katlama yüzey üzerinde en kısa çizgiler (Jeodezikler). 26. Kâğıt vâsıtasıyla bir çizim. 27. Zar atılmıştır. 28. Tufan. 29. Bir kuyu kadar derin değil. 30. Faydalı bir sınır hali. 32. Variyasyonlar Hesabı. 33. Kesitlerin dengesinden cisimlerin dengesine geçiş. 38. Arşimetin Metoduna geri bakış.]

BÖLÜM X. İZOPERİMETRİ PROBLEMİ 42

1. Descartes'ın endüktif sebepleri. 2. Saklı sebepler. 3. Fiziksel sebepler. 4. Lord Rayleigh'in endüktif sebepleri. 5. Netice çıkarmak. 6. Neticeleri gerçeklemek. 7. Çözüme çok yakın. 8. İzoperimetri teoreminin üç şekli. 9. Uygulamalar ve sorular.

X. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler: 1-43 [Birinci Kısım: 1-15; İkinci Kısım: 16-43]. [1. Geriye bakış.

2. Neticenin bir kısmını başka türlü çıkarabilir misiniz? 3. Muhakemeyi daha tafsilâtlı olarak yeniden ifade ediniz. 7. Verilen metodu başka bir problem için kullanabilir misiniz ? 8. İzoperimetri Teoreminin keskinleştirilmiş şekli. 16. Sopa ve ip. 21. İki sopa ve iki ip. 25. Uzay geometride Dido problemi. 27. Bir düzlem bölgenin alanortayları. 34. Kapalı bir yüzeyin alanortayları. 40. Birçok mükemmellikleri olan bir şekil. 41. Benzer bir hal. 42. Düzgün cisimler. 43. Endüktif deliller.]

BÖLÜM XI. DAHA BAŞKA AKLA YAKIN DELİL NEVİLERİ 77

1. Faraziyeden faraziyeye fark. 2. Bir ilgili hale göre hüküm vermek. 3. Genel hale göre hüküm vermek. 4. Daha basit faraziyeyi tercih etmek. 5. Arka plândaki muhit. 6. Tükenmez sebepler. 7. Buluşa yardımcı mûtad kabûller.

XI. Bölüme dair Örnekler ve Tamamlayıcı Bilgiler : 1-23. [16. Genel hal. 19. Hiçbir fikir aslında kötü değildir. 20. Buluşa yardım etmek üzere yapılan bazı mûtad kabûller. 21. Mükâfatlandırılan eyimserlik. 23. Nümerik Hesaplar ve Mühendis.]

OKUYUCUYA SON SÖZ 110

ÇÖZÜMLER 113

BİBLİOGRAFYA 221

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısiyle mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod, gerek fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Savaşından sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana getirilmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özelikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'un bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

Sahife 79 daki Şek. 11.1 ile Sahife 96 daki Şek. 11.2 nin alt yazıları doğru olmakla beraber, şekilleri yanlışlıkla birbiriyle yer değiştirmiştir. Okuyucunun lûtfen bu hususa dikkat etmesini rica ederiz.

IX

FİZİKSEL MATEMATİK

Fizik ilmi bize [matematikçilere] sadece problemler çözmek için fırsat vermekle kalmaz, fakat onları çözmenin yollarını keşfetmek hususunda da bize yardım eder ve bu yardımı iki şekilde yapar: birinde bizi çözümü önceden görmeğe sevkeder, ötekinde bize uygun ispat yolları ilham eder.— HENRI POINCARÉ (1)

1. **Optik tefsir.** Matematik problemler ekseriya tabiat, daha doğrusu bizim tabiat tefsirimiz olan fizikî ilimler, tarafından ilham edilirler. Aynı şekilde, bir matematik probleminin çözümünde tabiat tarafından ilham edilebilir; Fizik ilmi, bize kendi başımıza bulmamız ihtimali pek az olan bir takım ip uçları verir. Fizik araştırmalarının telkin ettiği ve Fizikî tefsir yardımı ile çözülen matematik problemlerini münakaşa etmeseydik, görüşümüz çok dar kalırdı. Aşağıda bu cinsten çok basit bir ilk problem verilmektedir.

(1) *Tabiatın telkin ettiği bir problem.* Doğru, verilen iki nokta arasındaki en kısa yoldur. Işık, bir noktadan diğerine giderken, bu en kısa yolu seçer - hiç olmazsa günlük tecrübelerimize göre bu böyle görünmektedir. Fakat ışık bir noktadan diğerine doğrudan doğruya değil de, bir aynada yansıyarak giderse ne olur? Işık acaba bu halde de en kısa yolu mu seçecektir? Bu şartlar altında en kısa yol nedir? Işığın yayılmasına dair mülâhazalarla aşağıki salt geometrik probleme sevkedilmiş oluyoruz:

(1) *La Valeur de la Science* (İlmin Kıymeti adlı eser), S. 152.

Aynı düzlemde iki nokta ve bir doğru verilmiş olup, noktalar doğrunun aynı tarafındadır. Verilen doğru üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, o noktanın verilen iki noktaya olan uzaklıkları toplamı minimum olsun.

A ve B verilen iki nokta,

l verilen doğru,

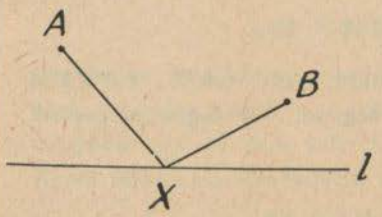
X, l doğrusu üzerinde değişen bir nokta olsun (Şek. 9.1 e bakınız). Biz iki uzaklığın $AX + XB$ toplamını, yahut, aynı şey demek olan, A dan X e oradan da B ye giden yolun uzunluğunu nazarı itibara alıyoruz. Bizden istenen şey, verilen l doğrusu üzerinde bu yol uzunluğunu minimum yapan bir X noktası bulmaktır.

Evvelce buna çok benzer bir problem görmüştük (Paragraf 8.2, Şek. 8.1, 8.2, 8.3). Hakikaten, her iki problemde de aynı şeyler verilmiş olup, bilinmiyenler bile aynı tabiattadır; orada olduğu gibi burada da bir doğru üzerinde belirli bir ekstremumu veren bir noktanın yeri aranmaktadır. İki problem arasındaki tek fark bu ekstremumun tabiatındadır: Burada iki doğru parçasının toplamını minimum yapmak istiyoruz; orada ise bu iki doğru parçası arasındaki açıyı maksimum yapmak istiyorduk.

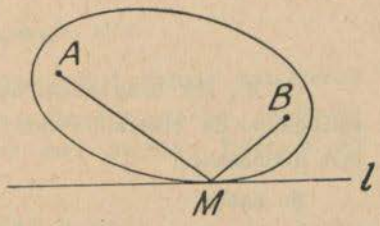
Buna rağmen bu iki problem birbirine öyle sıkı sıkıya bağlıdır ki, her ikisinde de aynı metodun kullanılması tabiîdir. Paragraf 8.2 nin problemini çözmek için tesviye çizgilerini kullanmıştık; burada da onları kullanalım.

Evvelden verilmiş yola bağlı olmayıp ta, bütün düzlem üzerinde serbestçe hareket edebilen bir X noktası nazarı itibara alalım. Eğer (minimum kılmak istediğimiz) $AX + XB$ büyüklüğü sabit bir değeri muhafaza ederse, X nasıl hareket edebilecektir? Odakları A ve B olan bir elips üzerinde. Şu halde tesviye çizgileri «eş-odaklı», yani aynı odakları (verilmiş A ve B noktaları) haiz, elipslerdir. *İstenen minimuma verilmiş l doğ-*

rusunun, verilmiş A ve B noktalarını odak olarak kabûl eden bir elipse teğet bulunduğu noktada erişilir (Şek. 9.2 ye bakınız).



Şek. 9.1. Hangi yol en kısadır?



Şek. 9.2. Teğet bir tesviye çizgisi

(2) *Tabiatın telkin ettiği bir çözüm yolu.* Çözümü hakikaten bulmuş olmakla beraber, elipsin bazı geometrik özeliklerini bilmedikçe bu çözümümüz fazla işe yaramaz. Şu halde işe yeniden başlıyarak bize daha fazla bilgi veren bir çözüm arayalım.

Problemimizin telkin etmiş olan fizikî durumu göz önüne getirelim. A noktası bir ışık kaynağı, B noktası bir gözlemcinin gözü olup, l de düzlem şeklinde bir yansıtıcı yüzeyin mevkiini göstermektedir; böyle bir yüzey olarak durgun bir havuzun yatay yüzeyini tasavvur edebiliriz (Bu yüzey Şek. 9.1 in düzlemine dik olup, onu l doğrusu boyunca keser). Eğer X noktası doğru seçilmişse, AXB kırık çizgisi ışığın yolunu gösterir. Bu yolu tecrübe ile oldukça iyi bilmekteyiz ve AXB yolunun yansıyan ışığın hakikî yolunu gösterdiği takdirde minimum uzunlukta olmasından şüphelenmekteyiz.

Gözünüz B mevkiinde bulunmakta olup, aşağı doğru A nın havuzdaki hayaline bakmaktasınız. Gözünüze gelen ışın size doğrudan doğruya A dan değil, fakat havuz yüzeyinin altında bulunan bir noktadan geliyor gibi görünmektedir. Hangi noktadan? A eşyasının aynadaki hayali olan, yani A nın l ye göre simetriği bulunan A^* noktasından.

Şimdi fizikî tecrübenizin telkin ettiği A^* noktasını şekle ithâl ediniz! Bu A^* noktası problemin çehresini değiştirerek, hemen düzenleyip derhal faydalanmaya geçeceğimiz bir sürü yeni münasebet görmemize sebep olur (Şek. 9.3). Aşikâr olarak

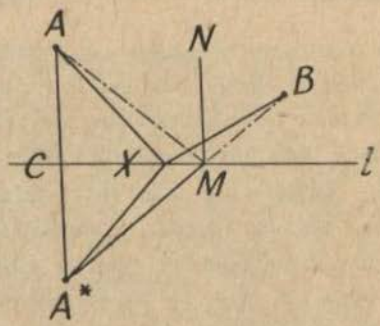
$$AX = A^*X \quad \text{tir.}$$

(A^*X, AX in aynadaki hayalidir. Bunu $\triangle ACX$, $\triangle A^*CX$ in eşitliğinden de çıkarabilirsiniz; l doğrusu AA^* doğru parçasının orta dikmesidir.)

Şu halde

$$AX + XB = A^*X + XB$$

dir.



Şek. 9.3. Daha fazla bilgi veren bir çözüm.

Bu denklemin her iki tarafı da X in aynı mevkii için minimum olur. Fakat *sağ taraf* aşikâr olarak A^*, X *ve* B *aynı doğru üzerinde bulundukları zaman minimum olur.* Çünkü doğru, en kısa yoldur.

Aradığımız çözüm budur (Şek. 9.3 e bakınız). X in minimumdaki M mevkii, l doğrusu ile A^* ve B yi birleştiren doğrunun kesim noktası olarak bulunur. Aşikâr olarak AM ve MB, l ile aynı açıyı teşkil ederler. l ye dik (A^*A ya paralel) olan MN doğrusunu ithâl ederek

$$\sphericalangle AMN = \sphericalangle BMN$$

olduğunu görürüz. Bu iki açının eşitliği en kısa yolu karakterize eder. Halbuki tam da aynı eşitlik, yani

geliş açısı = yansıma açısı

tecrübe ile bildiğimize göre ışığın hakikî yolunu karakterize eder. Şu halde, yansıyan ışık eşya ile göz arasında hakikaten mümkün olan en kısa yolu takip eder. Bu keşif İskenderiyeli Heron tarafından yapılmıştır.

(3) *İki çözümün mukayesesi.* Bir çözüm tamamlandıktan sonra, geriye dönerek kendisine tekrar bakmak ekseriya faydalıdır. İçinde bulunduğumuz halde bu fayda iki kat olacaktır, çünkü elimizde birbiri ile mukayese edebileceğimiz iki tane çözüm ((1) ve (2) deki) vardır. Problemi çözmeye yarayan iki metod da (Şek. 9.2 ve 9.3) aynı neticeyi vermelidir (iki şekli üst üste konulmuş tasavvur ediniz). Minimum problemimizin çözümü olan M noktasını, l ye teğet bir elips veya l ile eşit açılar teşkil eden iki ışın parçası vasıtası ile elde edebiliriz. Fakat verilen şeylerin (A ve B noktaları ile l doğrusu) birbirlerine göre durumları ne olursa olsun, bu iki çözüm daima aynı neticeyi vermelidir. Bu iki çözümün birbiriyle intibakı elipsin şu geometrik özeliğini ortaya çıkarır: *Bir elipsin iki odağını kendi çevresi üzerindeki bir noktaya birleştiren iki doğru, o noktada elipse çizilen teğetle eşit açılar teşkil eder.*

Elipsi bir ayna olarak düşünür ve (biraz evvel münakaşa etmiş olduğumuz) yansıma kanununu hesaba katarsak, yukarıki geometrik özeliğin şu müşahhas optik tefsirini ifade edebiliriz: *Elips şeklindeki bir aynanın bir odağından çıkan bir ışın, elips üzerinde yansıdıktan sonra öteki odaktan geçer.*

(4) *Bir uygulama.* Ne kadar basit te olsa, Heron'un keşfi ilim tarihinde yer almaya lâyıktır. Bu keşif, fizikî olayların tas-

virinde bir minimum prensibinin kullanılışına dair ilk misâldir. O, bundan başka matematik ve fizik teorileri arasındaki karşılıklı münasebetler için de ilham verici bir misâldir. Heron'dan sonra çok daha genel minimum prensipleri keşfedilmiş ve matematik ve fizik teorileri arasında çok daha büyük ölçüde karşılıklı ilgiler kurulmuştur ; fakat bazı bakımlardan ilk ve en basit misâller en tesirli olanlardır.

Üzerimizde kuvvetli bir tesir bırakacak kadar başarılı olmuş olan (2) deki çözüme dönerek kendimize şunları sormalıyız : Bu çözümü başka yerde kullanabilir miyiz ? Onun neticesini kullanabilir miyiz ? Onun metodunu kullanabilir miyiz ? Hakikaten bu hususlarda bir çok imkânlar vardır. Meselâ ışığın eğri yüzeyli bir aynadan yansımasını veya bir seri düzlem aynalardan ard arda yansımasını inceleyebilir, veya neticeyi önceden öğrendiğimiz metodlarla terkip edebiliriz, ve s.

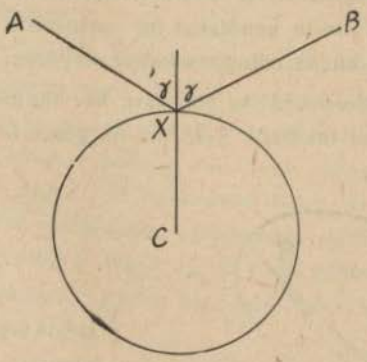
Burada sadece bir misâli, «trafik merkezi» problemini münakaşa edelim : Üç kasaba kurulacak ortak bir trafik merkezine giden üç yol inşa etmek istiyor. Trafik merkezinin yerini öyle seçiniz ki, bu yolların toplam inşaat masrafı minimum olsun. Bu problemi son derece basitleştirirsek, şu salt geometrik probleme varırız : *Üç nokta verildiğine göre, öyle bir dördüncü nokta bulunuz ki, onun ilk üç noktadan uzaklıkları toplamı minimum olsun.*

Verilen üç nokta (kasaba) A, B, C ile gösterilsin ve X te A, B, C nin belirttiği düzleme ait değişen bir nokta olsun. Biz, $AX + BX + CX$ nin minimumunu arıyoruz.

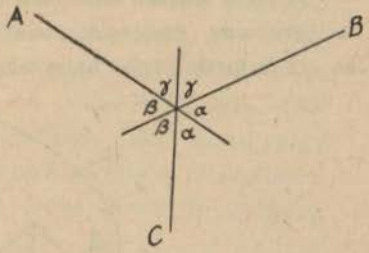
Bu problem Heron'un problemi ile ilgili görünmektedir. Bu yüzden iki problemi yan yana getirip, aralarında mümkün olduğu kadar sıkı bir münasebet kurmaya çalışmalıyız. Eğer, bir an için, CX uzaklığını sabit tutarsak (meselâ $= r$ dersek), bu münasebet hakikaten çok sıkı görünür : Her iki problemde de, değişen bir noktanın iki sabit noktaya olan uzaklıkları toplamından ibaret $AX + BX$ in minimumunu bulmamız istenmek-

tedir. Aradaki fark, X in burada (C merkezli ve r yarıçaplı bir daire üzerinde, önceki problemde ise bir doğru üzerinde hareket mecbur olmasıdır. Önceki problem bir düzlem aynada, şimdiki ise daire şeklindeki bir aynada yansımaya dairdir.

Biz ışığa güvenelim: O, A dan daire şeklindeki aynaya ve oradan da B ye olan en kısa yolu kendi kendine bulabilecek kadar akıllıdır. Işığın çizdiği bu yol ise, geliş açısı yansıma açısına eşit olacak şekildedir. Şu halde istenen minimum durumunda $\measuredangle AXB$, C ve X ten geçen doğru tarafından *iki eşit parçaya ayrılır* (Şek. 9.4 'e bakınız). Kısmî değişim prensibi ve durumun aynı oluşu sebebiyle $\measuredangle AXC$ ve $\measuredangle BXC$ de aynı şekilde iki eşit parçaya ayrılır. X i A, B ve C ye birleştiren üç doğru, düzlemi



Şek. 9.4. Trafik merkezi ve daire şeklindeki ayna



Şek. 9.5. Trafik merkezi

ortak tepeleri X te olan altı açıya ayırır. Dikkatimizi Şek. 9.5 teki ortak tepeli açı çiftleri üzerinde toplarsak, bütün bu altı açının birbirine ve neticede ber birinin 60° ye eşit olduğunu kolayca görürüz. *Trafik merkezinden çıkan üç yol birbirleriyle eşit açılar teşkil eder;* bunların her hangi ikisi arasındaki açı 120° dir.

(Eğer yukarda kullanmış olduğumuz kısmî değişimler meto-

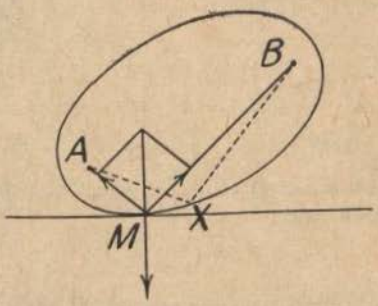
dunun bazı kayıtlara tâbi olduğunu hatırlarsak, çözümümüzün kritik gözle yeniden incelenmesini lûzumlu bulabiliriz.)

2. **Mekanik tefsir.** Matematik problemler ve onların çözümleri mekanik, optik veya diğer hâdiseler gibi tecrübemizin her hangi bir sektörü tarafından telkin edilebilirler. Şimdi, basit mekanik prensiplerinin bir problemin çözümünü bulmakta bize nasıl yardım edebileceğini anlatacağız.

(1) *Her iki ucu da sabit olan bir sicim bu iki uç arasında ağırlığı haiz bir halkaya geçirilmiştir. Sicimin denge durumunu bulunuz.*

Sicimin tamamen bükülebilir ve uzatılamaz olduğunu, ağırlığının ihmal edilebileceğini, halkanın sicim boyunca sürtünmesiz kayabildiğini, ve halkanın eb'adının kendisine bir matematik nokta gözüyle bakılabilecek kadar küçük olduğunu kabul ediyoruz.

A ve B sicimin sabit olan uçlarını, X te halkanın her hangi bir durumunu göstersin. Sicim bu takdirde Şek. 9.6 da gösterilen AXB kırık çizgisi halindedir.



Şek. 9.6. İki denge şartı

Sorulmuş olan problem iki farklı metodla çözülür.

Evvelâ, halka mümkün olduğu kadar aşağıda durmalıdır. (Hakikaten halka ağırlığı haiz olduğundan, yere yahut arzın

merkezine mümkün olduğu kadar yakın olmaya çalışır.) Uzatılamıyan sicimin her iki parçası, AX ve BX, gerilmiş durumda iken sicim boyunca kayan halka, odakları A ve B olan bir elips çizer. Aşikâr olarak, halka denge durumunda elipsin, teğeti *yatay* olan, en alçak noktasındadır.

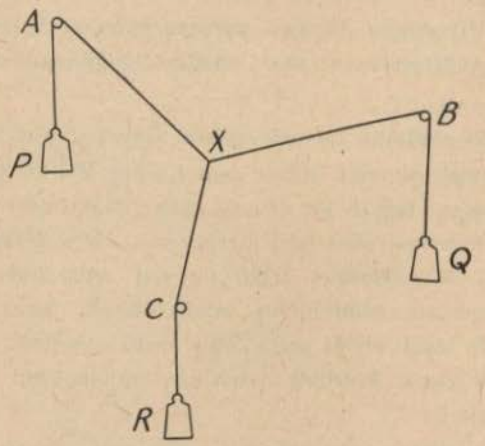
İkinci olarak, sicimin M noktasında tesir eden kuvvetler dengede olmalıdır. Bu kuvvetler halkanın ağırlığı ile sicimin o noktadaki iki gerilme kuvvetidir. Sicimin her iki MA ve MB parçalarındaki gerilme kuvvetleri birbirine eşit olup, sicim boyunca sırasıyla A ve B ye yönelmiştir. Bu iki kuvvetin bileşkesi $\measuredangle AMB$ açısını iki eşit parçaya böler ve halkanın ağırlığı ile aynı doğrultuda ve aksi yönde olduğundan *düşey* doğrultudadır.

Bu iki çözümün intibak etmesi gerekir. Şu halde elipsin düşey normali ile eşit açılar teşkil eden MA ve MB doğruları elipsin yatay teğeti ile de eşit açılar teşkil eder: *Bir elipsin iki odağını çevresi üzerindeki herhangi bir M noktasına birleştiren iki doğru, M noktasının teğeti ile eşit açılar teşkil eder.* (AB doğru parçasının uzunluğunu sabit tutmak, fakat onun yatay doğrultuyla teşkil ettiği açıyı değiştirmek suretiyle, M noktasını elipsin bir yarısı üzerinde istenilen herhangi bir M noktasına götürebiliriz.)

Böylece (Paragraf 1 (3) teki) eski bir neticeyi başka tatbikatı da bulunması mümkün olan yeni bir metodla elde etmiş olduk.

(2) Burada bir bilgi fazlalığına mâlik olduğumuz görülüyor. Mekanikte çok fazla ilerlemiş olmadan bile, sorulmuş olan bir Mekanik probleminin sadece bir değil, fakat iki farklı prensibe dayanan iki tane çözümünü bulacak kadar mekanik bilgisine sahip olduğumuz anlaşılıyor. Bu iki çözümün birbiriyle mukayesesi bizi enteresan bir geometrik hakikate sevketmiştir. Mekanik bilgimizin bu taşan kısmının daha büyük bir parçasını diğer kanallara çevirebilir miyiz?

Talihin biraz yardımı ile, yukarda nazarı itibara alınmış olan (paragraf 1 (4)) trafik merkezi problemini çözmek üzere bir mekanik model tasavvur edebiliriz: Üç tane makara düşey bir duvardaki A, B, C noktalarına çakılmış çiviler (eksenler) etrafında dönmektedir (Şek. 9.7 ye bakınız). Şek. 9.7 de XAP, XBQ XCR ile gösterilen üç sicim sırasıyla A, B ve C noktalarındaki makaralardan geçmektedir. Bu üç sicim X ortak noktalarında birbirine bağlanmış olup, diğer uçlarında sırasıyla P, Q, ve R gibi birer ağırlık taşımaktadır. Problemimiz, bu sistemin denge durumunu bulmaktır.



Şek. 9.7. Trafik merkezi probleminin mekanik tefsiri

Tabiatıyle bu problemde mûtad basitleştirmelerin cari olduğu farzedilmelidir: yani sicimler tamamen bükülebilir ve uzatılamaz kabûl edilmeli, sürtünme ile sicimlerin ağırlığı ve makaraların eb'adı ihmal edilebilir telâkki edilmelidir (makaralar noktalar gibi muamele görecektir). (1) de yapılmış olduğu gibi, burada da problemi iki farklı metodla çözebiliriz.

Evvelâ, üç ağırlık bir arada olarak mümkün olduğu kadar

alçak durumda bulunmalıdır. Yani, onların verilen bir yatay düzlem (yer) den olan yüksekliklerinin toplamı minimum olmalıdır. (Yani, sistemin potansiyel enerjisi minimum olmalıdır; üç ağırlığın birbirine eşit olduğunu hatırlayınız.) Şu halde $AP+BQ+CR$ maksimum olmalıdır. Şu halde, her sicimin uzunluğu sabit olduğundan, $AX+BX+CX$ minimum olmalıdır; böylece problemimizin paragraf 1 (4), Şek. 9.4, 9.5 teki trafik merkezi problemi ile aynı olduğu ortaya çıkar.

İkinci olarak, X noktasında tesir eden kuvvetler dengede olmalıdırlar. Üç eşit ağırlığın herbiri kendi sicimini eşit kuvvetle çeker ve bu kuvvetler sürtünmesiz makaralar tarafından hiç azaltılmadan nakledilirler. Şu halde X noktasında sırasıyla XA, XB ve XC doğruları boyunca tesir eden üç eşit kuvvet dengede olmalıdır. Aşikâr olarak, simmetri dolayısı ile bu kuvvetlerin birbiriyle eşit açılar teşkil etmesi icabeder; X te birleşen üç sicimin herhangi ikisi arasındaki açı 120° dir (Bu üç kuvvetin teşkil ettiği üçgen eşkenar olup, dış açıları 120° dir).

Bu, paragraf 1 (4) teki çözümü teyit eder. (Diğer taraftan, mekanik tefsir A, B ve C noktalarının birbirine nazaran durumu üzerinde de bir kayıt koymak lûzumunu belirtebilir).

3. **Yeniden tefsir.** Yarı yarıya suya batırılmış bir sopa keskin bir şekilde bükülmüş gibi görünür. Buradan, havada olduğu gibi suda da bir doğru boyunca ilerleyen ışığın sudan havaya geçerken keskin bir yön değiştirmesine maruz kaldığı neticesini çıkarırız. Bu, kırılma olayı olup, bu olayın yansımaya nazaran daha karışık ve daha güç anlaşılabilir olduğu besbellidir. Kırılmaya dair kanun Kepler ve diğerlerinin başarısız gayretlerinden sonra, nihayet Snellius tarafından (1621 civarında) keşfedilmiş ve Descartes tarafından yayınlanmıştır. Heron'un başlatmış olduğu fikirleri ele alarak devam ettiren Fermat (1601-1665), ise onlardan daha da sonra gelmiştir.

Suyun altında A gibi bir eşyadan çıkan ve suyun üstün-

de B gibi bir göze giden ışık, tepesi havayı sudan ayıran yüzey üzerinde olan bir açı teşkil etmek suretiyle, bir kırık çizgi çizer (Şek. 9.8 e bakınız). Halbuki A ile B arasındaki en kısa yol AB doğru parçası olduğundan, ışık bir ortamdan ötekine geçerken Heron prensibine itaat etmez. Bu durum hayâl kırıcıdır; basit bir kaidenin iki halde (direkt yayılma ve yansıma) cari olup, üçüncü bir halde (kırılma) cari olmamasını kabûl etmek istemeyiz. Bu hususta Fermat'nın aklına bir çare geldi. Kendisi ışığın bir noktadan diğerine gitmek için zamana muhtaç olduğunu, yani ışığın belirli bir (sonlu) hızla hareket ettiğini biliyordu; hakikaten, Galileo ışığın hızını ölçmek için bir metod teklif etmişti. Belki havada belirli bir hızla hareket eden ışık, suda başka bir hızı haizdir; belki böyle bir hız farkı kırılma olayını izah edebilir. Işık sabit bir hızla gittiği müddetçe en kısa yolu seçmek suretiyle, aynı zamanda *en çabuk* (yani en kısa zamanda kat'edebileceği) yolu seçmiş oluyor. Eğer ışık hızı içinden geçilen ortama bağlı ise, uzunluk bakımından en kısa olan yolun mutlaka zaman bakımından da en kısa olması gerekmez. Belki de ışık *daima*, neticede sudan havaya geçerken de, zaman bakımından en kısa yolu seçer.

Bu düşünce silsilesi bizi berrak bir minimum problemine götürür (Şek. 9.8 e bakınız):

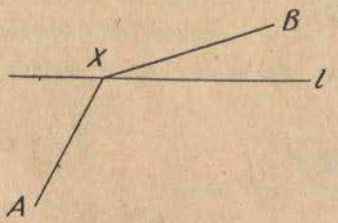
A ve B gibi iki nokta ile A yı B den ayıran bir l doğrusu ve u, v gibi iki hız verildiğine göre A dan B ye gitmek için sarfedeceğiniz minimum zamanı bulunuz; A dan l ye kadar u ve l den B ye kadar da v hızı ile seyahat edeceğiniz farzolunmaktadır.

Aşikâr olarak, en kısa zamanda seyahat edebilmek için A dan l nin bir X noktasına kadar bir, X ten de B ye kadar da diğer bir doğru üzerinde hareket etmelidir. Problemimiz esas itibariyle bu X noktasının yerini bulmaktan ibarettir. Düzgün bir harekette zamanın, uzaklığın hıza bölümüne eşit olduğunu bildiğimizden, A dan X e ve oradan B ye kadar seyahat için sarfedilen zaman

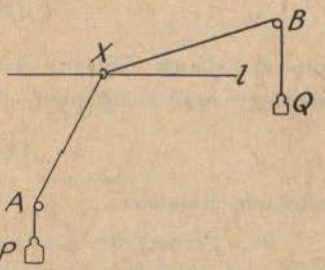
$$\frac{AX}{u}+\frac{XB}{v}$$

ye eşittir. Bu büyüklük X i l üzerinde uygun seçmek suretiyle minimum yapılmalıdır. Bizden A, B, u, v ve l verildiğine göre X i bulmamız istenmektedir.

Bu problemi Diferansiyel Hesabın yardımı olmaksızın çözmek kolay değildir. Fermat onu, neticede Diferansiyel Hesaba götüren bir metod icadetmek suretiyle çözmüştür. Biz daha ziyade önceki paragraftaki örneklerin rehberliğini takip edeceğiz. Talihin biraz yardımı ile, sorulan minimum problemini bizim için çözecek bir mekanik model tasarlamayı başarabiliriz (Şek. 9.9 a bakınız).



Şek. 9.8. Kırılma



Şek. 9.9 Kırılmanın mekanik modeli

Bir X halkası kendi içinden geçen sabit bir l yatay çubuğu boyunca hareket etmektedir. X halkasına iki XAP ve XBQ sicimi bağlanmıştır. Bu sicimlerin herbiri (sırasıyla A ve B deki) bir makaranın üzerinden geçmekte ve öteki ucunda (sırasıyla P ve Q) bir ağırlık taşımaktadir. Burada esas nokta bu ağırlıkları seçmektir. Bu ağırlıklar birbirine eşit olmamalıdır; çünkü aksi takdirde AXB çizgisi denge halinde tek bir doğru parçasından ibaret olurdu (son husus hiç değilse akla yakındır) ve neticede

AXB kırılan ışığın yolunu göstermek için uygun olamazdı. Şimdilik ağırlıkların seçimini ileriye bırakalım, fakat uygun bir yazış tarzı ithâl edelim. Birinci sicimin P uç noktasındaki ağırlığına p, ikinci sicimin Q uç noktasındaki ağırlığına q diyelim. Şimdi denge durumunu arayacağız. (Bu iş için mûtat basitleştirmeleri kabûl ediyoruz: Çubuk tamamiyle bükülemez, sicimler tamamiyle bükülebilir, fakat uzatılamaz olup, sicimlerin sürtünme, ağırlık ve sertliği, makaraların ve halkanın eb'adı ihmâl edilebilir.) Paragraf 2 de olduğu gibi, problemimizi iki farklı metodla çözeceğiz.

Evvelâ, iki ağırlık bir arada mümkün olduğu kadar alçak bir durumda bulunmalıdır. (Yani, sistemin potansiyel enerjisi minimum olmalıdır.) Bu,

$$AP \cdot p + BQ \cdot q$$

nün maksimum olmasını icabettirir. Şu halde, her bir sicimin uzunluğu sabit olduğundan,

$$AX \cdot p + XB \cdot q$$

minimum olmalıdır.

Bu, Fermat'nin problemine çok yakın olmakla beraber, onun tamamiyle aynı değildir. Fakat, biri optiğe, öteki mekaniğe dair olan bu iki problem,

$$p = \frac{1}{u} \quad , \quad q = \frac{1}{v}$$

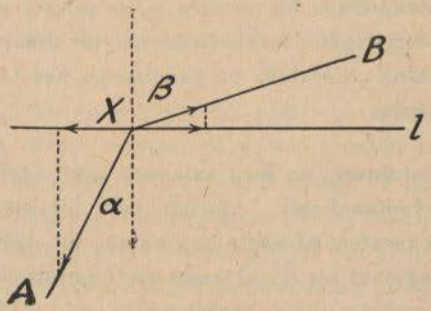
olarak seçtiğimiz takdirde matematik bakımından birbiriyle intibak eder. O takdirde denge problemi (Şek. 9.9) tıpkı Fermat'nın en çabuk seyahat probleminde olduğu gibi

$$\frac{AX}{u} + \frac{XB}{v}$$

nin minimum olmasını istemektedir. Bunu Şek. 9.9 daki meka-

nik sistemin denge durumuna bir ilk noktainazardan bakmak suretiyle bulmuş olduk.

İkinci olarak, X noktasında tesir eden kuvvetler dengede olmalıdır. Ağırlıkların çekiş kuvvetleri sürtünmesiz makaralar tarafından hiç eksiltilmeden nakledilir. Halka üzerine büyüklükleri sırasıyla $\frac{1}{u}$ ve $\frac{1}{v}$ olan ve herbiri kendilerine tekabül eden sicimler boyunca iki kuvvet tesir eder. Bu kuvvetler halkayı düşey doğrultuda hareket ettiremez. çünkü halkadan geçen l çubuğu tamamen katıdır (Çubuk sınırsız miktarda bir düşey reaksiyon hâsıl eder). Fakat bu iki çekişin aksi yönlerde olan yatay bileşenleri birbirini yok etmelidir, yani bunların *büyüklükleri birbirine eşit* olmalıdır. Bu münasebeti ifade etmek için X noktasındaki düşey doğru ile iki sicim arasındaki α ve β açılarını ithâl edelim.



Şek. 9.10. Kırılma Kanunu

Yatay bileşenlerin eşitliği

$$\frac{1}{u}\sin\alpha = \frac{1}{v}\sin\beta$$

yahut

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$$

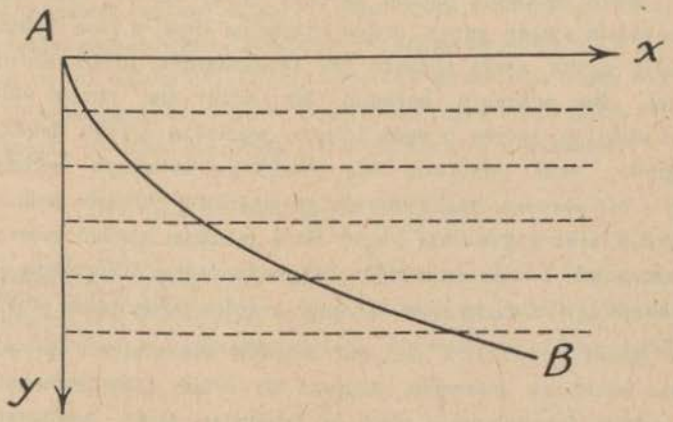
ile ifade edilir. İşte *minimum için şart* budur.

Şimdi optik tefsire dönelim. Gelen ışık ile kırılma yüzeyinin normali arasındaki α açısına geliş açısı, giden ışık ile normal arasındaki β açısına da kırılma açısı denir. Hızların u/v oranı iki ortama, su ve havaya tâbidir, fakat A ve B noktalarının yerleri gibi geometrik şartlara tâbi değildir. Şu halde, minimum olma şartı *geliş ve kırılma açılarının sinüsleri oranının yalnız iki ortama bağlı bir sabit olmasını* icabettirir (Bu sabite bugün kırılma indeksi denilmektedir). Fermat'nın «en kısa zaman prensibi» bizi sayısız müşahedelerle teyit edilmiş olan Snellius kırılma kanununa sevkeder.

Bu suretle önemli bir keşfin doğuşunu elimizden geldiği kadar yeniden canlandırmaya çalıştık. (Fermat'nınkinin yerine kullanmış olduğumuz) çözüm metodu da dikkate değer. Problemimiz daha baştan fizikî (optik) bir tefsire sahiptir. Fakat onu çözebilmek için *diğer* bir fizikî (mekanik) tefsir icadettik. Şu halde bizim çözümümüz bir *yeniden tefsir yoluyla çözüm*'dür. Bu gibi çözümler birbirinden farklı fizikî olaylar arasında yeni benzerlikler meydana çıkarabilir ve kendilerine has bir san'at eseri özeliğini haizdirler.

4. Brakistokron (en kısa zamanda iniş) eğrisinin Johann Bernoulli tarafından keşfi. Ağırlığı haiz bir maddî nokta A noktasında sükûnetten harekete başlıyarak, bir düşey düzlem boyunca daha aşağıdaki bir B noktasına sürtünmesiz olarak kayıyor. Sükûnetten harekete geçen maddî nokta, bir sarkacın ucunun yaptığı gibi, A dan B ye bir daire yayı boyunca da gidebilirdi. Bu hareketlerden hangisi, doğru boyunca olanı mı, yoksa daire yayı boyunca olanı mı, daha az zaman alır? Galileo, daire yayı boyunca inişin daha çabuk olacağını düşünmüştü. Johann Bernoulli, A ve B den geçen düşey düzlem içinde bu iki noktayı birleştiren keyfî bir eğri tasavvur etti. Böyle sonsuz sayıda eğri vardır. Johann Bernoulli işte bu eğriler içinde iniş zamanını minimum yapan eğriyi bulmak istedi; bu eğriye «en çabuk iniş eğrisi»

veya «brakistokron» denir. Biz burada Johann Bernoulli'nin bu problem için vermiş olduğu harikûlâde hayâl zenginliği ihtiva eden çözümü anlamaya çalışacağız.



Şek. 9.11. Bir maddî noktanın yolu

A dan B ye inen keyfî bir eğriyi bir koordinat sistemine sokalım (Şek. 9.11 e bakınız). A yı koordinatların başlangıç noktası, x eksenini yatay ve y eksenini düşey ve aşağı doğru seçelim. Eğri boyunca aşağı doğru kayan maddî noktamızın bir (x, y) geometrik noktasını bir v hızıyla geçtiği anı gözönüne getirelim. Bunlar arasında Bernoulli'nin mükemmelen bildiği

$$\frac{v^2}{2} = gy$$

bağıntısı vardır; biz bugün bu bağıntıyı enerjinin sakınımı prensibinden çıkarıyoruz. Bu bağıntıya göre, iniş yolu ne olursa olsun, sonunda erişilen v hızı sadece inilen y derinliğine tâbidir:

(1) $$v = (2gy)^{\frac{1}{2}}$$

Bu ne demektir? Bu temel hakikatın manâsını sezgi yoluyla anlamaya çalışalım.

Maddî noktanın içinde hareket ettiği düzlemi ince yatay tabakalara ayıran yatay doğrular çizelim (Şek. 9.11 e bakınız). Maddî nokta aşağı inerken bu tabakalardan birbiri ardı sıra geçer. Bu noktanın herhangi bir andaki hızı önceki yoluna tâbi olmayıp, sadece o anda içinden geçmekte olduğu tabakaya bağlıdır; yani noktanın hızı tabakadan tabakaya değişiyor. Böyle bir durumu başka nerede görmüştük? Güneşin ışığı bize gelirken farklı yoğunlukta birçok hava tabakası içinden geçer; şu halde ışığın hızı da tabakadan tabakaya değişir. Sorulmuş olan mekanik problemi böylece bir *optik yeniden tefsir* kabûl ediyor.

Şimdi Şek. 9.11 i bu yeni manâda ele alalım. Bu şekle optik bakımdan homogen olmayan bir ortam gözüyle bakalım. Bu ortam tabakalanmış olup, bu tabakalar farklı özelliktedir; y derinliğinde bulunan bir tabakada ışığın hızı $(2gy)^{\frac{1}{2}}$ dir. Bu ortamı A dan B ye (verilmiş noktaların birinden ötekine) doğru kat'eden ışık çeşitli eğriler boyunca gidebilirdi. Fakat o, en çabuk gidebileceği yolu seçmektedir; yani hakikatte gidiş zamanını minimum yapan yol boyunca hareket etmektedir. Şu halde *ışığın yukarda anlatılmış olan (homogen bulunmayan, tabakalı) ortamda A dan B ye giderken tâkip ettiği hakikî yol brakistokrondur.*

Işığın hakikî yolu ise, Snellius kırılma kanununa tâbi olduğundan, problemin çözümü bir çırpıda imkân dahiline girer. Johann Bernoulli'nin zengin hayâl kuvvetli yeniden tefsiri, tamamiyle yeni ve erişilemez görünen bir problemi erişilebilir hale getirmiş oluyor.

Yapılacak daha bazı işler kalmış olmakla beraber, bunlar yukarıdakiyle mukayese edilemiyecek kadar az orijinalliğe ihtiyaç gösterir. Snellius kanununu (yukarıki paragraf 3 te münakaşa edilen) alışık olduğumuz şekliyle uygulayabilmek için Şek. 9.11 e dair tefsirimizi tekrar biraz değiştireceğiz: v hızı y ile birlikte

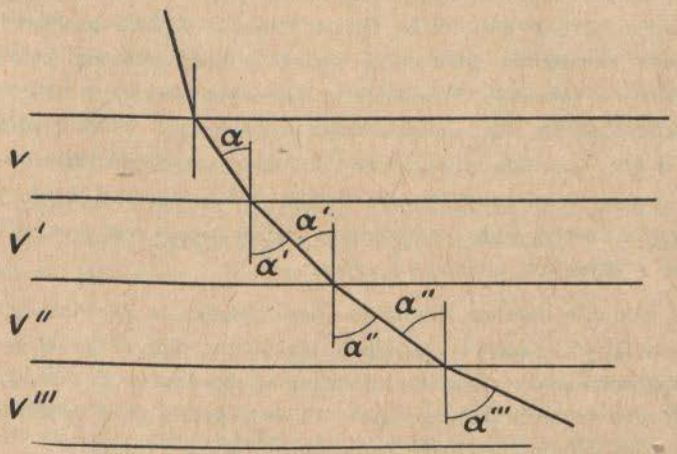
sonsuz küçük adımlarla sürekli olarak değişeceği yerde, süreksiz olarak (sonlu) küçük adımlarla değişsin. Işığı geçiren bir maddeden yapılmış birçok ince levha (birçok cam levha) tasavvur edelim, öyle ki bunların herbiri komşularından optik bakımından farklı olsun. Işığın ardarda gelen tabakalardaki hızlarına v, v', v'', v''', ... diyelim ve bu tabakaları birbiri ardı sıra geçen ışık düşey doğrultu ile sırasıyla α, α', α'', α''', ... açılarını teşkil etsin (Şek. 9.12 ye bakınız). Snellius kanununa göre (paragraf 3 e bakınız)

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{v'} = \frac{\sin\alpha''}{v''} = \frac{\sin\alpha'''}{v'''} = \dots$$

dır. Şimdi ince levhalardan ibaret olan ortamdan v nin derinlikle sürekli olarak değiştiği tabakalı ortama geçelim (Levhaları sonsuz derecede ince kabûl edelim). Bu takdirde ışığın çizdiği yol boyunca

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \text{sabit} \tag{2}$$

olduğunu görürüz.



Şek. 9.12. Işığın yolu

Bu eğrinin teğetinin yatay doğrultu ile teşkil ettiği açıya β diyelim. O takdirde

$$\alpha + \beta = 90°, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = y'$$

ve bu suretle

$$\sin \alpha = \cos \beta = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

olur.

Şimdi (sırasıyla Mekanik, Optik ve Diferansiyel Hesaptan çıkarılan (1), (2) ve (3) denklemlerini takip eder ve (2) de zuhûr eden sabit için uygun bir sembol kullanırsak, c bir pozitif sabiti göstermek üzere

$$y(1 + y'^2) = c$$

elde ederiz. Böylelikle brakistokron için birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde etmiş olduk. Böyle bir denklemi gerçekleyen eğrileri bulmak ise Bernoulli'nin bildiği bir problemdir. Burada ayrıntılara girmemize lûzum yoktur (bununla beraber Misâl 31 'e bakınız): Yukarıdaki diferansiyel denklemin belirttiği brakistokron'un bir *sikloit* olduğu ortaya çıkar. (Sikloit eğrisi, bir doğru üzerinde yuvarlanan bir dairenin çevresi üzerindeki bir nokta tarafından çizilir; içinde bulunduğumuz halde bu doğru x ekseni olup, yuvarlanma işi baş aşağı cereyan eder: daire x ekseninin altında yuvarlanır.)

Bununla beraber, formüllere başvurmadan da Snellius kanununun bir diferansiyel denklemi icabettireceğini sezgi ile görebileceğimize işaret edelim. Hakikaten, bu kanun Şek. 9.12 de gösterilen yolun müteakip elemanlarının doğrultularını belirler ki, bu da bir diferansiyel denklemin yaptığı şeyin aynıdır.

Johann Bernoulli'nin brakistokron problemi için vermiş

olduğu ve burada münakaşa ettiğimiz çözüm tarzı kendisine has artistik bir niteliği haizdir. Şek. 9.11 veya 9.12 ye bakarak çözümün anahtarını teşkil eden fikri sezgi ile görebiliriz. Eğer bu fikri kendimizi zorlamadan berrak olarak görebilirsek ve getireceği şeyi önceden kestirebilirsek, önümüzde hakikî bir san'at eseri bulunduğunu farketmiş oluruz.

Johann Bernoulli'nin çözümünün anahtar fikri, tabiî, yeniden tefsirdir. Bu esnada geometrik şekil Şek. 9.11 veya 9.12) arka arkaya iki farklı tarzda düşünülmekte, iki farklı «çerçeve» içinde görülmektedir: evvelâ bir mekanik çerçeve, sonra bir optik çerçeve içinde. Acaba her keşif iki ayrı bölgeye ait fikrin beklenilmiyen bir teması ve sonra onların birbiri içine nüfuzundan mı ibarettir?

5. İntegral Hesabın Arşimet tarafından keşfedilişi. Bütün zamanların en büyük matematik keşiflerinden birine Fizikî sezgi rehberlik etmiştir. Bununla, bugün İntegral Hesap dediğimiz bilim dalının Arşimet tarafından keşfedilişini kastediyorum. Arşimet, parabol kesitinin alanı ile kürenin hacmını ve bunlara benzer diğer bir düzine kadar neticeyi içinde denge kavramının önemli bir rol oynadığı tek ve aynı bir metodla bulmuştur. Arşimet, kendi sözleriyle, «matematikteki bazı problemleri mekanik vasıtası ile araştırmış» (2) tır.

Arşimetin yapmış olduğu işi anlayabilmek için kendisinin hareket etmiş olduğu bilgi seviyesi hakkında biraz bilgi sahibi olmamız lâzımdır.

---

(2) The *Method* of Archimedes, edited by Thomas L. Heath, Combridge, 1912 (Arşimetin T. L. Heath tarafından yayınlanan Metod adlı kitapçığı), S. 13. Bundan sonraki dip notlarında bu kitapçık *Metod* adıyla zikredilecektir. Bundan başka *Oeuvres complètes d'Archimède*, traduites par P. Ver Eecke (P. Ver Eecke tarafından fransızcaya tercüme edilmiş olan Arşimetin toplu eserleri), S. 474 — 519 a bakınız.

Eski Yunanlıların geometrisi Arşimetin zamanında zirvesine ulaşmıştı. Eudoxus ve Öklid kendisinden hemen önce idiler, Apollonius ise onun çağdaşı idi. Burada, Arşimetin keşfi üzerinde tesir yapmış olması muhtemel bulunan birkaç belirli noktadan bahsedeceğiz.

Bizzat Arşimetin anlattığı gibi, Demokritus koninin hacmını bulmuştu; Demokritus'un ifadesine göre bu hacım, aynı taban ve aynı yüksekliği haiz bir silindirin hacmının üçte biri idi. Demokritus'un kullandığı metod hakkında hiçbir bilgimiz yoktur, fakat onun, koninin tabanına paralel değişen bir düzlemle elde edilen (bugünkü dille değişken kesit diyebileceğimiz) bir kesitini nazarı itibara almış olduğundan şüphelenmek için bazı sebepler mevcut görünüyor. (*)

Eudoxus, Demokritus'un iddiasını ilk ispat eden kimse olmuştur. Eudoxus onu ve diğer benzer neticeleri ispat etmek üzere kendisinin «tüketme metodu» nu icadetmiş ve bu suretle Eski Yunan matematiği için bir kesinlik standardı koymuştur.

Eski Yunanlıların bir manâda «Koordinatlar Geometrisi» ni bildikleri kabûl edilmelidir. Bu koordinatlar, düzlemdeki geometrik yerleri hareket eden bir noktanın sabit iki mukayese ekseninden olan uzaklıklarını nazarı itibara almak suretiyle incelemekte kullanılıyordu. Eğer bu uzaklıkların kareleri toplamı sabit ve mukayese eksenleri de birbirine dik ise, geometrik yer bir dairedir - bu teorem koordinatlar geometrisine aittir, fakat henüz analitik geometriye ait değildir. Analitik geometri, yukarda bahsedilen münasebetin

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gibi cebir sembolleriyle ifade edildiği anda başlar.

Eski Yunanlıların Mekaniği, Geometrilerinin mükemmelliğine hiçbir zaman ulaşmamış olduğu gibi, ondan çok da sonra

(*) *Metod*, S. 10 - 11 e bakınız.

başlamıştır. Eğer Aristo ve diğerlerinin müphem münakaşalarına hakkettiklerinden fazla bir değer vermezsek, Mekaniğin bir ilim olarak ancak Arşimetle başladığını söyleyebiliriz. Arşimet, herkesin bildiği gibi, yüzen cisimler kanununu keşf tmişti. O, bundan başka Kaldıraç Prensibi ile Ağırlık Merkezinin, biraz sonra ihtiyaç duyacağımız, esas özelliklerini de keşfetmişti.

Şimdi Arşimetin eserleri içinde en göz alıcı örneği inceleyebilmek için hazırlanmış bulunuyoruz; şimdi onun metodu ile *kürenin hacmını* bulacağız. Arşimet küreye bir dairenin döndürülmesi ile elde edilmiş, daireye de değişen bir noktanın birbirine dik iki sabit mukayese eksenine olan uzaklıkları arasındaki bir bağıntı ile karakterize edilen bir geometrik yer gözüyle bakmaktadır. Bugünkü yazış tarzıyla bu bağıntı

$$x^2 + y^2 = 2ax ,$$

yani y eksenine başlangıç noktasında teğet olan a yarıçaplı dairenin denklemidir. Arşimetin kendi şeklinden pek az farkeden Şek. 9.13 e bakınız; buradaki daire x ekseni etrafında döndürülünce bir küre doğurur. Bugünkü yazış tarzının kullanılmasının Arşimet'in düşüncelerini bozmadığı fikrindeyim. Bil'âkis bu yazış tarzı bana daha ilham verici görünüyor. Bu yazış tarzı, bizi bugün Arşimet'in fikrine götürmesi muhtemel ve belki de bizzat Arşimeti kendi keşfine götürmüş olanlardan pek farklı olmayan saikler telkin etmektedir.

Yukarıdaki daire denkleminde y^2 terimi bulunmaktadır. πy^2 nin *kürenin değişken kesiti*'nin alanı olduğuna dikkat ediniz. Demokritus koninin hacmını onun değişken kesitini incelemek suretiyle bulmuştu. Bu, bizi dairenin denklemini aşağıki şekilde yeniden yazmaya sevkeder :

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \pi\, 2\, ax .$$

Şimdi πx^2 yi $y = x$ doğrusunun x ekseni etrafında döndürülme-

siyle elde edilen koninin değişken kesiti olarak tefsir edebiliriz (Şek. 9.13 e bakınız). Bu durum geri kalan $\pi 2ax$ terimi için de benzer bir tefsir aramayı ilham eder. Eğer böyle bir tefsir göremiyorsak, denklemi daha başka şekillerde yazmayı deneyebilir ve şu şekle tesadüf etmek hususunda bir şansa sahip olabiliriz:

$$(A) \qquad 2a(\pi y^2 + \pi x^2) = x\pi(2a)^2 .$$

Bu (A) denkleminde çok şey teksif edilmiştir. (A) denklemine bakarak ve onun içine giren türlü uzunluk ve alanların farkına varıp, *onları şekilde uygun bir tarzda düzenliyerek* büyük bir fikrin doğuşuna şahit olabiliriz; bu fikir (A) formülünün Şek. 9.13 ile sıkı birleşmesinden doğacaktır.

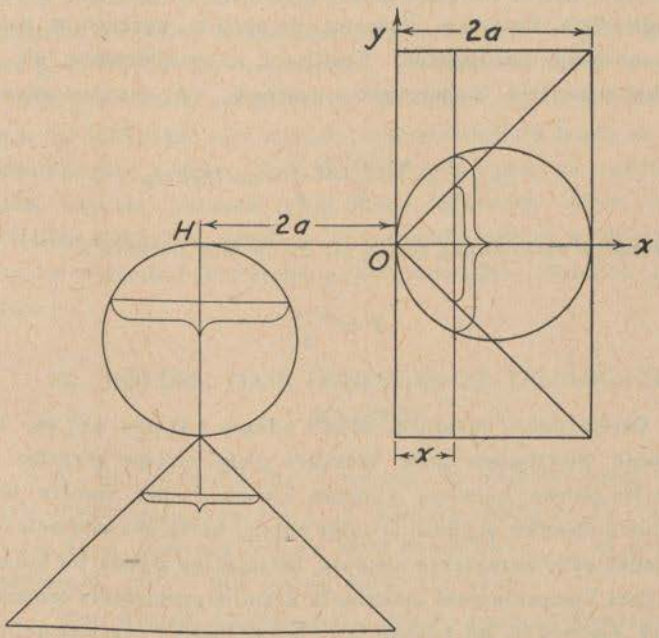
Formülde üç dairesel diskin πy^2, πx^2 ve $\pi(2a)^2$ alanlarını görüyoruz. Bu üç daire, üç dönel cismin aynı bir düzlemle olan kesitleridir. Bu düzlem x eksenine dik olup, O başlangıç noktasından x uzaklığındadır. Üç dönel cisim ise, bir küre, bir koni ve bir silindirdir. Bu cisimler Şek. 9.13 ün sağ tarafı x ekseni etrafında döndürüldüğü zaman denklemleri sırasıyla (A), $y = x$ ve $y = 2a$ olan üç eğri tarafından çizilir. Koni ve silindir aynı tabanı ve aynı yüksekliği haizdir. Ortak tabanın yarıçapı ve ortak yükseklik aynı $2a$ uzunluğundadır. Koninin tepesi O başlangıç noktasındadır.

Arşimet, alanları (A) denkleminin farklı taraflarında bulunan diskleri farklı muameleye tâbi tutmaktadır.

Yarıçapı $2a$ olan diski, yani silindirin kesitini başlangıçtaki durumunda, yani başlangıç noktasından x uzaklığında bırakmaktadır. Fakat yarıçapları y ve x olan diskleri, yani sırasıyla küre ve koninin kesitlerini başlangıçtaki yerinden kaldırarak x ekseninin absisi $-2a$ olan H noktasına taşımaktadır. Biz yarıçapları sırasıyla y ve x olan bu diskleri, merkezleri H dan geçen düşey doğru üzerinde ve H nın altında olmak üzere, ağırlığı ihmâl edilebilir bir siçim vasıtasıyla H noktasından asalım. (Şek. 9.13 e bakınız.

Bu sicim Arşimetin kendi şekline yaptığımız, ağırlığı ihmâl edilebilir, bir ilâvedir.)

x eksenine bir *kaldıraç* — ağırlığı ihmâl edilebilir bir katı çubuk—ve O noktasına da bu kaldıraçın *destek* veya asılma noktası gözüyle bakalım. (A) denklemi *momentlere* dair (Bir moment, ağırlıkla kaldıraç kolunun çarpımıdır) olup, sol taraftaki



Şek. 9.13. İntegral Hesabın doğuşu

iki diskin momentleri toplamının sağ taraftaki tek diskin momentine eşit olduğunu ifade eder ve bu suretle Arşimet tarafından keşfedilmiş olan mekanik kanunu dolayısıyla kaldıraç denge durumunda bulunur.

x, 0 dan $2a$ ya kadar değiştikçe silindirin bütün kesitlerini

elde ederiz; bu kesitler silindiri *doldurur*. Silindirin her kesitine H noktasından asılmış iki kesit tekabül eder ve bu son kesitler sırasıyla küreyi ve koniyi *doldururlar*. *Birbirlerine tekabül eden kesitlerinde olduğu gibi, H da asılı küre ile koni de silindir ile denge halindedir.* Şu halde Arşimetin mekanik kanununa göre bunların momentleri birbirine eşit olmalıdır. Kürenin hacmına V diyelim ve koninin hacmına dair (Demokritus'un vermiş olduğu) ifade ile silindirin hacmının ifadesini ve ağırlık merkezinin aşikâr olan mevkiini hatırlıyalım. Kesitlerin momentlerinden ait oldukları cisimlerin momentlerine geçersek, (A) denkleminden

$$(B) \qquad 2a\left(V+\frac{\pi(2a)^2\,2a}{3}\right)=a\pi(2a)^2\,2a$$

denklemine sevkedilmiş oluruz ki, bu da bize derhal (4)

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}$$

verir.

Geriye doğru bakarsak, hayatî adımın (A) dan (B) ye, yani dolduran kesitlerden dolu cisimlere geçiş olduğu görürüz. Bu adım ise sadece bulmaya yarayan bir adım olup, mantık bakımından noksansız değildir. O, akla yakın, hattâ çok yakındır; fakat ispat edici karakterde olmayıp, bir ispattan ziyade bir tahmindir. Eski Yunanlılardaki matematik kesinlik geleneğinin temsilcisi olarak Arşimet te bu hususu iyice bilmektedir: «Varmış olduğu-

---

(4) Bu çıkarılışı birçok defalar derslerimde anlattım ve bir defasında bana gurur veren bir komplimana mâruz kaldım. Çıkarılışın sonunda mûtad «Bir sorunuz var mı?» sözüm üzerine bir öğrenci «Bu araştırması için Arşimete kim para verdi?» diye sordu. Şöyle bir cevap verecek kadar sür'ati intikal sahibi olamadığımı itiraf etmeliyim: «O zamanlarda bu türlü araştırmalar Bilim Tanrıçası Urania tarafından desteklenirdi.»

muz hakikat kullanılan muhakeme vasıtasıyla sahiden ispat edilmiş değildir; fakat bu muhakeme neticenin doğruluğuna dair bir nevi işaret vermiştir.» ([5]) Bununla birlikte bu tahmin, istikbali olan bir tahmindir. Ondaki fikir, elimizdeki problemin ihtiyaçlarından çok daha öteye gitmekte olup, ondan çok daha geniş bir uygulama alanına sahiptir. (A) dan (B) ye, kesitten bütün cisme geçiş, o zamana nazaran daha yeni matematik dilinde sonsuz küçük parçasından bütün büyüklüğe, diferansiyelden integrale geçiştir. Bu geçiş büyük bir başlangıçtır, ve kendisini tarihî perspektif içinde görebilecek kadar büyük bir adam olan Arşimet te bunu çok iyi biliyordu: «Bu metodun matematikçilere hiç te az hizmet etmiyeceğine eminim. Zira, bir kere anlaşılırsa, bu metodun, bugün hayatta bulunan veya henüz doğmamış, diğer matematikçiler tarafından şimdiye kadar benim aklıma gelmemiş olan başka teoremleri keşfetmekte kullanılacağını önceden görüyorum.» ([6])

IX. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. Bir düzlemde bir P noktası ile birbirini kesen ve hiçbiri P den geçmeyen iki l, m doğrusu veriliyor. Y, l üzerinde ve Z de m üzerinde değişen birer nokta olsun. Y ve Z yi öyle seçiniz ki, ΔPYZ nin çevresi minimum olsun.

Biri fiziksel mülâhazalarla, diğeri geometri vâsıtasıyla iki çözüm veriniz.

2. Bir düzlemde birbirinin dışında bulunan üç daire veriliyor. Bu dairelerin herbiri üzerinde birer tepesi bulunan üçgenler içinde çevresi minimum olanını bulunuz.

İki farklı fiziksel tefsir veriniz.

([5]) *Metod*, S. 17

([6]) *Metod*, S. 14

3. *Verilen bir üçgenin içine çizilmiş minimum çevreli üçgen.* Bir ΔABC verilmiş olsun. Bu üçgenin BC, CA ve AB kenarları üzerinde sırasıyla X, Y, Z gibi öyle üç nokta bulunuz ki, ΔXYZ nin çevresi minimum olsun.

İki farklı fiziksel tefsir veriniz.

4. Misâl 3 ü genelleştiriniz.

5. Misâl 1 in çözümününün kritiğini yapınız. O çözüm bütün hallere uygulanabilir mi?

6. Misâl 3 ün çözümünün kritiğini yapınız. O çözüm bütün hallere uygulanabilir mi?

7. Misâl 3 ün dar açılı üçgenler halinde kesin bir çözümünü veriniz. [Kısmî değişim, Misâl 1, Misâl 5.]

8. Trafik merkezi probleminin paragraf 1 (4) ve paragraf 2 (2) de verilmiş olan çözümlerinin kritiğini yapınız. Bu çözümler bütün hallere uygulanabilir mi?

9. *Uzayda alınan dört noktanın trafik merkezi.* Tepeleri A, B, C, D noktalarında bulunan bir dörtyüzlü verilmiş olsun. Dörtyüzlünün içinde dört tane tepeye olan uzaklıklarının

$$AX + BX + CX + DX$$

toplamı minimum olan bir X noktasının mevcut olduğunu kabûl edelim. Bu takdirde $\measuredangle AXB$ ve $\measuredangle CXD$ açılarının birbirine eşit bulunduklarını ve her birinin aynı bir doğru tarafından iki eşit parçaya ayrıldığını gösteriniz. Birbirine göre buna benzer durumda bulunan diğer açı çiftlerini bildiriniz. [Bununla ilgili bir problem biliyor musunuz? Buna benzer bir problem biliyor musunuz? O problemin neticesini veya çözüm metodunu burada kullanabilir misiniz?]

10. *Düzlemdeki dört noktanın trafik merkezi.* Misâl 9 'un A, B, C, D noktalarının aynı düzlemde bulunduğu ve bir $ABCD$ konveks dörtgeninin tepelerini teşkil ettiği sınır halini gözönüne alalım. Misâl 9 daki ifadeler bu sınır halinde de geçerli kalmakta devam eder mi?

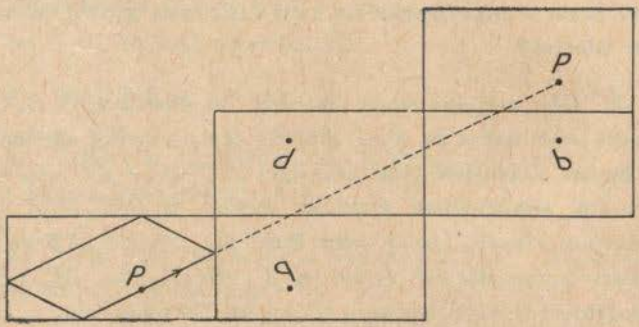
11. *Dört noktanın trafik şebekesi.* Bir düzlemde A, B, C, D gibi dört sabit nokta ve X, Y gibi iki değişen nokta düşünelim. Eğer bunlar arasındaki beş uzaklığın $AX+BX+XY+YC+YD$ toplamının minimumuna erişildiği zaman A, B, C, D, X ve Y noktalarının altısı da birbirinden farklı ise, üç XA, XB ve XY doğruları aralarında eşit açılar teşkil ettikleri gibi, YC, YD ve YX doğruları da birbirine göre gene aynı durumdadırlar.

12. *Katı açmak ve doğrultmak.* Şek. 9.3 ün faydalı bir tefsiri daha vardır. l, A^*X ve XB yi şeffaf bir tabaka kâğıt üzerine çizerek, tabakayı l boyunca katlarsanız, Şek. 9.1 i elde edersiniz (Burada A yerine A^* gelmiştir). Şek. 9.1 i ilk başlangıçta katlı bir şeffaf kâğıt tabakası üzerine bu külfetli tarzda çizilmiş tasavvur ediniz. X in $AX+XB$ yi minimum yapan mevkiini bulmak için katlı kâğıt tabakasını açınız, A dan (yahut daha doğrusu Şek. 9.3 teki A^* dan) B ye bir doğru çiziniz ve sonra tabakayı tekrar katlayınız.

13. *Bilârdo.* Dik dörtgen şeklindeki bir bilârdo masası üzerinde P noktasında bir bilârdo topu durmaktadır. Topa öyle bir doğrultuda vurmak isteniyor ki, top dikdörtgenin dört kenarına çarpıp döndükten sonra ilk bulunduğu P noktasından geçsin [Şek. 9.14].

14. *Jeofizik istikşaf.* Dünyanın yatay yüzünün E noktasında bir infilâk vukubuluyor. Bu infilâkın sesi arzın içinde intişar ediyor ve arzın yüzü ile α açısı teşkil eden eğik bir OR düzlemi tarafından yansıtılıyor. E den gelen ses, arz yüzünün diğer bir noktasındaki bir L dinleme merkezine birbirinden

farklı n şekilde erişebilir (Bu n yoldan birisi Şek. 9.15 te Misâl 12 nin metodu ile çizilmiştir). (Uygun bir âletle gözlenen) n verildiğine göre, α nın arasında bulunduğu iki sınır veriniz.



Şek. 9.14. Yansıtılmış bilârdo masası

15. Uzayda bir l doğrusuyla l üzerinde bulunmayan A, B gibi iki nokta verilmiş olsun. l doğrusu üzerinde öyle bir X noktası bulunuz ki, verilen noktalara olan uzaklıklarının $AX+BX$ toplamı minimum olsun.

Bununla ilgili bir problem biliyor musunuz? Daha özel bir problem biliyor musunuz? Onun neticesini, veya çözüm metodunu burada kullanabilir misiniz?

16. Misâl 15 i bir teğet tesviye yüzeyinden faydalanarak çözünüz.

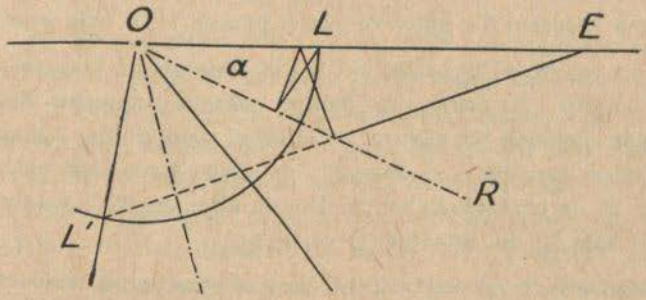
17. Misâl 15 i kâğıt katlama metoduyla çözünüz.

18. Misâl 15 i mekanik tefsir yoluyla çözünüz. Bu çözüm Misâl 16 ve 17 ile uygunluk halinde midir?

19. Uzayda a, b, c gibi üç aykırı doğru verilmiştir. Bu doğruların herbiri üzerinde bir tepesi bulunan üçgenler içinde çevre uzunluğu minimum olanının aşağıki özeliği haiz olduğunu

gösteriniz: a üzerindeki tepeyi üçgenin içine çizilmiş dairenin merkezine birleştiren doğru a ya diktir.

20. Misâl 19 daki üç aykırı doğrunun bir küpün üç kenarını teşkil ettiği özel hali göz önüne alalım. Bu halde istenilen üçgenin köşeleri nerededir? Bu üçgenin içine çizilen dairenin merkezi nerededir? Küpün hacmi $8a^3$ ise, bu üçgenin çevre uzunluğu nedir?



Şek. 9.15. Yer altındaki yansımalar

21. Uzayda a, b, c gibi üç aykırı doğru verilmiştir. X noktası a boyunca, Y noktası b boyunca, Z noktası c boyunca, T de uzayda serbest olarak değişsin. $XT + YT + ZT$ nin minimumunu bulunuz.

22. Misâl 20 nasıl Misâl 19 un bir özel halini teşkil ediyorsa, Misâl 21 in de buna tekabül eden özel halini veriniz.

23. *Bir çokyüzlü üzerinde en kısa çizgiler.* Dikdörtgen şeklindeki bir odanın iki karşılıklı uç duvarı kare şeklindedir; odanın uzunluğu 20 ayak, genişliği 8 ayak, yüksekliği de 8 ayaktır. Uç duvarlarından birinin üzerinde tabandan itibaren 7 ayak yükseklikte ve iki yan duvardan aynı uzaklıkta bir örümcek dur-

maktadır. Bu örümcek karşı duvarda yerden bir ayak yükseklikte ve gene iki yan duvardan aynı uzaklıkta bir sinek görüyor. Örümceğin sineğe yetişmek için duvarlar, yahut tavan, yahut taban üzerinde kat'edeceği yolun 28 ayaktan *daha kısa* olduğunu gösteriniz. [Misâl 17.]

24. *Eğri bir yüzey üzerinde en kısa çizgiler (Jeodezikler).* Eğri bir yüzeye bir çokyüzlünün limiti gözüyle bakacağız. Çokyüzlü eğri yüzeye yaklaştıkça yüzlerinin sayısı ∞'a, herhangi bir yüzünün en uzun köşegeni 0'a gider ve yüzler yüzeye teğet hale gelirler.

Bir çokyüzlü üzerinde iki nokta arasında en kısa yol bir kırık çizgidir. Bu kırık çizgi bütün noktaları aynı bir düzlem üzerinde bulunan bir düzlem kırık çizgi, veya bütün noktaları bir düzlem üzerinde bulunmayan bir aykırı kırık çizgi olabilir. (Misâl 23 ün çözümünde her iki hale de birer örnek bulunabilir: birinci hale (1) de, ikinciye (2) ve (3) te.)

Eğri bir yüzey üzerinde bir en kısa çizgiye bir «Jeodezik» denir, çünkü bu en kısa çizgiler arzın yüzeyini inceleyen Jeodezi ilminde bir rol oynarlar. Bir jeodezik, tamamı bir düzlem üzerinde bulunan bir düzlem eğri, veya bütün noktaları aynı düzlemde bulunmayan bir «uzay eğrisi» («bükülmüş» eğri) olabilir. Her ne olursa olsun, bir jeodeziğin üzerinde en kısa bir eğrisi bulunduğu yüzeyle bir iç bağı bulunmalıdır. Bu bağ nedir?

(1) $ABC\ldots L$ gibi bir kırık çizgiyi göz önüne alalım. $ABC\ldots L$ bir aykırı kırık çizgi bile olsa, onun HI ve IJ gibi iki bitişik kenarı aynı düzlemde bulunur. Eğer $ABC\ldots L$ bir çokyüzlü üzerinde A ve L uç noktaları arasındaki en kısa yol ise, bu kırık çizginin $B, C, D, \ldots, H, I, J, \ldots, K$ ara köşelerinin her biri çokyüzlünün birer kenarı üzerindedir. HI ve IJ doğru parçalarını ihtiva eden düzlem $\measuredangle HIJ$ in açıortayını da ihtiva eder; bu açıortay çokyüzlünün I den geçen kenarına diktir. (Misâl 16 veya Misâl 18 e bakınız.)

Şimdi bir eğriyi göz önüne alalım. Bu eğri «bükülmüş» bile olsa, onun sonsuz küçük (çok kısa) bir yayına bir düzlem (hemen hemen düzlem) yay gözüyle bakılabilir. Bu sonsuz küçük yayın düzlemi, onun orta noktasındaki *oskülâtör düzlem*'dir. Oskülâtö düzlem, bir aykırı çokgenin iki bitişik kenarının teşkil ettiği düzleme tekabül eder. Eğer eğri bir jeodezik, yani bir eğri üzerinde en kısa çizgi ise, bu benzerlik bize *bir jeodeziğin herhangi bir noktasındaki oskülâtör düzleninin yüzeyin o noktalaki normalinden geçtiğini* telkin eder.

(2) Fiziksel olarak, bir jeodezik cilâlı (sürtünmesiz) bir yüzey üzerinde gerilmiş bir lâstik şeritle temsil edilebilir. Lâstik şeridin ufak bir parçasının denge durumunu inceleyelim. Bu parçaya tesir eden kuvvetler, küçük yayın iki ucunda tesir eden eşit büyüklükte iki teğet gerilme kuvveti ile sürtünmesiz yüzeyin, kendisine normal olan, reaksiyon kuvvetleridir. Yüzeyin bu reaksiyon kuvvetlerinin bileşkesi ile eğrinin iki ucundaki gerilme kuvvetleri denge halindedir. Şu halde bu üç kuvvet aynı bir düzleme paraleldir. İki «komşu teğet» ise oskülâtör düzlemi belirttiğinden, bu düzlem yüzeyin normalini ihtiva etmelidir.

(3) Bir jeodeziğin her yayı da bir jeodeziktir. Hakikaten, eğer bir eğride kendi uçları arasında en kısa yol olmayan bir parça mevcutsa ve neticede o parçanın yerine aynı uçlar arasında daha kısa bir yay konulabilirse, bütün eğri de bir en kısa çizgi olamaz. Şu halde, bir jeodeziğin her noktasında kendine has bir özeliği haiz olmasını beklemek tabiîdir. Matematik kesinliği olmayan, fakat buluşa yardımcı (1) ve (2) gibi iki farklı mülâhazanın ilham ettiği özelik, böyle bir özeliktir.

(4) Buluşa yardımcı mülâhazalarla elde ettiğimiz neticenin doğruluğunu kontrol etmek üzere misâller arayınız. Bir küre üzerindeki en kısa çizgiler hangileridir? Bunlar yukarıki özeliği haiz midirler? Küre üzerindeki diğer çizgiler de aynı özeliği haiz midir?

25. Bir maddî nokta cilâlı bir katı yüzey üzerinde sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. (Meselâ yerçekimi gibi) hiçbir dış kuvvet nokta üzerine tesir etmemektedir. (Tabiî, yüzeyin reaksiyonu bundan müstesnadır.) Noktanın neden dolayı bir jeodezik çizmesinin beklenmesi gerekir?

26. *Kâğıt katlama vâsıtasıyla çizim.* Bir daire içine kenarlarının büyüklükleri ve sırası verilmiş bir çokgen çiziniz.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ verilmiş kenar uzunluklarını göstersin. Uzunluğu a_1 olan kenardan sonra uzunluğu a_2 olan, ondan sonra da uzunluğu a_3 olan kenar gelsin, ilâh...; uzunluğu a_n olan kenardan sonra ise, uzunluğu a_1 olan kenar gelsin. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kenarlarınından herbirinin uzunluğu geri kalan $n-1$ kenar uzunluğunun toplamından daha küçük farzedilecektir.

Bu problemin kâğıt katlama yoluyla güzel bir çözümü vardır. Bir karton üzerinde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uzunluklarını yeter derecede büyük bir dairenin müteakıp kirişleri olarak çiziniz, öyle ki iki müteakıp kiriş ortak bir uç noktasını haiz olsun. Bu uç noktalarını dairenin merkezine birleştiren yarıçapları çiziniz. Bu n tane kiriş ile iki sınır yarıçapının çevrelediği çokgeni kesip ayırınız, sonra kartonu diğer $(n-1)$ tane yarıçap boyunca katladıktan sonra çokgenin sınırındaki iki yarıçapı birbiri üzerine yapıştırınız. Böylece açık bir çokyüzlü yüzeyi elde etmiş oluyorsunuz; bu açık yüzey n tane değişmez ikizkenar üçgenden ibaret olup, uzunlukları sırasıyla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n tane serbest kenarla çevirilmiştir ve büyüklükleri değiştirilebilen n tane ikiyüzlü açıyı haizdir. (Burada $n > 3$ farzediyoruz.)

Sorulmuş olan problemi çözmek için bu açık çokyüzlü yüzeyi ile ne yapabilirsiniz?

27. *Zar atılmıştır.* Ağırlığı haiz katı bir konveks çokyüzlünün içindeki kitlenin her yerde aynı yoğunlukta olması icab-

etmez. Hakikaten, öyle bir heterogen kitle dağılımı tasavvur edebiliriz ki, bunun ağırlık merkezi çokyüzlünün önceden verilen herhangi bir iç noktası ile çakışsın. Bu çokyüzlü yatay taban üzerine atıldığı zaman yüzlerinden biri üzerinde duracaktır. Bu, bize aşağıki geometrik ifadenin doğruluğuna dair bir mekanik delil verir.

Herhangi bir P konveks çokyüzlüsü ve P nin herhangi bir C iç noktası verildiğine göre, P nin şu özeliği haiz bir F yüzünü bulabiliriz: C den F nin düzlemine indirilen dikin ayağı F nin bir *iç* noktasıdır.

Bu ifadenin bir geometrik ispatını bulunuz. (F yüzünün yukarıki özelik vâsıtasıyla tek alarak belirlenebileceğine, fakat bunun mutlaka böyle olması icabetmediğine dikkat ediniz.)

28. *Tufan.* Bir topoğrafya haritası üzerinde üç türlü şayanı dikkat nokta vardır: tepeler, geçitler (yahut yatay teğet düzlemli semer noktaları) ve «çukurlar». (Şek. 8.7 de P bir tepe, S bir geçittir.) Bir «çukur» bir vadinin dibindeki en alçak nokta olup, sular oradan dışarı akmak imkânını bulamaz. Bir çukur «tersine çevrilmiş» bir tepedir: topoğrafya haritası üzerindeki yüksekliği h olan herhangi bir tesviye çizgisine yüksekliği $-h$ imiş gözüyle bakalım, Bu takdirde harita «tersine çevrilir», ve deniz altındaki bir bölgenin haritası olur. Bu sırada tepeler çukur, çukurlar tepe olur, fakat geçitler geçit olarak kalır. Bu üç cins nokta arasında şayanı dikkat bir bağ vardır.

Bir adada P tane tepe, D tane çukur ve S tane geçit bulunduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$P+D=S+1$$

dir.

Bu teoremi sezgiyle çıkarmak için, devamlı bir yağmurun adanın etrafındaki gölün sularını yükselterek nihayet adayı ta-

mamen sulara gömdüğünü tasavvur edelim. Bütün P tepenin aynı yükseklikte olduğunu ve bütün D çukurun göl seviyesinde veya bu seviyenin altında bulunduğunu kabûl edebiliriz. Hakikaten, sayılarında hiçbir değişiklik olmadan tepelerin yükseldiğini ve çukurların alçaldığını tasavvur edebiliriz. Yağmur yağmaya başladığı zaman, çukurlarda su toplanır; başlangıçta, gölü de saymak şartıyla,

$$D+1 \text{ tane su tabakası ve } 1 \text{ ada}$$

mevcuttur. Ada sulara gömülmeden hemen önce sadece tepeler suyun üzerinde boy gösterir ve bu suretle bu sonuncu durumda

$$1 \text{ su tabakası ve } P \text{ tane ada}$$

mevcut olur. Bu geçiş nasıl vukua gelmiştir?

Herhangi bir anda birçok su tabakasının aynı yükseklikte bulunduğunu tasavvur edelim. Eğer tam o yükseklikte hiçbir geçit yoksa, ne su tabakalarının ne de adaların sayısını değiştirmeksizin su biraz yükselebilir. Fakat yükselmekte olan su tam bir geçide erişince, suyun o durumdan sonraki en ufak bir yükselişi ya ondan evvel birbirinden ayrı olan iki su tabakasını birleştirecek veya bir toprak parçasını diğerlerinden ayıracaktır. Şu halde su her bir geçitten geçerek yükseldikçe ya su tabakalarının sayısı bir tane eksilecek, yahut adaların sayısı bir tane artacaktır. Bu değişiklerin toplamına bakarak

$$(D+1-1)+(P-1)=S$$

elde ederiz ki, bu da istenilen teoremdir.

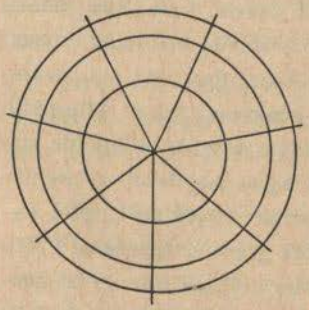
(a) Şimdi bütün bir küre (meselâ dünya) üzerinde (bir kısmı suyun altında olabilen) P tane tepe, D tane çukur ve P tane geçit bulunduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$P+D=S+2$$

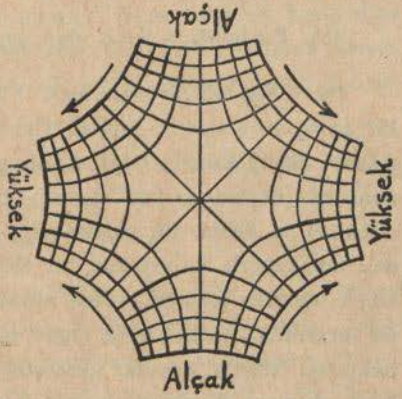
olacağını gösteriniz.

(b) Bu son bağıntı bize Euler Teoremini hatırlatır (Paragraf (3.1—3.7 ve Misâl 3.1—3.9 a bakınız). Biraz önce sezgiye dayanan bir muhakeme ile elde etmiş olduğumuz neticenin bir geometrik ispatını meydana getirmekte Euler Teoremini kullanabilir misiniz? [Şek. 9.16 ve 9.17 sadece bazı tesviye çizgilerini değil, fakat tesviye çizgilerine dik olan «en çabuk iniş eğrileri» nin bazılarını da ihtiva eden daha komple bir haritanın önemli parçalarını göstermektedir. Bu iki cins eğriler kürenin yüzeyini eğrisel üçgen ve dörtgenlere bölmektedir. Misâl 3. 2 ye bakınız.]

(c) Bu metod üzerinde söylenecek bir şey var mıdır?



Şek. 9.16. Bir tepenin civarı



Şek. 9.17. Bir geçidin civarı

29. *Bir kuyu kadar derin değil.* Bir kuyunun d derinliğini bulmak için kuyunun ağzında elinizden bir taş bırakırsınız ve taşı bıraktığınız an ile taşın suya çarptığını işittiğiniz an arasında geçen t zamanını ölçersiniz.

(a) Yerçekiminin g ivmesi ile sesin c hızı verildiğine göre, d yi g, c ve t cinsinden ifade ediniz. (Hava mukavemeti ihmâl edilecektir.)

(b) Eğer kuyu çok derin değilse, taşın en son hızı bile ses hızının çok küçük bir kesri olacağından, ölçülecek t zamanının çok büyük kısmının taşın düşmesi tarafından işgâl edilmesini bekleyebiliriz. Şu halde

$$d = gt^2/2 \ - \text{düzeltme}$$

olmasını bekleyebiliriz, öyle ki t küçük olduğu zaman düzeltme de nispeten küçük olsun.

Bu tahmini incelemek için (a) ya cevap olarak elde edilen ifadeyi t nin kuvvetlerini göre açınız ve sıfırdan farklı ilk iki terimi muhafaza ediniz.

(c) Bu misâlde tipik olan şey sizce nedir ?

30. *Faydalı bir sınır hali.* Büyük ekseni etrafında dönen bir elips, uzun sferoit denilen yumurta şeklinde bir dönel elipsoit yüzeyi çizer. Elipsin odakları dönme ekseni üzerinde olduklarından bu dönmeye katılmazlar. Bu odaklara uzun elipsoidin odakları da denir. Bu yüzeyin iç, konkav tarafını cilâlı bir maden tabakasıyla kaplıyarak bir eliptik ayna meydana getirebiliriz; odakların birinden gelen bütün ışınlar böyle bir eliptik ayna tarafından yansıtılınca diğer odaktan geçerler (paragraf 1 (3) e bakınız). Eliptik aynalar pratikte pek az kullanılırlar, fakat bunların bir limit hali Astronomide pek önemlidir. Elipsoidin odaklarından birisi sabit tutulup, diğeri sonsuza götürülürse ne meydana gelir ?

31. Brakistokronun Paragraf 4 te bulunmuş olan diferansiyel denklemini çözünüz.

32. *Varigasyonlar Hesabı*, değişken bir eğrinin büyüklük ve biçimine bağlı büyüklüklerin maksimum ve minimumlarına dair problemlerle uğraşır. Paragraf 4 te optik tefsir yardımıyla çözmüş olduğumuz Brakistokron probtemi bu tip bir problemdir. Misâl 24 te incelemiş olduğumuz jeodezikler, yahut bir eğri yü-

zey üzerindeki en kısa yollar, problemi de Variyasyonlar Hesabına ait olduğu gibi, önümüzdeki bölümde ele alacağımız «İzo perimetri problemi» de oraya aittir. Buraya kadar görmüş olduğumuz gibi, maksimum ve minimumlara dair birçok problemleri çözebilen fiziksel mülâhazalar Variyasyonlar Hesabına ait bazı problemleri de çözebilir. Buna dair bir misâli kısaca veriyoruz.

Uzunluğu ve uç noktaları verilmiş olan öyle bir maddi eğri bulunuz ki, ağırlık merkezinin yüksekliği minimum olsun. Homogen bir ip veya zincir gözüyle baktığımız bu eğri boyunca maddenin yoğunluğu sabit farzediliyor. Bu zincirin ağırlık merkezi mümkün olan en alçak durumunu aldığı zaman zincir *dengede* olur. Şimdi zincirin denge durumunu onun üzerine tesir eden kuvvetleri, yani ağırlığı ile gerilmesini gözden geçirerek araştırabiliriz. Bu araştırma bizi, istenen eğriyi (*zincir eğrisi*) belirleyen bir diferansiyel denkleme götürür.

Burada ayrıntılara girmiyerek, sadece verdiğimiz çözüm taslağı ile paragraf 2 de ele alınmış olan mekanik çözümlerin aynı esas fikri haiz olduğuna işaret edeceğiz.

33. *Kesitlerin dengesinden cisimlerin dengesine geçiş.* Arşimet kendi metodunun genel prensibini açıkça ifade etmemiş, fakat onu hacımlar, alanlar ve ağırlık merkezleri hesaplamak suretiyle birçok misâle tatbik etmişti. Bu misâllerin çeşitliliği genel prensibi tamamen açığa çıkarmaya yeter. Arşimetin metodunun paragraf 5 te sunmuş olduğumuz hafifçe değişik şeklini onun vermiş olduğu bazı misâllere tatbik edelim.

*Metod*un şu 7. Teoremini ispat ediniz : Her hangi bir küre parçasının ayni taban ve aynı yükseklikteki koniye oranı, kürenin yarıçapı ile tamamlayıcı parçanın yüksekliği toplamının bu tamamlayıcı parçanın yüksekliğine olan oranına eşittir.

34. *Metod*un 6. Teoremini ispat ediniz: Bir yarımkürenin ağırlık merkezi onun ekseni üzerinde olup, bu ekseni yarımkü-

renin tepesinde son bulan parçanın diğer parçaya olan oranı 5 in 3 e oranına eşit olacak şekilde iki parçaya böler.

35. *Metod*un 9. Teoremini ispat ediniz: Her hangi bir küre parçasının ağırlık merkezi onun ekseni üzerinde olup, bu ekseni o suretle iki parçaya ayırır ki, küre parçasının tepesinde son bulan parçanın diğerine oranı küre parçasının ekseni ile tamamlayıcı parçanın ekseninin dört katı toplamının küre parçasının ekseni ile tamamlayıcı parçanın ekseninin iki katı toplamına olan oranına eşit olsun.

36. *Metod*un 4. Teoremini ispat ediniz: Bir dönel paraboloitten eksenine dik bir düzlemle kesilerek ayrılmış olan her hangi bir dönel paraboloit parçasının parçayla aynı taban ve aynı yüksekliği haiz olan koniye oranı 3 ün 2 ye oranına eşittir.

37. *Metod*un 5. Teoremini ispat ediniz: Bir dönel paraboloitten eksenine dik bir düzlemle kesilerek ayrılmış olan herhangi bir dönel paraboloit parçasının ağırlık merkezi eksen üzerinde olup, bu ekseni tepede son bulan parça geri kalan parçanın iki katına eşit olacak şekilde iki parçaya ayırır.

38. *Arşimetin Metoduna geri bakış.* Metodunu keşfettiği zaman Arşimetin kafasında ne bulunduğunu hiçbir zaman bilemiyeceğiz. Onu ancak müphem bir şekilde tahmin edebiliriz. Fakat Arşimetin kendi metoduyla çözmüş olduğu problemleri bugünkü metodlarla çözmek istersek, bu hususta kullanmak üzere muhtaç olduğumuz (bugün iyi bilinen, fakat Arşimet zamanında formüle edilmemiş olan) açık ve oldukça kısa bir matematik kaideler listesi düzenliyebiliriz. Bu kaideler şunlardır:

(1) İntegral Hesabın iki genel kaidesi:

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \int [\,f(x)+g(x)\,]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,;$$

burada c herhangi bir sabit, $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyondur.

(2) Aşağıki dört integralin değeri:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

(3) Aşağıki iki integralin geometrik tefsiri:

$$\int Q(x) \, dx, \quad \int x\, Q(x) \, dx.$$

Burada $Q(x)$ düzlem geometride bir uzunluğu ve uzay geometride bir alanı gösterir; $Q(x)$ her iki halde de bir şeklin x eksenine dik bir düzlemle kesmek suretiyle elde edilen değişen kesitini gösterir. Bir düzlem veya uzay geometri problemi düşündüğümüze göre, ilk integral bir alan veya bir hacmı, ikinci integral ise madde ile homogen olarak doldurulmuş bir alan veya hacmın momentini gösterir.

Arşimet bu kaideleri formüle etmiş olmamakla beraber, onun bunlara şu veya bu şekilde sahip olmuş bulunduğunu düşünmekten kendimizi alamıyoruz. Hattâ Arşimet metoduna temel teşkil eden işlemi, yani değişken kesitten alan veya hacme (bugünkü dille: integrali alınacak fonksiyondan integrale) geçişi genel bir şekilde ifade etmekten bile çekinmişti. O, bu işlemi özel haller için anlatmış olup, onu hayran olunacak bir tarzda pek değişik hallere uygulamıştı. Fakat Arşimet, pek yakından bildiğine şüphe olmayan bu işleme sadece bir keşif vâsıtası olarak bakmakta idi ve bu keyfiyetin işlemi genel olarak ifade etmekten çekinmeye yeter bir sebep olduğu fikrindeydi.

(2) de verilmiş olan dört integralin değerlerini sezgi yoluyla verebilecek basit geometrik hakikatler zikrediniz. ([7])

([7]) Arşimetin keşfi hakkında diğer mütalâalar için B.L. van der Waerden, *Elemente der Mathematik*, Bd 8, 1953, S. 121 - 129 ve Bd 9, 1954, S. 1 - 9 a bakınız.

X

İZOPERİMETRİ PROBLEMİ

Daire ilk, en basit, ve en mükemmel şekildir. — Proklus [1]
Daire en mükemmel şekildir. — Dante [2]

1. Descartes'ın endüktif sebepleri. Descartes'ın *Regulae ad Directionem Ingenii* (yani *Aklın Sevk ve İdaresi için Kaideler*) adlı tamamlanmamış eserinde (ki buna keşfin mantığına dair klâsik eserlerden biri gözüyle bakılmalıdır) aşağıki dikkati çeken pasaja rastlamaktayız: [3]

Bir daire çevresinin aynı alanı haiz herhangi bir diğer şeklin çevresinden daha küçük olduğunu ayrı ayrı halleri gözden geçirmek suretiyle göstermek istersek, mümkün olan bütün şekilleri eksiksiz ele almaya lûzum yoktur; bu hususu birkaç özel şekil için ispat etmek kâfi olup, endüksiyon vasıtasıyla aynı özeliğin bütün diğer şekiller için de doğru olacağı neticesine varabiliriz.»

Bu pasajın manâsını anlamak için Descartes'ın telkin ettiği

---

(1) Öklidin *Elemanlar*'ının birinci kitabının şerhi; XV. ve XVI. tarifler.

(2) Convivio II, XIII, 26.

(3) *Oeuvres de Descartes*. yayınlayanlar Adam ve Tannery, vol. 10, 1908. S. 390. Söz konusu pasaj burada önemsiz bir şekilde değiştirilmiş olup, dairenin göz önüne almış olduğumuz özeliği burada biraz farklı bir şekilde ifade edilmiştir.

şeyi fiilen yapalım ve daireyi üçgenler, dik dörtgenler ve daire sektörleri gibi diğer birkaç şekil ile mukayese edelim. Üçgen olarak (açıları sırasıyla 60°, 60°, 60° ve 90°, 45°, 45°) olan bir eşkenar, bir de dik ikizkenar üçgen alalım. Bir dik dörtgenin biçimi genişliğinin yüksekliğine olan oranı ile karakterize edilir; biz bu oran için 1:1 (kare), 2:1, 3:1 ve 3:2 değerlerini seçeceğiz. Bir daire sektörünün biçimi merkezdeki açı ile belirir; bu açının değerleri olarak 180°, 90° ve 60° (yarım daire, çeyrek daire, altıda bir daire) değerlerini alacağız. Bütün bu şekillerin aynı alanı, meselâ 1 inç², haiz olduğunu farzediyoruz. Bu takdirde bu şekillerden herbirinin çevresinin uzunluğunu inç cinsinden hesaplıyalım. Bu tarzda elde edilen neticeler aşağıki cedvelde toplanmış olup, cedvelde şekillerin sırası aşağıya inildikçe çevre uzunluğu artacak şekilde seçilmiştir.

Cedvel I. Eşit alanlı Şekillerin Çevre Uzunlukları.

Daire	3,55
Kare	4,00
Çeyrek Daire	4,03
Dik Dörtgen (3:2)	4,08
Yarım Daire	4,10
Altıda bir Daire	4,21
Dik Dörtgen (2:1)	4,24
Eşkenar Üçgen	4,56
Dik Dörtgen (3:1)	4,64
Dik İkizkenar Üçgen	4,84

Listede bulunan hepsi de aynı alanı haiz on tane şekil içinde başta ki şekil olan Daire en kısa çevreyi haizdir. Acaba Descartes'ın telkin eder göründüğü gibi, buradan endüksiyonla dairenin sadece listedeki on şekil arasında değil, fakat mümkün olan bütün şekiller içinde en kısa çevreyi haiz olduğuna hükmedebilirmiyiz? Hiçbir suretle. Fakat nispeten kısa olan listemizin genel

teoremi kuvvetli bir şekilde telkin ettiği de inkâr edilemez. Hattâ bu telkin o kadar kuvvetlidir ki, bu listeye bir veya iki şeklin daha ilâvesi bu kuvvete pek fazla birşey katmaz.

Ben Descartes'ın yukarıki pasajı yazarken daha ince olan bu son noktayı düşündüğüne inanmak temayülündeyim. Zannediyorum ki o, bu listeyi uzatmanın inanışımız üzerinde pek fazla bir tesir yapmıyacağını söylemek istemiştir.

2. **Saklı sebepler.** «Aynı alanı haiz bütün düzlem şekiller içinde daire en kısa çevreyi haizdir.» Cedvel I vasıtasıyla desteklenen bu ifadeye *izoperimetri teoremi* diyelim (4). Descartes'ın telkinine göre yapılmış olan Cedvel I izopetrimetri teoremi lehinde oldukça inandırıcı bir endüktif delil teşkil etmektedir. Fakat bu inandırıcılık nereden geliyor?

Buna benzer başka bir durum tasavvur edelim. Tanıdığımız on farklı cinsten on tane ağaç seçelim. Bunlardan herbirinin tahtasının özgül ağırlığını ölçelim ve bunlar içinde özgül ağırlığı en küçük olanını alalım. Sadece bu müşahedelere dayanarak, muayene etmiş olduğumuz on tane ağaç içinde tahtası en hafif olanının mevcut bütün ağaç cinsleri içinde de en hafif tahtalısı bulunduğuna inanmak makûl bir şey olur mu? Buna inanmak makûl olmamakla kalmaz, hattâ aptallık olur.

Bunun daire halinden farkı nedir? Daire halinde, daire lehinde bir *peşin hükme* sahibiz. Daire en mükemmel şekil olduğundan diğer mükemmellikleri arasında verilen bir alana karşılık en kısa çevreye sahiptir. Descartes'ın telkin ettiği endüktif delilin o kadar inandırı olması, daha baştan akla yakın olan bir faraziyeyi takviye etmesindendir.

«Daire en mükemmel şekildir» cümlesi geleneksel bir cüm-

---

(4) Bu adın izahı ve yukarıki ifadeye denk olan başka ifadeler daha sonra verilecektir (paragraf 8).

ledir. Bu cümleye Dante (1265 - 1321), Proclus (410 - 485) ve daha da eski yazarların yazılarında rastlamaktayız. Bu cümlenin manâsı açık değildir, fakat onun arkasında sadece gelenekten daha fazla birşey bulunabilir.

3. Fiziksel sebepler. «Eşit hacımdaki bütün cisimler içinde, küre en küçük yüzey alanını haizdir». Bu ifadeye «Uzaydaki izoperimetri teoremi» denir.

Uzaydaki izoperimetri teoremine, tıpkı düzlemde olduğu gibi, herhangi bir matematik ispat verilmeden inanmak eğilimindeyiz. Küre lehinde, belki daire lehinde olduğundan da büyük, bir peşin hükme sahibiz. Hakikaten, tabiatın kendisi bile küre lehinde bir peşin hükme sahip imiş gibi görünüyor. Yağmur tanecikleri, sabun köpükleri, güneş, ay, dünyamız ve gezegenler hep küre şeklinde veya küreye yakın bir şekildedir. Biraz yüzey gerilim fiziği bilgisiyle izoperimetri teoremini bir sabun köpüğünden öğrenmek mümkündür.

Fakat ciddî bir fizik bilgisinden mahrum bile olsak, iyice iptidaî bazı mülâhazalar bizi gene izoperimetri teoremine sevkedebilir. Bu teoremi meselâ bir kediden öğrenebiliriz.

Soğuk bir gecede uyumağa hazırlanan bir kedinin ne yaptığını herhalde görmüşsünüzdür. Kedi evvelâ ayaklarını içeri doğru çeker, sonra büzülür ve kısaca vücudunu mümkün olduğu kadar küreye yakın bir şekle sokar. Kedinin böyle yapışının sebebi, aşikâr olarak vücudunu sıcak tutmak üzere, vücut yüzeyinden kaçan ısıyı minimum kılmaktır. Bunun için de, vücudunun hacmını azaltmak niyetinde olmadığından, onun yüzeyini azaltmağa çalışır. Kedi bu işi yaparken, hacmı verilmiş bir cismin yüzeyini minimum yapmak problemini, kendisini mümkün olduğu kadar küreye yakın şekle sokmak suretiyle çözmektedir. Buna göre, kedinin izoperimetri teoremi hakkında bir bilgiye sahip olduğu anlaşılıyor.

Bu mülâhazanın dayandığı fizik bilgisi son derece kabadır.(5) Buna rağmen, bu mülâhaza inandırıcıdır ve hattâ izoperimetri teoreminin bir nevi muvakkat desteği olarak değerlidir. Küre veya daire lehinde yukarda (paragraf 2) zikredilmiş olan yakalanması güç sebepler burada belirmeğe başlıyor. Acaba onlar fiziksel benzerlik sebepleri midir?

4. Lord Rayleigh'in endüktif sebepleri. Descartes'ın ölümünden iki yüz seneden biraz fazla bir zaman sonra, fizikçi Lord Rayleigh gışaların verdiği ses tonlarını inceledi. Her yerinde aynı kalınlık ve kalitede olmak üzere dikkatle tabaklanmış bir deri parçası bir davul üzerine her tarafında eşit bir şekilde gerilince bir «zar» (yahut, daha doğrusu matematik zar kavramına makûl bir yaklaşım) olur. Davullar ekseriya daire şeklindedir, fakat elips, çokgen veya herhangi bir başka şekilde davullar da yapılabilir. Herhangi bir şekildeki bir davul birçok farklı ses tonları verir, umumiyetle bunların içinde en derini olan ve esas ton denileni diğerlerine nazaran pek kuvvetlidir. Lord Rayleigh farklı şekillerde olan, fakat aynı alanı haiz ve aynı fiziksel şartlara tâbi birçok zarın esas tonlarını mukayese etti ve onlara dair paragraf 1 deki Cedvel I e pek benzeyen aşağıki cedveli (Cedvel II) düzlenledi. Bu Cedvel II, Cedvel I deki şekillerin aynını, fakat biraz farklı sırada, ihtiva etmekte olup, her şekil için esas tonun yüksekliğini (frekansını) vermektedir. (6)

---

(5) Daha bilgili bir kedi vücudunun yüzeyini değil, fakat onun ısı geçirgenliğini, yahut aynı kapıya çıkan elektrostatik kapasitesini minimum yapmalıdır. Fakat, Poincaré'nin bir teoremine göre, evvelkinden farklı olan bu minimum problemi de aynı çözümü haizdir (yani bu çözüm de küredir) G. Polya, *American Mathematical Monthly*, v. 54, 1947, S. 201–206 ya bakınız.

(6) Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, 2nd ed., vol. 1, S. 345.

Cedvel II. Eşit Alanlı Zarların Esas Frekansları

Daire	4,261
Kare	4,443
Çeyrek Daire	4,551
Altıda bir Daire	4,616
Dik Dörtgen (3 : 2)	4,624
Eşkenar Üçgen	4,774
Yarım Daire	4,803
Dik Dörtgen (2 : 1)	4,967
Dik İkizkenar Üçgen	4,967
Dik Dörtgen (3 : 1)	5,736

Listede bulunan, hepsi de aynı alanı haiz, on tane zar içinde baştaki daire şeklindeki zar en derin esas tonu haizdir. Acaba buradan endüksiyonla, dairenin bütün zar şekilleri içinde en alçak esas tonu verdiği neticesini çıkarabilir miyiz?

Tabiatıyla hayır; çünkü endüksiyon hiçbir zaman kesin değildir. Fakat listenin bu yoldaki telkini çok kuvvetli, hattâ önceki haldekinden de daha kuvvetlidir. Biliyoruz ki (Lord Rayleigh ve çağdaşları da biliyorlardı ki) aynı alanı haiz bütün şekiller içinde, daire en kısa çevreyi haiz olanıdır, ve bu teorem matematik olarak ispat edilebilir. Aklımızda bulunan dairenin bu geometrik minimum özeliği dolayısıyla, dairenin Cedvel II nin telkin ettiği fiziksel minimum özeliğini de haiz olduğuna inanmak eğilimindeyiz. Muhakememiz benzerliğin tesiri altında kalmış oluyor ki, benzerlik hakikaten derin bir tesir kudretini haizdir.

Cedvel I ve II nin karşılaştırılması son derece öğreticidir. Bu karşılaştırma şimdi münakaşasına girişmiyeceğimiz diğer birçok telkinleri daha ortaya koyar.

5. Netice çıkarmak. Yukarda izoperimetri teoremi lehinde, onu ispata yetmeyen, fakat makûl bir faraziye haline geti-

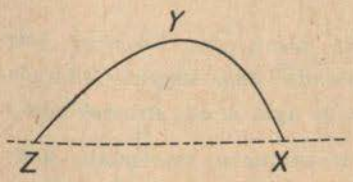
ren türlü sebepleri gözden geçirdik. Kendi ilmindeki bir faraziyeyi inceleyen bir fizikçi, ondan neticeler çıkarır. Bu neticeler hakikatlere uyabilir veya uymıyabilir; fizikçi bu iki halden hangisinin vaki olduğuna bakmak için tecrübeler düzenler. Kendi ilmindeki bir faraziyeyi inceleyen bir matematikçi de buna benzer bir yol tutabilir ve faraziyesinden neticeler çıkarabilir. Bu neticeler doğru veya yanlış olabilir; matematikçi de bu iki halden hangisinin cari olduğunu bulmağa çalışabilir.

Şimdi aşağıki şekilde ifade edeceğimiz izoperimetri teoremini incelerken biz de bu yolu tutalım: *Eşit çevre uzunlukla bütün düzlem şekiller içinde, daire maksimum alanı haizdir.* Bu ifade yukardakinden (paragraf 2) farklıdır ve aradaki fark sadece ifade tarzında değildir. Fakat bu iki ifadenin birbirine denk olduğu gösterilebilir. Biz ispatı ileriye bırakarak (paragraf 8 e bakınız), hemen neticelerin incelenmesine geçiyoruz.

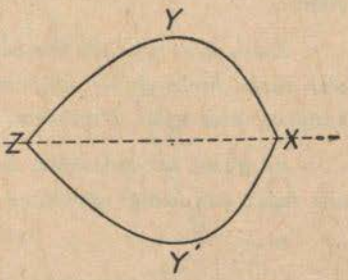
(1) Sur krallarından birinin Dido isimli kızı vatanından kaçarak birçok maceralardan sonra Kuzey Afrika kıyılarına varır. Efsaneye göre sonradan orada Kartaca şehrini kurarak onun ilk kraliçesi olmuş olan Dido, işe evvelâ yerlilerden deniz kıyısında «bir öküz postunun çevreliyeceği kadar» bir yer satın almakla başladı. Dido bu yeri çevrelemek üzere öküz postunu çok ince dar şeritlere böldü ve onları birbirine ekliyerek çok uzun bir ip meydana getirdi. Bundan sonra Dido bir geometri problemi ile karşılaştı: Maksimum alanı elde etmek için, belli uzunluktaki ipiyle hangi biçimde bir arazi sınırlamalıydı?

Eğer Dido kıt'anın içinde bulunsaydı, bunun cevabı tabiatıyla bir daire olacaktı, fakat deniz kenarında çözüm başkadır. Problemi, deniz kıyısının bir doğru şeklinde olduğunu kabûl ederek çözelim. Şek. 10.1 de XYZ yayı verilmiş bir uzunluğu haizdir. Bu yay ile XZ doğru parçası (bu doğru parçası verilmiş bir sonsuz doğru üzerinde bulunmaktadır, fakat parçanın uzunluğu istediğimiz gibi arttırılıp, eksiltilebilir) arasındaki alanı maksimum yapmaklığımız isteniyor.

Bu problemi çözebilmek için sonsuz doğruya (deniz kıyısı) bir ayna gözüyle bakalım (Şek. 10.2 ye bakınız). XYZ eğrisi aynadaki $XY'Z$ hayali ile birlikte uzunluğu verilmiş bir $XYZY'$



Şek. 10.1. Dido'nun problemi



Şek. 10.2. Problemin yansıtma ile çözümü

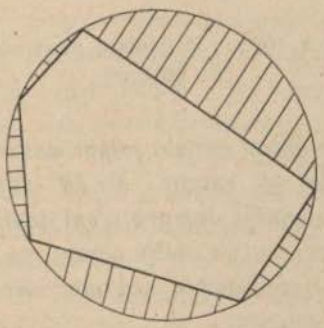
kapalı eğrisi teşkil eder, öyle ki bu kapalı eğrinin alanı maksimum yapmak istediğimiz alanın tam iki katıdır. $XYZY'$ nün alanı ise, bu kapalı eğrinin verilmiş sonsuz doğruyu (yani deniz kıyısını) simetri ekseni olarak kabûl eden bir daire olması halinde maksimum olur. Şu halde Dido probleminin çözümü merkezi deniz kıyısında olan bir yarım dairedir.

(2) Jakob Steiner izoperimetri teoreminden bir sürü enteresan neticeler çıkarmıştır. Onun muhakemelerinden bilhassa göze çarpan birini münakaşa edelim. Verilmiş bir dairenin içine bir çokgen çizerek (Şek. 10.3) bu çokgenin kenarlarının daireden ayırdığı (Şek. 10.3 te taranmış) daire parçalarına katı (meselâ mukavvadan kesilmiş) gözüyle bakınız. Bu katı daire parçalarının çokgenin köşelerinde birbirlerine mafsallanmış olduklarını tasavvur ediniz. Bu mafsallı sistemi mafsallardaki açıları değiştirmek suretiyle deforme ediniz. Deformasyondan sonra (Şek. 10.4) artık bir daireden farklı olan bir yeni eğri elde ederiz ki, bu eğri bir takım daire yaylarından meydana gelmiş olup, çevresi daireninkinin aynıdır. Şu halde, izoperimetri teoremine göre yeni eğrinin

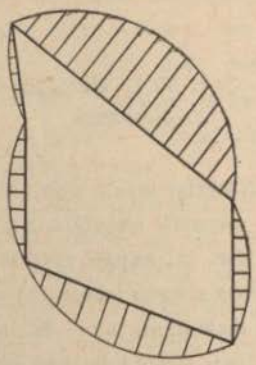
alanı verilmiş dairenin alanından daha küçük olmalıdır. Fakat daire parçaları katı (mukavvadan) olduğundan alanları değişmez, şu halde alanın azalışı deforme edilmiş çokgenin sırtından çıkar:

Daire içine çizilmiş bir çokgenin alanı, aynı kenarları haiz olan başka herhangi bir çokgenin alanından daha büyüktür. (Burada kenarlar hem aynı uzunlukta, hem de aynı sırada alınmaktadır.)

Bu güzel bir neticedir, fakat izoperimetri teoreminin kendisi ispat edilmediği müddetçe henüz ispat edilmemiş durumdadır.



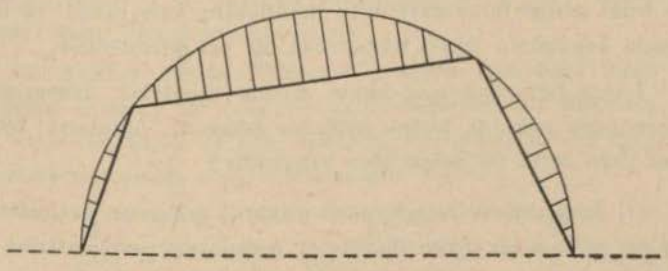
Şek. 10.3. Daire içine çizilmiş bir çokgen



Şek. 10.4. Oynak mafsallar ve mukavvadan daire parçaları

(8) Dido'nun problemini Steiner'in metodu ile terkip edelim. Verilmiş bir yarım dairenin içine bir kırık çizgi (açık çokgen) çizelim (Şek. 10.5 e bakınız). Bu kırık çizginin kenarları tarafından yarım daireden ayrılan (Şek. 10.5 te taranmış) daire parçalarına katı (mukavvadan yapılmış) gözüyle bakalım. Kırık çizginin köşelerine oynak mafsallar yerleştirir, açıları değiştirir ve iki uç noktasına verilmiş gözüyle bakacağınız çap doğrusu üzerinde yer değiştirirseniz, toplam uzunluğu yarım dairenin uzunluğuna eşit olan bir takım daire yaylarından mürekkep yeni bir eğri elde edersiniz (Şek. 10.6). Bu eğri ile verilmiş sonsuz doğru arasında

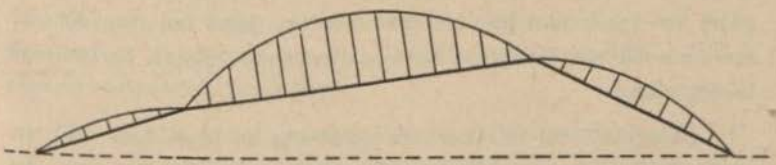
kalan alan, yukarda (1) de münakaşa ettiğimiz teorem dolayısıyla yarım dairenin alanından daha küçüktür. (Mukavvadan yapılmış olan) daire parçaları katı olduklarından, bu alan eksilişi



Şek. 10.5. Dido ve Steiner

deformasyondan sonraki çokgenin sırtından çıkar. Böylece şu teoremi elde etmiş oluyoruz: *Bir çokgenin kenarları, bir tanesi müstesna, uzunluk ve sıra bakımından verilmiş olsun. Bu çokgen evvelce verilmemiş olan kenarı çap olarak kabûl eden bir yarım daire içine çizebildiği zaman maksimum alanı haiz olur.*

6. **Neticeleri gerçeklemek.** Bir fizikçi ele aldığı bir faraziyeden bir takım neticeler çıkardıktan sonra, bunların içinde



Şek. 10.6. Mukavvadan daire parçaları

tecrübe ile kolayca incelenebilen bir tanesini arar. Eğer tecrübeler bir faraziyeden elde edilen bir neticeyi yalanlarsa, o faraziye suya düşer. Eğer tecrübeler faraziyenin neticelerini gerçeklerse, o faraziyenin itibarı artar ve faraziye daha inanılabilir hale gi-

rer. Matematikçi de buna benzer bir yol tutabilir. O da faraziyesinin ispatı veya cerhi kolay olan neticelerini arar. Bir neticesinin cerhedilişi faraziyenin kendisini de cerheder. Bir neticenin ispat edilişi faraziyeyi daha inanılabilir hale sokar ve faraziyenin kendisinin ispatı hususunda bir yol gösterebilir.

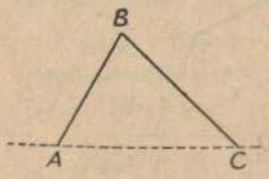
İçinde bulunduğumuz halde durum nasıldır? İzoperimetri teoreminden yukarda birçok neticeler çıkardık. Bunların içinde ispat veya cerhi en kolay olan hangisidir?

(1) İzoperimetri teoreminden yukarda çıkarılan neticelerden bazıları aslında bir takım elemanter maksimum problemlerine dairdir. Bunların içinde gerçekleyebileceğimiz bir netice var mıdır? Şek. 10.3—10.6 da gösterilmiş olan değişik halleri gözden geçirelim. Bunların içinde en basiti hangisidir? Bir çokgenin karışıklığı kenarlarının sayısı ile birlikte artar. Şu halde, en basit olan çokgen üçgendir; tabiatıyla üçgeni en çok sevmemizin sebebi, en çok bilgiye onun hakkında sahip oluşumuzdur. Şimdi, Şek. 10.3 ve 10.4 ün probleminin üçgenler için bir manası yoktur, yani o problemin ifadesi bir üçgen halinde boştur: kenarları verilmiş olan bir üçgen tamamen belirlidir, katıdır. Bir üçgende 10.3 tekine benzer durumdan 10.4 tekine benzer bir duruma geçiş yoktur. Fakat Şek. 10.5 tekine benzer durumdan 10.6 dakine benzer duruma geçiş bir üçgen için pek âlâ mümkündür. Belki bu, izoperimetri teoreminden elde ettiğimiz en basit neticedir. Şimdi bu neticeyi inceleyelim:

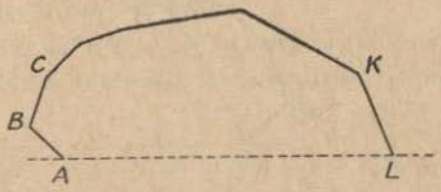
Paragraf 5 (3) te çıkartılan neticenin en basit özel hali şu probleme cevap verir: *Bir üçgenin iki kenarı verildiğine göre, bu üçgenin alanının maksimumunu bulmak* (Şek. 10.7 ye bakınız). Paragraf 5 (3) buna şu cevabı verir: Bu alan, üçgenin başlangıçta verilmemiş olan kenarı çap olarak kabûl eden bir yarım dairenin içine çizilmiş olması halinde maksimuma ulaşır. Bu ise, alanın verilen iki kenarın birbirine dik olması halinde maksimum olması demektir ki, bu da aşikârdır (Misâl 8.7)

Böylece izoperimetri teoreminin bir ilk neticesini gerçeklemeyi başarmış olduk. Böyle bir başarı tabiatıyla maneviyatımızı kuvvetlendirir. Biraz önce gerçeklenmiş olan hakikatın arkasında ne vardır? Bu hakikatı genelleştirebilir miyiz? Başka bir neticeyi daha gerçekleyebilir miyiz?

(2) Yukarda (1) de incelenen problemi genelleştirirken şu probleme varırız: *Bir çokgenin bütün kenarları biri müstesna olmak üzere büyüklük ve sıra bakımından verilmiştir. Bu çokgenin ne zaman maksimum alanı haiz olacağını bulunuz.*



Şek. 10.7. Tek mafsallı parmak

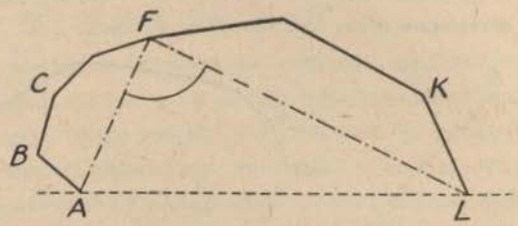


Şek. 10.8. Süper-parmak

Evvelâ uygun bir yazış tarzı ithâl ederek Şek. 10.8 i çizelim. AB, BC, ... , KL uzunlukları verilmiş, fakat LA uzunluğu verilmemiştir. $ABC \ldots F \ldots KL$ kırık çizgisini bir nevi süper-parmak olarak tasavvur edebiliriz; bu parmağın kemikleri olan AB, BC, ... , KL değişmez uzunluktadır, B, C, ... , F, ..., K mafsallarındaki açılar değişkendir. Bizden istenen şey, $ABC \ldots KLA$ alanını maksimum yapmaktır.

Bir müddet evvel göz önüne almış olduğumuz (paragraf 8.4, 8.5) bazı problemlerde olduğu gibi, burada da karakteristik güçlük birden fazla değişkenin (B, C, ... , F, ... ve K daki açılar) varlığıdır. Bununla birlikte yukarda (1) de problemin sadece tek bir değişken açı (tek bir mafsal; Şek. 10.7) ihtiva ettiği aşırı özel halini incelemiştik. Şimdi bu özel hali genel problemin çözümünde bir atlama taşı olarak kullanabilmeyi ümit etmemiz tabiîdir.

Hakikaten, problemi hemen hemen çözülmüş kabûl edelim ve bir tanesi müstesna bütün açıların aranan değerlerini bulmuş olduğumuzu tasavvur edelim. Şek. 10.9 da F açısına değişken, fakat $B, C, \ldots, K$ da olan bütün diğer açılara sabit gözüyle bakalım; $B, C, \ldots, K$ mafsalları sıkıştırılmıştır, fakat sadece F oynaktır. A ve L yi F ye birleştirelim. AF ve LF uzunlukları sabittir. Bütün $ABC \ldots F \ldots KLA$ çokgeni şimdi, ikisi katı (mu-



Şek. 10.9. Tek bir bükülebilir mafsal hali

kavvadan) olan ve sadece biri değişebilen üç kısma ayrılmış oluyor, AFL üçgeni FA ve FL gibi iki sabit kenara ve F de değişken bir açıya mâliktir. Bu üçgenin ve onunla birlikte bütün $ABC \ldots F \ldots KLA$ çokgeninin alanı, biraz önce (1) de Şek. 10.7 yi incelerken söylemiş olduğumuz gibi, $\sphericalangle AFL$ nin bir dik açı olması halinde maksimum olur.

Bu muhakeme aşikâr olarak öteki mafsallar için de, yani $B, C, \ldots$ ve K daki açılar için de (Şek. 10.8) doğrudur. Bu suretle şunu elde etmiş oluyoruz: *Başlangıçta verilmemiş olan AL kenarı kendisinin dışındaki bütün köşelerden, yani $B, C, \ldots F, \ldots, K$ dan birer dik açı altında görülmedikçe, $ABC \ldots KLA$ çokgeninin alanı maksimum olamaz.* Eğer alanın maksimumu varsa, bu maksimuma yukarıki durumda erişilmelidir. Burada maksimum alanın varlığını kabûl ederek, biraz elemanter geometri bilgimizi hatırlamak suretiyle durumu başka kelimelerle şöyle ifade edebiliriz: *Alanın maksimumuna yalnız ve ancak çokgenin başlangıçta veril-*

meyen kenarı çap olarak kabûl eden bir yarım daire içine çizilmiş olması halinde erişilir.

Burada paragraf 5 (3) teki neticenin aynını elde ettik. Fakat bu esnada orada kullanmış olduğumuz izoperimetri teoremini kullanmadık.

(3) Evvelâ (1) de izoperimetri teoreminin çok özel bir neticesini gerçekledikten sonra, (2) de onun çok daha geniş bir neticesini gerçekledik. Belki şimdi, yukarda paragraf 5 (2) de çıkarılmış olan diğer bir geniş neticeye hücum edebilmek için yeter derecede hamle gücü toplamış bulunuyoruz.

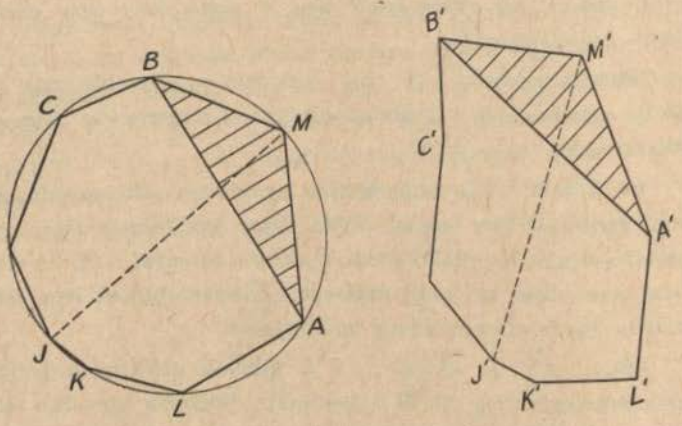
$ABC\ldots\ KL$ ve $A'B'C'\ldots\ K'L'$ gibi iki çokgeni birbiriyle karşılaştıracağız (Şek. 10.10 a bakınız). Bunların karşılıklı kenarları eşit, yani

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ \ldots,\ KL = K'L',\ LA = L'A'$$

olsun, fakat karşılıklı açıların bazıları birbirinden farklı bulunsun. Bunlardan başka, $ABC\ldots\ KL$ bir dairenin içine çizilmiş olsun, $A'B'C'\ldots\ K'L'$ ise bir daire içine çizilemesin.

$ABC\ldots\ KL$ nin bir J köşesini kendisinin içine çizilmiş olduğu dairenin merkezine birleştirerek JM çapını çizelim. Eğer tesadüfen M noktası $ABC\ldots\ KL$ nin bir tepesiyle çakışırsa, işimiz çok basitleşir (bu takdirde (2) deki neticeyi derhal görebiliriz.) Eğer bu olmazsa, M noktası çokgenimizin meselâ A ve B gibi iki komşu köşesini birleştiren daire yayı üzerinde bir ara noktası olur. MA ve MB yi birleştirerek (Şek. 10.10 da taranmış) $\triangle AMB$ yi nazarı itibara alalım ve $A'B'$ tabanı üzerine $\triangle AMB$ ye eşit olan $\triangle A'M'B'$ çizelim (Bu sonuncu üçgen de şekilde taranmıştır). Nihayet $J'M'$ yü birleştirelim.

$AMBC\ldots\ KL$ çokgeni JM doğrusu vâsıtasıyla iki kısma ayrılmıştır (Şek. 10.10 a bakınız; $A'M'B'C'\ldots\ K'L'$ çokgeni de buna tekabül eder tarzda $J'M'$ tarafından iki kısma ayrılır). Her iki kısma da (2) de ispat edilmiş olan teoremi uygulayalım.



Şek. 10.10. Biri bir daire içine çizilmiş, öteki bir daire içine çizilemeyen iki çokgen

Bir yarım daire içine çizilmiş olan $MBC\ldots J$ çokgeninin alanı $M'B'C'\ldots J'$ çokgenininkinden daha küçük değildir; hakikaten, karşılıklı kenarlar, birer tanesi müstesna, birbirine hep eşittir, sadece yarımdairenin çapını teşkil eden MJ kenarı $M'J'$ den farklı olabilir. Aynı sebepten $MALK\ldots J$ çokgeninin alanı $M'A'L'K'\ldots J'$ nünkinden daha küçük değildir. Bu eşitsizlikleri toplayarak

$$\text{Alan } AMBC\ldots KL > \text{Alan } A'M'B'C'\ldots K'L'$$

elde ederiz. Halbuki

$$\triangle AMB \cong \triangle A'M'B'$$

idi. Bunu evvelki eşitsizlikten çıkararak

$$\text{Alan } ABC\ldots KL > \text{Alan } A'B'C'\ldots K'L'$$

elde ederiz: *Bir daire içine çizilmiş olan bir çokgenin alanı aynı kenarları haiz diğer herhangi bir çokgenin alanından daha büyüktür.*

Burada paragraf 5 (2) deki neticenin tam aynını elde ettik, fakat orada kullanmış olduğumuz izoperimetri teoremini burada kullanmadık.

(Genişletilmiş çokgenlere ait olan

$$\text{Alan } AMBC\ldots KL > \text{Alan } A'M'B'C'\ldots K'L'$$

eşitsizliğindeki $>$ işareti, orada daha ziyade $\geqq$ işaretini bekleyen titiz bir okuyucunun itirazına uğrayabilir. Biraz daha nazik olan bu noktanın münakaşasını buraya ilâve edelim:

Ben $A'M'B'C'\ldots K'L'$ nün bir daire içine çizilemiyeceğini iddia ediyorum. Çünkü aksi takdirde $A'B'C'\ldots K'L'$ de bir daire içine çizilebilirdi ki, bunun aksini farzetmiştik. Bundan başka, $M'B'C'\ldots J'$ ve $M'A'L'K'\ldots J'$ çokgenlerinin ikisinin birden çapı $M'J'$ olan bir yarım daire içine çizilemiyeceğini iddia ediyorum. Aksi halde $A'M'B'C'\ldots K'L'$ bütün çokgeni bir daire içine çizilebilirdi ki, bu doğru değildir. Şu halde söz konusu eşitsizliğin çıkarılışında iki kere kullanılmış olan "daha küçük değildir" kelimeleri yerine hiç olmazsa bir defa "büyüktür" kelimesi konabilir.) (7)

7. **Çözüme çok yakın.** Gerçeklemeye muvaffak olduğumuz neticeler izoperimetri teoremini çok akla yakın kılmaktadır. Fakat dahası var. Bu neticelerin "birçok şey" ihtiva ettiği ve nihaî çözüme, yani tam ispata "çok yakın" bulunduğumuz hissini duyabiliriz.

(1) Verilmiş bir kenar sayısını ve çevre uzunluğunu haiz çokgenler içinde maksimum alanı haiz olanını bulunuz.

Eğer böyle bir çokgen varsa, o çokgen bir daire içine çizilmiş olmalıdır. Bu kadarını derhal paragraf 6 (3) teki ifademizden çıkarabiliriz.

---

(7) Bu paragrafın teoremleri ve ispatları Lhuillier'ye aittir; Bölüm VIII deki 5 No. lı dip notuna bakınız.

Öte yandan, problemi hemen hemen çözülmüş farzederek, meselâ X gibi bir tanesi müstesna, bütün köşelerin maksimumu veren haldeki yerlerini bildiğimizi kabûl edelim. Bu $n-1$ tane $U, \ldots, W, Y$ ve Z köşesini sabit tutalım. $U \ldots WXYZ$ bütün çokgeni iki parçadan ibarettir: $n-1$ tane köşesi tamamen tespit edilmiş olan $U \ldots WYZ$ çokgeni (ki bu çokgen X e bağlı değildir) ve X e bağlı olan $\triangle WXY$. Bu $\triangle WXY$ de WY tabanı ile öteki iki kenarın $WX+XY$ toplamını bilmekteyiz; hakikaten, çokgenin bu ikisinden gayrı olan $n-2$ kenarını biliniyor kabûl ettiğimiz gibi, bütün n kenarın toplamını da bilmekteyiz. Şimdi $\triangle WXY$ nin alanının maksimum olması lâzımdır. Bunun için ise, hemen derhal görüldüğü üzere, tabanı ve çevresi bilinen $\triangle WXY$ maksimum alana ikizkenar olması halinde erişir (Misâl 8.8). Yani $WX = XY$ olur, şu halde aranan çokgenin bu iki bitişik kenarı birbirine eşittir. Şu halde (şartların simetrik oluşu ve kısmî değişim modeli dolayısıyla) her hangi iki bitişik kenar birbirine eşittir. Neticede bütün kenarlar eşittir: aranan çokgen *eşkenardır*.

Bir daire içine çizilmiş ve eşkenar olmak zorunda olan aradığımız çokgen ister istemez düzgün olur: *Verilmiş bir kenar sayısı ve çevre uzunluğunu haiz olan bütün çokgenler içinde, düzgün çokgen en büyük alanı haizdir.*

(2) *Biri n, öteki $n+1$ kenarlı olan iki düzgün çokgen aynı çevre uzunluğunu haizdir. Bunlardan hangisinin alanı daha büyüktür?*

Biraz evvel (1) görmüş olduğumuz gibi $n+1$ kenarlı düzgün çokgen, $n+1$ kenarlı ve aynı çevreyi haiz, fakat düzgün olmayan başka herhangi bir çokgenden daha büyük alanı haizdir. Fakat, meselâ bütün kenarları a ya eşit olan, n kenarlı düzgün çokgene $n+1$ kenarlı düzgün olmayan bir çokgen gözüyle bakılabilir. Bu son çokgenin $n-1$ kenarı a ya, geri kalan iki kenarı $a/2$ ye ve bunlar arasındaki açısı $180°$ ye eşittir. (Bu çokgenin mûtad mânadaki kenarlarından birinin orta noktasına bir köşe

gözüyle bakarsanız, yukarıki az alışılmış kavrama varırsınız.) Şu halde, $n+1$ *kenarlı düzgün çokgen aynı çevreyi haiz n kenarlı düzgün çokgenden daha büyük bir alanı haizdir.*

(3) *Bir daire ve bir düzgün çokgen aynı çevre uzunluğunu haizdir. Bunlardan hangisinin alanı daha büyüktür?*

Yukarda (2) de elde edilen neticenin mânasını iyice anlamağa çalışalım. $n=3, 4, \ldots$ alarak bu neticeyi herbir özel hal için yeniden ifade edelim. Bir eşkenar üçgenden aynı çevreyi haiz bir kareye geçerken alanın arttığını görüyoruz. Bir kareden aynı çevreyi haiz bir beşgene geçerken, gene alanın arttığını görüyoruz. Böylece, beşgenden altıgene, altıgenden yedigene, ..., n kenarlıdan $n+1$ kenarlıya, ilâh... olmak üzere bir düzgün çokgenden bir sonrakine çevre sabit kalmak şartıyla geçerken alanın arttığını görüyoruz. Nihayet limit halinde daireye varırız. Dairenin çevresi de aynıdır, fakat alanı, aşikâr olarak, limiti olduğu sonsuz diziye ait her düzgün çokgenin alanından büyüktür. *Dairenin alanı, kendisiyle aynı çevre uzunluğunu haiz herhangi bir düzgün çokgenin alanından daha büyüktür.*

(4) *Bir daire ve bir keyfî çokgen aynı çevre uzunluğunu haizdir. Bunlardan hangisinin alanı daha büyüktür?*

Dairenin. Bu derhal yukarda (1) ve (3) ten çıkar.

(5) *Bir daire ile keyfî bir eğri aynı çevre uzunluğunu haizdir. Bunlardan hangisinin alanı daha büyüktür?*

Dairenin. Her eğri bir çokgenler limiti olduğundan, bu netice yukarda (4) ten elde edilir. Böylece izoperimetri teoremini ispat etmiş olduk!

8. İzoperimetri teoreminin üç şekli. Yukarda (paragraf 6 ve 7) izoperimetri teoreminin aşağıki şeklini ispat ettik:

I. *Aynı çevre uzunluğunu haiz bütün düzlem şekiller içinde, daire en büyük alanı haizdir.*

Fakat paragraf 2 de başka bir ifadeyi incelemiştik.

II. *Aynı alanı haiz bütün düzlem şekiller içinde, daire en kısa çevreyi haizdir.*

Bu iki ifade birbirinden farklı olup, bu fark sadece kelimelerde değildir. Bu husus biraz daha açıklanmağa muhtaçtır.

(1) Eğer iki eğrinin çevre uzunlukları birbirine eşitse, bu eğrilere «izoperimetrik» (eşçevreli) eğriler denir. «Bütün izoperimetrik düzlem eğriler içinde daire en büyük alanı haizdir.» bu, I. ifadenin geleneksel şekli olup, kendisine takılan «izoperimetri teoremi» adını izah eder.

(2) Teoremin yukarıki I ve II ifadelerine «eşlenik ifadeler» denir (paragraf 8.6 ya bakınız). Bu iki eşlenik ifadenin aynı bir üçüncü ifadeye denk olduğunu göstermek suretiyle birbirine denk olduğunu göstereceğiz.

(3) Verilen bir eğrinin alanı A ve çevre uzunluğu L olsun. Bu eğri ile yarıçapı r olan bir daire izoperimetrik olsunlar, yani $L=2\pi r$ olsun. Bu takdirde izoperimetri teoreminin birinci şekli (I. ifade)

$$A \leq \pi r^2$$

olduğunu ifade eder. Burada r yerine onun L cinsinden ifadesi olan $r=\frac{L}{2\pi}$ koyarsak, bu eşitsizliği kolayca

$$\frac{4\pi A}{L^2} \leq 1$$

şekline sokarız. Bu eşitsizliğe *izoperimetrik eşitsizlik* ve onun sol tarafındaki bölüme *izoperimetrik bölüm* denir. Bu bölüm eğrinin şekline tâbi olup, onun büyüklüğünden müstakildir. Hakikaten, şeklini değiştirmeden eğrinin lineer eb'adını 1 : 2 oranında büyütürsek, çevre uzunluğu 2 L ve alanı 4 A olur, fakat A/L^2 bölümü değişmez, aynı şey $4\pi A/L^2$ için ve herhangi bir orandaki bir büyütme için de doğrudur. Bazı yazarlar A/L^2 ye izoperimet-

rik bölüm derler, biz bu bölümü daire halinde 1 e eşit kılmak için 4π çarpanını ithâl ettik. Bu terimlerle şu ifadeyi ileri sürebiliriz:

III. *Bütün düzlem şekiller içinde, daire en yüksek izoperimetrik bölümü haizdir.* (8)

Bu da izoperimetri teoreminin üçüncü şeklidir.

(4) Teoremin üçüncü şekline eşit çevre uzunluklu şekillerden hareket ederek vardık. Şimdi III. ifadeden hareket ederek eşit alanlı şekillere geçelim. Alanı A ve çevre uzunluğu L olan bir eğrinin r yarıçaplı bir daire ile aynı alanı haiz olduğunu farzedelim. Yani $A=\pi r^2$ olsun. A yerine bu ifadeyi yazarsak izoperimetrik eşitsizliği kolayca $L \geqq 2\pi r$ şekline sokarız. Yani şeklin çevre uzunluğu aynı alanı haiz bir daireninkinden daha fazladır. Böylece teoremin eşlenik ikinci şekline, yani II. ifadeye varmış oluyoruz.

(5) Tabiatıyla aynı muhakeme silsilesini aksi yönde tekrarlıyabilir ve III üzerinden geçerek I den II yi çıkarabiliriz. Böylece üç şeklin de birbirine denk olduğuna kanaat getirebiliriz.

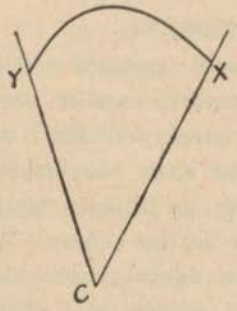
9. Uygulamalar ve sorular. Eğer Dido bir burun civarında pazarlık etmişse, uğraşmak zorunda kaldığı problem, belki paragraf 5 (1) de incelenmiş olandan ziyade aşağıkine daha yakındı:

Bir açı (aynı başlangıç noktasından çıkan iki ışın arasında kalan bir sonsuz düzlem parçası) *verilmiş olduğuna göre bu açıdan verilen uzunlukta bir eğri tarafından ayrılan parçalar içinde maksimum alanlısını bulunuz.*

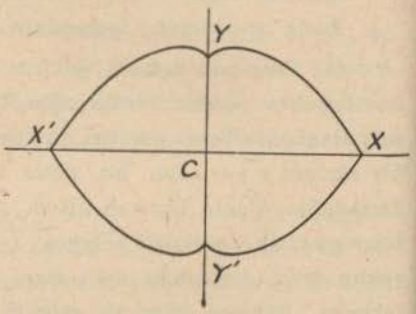
Şek. 10.11 de verilmiş olan açının tepesine (buruna) C denilmiştir. X ve Y noktalarını birleştiren keyfî eğrinin verilmiş

(8) «İzoperimetrik bölüm» ü I. Q. (izoperimetrik bölümün ingilizcesi olan Isoperimetric Quotient'in baş harfleri) ile kısaltırsak, dairenin en yüksek I. Q. yü haiz olduğunu söyleyebiliriz.

olan l uzunluğunda bulunduğu farzediliyor. Bizden istenen, bu eğri ile deniz kenarındaki üç köşeli alanı maksimum yapmaktır. Eğrinin X ve Y uçlarına yer değiştirebilir ve şeklini değiştirebiliriz, fakat l uzunluğunu değiştiremeyiz.



Şek. 10.11. Bir buruna dair daha güç Dido problemi



Şek. 10.12. Problem bazan yansıma vâsıtasıyla çözülebilir

Bu problem genel halde pek kolay değildir, fakat verilerin bazı özel değerleri için çözümü kolaylaşan problemlere dahildir. Eğer C deki açı dik ise, şekli açının evvelâ bir kenarına, sonra öbür kenarına göre yansıtırız. Bu suretle yeni bir şekil, Şek. 10.12 ve yeni bir problem elde ederiz. Yansımalar neticesinde dört katı alınan XY eğrisi uzunluğu $4\,l$ gibi verilmiş olan yeni bir *kapalı* eğri meydana gelir. Maksimum yapılacak alan da yansımalar neticesinde dört kat olarak maksimumu aranacak ve verilmiş yeni eğri tarafından *tamamiyle çevrelenen* yeni bir alan verir. İzoperimetri teoremine göre yeni problemin çözümü de bir dairedir. Bu daire XX' ve YY' yü simetri eksenleri olarak kabûl ettiğinden, merkezi bu eksenlerin kesişme noktası olan C dedir. Şu halde başlangıçtaki problemin çözümü (Dido'nun problemi) bir *çeyrek dairedir:* merkezi verilen açının tepesinde olan bir çeyrek daire.

Burada tabiatıyla paragraf 5 (1) in Şek. 10.2 ye dayanan çözümünü hatırlar ve o çözümün şimdiki çözüme yakından benzediğine dikkat ederiz. Bu çözüm tarzının işleyeceği daha sonsuz sayıda özel halin mevcut olduğunu görmek kolaydır. Eğer C deki açı $\frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$ ise, ard arda yansımalar vâsıtasıyla verilen l uzunluklu XY eğrisini $2\,nl$ uzunluğunda yeni bir kapalı eğriye ve sorulan problemi de, izoperimetri teoremi dolayısıyla, çözümü daire olan yeni bir probleme çevirirız. Paragraf 5 (1) de ve bu paragrafta gördüğümüz haller, bir sonsuz özel haller dizisinin $n = 1$ ve $n = 2$ ye tekabül eden ilk iki halidir.

Yani, eğer C deki açı özel bir değeri (n tam olmak üzere $180^\circ/n$) haiz ise, problemimizin (Şek. 10.11) çözümü merkezi C de olan bir daire yayıdır. Çözümün bu şeklinin açının büyüklüğünden (hiç olmazsa 180° yi geçmediği müddetçe) müstakil olmasını beklemek tabiîdir. Yani Şek. 10.11 deki problemin çözümünün C deki açı ister $180^\circ/n$ özel şeklinde olsun, ister bu şekilde olmasın merkezi C de olan bir daire yayı olduğu faraziyesini ileri sürebiliriz. Bu faraziye $n = 1, 2, 3, \ldots$ e tekabül eden sonsuz sayıda özel hal tarafından desteklenen bir endüktif faraziyedir. Acaba bu faraziye doğru mudur?

İzoperimetri teoreminin yukarıki uygulaması ve ona bağladığımız soru bizi buna benzer diğer birçok uygulama ve soruları önceden görmeğe sevkedebilir. Teoremi çıkarma yolumuz daha başka soruları ortaya çıkarır; teoremin uzay geometri ve matematik fizikteki benzerleri daha da başka sorular telkin eder. Tecrübe ve sezgimizde iyice kökleşmiş olan ve faraziye olarak ileri sürülmesi o kadar kolay, fakat ispatı o derece kolay olmayan izoperimetri teoremi tükenmez bir ilham kaynağıdır.

X. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

BİRİNCİ KISIM

1. *Geriye bakış.* Önceki paragraflarda (paragraf 6-8) izoperimetri teoremini ispat ettik—acaba hakikaten ispat ettik mi? Oradaki muhakemeyi adım adım kontrol edelim.

Paragraf 6 (1) deki basit neticeye karşı bir itiraz bulunmaz görünüyor. Fakat, paragraf 6 (2) deki problemi çözerken maksimumun varlığını ispatsız kabûl ettik; aynı şeyi paragraf 7 (1) de de yaptık. Acaba bu ispat edilmemiş kabûller neticenin doğruluğunu ihlâl ediyor mu?

2. *Neticenin bir kısmını başka türlü çıkarabilir misiniz?* Paragraf 5 (2) de bulunmuş olan neticenin trival olmayan en basit özel halini doğrudan doğruya gerçekleyiniz. Yani bir daire içine çizilmiş olan bir dörtgenin alanının aynı kenarları haiz herhangi bir dörtgeninkinden daha büyük olduğunu paragraf 6 (3) ten müstakil olarak ispat ediniz [Misâl 8.41].

3. Paragraf 7 (2) deki *muhakemeyi daha tafsilâtlı olarak yeniden ifade ediniz: n* kenarlı düzgün çokgenle aynı çevre uzunluğunu haiz, fakat alanı onunkinden daha büyük olan bir $n+1$ kenarlı çokgen çiziniz.

4. Bir dairenin kendisiyle aynı çevre uzunluğunu haiz herhangi bir düzgün çokgeninkinden daha büyük bir alana sahip olduğunu paragraf 7 (3) ten müstakil olarak hesap ediniz.

5. Daha genel olarak, bir dairenin kendisiyle aynı çevre uzunluğunu haiz ve bir daire dışına çizilebilen herhangi bir çokgeninkinden daha büyük bir alana sahip olduğunu ispat ediniz.

6. Paragraf 7 (5) teki muhakemeyi daha fazla tafsilâtla yeniden ifade ediniz. Bu, paragraf 8 deki I. ifadeyi ispatlar mı? Buna bir itirazınız var mı?

7. *Verilen metodu başka bir problem için kullanabilir misiniz?* Paragraf 8 deki metodu aşağıki iki ifadenin birbirine denk olduğunu ispatlamakta kullanınız:

«Verilmiş bir yüzey alanını haiz bütün kutular içinde, küp en büyük hacme sahip olandır.»

«Verilmiş bir hacmı haiz bütün kutular içinde, küp en küçük yüzey alanına sahip olandır.»

8. *İzoperimetri Teoreminin keskinleştirilmiş şekli.* Paragraf 8 deki I, II, III ifadelerini şunlarla karşılaştırınız:

I′. *Bir dairenin alanı kendisiyle aynı çevre uzunluğunu haiz diğer herhangi bir düzlem eğrininkinden daha büyüktür.*

II′. *Bir dairenin çevre uzunluğu kendisiyle aynı alanı haiz diğer herhangi bir düzlem eğrininkinden daha küçüktür.*

III′. *Bir düzlem eğrinin alanı A ve çevresinin uzunluğu L ise*

$$\frac{4\pi A}{L^2} \leq 1$$

olup, eşitliğe yalnız ve ancak bu eğrinin daire olması halinde erişilir.

I′, II′ ve III′ nün birbirine denk olduğunu gösteriniz. I′ yü ispat ettik mi?

9. Çevre uzunluğu L ve alanı A olan bir C eğrisi verilmiş olsun; C bir daire olmasın. Aynı L çevre uzunluğunu, fakat A dan daha büyük bir A' alanını haiz bir C' eğrisi çiziniz.

Bu problem önemlidir (neden?), fakat pek kolay değildir. Onu en genel şekliyle çözemezseniz, önemli özel hallerde çözünüz; sizi problemin çözümüne yaklaştırabilecek uygun sorular sorunuz; problemi yeniden ifade etmeye çalışınız; çözüme şu veya bu yolla yaklaşmaya uğraşınız.

10. 180° den büyük bir açısı olan bir C dörtgeni verilmiş olsun. Bu dörtgenin çevre uzunluğu L ve alanı A olsun. Aynı L

çevre uzunluğunu, fakat A dan büyük bir A' alanını haiz bir C' üçgeni çiziniz.

11. Misâl 10 u genelleştiriniz.

12. «C bir daire değildir» şeklinde bir bilgi «tamamen menfi bir bilgi» dir. C yi Misâl 9 la başa çıkacak bir tutamak verecek tarzda daha «müspet» bir şekilde karakterize edebilirmisiniz?

[Herhangi bir eğrinin herhangi üç noktası ya bir daire üzerinde, yahut aynı bir doğru üzerindedir. Dört nokta için durum nasıldır?]

13. Çevre uzunluğu L ve alanı A olan bir C eğrisi verilmiştir; C üzerinde ne aynı bir daireye ne de aynı bir doğruya ait dört P, Q, R, S noktası vardır. Aynı L çevre uzunluğunu, fakat A dan daha büyük bir A' alanını haiz bir C' eğrisi çiziniz [Misâl 2.]

14. Aşağıki iki soruyu karşılaştırınız:

Verilmiş bir çevre uzunluğunu haiz eğrileri nazarı itibara alalım. Eğer C böyle bir eğri ise, fakat bir daire değilse daha büyük bir alana sahip diğer bir C' eğrisi çizebiliriz. (Hakikaten, bu iş Misâl 10-13 te yapılmıştır. Burada C nin bir daire olmaması şartı muhakkak lâzımdır; çizimimiz dairenin alanını arttıramaz.) Buradan dairenin en büyük alana sahip olduğu neticesini çıkarabilir miyiz?

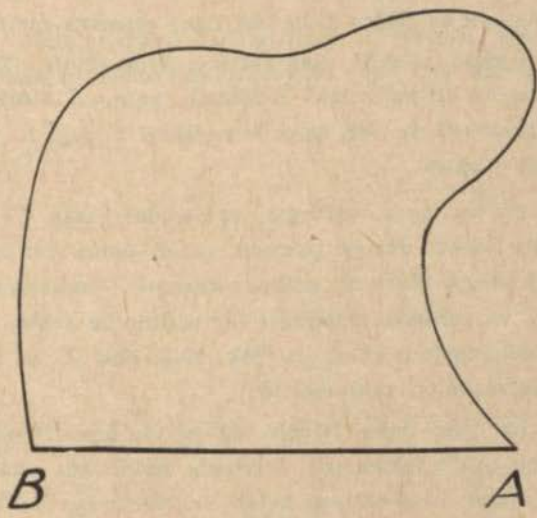
Pozitif tam sayıları nazarı itibara alalım. Eğer n böyle bir tam sayı ise, fakat 1 den farklı ise, n den büyük diğer bir n' sayısı bulabiliriz. (Hakikaten $n' = n^2$ alabiliriz. Burada $n > 1$ şartı mutlâka lâzımdır; verdiğimiz kaide $n = 1$ için suya düşer, çünkü $1^2 = 1$ dir.) Buradan 1 in en büyük pozitif tam sayı olduğu neticesini çıkarabilir miyiz?

Eğer varsa, iki soru arasındaki farkı gösteriniz.

15. Misâl 8 deki I′ ifadesini ispat ediniz.

İKİNCİ KISIM

16. *Sopa ve İp.* Bir sopa ile herbir ucu sopanın uçlarından birine bağlanmış olan (tabiî sopadan daha uzun) bir ip verilmiştir. Bu tertibatla mümkün olan en büyük alanı çevreleyiniz.



Şek. 10.13. Sopa ve İp

Sopayı yere yatırın. A ve B uçları onun mevkiini tamamen belirtir. Fakat ip, A da başlayıp B de bitmek ve verilmiş bir uzunluğu haiz olmak şartıyle sonsuz sayıda çeşitli şekiller alabilir (Şek. 10.13 e bakınız). İp için mümkün olan şekillerden biri, sopanın teşkil ettiği doğru parçasıyla birlikte bir daire parçası teşkil eden bir daire yayıdır. Buna (Şek. 10.14, I de taran-

mış) diğer bir daire parçası ilâve etmek suretiyle daireyi tamamlayınız ve bu sonuncu daire parçasının aynını sopa ile ipin keyfî bir durumunun teşkil ettiği şekle de (Şek. 10.14, II) ilâve ediniz. Şek. 10.14 teki I dairesi aynı çevreyi haiz diğer herhangi bir eğriden daha büyük bir alana sahiptir, ve Şek. 10.14 teki II eğrisi *böyle bir eğridir*. Aynı (taranmış) daire parçasını I ve II den çıkarırsak, şu neticeyi elde ederiz: Sopa ile ipin çevrelediği alan, *ipin bir daire yayı şeklini alması halinde maksimum olur.*

Bu netice, Şek. 10.13 teki değişen şekle sınırındaki değişmez doğru parçası boyunca herhangi bir değişmez şekil ilâve edilmesi halinde de doğru kalır. Bu ihtar ekseriya faydalı olur.

Yukarıkinin eşleniği olan neticeyi ifade ediniz. Yani, öyle bir ifade veriniz ki, yukardaki neticenin paragraf 8 deki I. Teoremle münasebeti ne ise, onun da paragraf 8 deki II. Teoremle münasebeti o olsun.

17. Bir açı (aynı başlangıç noktasından çıkan iki ışın arasında kalan sonsuz düzlem parçası) ve bu açının her kenarında birer tane olmak üzere iki nokta verilmiştir. Verilmiş noktaları birleştiren ve verilmiş uzunlukta bir eğrinin bu açıdan ayırdığı alanın maksimumunu bulunuz. (Şek. 10.11 deki X ve Y noktaları burada verilmiş, yani sabittir.)

18. 180° den daha küçük bir açı ve kenarlarından biri üzerinde bir nokta verilmiştir. Verilmiş noktadan çıkarak açının diğer kenarı üzerinde son bulan ve verilmiş bir uzunluğu haiz bir eğrinin bu açıdan ayırdığı alanın maksimumunu bulunuz. (Şek. 10.11 deki X noktası burada verilmiş, yani sabit, fakat Y noktası değişkendir.)

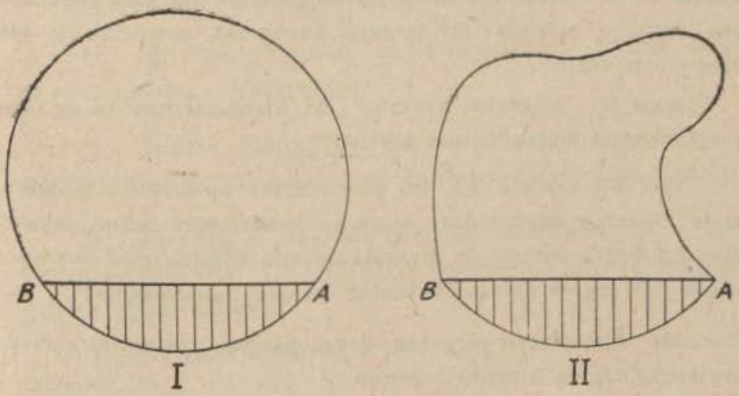
19. 180° den daha küçük bir açı verilmiştir. Bu açının bir kenarından öbürüne uzanan ve uzunluğu verilmiş bir eğrinin bu açıdan ayırdığı alanın maksimumunu bulunuz. (Şek. 10.11 deki X ve Y noktaları burada değişkendir. Buna dair bir faraziye paragraf 9 da ifade edilmişti.)

20. 180° den daha küçük bir açı verilmiştir. Bu açıdan uzunluğu verilmiş bir doğru parçasının ayırdığı alanın maksimumunu bulunuz.

21. *İki sopa ve iki ip.* AB ve CD gibi iki sopamız var. Birincinin B ucu bir ip vâsıtasıyla ikincinin C ucuna bağlanıyor. İkinci bir ip te D ile A yı birbirine bağlıyor. Bu tertibatla mümkün olan en büyük alanı çevreleyiniz.

22. Bir önceki problemi genelleştiriniz.

23. Aynı problemi özelleştiriniz ve metinde önemli bir rol oynamış olan bir elemanter teoremi bu yolla elde ediniz.



Şek. 10.14. Daire yayı prensibi

24. Uzayda bir daire verilmiş olsun. Bu dairenin çevresi ile sınırlanmış ve alanı evvelden verilmiş öyle bir yüzey parçası bulunuz ki, bu yüzey parçasının verilmiş dairenin yüzeyi ile birlikte sınırladığı hacım maksimum olsun. [Buna benzer bir problem biliyor musunuz ?]

25. *Uzay geometride Dido Problemi.* Bir üçyüzlü açı (bir noktada kesişen üç düzlemin uzayı böldüğü sekiz tane sonsuz parçadan biri) verilmiş olsun. Bu üç yüzlü açıdan alanı verilmiş bir yüzey parçasının ayırdığı hacmın maksimumunu bulunuz.

Bu problem pek zordur. Sizden istenen şey sadece, bu problemin yanına daha kolay yanaşılabilir bir özel halini seçerek onunla uğraşmanızdır.

26. Misâl 25 e benzer, fakat neticesini evvelden kestirebileceğiniz bir problem bulunuz. [Genelleştiriniz, özelleştiriniz, limite geçiniz, ...]

27. *Bir düzlem bölgenin alanortayları.* Bir eğri ile çevrili bir düzlem bölgeyi göz önüne alalım. Eğer çevre eğrisinin iki noktasını birleştiren (ve tamamen bölgeye ait) bir eğri yayı bölgeyi alanları eşit olan iki parçaya ayırıyorsa, ona bölgenin bir *alan ortayı* denir.

Aynı bir bölgenin herhangi iki alanortayının en az bir ortak noktası bulunduğunu gösteriniz.

28. Bir karenin şu iki alanortayını birbiriyle karşılaştırınız: karenin merkezinden geçen ve kenarlardan birine paralel olan bir doğru parçası ile merkezi karenin köşelerinden biri olan uygun bir çeyrek daire. Bunlardan hangisi daha kısadır?

29. Bir eşkenar üçgenin doğru parçası şeklindeki alanortayları içinde en kısasını bulunuz.

30. Bir eşkenar üçgenin en kısa alanortayını bulunuz.

31. Bir dairenin en kısa alanortaylarının o dairenin çapları olduğunu gösteriniz.

32. Bir elipsin en kısa alanortayını bulunuz.

33. Misâl 28-32 yi ihtiva eden genel teoremleri ifade etmeye çalışınız.

34. *Kapalı bir yüzeyin alanortayları* (9). Eğer kapalı bir yüzey üzerinde alınan kapalı ve kendi kendini kesmeyen bir eğri o yüzeyi alanları birbirine eşit iki parçaya (açık yüzeye) ayırıyorsa, o eğriye yüzeyin alanortayı denir.

Aynı yüzeyin iki alanortayının en az bir ortak noktası bulunduğunu gösteriniz.

35. Bir çokyüzlü yüzeyinin en kısa alanortayları, herbiri ya bir doğru parçası veya bir daire yayı olan parçalardan teşekkül eder.

36. Düzgün çokyüzlü yüzeylerinin en kısa alanortayları birer düzgün çokgendir. Bu düzgün çokgenlerin beş düzgün çokyüzlünün herbiri için biçim, yer ve sayılarını bulunuz. (Bu cisimlerin birer modeli ve bir lâstik şeritle tecrübe yapabilirsiniz)

37. Bir küre yüzeyinin en kısa alanortaylarının büyük daireler olduğunu ispat ediniz.

38. Misâl 37 nin öyle bir genelleştirmesini bulunuz ki, Misâl 36 nın önemli bir kısmını da kaplasın. [Misâl 9.23, 9.24.]

39. Yarıçapı a olan bir S küresi verilmiştir. S yi kesen bir küre yüzeyinin S içinde kalan kısmına S nin bir *diyaframı* diyelim. İspat ediniz ki:

(1) S nin merkezinden geçen bütün diyaframlar aynı alanı haizdir.

(2) S nin hacmını iki eşit kısma bölen hiçbir diyaframın alanı πa^2 den daha küçük değildir.

Bu son ifade ve incelenmiş olan benzer haller aklımıza bir faraziye getirir. Bu faraziyeyi ifade ediniz. [Misâl 31,37.]

(9) Burada yalnız küre «topolojik tipinde» olan kapalı yüzeyleri göz önüne alıyor ve meselâ (simit şeklindeki) halka yüzeyini bir tarafa bırakıyoruz.

40. *Birçok mükemmellikleri olan bir şekil.* Bir eğri tarafından çevrelenen bir düzlem bölge düşünelim. Verilmiş bir alanı haiz bütün bölgeler içinde, dairenin en kısa çevreyi haiz olduğunu ifade eden izoperimetri teoremine benzer birçok teoremlerden bazılarını gözden geçirmek istiyoruz.

Bu cinsten bir teoreme daha bundan önce rastlamış bulunuyoruz. Hakikaten paragraf 4 te şu ifadeye dair bazı endüktif delilleri gözden geçirmiştik: Verilmiş bir alanı haiz bütün zarlar içinde, daire şeklinde olanı en derin esas tonu verir.

Şimdi bölgeye her yerde aynı kalınlıkta olan homogen bir levha gözüyle bakalım ve bu levhanın düzlemine dik ve kendi ağırlık merkezinden geçen bir eksen etrafındaki atalet momentini göz önüne alalım. «Kutupsal atalet momenti» dediğimiz bu atalet momenti, diğer şeyler eşit olduğu takdirde, levhanın büyüklüğüne ve biçimine tâbidir. Aynı alanı haiz bütün levhalar içinde, daire şeklinde olanı en küçük kutupsal atalet momentini haizdir.

Bu levha, eğer elektrik geçirgeni ise, kendi elektrostatik kapasitesiyle orantılı bir elektrik yükü alabilir. Bu kapasite de levhanın büyüklük ve biçimine tâbidir. Aynı alanı haiz bütün levhalar içinde, daire şeklinde olanı en küçük elektrostatik kapasiteyi haizdir.

Bölgemizi şimdi de homogen bir elâstik kirişin kesiti olarak düşünelim. Eğer böyle bir kirişi ekseni etrafında burarsak, onun bu buruluşa karşı direndiğini görürüz. Kirişin bu direnci, yahut başka deyimle «burulma rijidite» si, diğer şeyler eşit olduğu takdirde kesitin büyüklük ve biçimine tâbidir. Aynı alanı haiz bütün kesitler içinde, daire şeklinde olanı en büyük burulma rijiditesini haizdir. ([10])

([10]) Burada işaret edilmiş olan teoremler ve benzerlerinin ispatları için G. Polya ve G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press, 1951 adlı kitaba bakınız.

Neden daire bu kadar çok sayıda ve bu kadar çeşitli maksimum ve minimum probleminin çözümüdür? Bunun «sebebi» nedir? Acaba hakikî sebep dairenin «tam simetri» si midir? Bu türlü müphem sorular, sadece müphem lâkırdı ve spekülâsyonlara dalmak yerine, daha sarih ve daha müşahhas şeylere inmeye ciddî surette gayret sarfetmek şartıyla düşünceyi tenbih edici ve semereli olabilirler.

41. *Benzer bir hal.* İzoperimetri teoremi ile ortalamalar teoremi arasındaki benzerliği görüyor musunuz? (Paragraf 8.6 ya bakınız.)

Kapalı bir eğrinin çevre uzunluğu, o eğrinin her noktasına, yahut her elemanına aynı tarzda tâbidir. O eğrinin çevrelediği bölgenin alanı da eğrinin her noktasına, yahut her elemanına aynı tarzda tâbidir. Çevre uzunluğu verildiğine göre alanın maksimumunu arıyoruz. Söz konusu her iki büyüklüğün tarifinde de eğrinin hiçbir noktası diğerlerinden ayrı bir rol oynamadığından dolayı çözümün, bütün noktalarını aynı tarzda ihtiva eden ve herhangi iki elemanı üst üste getirilebilen biricik kapalı eğri, yani daire olarak ortaya çıkması bizi şaşırtmamalıdır.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ toplamı $x_1, x_2, \ldots, x_n$

değişkenlerinin simetrik bir foksiyonudur; yani her değişkene aynı tarzda tâbidir. $x_1 x_2 \cdots x_n$ çarpımı da her değişkene aynı tarzda tâbidir. Şimdi bu değişkenlerin toplamı verildiğine göre, çarpımının maksimumunu arayalım. Söz konusu büyüklüklerin her ikisi de n değişkene göre simetrik olduğundan, çözümün $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ olmasını gerektirmesi bizi şaşırtmamalıdır.

Alan ve uzunluğun yanı sıra, kapalı bir eğrinin büyüklük ve biçimine tâbi öyle başka bir takım büyükler daha vardır ki, gene «eğrinin her elemanına aynı tarzda tâbi» olsunlar. Bu türlü birçok büyüklüğü Misâl 40 ta sıralamıştık. Bu cinsten bir büyüklük verildiği takdirde, aynı cinsten başka bir büyüklüğün

maksimumunu arayalım. Eğer böyle bir problemin bir çözümü varsa, onun muhakkak bir daire olması mı gerekmektedir?

Akla yakın bir cevap için, daha basit bir benzer hale dönelim ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gibi n değişkenli iki simetrik fonksiyon alarak, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ olarak verildiği takdirde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nin ekstremumlarını arayalım. Bazı hallerde hiçbir maksimum mevcut değildir, bazılarında da hiçbir minimum yoktur, fakat öyle bazı haller de vardır ki, onlarda ne bir maksimum, ne de bir minimum mevcuttur. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ şartı önemli bir rol oynamakla beraber ([11]), bir maksimum veya bir minimuma erişildiğinde bu şartın mutlâka gerçekleşmesi gerekmez. Bununla beraber, şu basit hakikat mevcuttur: Eğer

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \dots, \quad x_n = a_n$$

problemin bir çözümü ise,

$$x_1 = a_2, \quad x_2 = a_1, \quad x_3 = a_3, \dots, \quad x_n = a_n$$

de f ve g fonksiyonlarının simetrik oluşları dolayısıyla bir çözümdür. Şu halde, eğer $a_1 \neq a_2$ ise en az iki farklı çözüm vardır. *Eğer tek bir çözüm varsa* (yani ekstremuma $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin bir ve yalnız bir değer takımı için erişilirse) *bu çözümde* $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ *olması gereklidir.*

Fransızlar «Comparaison n'est pas raison» (Mukayese delil değildir) derler. Tabiatıyle, yukarıki gibi bir mukayese ispatlayıcı bir delil teşkil edemez, sadece buluşa yardımcı bir yol gösterir. Gene de böyle bir yol gösterişten bazan çok memnun kalırız.

Bir misâl olarak

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/n$$

([11]) G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities* adlı kitapta S. 109-110 ve orada zikredilen misâllere bakınız.

alarak, f nin $g=1$ şartı altında (1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin bütün reel değerleri, (2) bu değişkenlerin sadece negatif olmayan reel değerleri için ekstremumlarını bulunuz.

42. *Düzgün cisimler.* Yüzlerinin n sayısı ve yüzey alanı verilmiş bir çokyüzlünün maksimum hacmını bulunuz.

Bu çok güç problem paragraf 7 (1) deki benzer problem tarafından ilham edilmiş olup, bu sonuncu problemin çözümü de şu faraziyeyi ilham eder: Eğer n yüzlü bir düzgün çokyüzlü varsa, bu çokyüzlü maksimum hacmı verir. Bu faraziye ne kadar akla yakın görünürse görünsün, düzgün çokyüzlülerin mevcut olduğu beş halden ikisinde yanlışlığı meydana çıkmıştır. Hakikaten faraziye

$n=4,\ 6,\ 12$ için doğru,

$n=8,\ 20$ için yanlıştır.

Bu iki grup arasında ne fark vardır? Bu iki cins çokyüzlüyü birbirinden ayırdeden basit bir geometrik özelik bulmaya çalışınız.

43. *Endüktif deliller.* V, bir cismin hacmını, S de onun yüzey alanını göstersin. Paragraf 8 (3), benzerlik dolayısıyla

$$\frac{36\pi V^2}{S^3}$$

ü uzay geometride izoperimetrik bölüm olarak tarif etmeyi bize telkin eder. Gene benzerlik dolayısıyla, kürenin en yüksek izoperimetrik bölümü haiz olduğu faraziyesini ileri sürebiliriz. Cedvel III bu faraziyeyi endüktif olarak desteklemektedir.

Cedvel III te verilen rakamların bazılarını kontrol ediniz ve cedvele, yeni malzeme ilâve ediniz. Özellikle, izoperimetrik bölümü düzgün yirmiyüzlününkinden daha büyük olan bir cisim bulmağa çalışınız.

Cedvel III. $36\pi V^2/S^3$ izoperimetrik bölümü

Küre	1.0000
Düzgün yirmiyüzlü	0.8288
En iyi çifte koni	0.7698
Düzgün onikiyüzlü	0.7547
En iyi prizma	0.6667
Düzgün sekizyüzlü	0.6045
Küp	0.5236
En iyi koni	0.5000
Düzgün dörtyüzlü	0.3023

«En iyi» çifte koni, prizma ve koni için sırayla Misâl 8.38, 8.35 ve 8.52 ye bakınız.

XI

DAHA BAŞKA AKLA YAKIN DELİL NEVİLERİ

En basit münasebetler en çok rastlanılan münasebetler olup, endüksiyonun dayandığı temel de budur. — LAPLACE (1)

1. Faraziyeden faraziyeye fark. Buraya kadar anlatmış olduklarımız hep faraziyelerin matematik araştırmalarındaki rolüne dairdir. Verdiğimiz misâller teklif edilmiş olan bir faraziyenin lehinde veya aleyhinde iki nevi akla yakın muhakemeye bizi alıştırmak için bir fırsat teşkil etmişti: biz orada faraziyeden çıkarılan neticelerin gerçekleşmesinden meydana gelen endüktif deliller ile, benzerlikten doğan delilleri münakaşa etmiştik. Acaba bir faraziyenin lehinde veya aleyhinde olmak üzere başka nevi akla yakın deliller de var mıdır? Bu bölümde verilecek misâllerin amacı bu noktayı berraklığa kavuşturmaktır.

Faraziyelerin de muhtelif nevileri bulunduğunu kabûl etmemiz gerekir: büyük ve küçük, orijinal ve gündelik faraziyeler. İlim tarihinde parlak bir rol oynamış olan faraziyeler mevcut olduğu gibi, en mütevazi bir matematik problemi bile kendi çapında mütevazi bir faraziye veya tahmine ihtiyaç gösterebilir. Biz burada sınıfta geçen misâllerden başlıyarak tarihî önemi haiz diğer faraziyelere yükseleceğiz.

---

(1) Essai philosophique sur les probabilitiés; *Oeuvres complètes de Laplace*, vol. 7, S. CXXXIX a bakınız.

2. Bir ilgili hale göre hüküm vermek. Bir problem üzerinde çalışırken ekseriya bir tahmin yapmaya çalışırız. Tabiî, mümkünse bütün çözümü tahmin etmek isteriz. Fakat bunu başaramazsak, çözümün şu veya bu yönünü tahmin edebilmek bizi pek âlâ tatmin eder. Hiç olmazsa, problemimizin «mantıkî» bir problem olup olmadığını bilmek isteriz ve kendi kendimize şöyle sorarız: Problemimiz mantıkî midir? *Verilen şartı gerçeklemek mümkün müdür? Bu şart bilinmiyeni bulmaya yeter mi? Yoksa yetmez mi? Yahut o şart lûzumdan fazla şey ihtiva ediyor mu? Yahut bir tenakuz ihtiva ediyor mu?* (2)

Böyle sorular tabiî olarak aklımıza gelir ve, kendilerinin nihaî değil de sadece geçici veya tahminî birer cevabının işimizi görmeğe yettiği, çalışmalarımızın başlangıç safhasında faydalı olurlar. Öyle haller vardır ki, onlarda bu soruların cevaplarını gayet akla yakın bir şekilde ve pek az güçlükle tahmin edebiliriz.

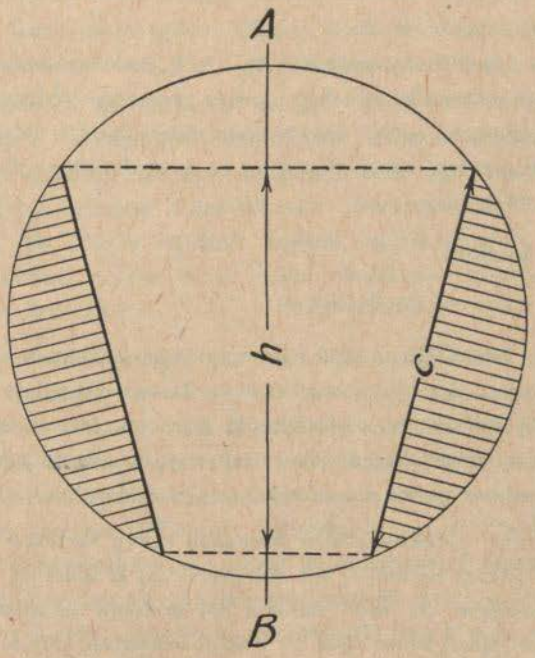
Bir misâl olarak, uzay geometriye ait bir elemanter problem ele alacağız. Bir silindirin ekseni bir kürenin merkezinden geçmektedir. Silindirin yüzeyi kürenin yüzeyini keserek som küreyi, «oyulmuş küre» ve «tıkaç» olmak üzere iki kısma ayırmaktadır. Birinci kısım silindirin dışında, ikincisi içindedir. (*AB* düşey doğrusu etrafında döndürülmüş olması gereken) Şek. 11.1 e bakınız. *Kürenin r yarıçapı ve silindir şeklindeki oyuğun h yüksekliği verildiğine göre, oyulmuş kürenin hacmını bulunuz.*

Sorulmuş olan problemi tanımağa çalışırken tamamen tabiî bir şekilde mûtad sorulara geliriz: *Veriler bilinmeyeni belirtmeğe yeterli midir? Yoksa yetersiz midir? Yahut, verilerde bir fazlalık var mıdır?* r ve h verileri problemi çözmeğe tamamı tamamına yeter görünmektedir. Hakikaten, r kürenin büyüklüğünü ve h da silindrik oyuğun büyüklüğünü belirler. r ve h yı bilince

(2) *How to Solve It*, S. 111

oyulmuş kürenin biçim ve büyüklüğünü belirleyebildiğimiz gibi, onları belirlemek için de r ve h nın bilinmesine lûzum vardır.

Fakat, istenen hacmı hesaplarsak $\pi h^3/6$ buluruz (Misâl 5 e bakınız). Bu netice son derece paradoksal görünmektedir. Çünkü



Şek. 11.1. Oyulmuş küre

biraz önce oyulmuş kürenin biçim ve büyüklüğünü belirlemek için hem r hem de h ya muhtaç olduğumuza kanaat getirmiştik, halbuki şimdi bu cismin hacmını belirlemek için r ye ihtiyacımız olmadığı ortaya çıkıyor. İnanılması güç bir şey!

Bununla birlikte, burada bir tenakuz yoktur. Eğer h sabit kalır ve r artarsa, oyulmuş küre adam akıllı şekil değiştirir,

daha açık olarak, gittikçe genişler (bu da hacmı arttırmağa meyleder), fakat dış yüzeyi gittikçe basıklaşır (ki bu da hacmı azaltmağa meyleder). Yukarda önceden görmemiş olduğumuz (ve önceden görülmesi zaten pek muhtemel olmayan) tek şey bu iki eğilimin birbirini tamamı tamamına yok ederek, hacmın sabit kalacağıdır.

Hem içinde bulunduğumuz özel hali, hem de onun altındaki genel fikri anlamak için bir ayırım yapmağa ihtiyaç vardır. Burada birbirine bağlı, fakat birbirinden farklı iki problemi açıkça birbirinden ayırmalıyız: r ve h verildiğine göre bizden oyulmuş kürenin

(*a*) hacmını

(*b*) biçim ve büyüklüğünü

bulmamız istenebilir. Bizim başlangıçtaki problemimiz (*a*) idi. Öte taraftan sezgi yoluyla r ve h verilerinin (*b*) yi çözmek için gerek ve yeter olduğunu görmüştük. Buradan, bu verilerin (*a*) yı çözmek için yeter olduğu çıkar, fakat gerek olduğu çıkmaz; hakikaten onların gerek olmadıkları ortaya çıkmıştır.

«Veriler gerekli midir?» sorusuna cevap verirken, *ilgili bir hale göre hüküm verdik*, yani (*a*) *yerine* (*b*) *yi aldık ve başlangıçtaki* (*a*) *problemi ile tadil edilmiş* (*b*) *problemi arasındaki farkı ihmâl ettik*. Keşfi hedef alan bir noktai nazardan, böyle bir ihmâl savunulabilir. Bizim sadece geçici, fakat çabuk bir cevaba ihtiyacımız vardı. Bundan başka böyle bir fark *genellikle* ihmâl edilebilir: biçim ve büyüklüğü belirlemek için gerekli olan veriler *genellikle* hacmı belirlemek için de gereklidir. Yukarda, neticemizin sadece keşfi amaç tutan karakterini unuttuğumuz, yahut *mûtad olmayan* bir durumun hiçbir zaman vukubulmayacağına müphem bir şekilde inandığımızdan bir paradoksun içine düştük. Hakikaten de misâlimizde mûtad olmayan durum vuku buldu.

Sorulmuş bir problem hakkında onun tâdil edilmiş bir şekli üzerinde hüküm vermek savunulabilir, akla yakın ve keşfe yarayan bir iştir. Bununla beraber, böyle bir yoldan varılan netice sadece geçici olup, nihaî değildir; bu netice sadece akla yakındır, fakat onun doğruluğu hiç te muhakkak değildir.

3. Genel hale göre hüküm vermek. Aşağıki problemin münakaşası bir Cebire Başlangıç dersinde pek âlâ yer alabilir:

Üç çocuklu bir babanın vasiyeti aşağıki hükümleri ihtiva etmektedir: «Mirasından en büyük oğluna düşecek hisse diğer iki oğlunun hisseleri ortalamasından üç bin dolar fazla, ikinci oğlunun hissesi diğer ikisinin hisselerinin tam ortalamasına eşit, en küçük oğlunun hissesi ise ilk ikisinin hisseleri ortalamasından üç bin dolar eksik olacaktır.» *Herbir çocuğun hissesi ne kadardır?*

İleri sürülen şart bilinmeyenleri belirlemeye geterli midir? Buna evet cevabını vermek için elimizde iyi bir sebep vardır. Hakikaten burada x, y, z gibi sırasıyla en büyük, ortanca ve en küçük oğulların hisselerine tekabül eden üç bilinmeyen vardır. Vasiyetnameden alınan yukarıki üç cümleden her biri bir denkleme tercüme edilebilir. Biliyoruz ki, *genel olarak üç denklemli ve üç bilinmeyenli bir sistem* bilinmeyenleri tamamiyle belirler. Böylece, sorulmuş olan problemdeki şartın bilinmeyenleri belirlemeye yeter olduğunu zannetmeğe gayet akla yakın bir tarzda sevkedilmiş oluyoruz.

Fakat söz konusu üç denklemi yazarsak aşağıki sistemi elde ederiz:

$$x = \frac{y+z}{2} + 3000$$

$$y = \frac{x+z}{2}$$

$$z = \frac{x+y}{2} - 3000$$

Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$x+y+z=x+y+z,$$

yahut

$$0=0$$

elde ederiz. Şu halde sistemin herhangi bir denklemi diğer iki denklemin bir neticesidir. Şu halde sistemimiz yalnız iki *müstakil* denklem ihtiva etmekte olup, hakikatte bilinmeyenleri belirlemeğe *yetmez*.

Eğer vasiyetname bir de şu cümleyi de ihtiva ederse, problem esaslı bir değişikliğe uğrar: «15,000 dolarlık bütün servetimi üç oğlum arasında taksim ediyorum.» Bu cümle yukarıki sisteme

$$x+y+z=15{,}000$$

denklemini ekler. Şimdi dört denklemli daha geniş bir sistem elde etmiş oluyoruz. Fakat *genel olarak, dört denklemli ve üç bilinmeyenli bir sistemin hiçbir çözümü olamaz*. Bununla birlikte, elimizdeki sistem hiçbir çözümü bulunmayan bir sistem olmayıp, bilinmeyenleri belirlemeye tam yetecek bir sistemdir ve hakikaten söz konusu bilinmeyenler için

$$x=7000,\quad y=5000,\quad z=3000$$

değerlerini verir.

Çok derin olmayan bu misâldeki zahirî tenakuzları bertaraf etmek çok güç değildir, fakat bu hususta dikkatli bir izah faydalı olabilir.

«n denklem ve n bilinmeyenli bir sistemin bilinmeyenleri tamamiyle belirttiği» doğru değildir. Hakikaten bir az önce $n=3$ için bu iddiayı yalanlayan bir misâl gördük. Bununla beraber bu hususta önemli olan şey, bir matematik teoremi değil, fakat buluşa yardımcı olan bir ifade, daha doğrusu şu ifadedir: «n denklemli ve n bilinmeyenli bir sistem, *genel olarak*, bilinme-

yenleri tamamiyle belirtir.» «Genel olarak» terimi türlü şekillerde tefsir edilebilir. Burada önemli olan şekil, biraz müphem ve kaba bir «pratik» tefsirdir: Eğer bir ifade «tabiî olarak vukubulan hallerin büyük bir çoğunluğunda» doğru olursa, o ifade «genel olarak» doğrudur.

Bir geometri veya fizik problemini cebir ile çözerken sezgi ile verilen bir şartı denklemlerle ifade etmeğe çalışırız. Şartın ayrı ayrı parçalarını birer denklemle ifade etmeye ve bu denklemlerle bütün şartı kaplamağa uğraşırız. Eğer elimizdeki bilinmeyenlerin sayısı kadar denklemi bir araya getirmeyi başarırsak, bilinmiyenleri belirleyebileceğimizi ümit ederiz. Bu ümit akla yakındır. Denklemlerimiz «tabiî olarak vukubulduklarından», «genel halde» bulunduğumuzu bekleyebiliriz. Halbuki bu paragrafın başında vermiş olduğumuz misâl tabiî olarak vukubulmamış, bulmaya yardımcı karakterde olan yukarıki ifadenin mutlak kesinlikten mahrum olduğunu göstermek için yazar tarafından sun'î olarak imâl edilmişti. Şu halde bu misâl temeldeki buluşa yardımcı prensibi hiçbir zaman bozmaz.

Günlük hayatta da buna benzer bir şeye güveniriz; çok makûl olarak, pek seyrek vukubulan şeylerden o kadar korkmayız. Meselâ, mektuplar postada kaybolabilir ve trenler kaza yapabilir; fakat buna rağmen postayla mektup yollar ve çekinmeden trene bineriz. Çünkü, ne de olsa bir mektubun kaybolması veya bir trenin kazaya uğraması son derece nâdir vukubulan olaylardır; mektupların veya trenlerin ancak pek küçük bir kısmının başına böyle bir kaza gelebilir. Bu kaza neden tam da bize rastlasın? Aynı şekilde, gayet tabiî bir yoldan elde edilen n bilinmiyenli n tane denklem bu bilinmiyenleri belirlemeye yetmeyebilir. Fakat, genel olarak bu hal vukubulmaz; o halde neden tam da bizim uğraştığımız problemde vukubulsun?

Az da olsa, bir parça eyimser olmadan ne yaşayabiliriz, ne de problem çözebiliriz.

4. Daha basit faraziyeyi tercih etmek. Skolâstikler, «Simplex sigillum veri», yani «basitlik doğrunun damgasıdır» demişlerdi. Bugün ise, insanlık daha yaşlandığı ve araya giren yüzyılların ilimdeki büyük tecrübesiyle zenginleştiği için, ifadelerimizde daha ihtiyatlı olmalıyız; biliyoruz ki hakikat bazan son derece muğlâk olabilir. Belki de skolâstikler, basitliğin hakikatin zarurî bir vasfı olduğunu kastetmemişler, sadece şu bulmaya yardımcı prensibi ifade etmek istemişlerdi: «Basit olan şey, doğru olmak hususunda oldukça büyük bir şansa sahiptir.» Bundan daha az bir iddiada bulunmak ve kendimizi sadece şu nasihata hasretmek belki daha da iyidir: «Basit olan şeyi daha önce dene.»

Bu sağduyu nasihatı (biraz müphem bir şekilde de olsa) yukarda münakaşa etmiş olduğumuz bulmaya yardımcı adımlarda da uygulanmıştır. Biçim değişince hacmın da değişmesi yalnız mûtad hâl değil, fakat aynı zamanda en basit hâldir. n bilinmiyenli n denklemden teşekkül eden bir sistemin bilinmeyenleri belirlemesi yalnız genel hâl değil, fakat aynı zamanda en basit hâldir. En basit hali ilk önce denemek akla yakın bir iştir. Hattâ sonunda daha karışık imkânları yakından incelemek zorunda kalsak bile, daha önce en basit hali incelememiz buna faydalı bir hazırlık teşkil edebilir.

En basit şeyi ilk önce denemek, küçük veya büyük problemlerin karşısında faydalı olan bir davranış tarzının bir parçasını teşkil eder. Meselâ (son derecede basitleştirilmiş ve, şüphesiz, biraz tahrif edilmiş bir şekilde) Galileo'nun cisimlerin düşme kanununu araştırdığı esnadaki davranışını tasavvur etmeye çalışalım. Eğer modern ilmin başlangıcını belirli bir tarihe bağlamak istersek, Galileo'nun bu araştırmasını yaptığı tarih bunun için en uygun tarih sayılmalıdır.

Galileo'nun durumunu iyice anlamamız lâzımdır. Galileo'nun kendi görüşlerini paylaşan birkaç müjdecisi ve birkaç arkadaşı vardı, fakat kendisine o zamanki hâkim felsefî okul olan Aristo

okulunun mensupları tarafından şiddetle muhalefet edilmekteydi. Aristo okulunun bu mensupları «Cisimler niçin düşüyor?» sorusunu soruyorlar, ve sığ ve hemen tamamen lâfzî bir izahla kanaat ediyorlardı. Galileo ise, «Cisimler nasıl düşüyor?» diye sormuş ve tecrübe vasıtasıyla buna, sayılar ve matematik kavramlarla ifade edilebilen, sarih bir cevap bulmaya çalışmıştı. «Niçin?» yerine «Nasıl?» sorusunun konulması, buna tecrübe vâsıtasıyla bir cevap aranması, ve tecrübî hakikatleri kendisinde teksif eden bir matematik kanunun aranması bugünkü ilimde bize çok tabiî gelen ve çok alışık olduğumuz şeylerdir, fakat Galileo'nun zamanında bunlar ihtilâl mahiyetinde yeniliklerdi.

Daha yüksek bir yerden düşen bir taş, yere daha büyük bir şiddetle çarpar. Daha yüksek bir noktadan inen bir çekiç, bir kazığı yerde daha derine çakar. Düşen bir cisim hareket noktasından ne kadar çok uzaklaşırsa, o kadar hızlı hareket eder — bu kadarının basit bir müşahededen öğrenilebilecegi açıktır. *Burada en basit faraziye nedir?* Sükûnetten harekete geçen bir düşen cismin hızının *kat'edilen uzaklık ile orantılı* olduğunu farzetmek yeter derecede basit görünmektedir. Galileo, «Bu prensip çok tabiî görünmekte ve darbe ile işleyen makinelerde kazandığımız tecrübeye uygun düşmektedir» demektedir. Bununla beraber, Galileo sonunda hızın uzaklıkla orantılı oluşu faraziyesini «sadece yanlış değil, fakat imkânsız» olması gerekçesiyle reddetmiştir. (2)

Galileo'nun, başlangıçta kendisine o derece tabiî gelmiş olan, bu faraziyeye karşı itirazları Diferansiyel ve İntegral Hesap diliyle daha açık ve daha göze çarpar bir şekilde ifade edilebilir. Bu tabiatıyla tarihî hakikatlere uymamaktadır; çünkü Diferansiyel ve İntegral Hesap Galileo'nun zamanından sonra, ve hiç olmazsa kısmen, Galileo'nun keşiflerinin sadmesi tesiriyle

(2) *Le Opere di Galileo Galilei* (Galileo'nun Eserleri), edizione nazionale, Cilt 8, S. 208, 373, 383 e bakınız.

keşfedilmişti. Buna rağmen, gene Diferansiyel ve İntegral Hesabı kullanalım. Düşüşün başından itibaren geçen zamanı t, kat'edilen uzaklığı x ile gösterelim. Bu takdirde hız, $\frac{dx}{dt}$ dir (Galileo'nun başarmış olduğu işlerden biri de berrak bir hız kavramı ifade etmiş olmasıdır). g uygun bir pozitif sabit olsun. Bu takdirde, hızın kat'edilen uzaklıkla orantılı olduğuna dair yukarıki «en basit faraziye» şu diferansiyel denklemle ifade edilir:

$$\frac{dx}{dt} = gx . \tag{1}$$

Buna,

$$t = 0 \quad \text{için} \quad x = 0 \tag{2}$$

başlangıç şartını ilâve etmemiz lâzımdır. (1) ve (2) denklemlerinden

$$t = 0 \quad \text{için} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \tag{3}$$

neticesi çıkar ki, bu da düşen cismin sükûnetten harekete geçtiğini ifade eder.

Bununla beraber, (1) diferansiyel denklemini integre ederek

$$\int \frac{dx}{x} = \int g\, dt ,$$

ve c uygun bir pozitif sabiti göstermek üzere

$$\log x = gt + \log c$$

elde ederiz. Bu bize

$$x = c\, e^{gt} , \quad \frac{dx}{dt} = g\, c\, e^{gt}$$

verir. Buradan ise

$$t = 0 \quad \text{için} \quad x = c > 0 , \quad \frac{dx}{dt} = gc > 0$$

elde ederiz ki, bu (2) ve (3) ile tenakuz halindedir. Şu halde (1) diferansiyel denklemini gerçekleyen bir hareket *sükûnetten itibaren başlayamaz*. Böylece o kadar «tabiî» ve tam da «en basit şey» olarak görünen faraziyenin aslında tenakuz ihtiva ettiği, bizzat Galileo'nun sözleriyle «sadece yanlış değil, fakat imkânsız» olduğu anlaşılmış oluyor.

Fakat acaba «ondan sonra gelen en basit şey» nedi ? O şey, sükûnetten harekete geçen bir düşen cismin hızının geçen zaman ile orantılı bulunduğu faraziyesi olabilir. Bu, Galileo'nun sonunda ulaşmış olduğu çok iyi bildiğimiz kanundan başka birşey değildir. Bu kanun bugünkü yazış tarzımızla

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

denklemi ile ifade edilir ve bu denklemi gerçekleyen bir hareket pekâlâ sükûnetten başlıyabilir.

5. Arka plândaki muhit. Galileo'nun fikrî cesaretine, felsefî peşin hükümlerden ve mistisizmden kendini kurtarabilmiş olmasına karşı hayranlık duymaktan geri kalamayız. Fakat Kepler'in başarıları da bizde hayranlık uyandırmalıdır; halbuki Galileo'nun çağdaşı olan Kepler, zamanının mistisizm ve peşin hükümlerinin derin tesiri altında kalmıştı.

Kepler'in davranışını anlamak bizim için güçtür. Modern okuyucu, «*KÂİNATIN SIRRI'nı* ihtiva eden, kozmografik münakaşalara dair bir hazırlık kitabı. Gök cisimlerinin yörüngelerinin hayranlık uyandırıcı orantısının ve bu cisimlerin sayı, büyüklük ve periodik hareketlerinin hakikî sebeplerinin beş düzgün geometrik cisim vâsıtası ile ispatı.» gibi bir kitap adı, karşısında hayrete düşer. Kepler'in bu kitabının muhtevası daha da hayret vericidir : İlâhiyat ile karışık Astronomi, müneccimlik ile karıştırılmış geometri. Fakat, muhtevasının bir kısmı ne kadar acaip görünürse görünsün, Kepler'in bu ilk eseri, onun Astronomi alanındaki

büyük keşiflerinin başlangıcına işaret etmekte ve bunun yanında şahsiyetinin canlı ve çekici bir tablosunu vermektedir. Onun bilgiye susamışlığı, esrarengiz şeylere susamışlığı da hemen hemen aynı şiddetle olmakla beraber, hayranlık uyandıracak derecede büyüktü.

Eserin adının gayet doğru bir şekilde belirttiği gibi, Kepler gezegenlerin sayısı, güneşten uzaklıkları ve güneş etrafındaki dönme peryotları hakkında bir sebep aramaya girişmişti. Hakikaten, o şunları soruyordu; Neden tam altı tane gezegen vardır? Bu gezegenlerin yörüngeleri neden tabiatta rastladığımız şekilde sıralanmıştır? Bu sorular bize garip görünebilir, fakat onlar Kepler'in bazı çağdaşlarına böyle görünmemekte idi. (4)

Kepler bir gün bunun sırrını bulduğunu zannetti ve not defterine şunu kaydetti: «Dünyanın yörüngesi, yahut küresi hepsinin ölçüsüdür. Bu kürenin dışına bir düzgün onikiyüzlü çizerseniz, bu onikiyüzlüyü çevreleyen küre Mars'ın küresidir. Mars'ın küresi dışına bir düzgün dörtyüzlü çizerseniz, bu dörtyüzlüyü çevreleyen küre Jüpiterin küresidir. Jüpiterin küresinin dışına bir küp çizerseniz, bu küpü çevreleyen küre Satürnünkidir. Şimdi Dünyanın küresi içine bir düzgün yirmiyüzlü çizerseniz, bu yirmiyüzlünün ihtiva ettiği küre Venüsünkidir. Venüsün küresi içine bir düzgün sekizyüzlü çizerseniz, bu sekizyüzlünün ihtiva ettiği küre Merkürünkidir. İşte gezegenlerin sayısının sebebi.»

Yani Kepler, aynı merkezi haiz 11 tane yüzey tasavvur etmekte olup, bunlar bir küre, bir düzgün cisim olmak üzere iç içe girmiş 6 küre ile 5 düzgün cisimden ibarettir. En dıştaki yüzey bir küre olup, her yüzey bir önceki tarafından çevrelenmiştir. Kürelerden herbiri gezegenlerden biri ile şu şekilde ilgilidir: Kürenin yarıçapı o gezegenin güneşten olan uzaklığına

(4) Kepler, 6 nın ilk mükemmel sayı olduğundan dolayı tam altı gezegen bulunduğu yolundaki Rhaeticus'un izahını reddetmektedir.

(ortalama uzaklık) eşittir. Her düzgün cisim kendinden bir önce gelen ve kendini çevreleyen kürenin içine çizilmiş olup, kendinden bir sonra gelen ve kendinin çevrelediği kürenin dışına çizilmiştir.

Kepler notuna şunları ilâve ediyor: «Bu keşfin bende uyandırmış olduğu hazzı hakkıyle ifade edebilecek kelimeleri hiçbir zaman bulamıyacağım.»

Kepler, faraziyesini vâkıalarla dikkatle mukayese etmiş (ki bu bakımdan modern bir ilim adamı gibi hareket etmiş oluyor) ve aşağıda biraz modernleştirilmiş şeklini Cedvel I adı altında vereceğimiz bir cedvel hesaplamıştır.

Cedvel I. Kepler'in teorisinin gözlemlerle karşılaştırılması

(1)	(2)	(3)	(4)
Gezegenler	Copernicus'ün gözlem neticeleri	Kepler'in teorisi	Düzgün cisimler
Satürn			
	0,635	0,577	Küp
Jüpiter			
	0,333	0,333	Dörtyüzlü
Mars			
	0,757	0,795	Onikiyüzlü
Dünya			
	0,794	0,795	Yirmiyüzlü
Venüs			
	0,723	0,577	Sekizyüzlü
Merkür			

(1) sütunu gezegenlerin güneşe olan uzaklıklarının azalış sırasına göre bir listesini vermekte olup, altı tane, yani öteki sütunlardan bir fazla sayıda, giriş ihtiva etmektedir. (2) sütunu iki müteakip gezegenin güneşten olan uzaklıkları oranını Copernicus'e göre vermektedir; böyle her oran ait olduğu iki gezege-

nin adlarını ihtiva eden satırların arasına yazılmış olup, dıştaki gezegenin uzaklığı bu oranın paydasını teşkil etmektedir. (4) sütunu beş düzgün çok yüzlüyü Kepler tarafından seçilmiş olan sırada vermektedir. (3) sütunu ise, bu düzgün cisimlere tekabül eden içe ve dışa çizilmiş kürelerin yarıçaplarının oranını vermektedir. Aynı satırda bulunan rakamların birbirine eşit veya çok yakın olması lâzımdır. Hakikaten Copernicus'ün gözlem neticeleri ile Kepler teorisinin neticelerinin birbirine uygunluğu satırların ikisinde iyidir, fakat geri kalan üç satırda çok kötüdür.

Kepler bundan sonra (modern bir ilim adamına daha az yaraşacak bir şekilde) bakış noktasını değiştirmeye ve başlangıçtaki faraziyesini tâdil etmeye başlamaktadır. (Keplerin yaptığı esas değişiklik, Merkürün güneşten uzaklığını düzgün sekiz yüzlünün içine çizilen kürenin yarıçapı ile karşılaştıracağı yerde, bu uzaklığı belirli bir simetri düzleminin sekiz yüzlüyü kestiği karenin içine çizilen dairenin yarı çapı ile kıyaslamasıdır.) Buna rağmen faraziye ile müşahede arasında göze çarpacak hiçbir uygunluğa varamamaktadır. Fakat fikrine gene de sıkı sıkıya sarılmakta devam etmektedir. Çünkü, küre «en mükemmel şekil» ve ondan sonra da, Platon'un da bildiği, beş mükemmel cisim «en asil şekiller» dir. Kepler bir an için, sayısız sabit yıldızların teşkil ettiği kalabalığın bir özelliği bulunmayan düzgün olmayan cisimlerin çokluğu ile bir ilgisi bulunduğunu düşünmektedir. Bu yüzden, en mükemmel yaratılmış şeyler olan güneş ve gezegenlerin Öklid'in en mükemmel şekilleriyle herhangi bir tarzda ilgili bulunması ona «tabiî» görünmektedir. Yaratılışın sırrı, «Kâinatın sırrı», bu olabilirdi.

Kepler'in faraziyesi bugünkü insana gülünç gelebilir. Biz bugün müşahede edilebilen vâkıalar ve matematik kavramlar arasında birçok münasebetler biliyoruz, fakat bu münasebetler bambaşka karakterde olup, Kepler'in faraziyesine uzaktan bile benziyen hiçbir faydalı münasebet bilmemekteyiz.

Kepler'in gezegenlerin sayısı arkasında derin bir sırrın

saklı olduğuna inanabilmesi ve «Neden tam altı gezegen vardır?» diye bir soru sorması bugün bize son derece garip gelmektedir.

Kepler'in faraziyesini acaip bir sapıklık telâkki etmek hevesine kapılabiliriz. Fakat, bugün saygı ile münakaşa etmekte olduğumuz bazı teorilerin de pek te uzak olmayan bir gelecekte, eğer tamamen unutulmazlarsa, acaip sapıklar sayılabilecekleri ihtimalini gözden uzak tutmamalıyız. Bence Kepler'in faraziyesi son derece öğreticidir. Bu faraziye akılda tutulmağa lâyık bir noktayı özel bir berraklıkla ortaya koymaktadır: bir faraziyeye karşı besleyeceğimiz güven derecesi ister istemez bizim bütün yetişme tarzımıza, zamanımızın bütün *ilmî atmosferine* bağlı olacaktır.

6. Tükenmez sebepler. Yukarıki misâl akla yakın muhakemenin önemli bir özelliğini ön plâna getirmektedir. Bu özelliği oldukça genel bir tarzda belirtmeye çalışalım.

Elimizde meselâ A gibi bir faraziye bulunsun. Yani A, açık bir şekilde formüle edilmiş, fakat ispatlanmamış bir faraziye olsun. A nın doğru olduğunu zannetmekteyiz, fakat hakikaten doğru olup olmadığını bilmemekteyiz. Bununla birlikte A faraziyesine karşı oldukça güven beslemekteyiz. Böyle bir güven karışık bir temele dayanabilir, fakat bunun mutlâka böyle olması icabetmez. Meselâ bir problem ile uzun bir süre ve görünüşe göre başarısız uğraştıktan sonra, hatırımıza birdenbire bir A faraziyesi gelebilir. Bu A faraziyesi karışık bir durumdan sıyrılabilmek için biricik yol olarak görünebilir; bu faraziyenin doğruluğu, her nekadar sebebini söyleyemesek te, bize hemen hemen muhakkak görünebilir.

Bir müddet sonra, A faraziyesini ispata yetmemekle beraber, onun açıkça lehinde olan daha derin sebepler aklımıza gelebilir: benzerlik, endüksiyon, ilgili hallerden veya genel tecrübeden yahut A nın kendi sadeliğinden doğan sebepler. Böyle

sebepler, *A* nın kesin bir ispatını teşkil etmemekle beraber, onu çok akla yakın kılabilir.

Bununla beraber, daha açık formüle etmiş olduğumuz bu deliller olmadan bir faraziyeye inanmak hususunda müteyakkız olmalıyız.

Biz bu sonuncu delilleri arka arkaya farkettik. Evvelâ karanlık bir fondan kendimizi ayırmağa muvaffak olduğumuz açık bir ilk noktaya vardık. Fakat bu noktanın arkasındaki fonda bir şey daha olmalıydı ki, oradan diğer bir açık delil daha çıkarmaya muvaffak olduk. Ve böylece açıklanan her noktanın arkasında bir şey daha bulunabilir ve bu fon tüketilemez. *Bir faraziyeye olan güvenimiz belki hiçbir zaman yalnız açıklanmış sebeplere dayandırılamaz;* böyle bir güvenin temeli olarak herhangi bir şekilde bütün yetişme tarzımıza ihtiyaç hâsıl olabilir.

Buna rağmen akla yakın sebepler önemlidir, açıklanmış olan akla yakın sebepler ise bilhassa önemlidir. Müşahede edilebilir realite ile meşgul olurken, hiçbir zaman (dedüktif olarak) ispat edilebilen hakikatlere varamadığımızdan daima akla yakın delillere dayanmak zorundayız. Sırf matematik problemleriyle uğraşırken kesin ispatlara varmamız mümkün olabilir. Fakat bu iş çok zor olabilir. Bu yüzden akla yakın sebeplerin geçici olarak göz önüne alınışı bize geçici bir destek sağlayabilir ve bizi sonunda kesin dedüktif ispatın keşfine götürebilir.

Buluşa yardımcı sebepler, hiçbir şey ispat etmemekle beraber, çok önemlidir. Bu türlü sebepleri açıklamak (izah etmek) ta, açıklanan her sebebin arkasında başka birşey - belki daha karanlık ve daha önemli bir sebep - bulunsa bile, çok önemlidir (5).

Bu, şu soruyu akla getiriyor: Eğer herbir müşahhas halde akla yakın sebeplerimizden ancak bir kaçını izah edebiliyor ve hiçbir müşahhas halde onları tüketemiyorsak, akla yakın sebep

(5) How to Solve It, S. 224.

nevilerini mücerret olarak tam manâsıyla anlatabilmeyi nasıl ümit edebiliriz ?

7. **Buluşa yardımcı mûtad kabûller.** Vermiş olduğumuz misâllerden ikisi (paragraf 2 ve 3) başka bir noktayı ortaya çıkarmaktadır. Onlardan birindeki durumu kısaca hatırlatarak, benzer bir duruma dokunalım.

Bir problem üzerinde çalışırken, farklı kaynaklardan bilinmiyen sayısı kadar denklem elde ediyorsunuz. n denklemin n tane bilinmiyeni belirtmeye her zaman yetmiyeceğini bilmeniz lâzımdır : bu denklemler birbirinden müstakil olmıyabilir veya birbiriyle tenakuz halinde bulunabilirler. Buna rağmen böyle bir hal istisnaî olup, denklemlerinizin bilinmeyenleri belirteceğini ümit etmek akla yakın olabilir. Şu halde işe devam ederek denklemlerinizle bir takım işlemler yapıyor ve bu işlemlerin neticesine bakıyorsunuz. Eğer sistemde bir tenakuz veya belirsizlik varsa, nasıl olsa kendisini bir yerde gösterecektir. Diğer taraftan temiz bir neticeye varırsanız, kesin bir ispat yolunda daha fazla zaman ve gayret sarfetmek hususunda kendinizi daha istekli hissedebilirsiniz.

Başka bir problemi çözerken, bir sonsuz serinin terim terime integrasyonuna sevkedilmiş olduğunuzu tasavvur edin. Böyle bir işlemin her zaman caiz olmadığını ve bazan yanlış netice verdiğini bilmelisiniz. Fahat böyle bir hal istisnaî olup, sizin serinizin uslu hareket edeceğini ümit etmek akla yakın gelebilir. Şu halde işe devam ederek, tamamen ispat edilmemiş formülünüzden ne gibi bir netice çıkacağını araştırmak ve tam bir ispatın yokluğunun verdiği rahatsızlığın telâfisini ileriye bırakmak pratik olur.

Burada iki tane *buluşa yardımcı kabûle* rastladık; bunlardan biri denklem sistemlerine, öteki sonsuz serilere dair idi. Matematiğin her dalında böyle kabûller mevcut olup, bir dalın

ustasının belli başlı üstünlüklerinden biri, o dalda cari kabûller ile onları nasıl kullanacağını ve onlara ne kadar güvenebileceğini bilmesidir.

Tabiatıyle, herhangi bir tahmine pek fazla güvenmemelisiniz. Bu gerek buluşa yardımcı mûtad kabûller, gerekse kendi faraziyeleriniz için doğrudur. Tahmininizin doğruluğuna ispatsız inanmak aptallık olur. Fakat, tahmininizin *doğru olabileceği* ümidiyle işe girişmek makûl olabilir. Temkinli eyimserlik bu hususta en akla yakın davranıştır.

XI. BÖLÜME DAİR ÖRNEKLER VE TAMAMLAYICI BİLGİLER

1. Bir üçgende, a tabanı, a ya dik olan h yüksekliği ve a nın karşısındaki α açısı veriliyor. (*a*) üçgeni çizmemiz, (*b*) üçgenin alanını hesaplamamız isteniyor. Bütün bu veriler lûzumlu mudur?

2. Bir yamukta, iki paralel kenara dik olan h yüksekliği, iki paralel kenara paralel ve onlardan eşit uzaklıkta olan m orta çizgisi, ve paralel kenarlardan biri ile geri kalan iki (eğik) kenar arasındaki α ve β açıları veriliyor. (*a*) yamuğu çizmemiz, (*b*) yamuğun alanını hesaplamamız isteniyor. Bütün bu veriler lûzumlu mudur?

3. Bir küre kuşağı diye, küre yüzeyinin iki paralel düzlem arasında kalan parçasına denir. Kuşağın yüksekliği bu iki düzlem arasındaki uzaklıktır. Kürenin r yarıçapı, kuşağın h yüksekliği ve kuşağı sınırlayan düzlemlerden kürenin merkezine daha yakın olanının bu merkezden d uzaklığı verildiğine göre kuşağın alanını bulunuz. Bu hususta söylenecek bir şey var mı?

4. Bir küre a yarıçapını haizdir. b yarıçapını haiz ikinci bir küre birinciyi kesmekte ve onun merkezinden geçmektedir.

İkinci küre yüzeyinin birincinin içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız. Bu hususta söylenecek bir şey var mı? Sınır hallerini kontrol ediniz.

5. Paragraf 2 deki misâli tekrar ele alarak çözümü ispat ediniz.

6. Bir küre tabakası, bir (dolu) kürenin iki paralel düzlem arasında kalan parçasıdır. Bu tabakanın yüzeyi şu üç parçadan ibarettir: bir küre kuşağı ile, tabakanın alt ve üst tabanları denen iki daire. Burada aşağıki yazış tarzını kullanıyoruz:

alt tabanın yarıçapı a,

üst tabanın yarıçapı b,

tabakanın yüksekliği (tabanlar arasındaki uzaklık) h,

orta kesitin (alt ve üst tabanlara paralel ve onlardan eşit uzaklıkta olan kesit) alanı M,

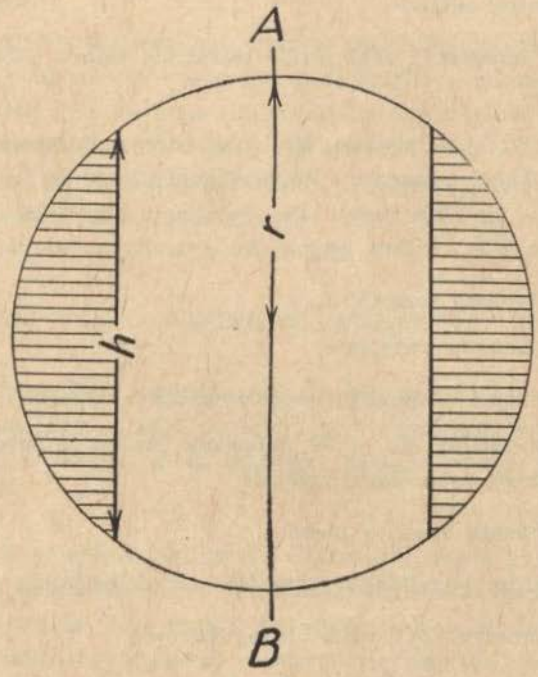
tabakanın hacmı V olsun.

a, b, ve h verildiğine göre $Mh - V$ yi bulunuz.

Bu hususta söylenecek bir şey var mı?

Bazı sınır hallerini kontrol ediniz.

7. Bir koninin ekseni bir kürenin merkezinden geçmektedir. Koninin yüzeyi kürenin yüzeyini iki daire boyunca kesmekte ve dolu küreyi iki kısma ayırmaktadır: «konik şekilde oyulmuş küre» ve «tıkaç» (AB doğrusu etrafında döndürülmesi lâzımgelen Şek. 11.2 ye bakınız). Tıkaç koninin içindedir. r kürenin yarıçapını, c dönme neticesinde konik oyuğu doğuran kirişin uzunluğunu ve h (oyulmuş kürenin yüksekliği) c nin koninin ekseni üzerindeki izdüşümünü göstersin. r, c ve h verildiğine göre, konik şekilde oyulmuş kürenin hacmını bulunuz. Bu hususta söylenecek bir şey var mı?



Şek. 11.2. Konik şekilde oyulmuş küre.

8. Bir dönel paraboloitin ekseni bir kürenin merkezinden geçmekte ve iki yüzey iki daire boyunca kesişmektedir. Bu iki yüzey arasında (kürenin içinde ve paraboloitin dışında) kalan halka şeklindeki cismin hacmını hesaplayınız. Burada kürenin r yarıçapı, halka şeklindeki cismin paraboloitin ekseni üzerindeki h izdüşümü ve kürenin merkezinin paraboloitin tepesinden d uzaklığı verilmiştir. (Şek. 11.3 ü OX etrafında döndürünüz.) Bu hususta söylenecek bir şey var mı?

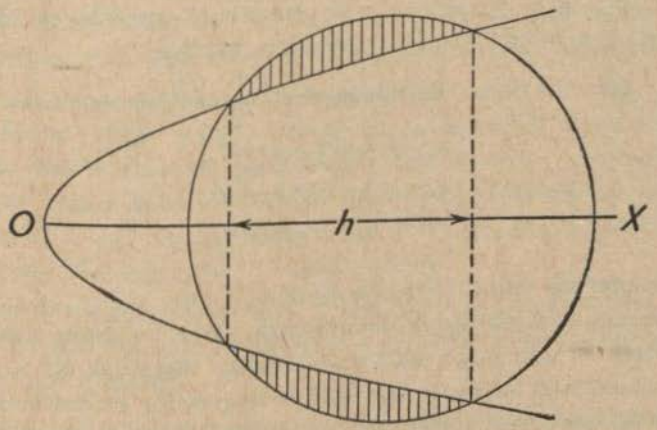
9. Bir yamukta a alt tabanı, b üst tabanı ve bunlara dik h yüksekliği verilmiştir; $a > b$. Alt tabanı etrafında dönen yamuk bir dönel cisim (iki koni eklenmiş bir silindir) çizmektedir. Bu cismin (*a*) hacmını ve (*b*) yüzey alanını hesaplayınız. Veriler bilinmiyeni belirtmeye yeter mi?

10. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{10}$ gibi belirli bir sırada alınan on sayı arasında şöyle bir bağ vardır: üçüncüden itibaren bu sayıların herbiri kendinden önce gelen iki tanesinin toplamına eşittir, yani $n = 3, 4, \ldots, 10$ için

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

u_7 verildiğine göre, bu on sayının $u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$ toplamını bulunuz.

Veriler bilinmeyeni belirtmeye yeter mi?



Şek. 11.3. Parabolik şekilde oyulmuş küre

11. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ integralini hesaplayınız. Bu hususta söylenecek bir şey var mı? $\alpha = 0$, $\alpha \to \infty$, $\alpha \to -\infty$ hallerini kontrol ediniz.

12. Misâl 11 i genelleştiriniz. [En basit şeyi ilk önce deneyiniz.]

13. Bir bilinmiyenli öyle bir denklem yazınız ki, bilinmiyeni belirtmeye yetmesin.

14. Eğer bilinmeyenlerin tabiatı uygun bir ilâve şart yardımıyla sınırlanırsa, tek bir denklem birçok bilinmeyeni belirleyebilir. Meselâ, x, y, z reel sayılar olmak şartıyla

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

denklemi tamamen belirli bir çözümü haizdir.

$x^2 + y^2 = 128$ denklemini gerçekleyen bütün x, y pozitif tam sayı takımlarını bulunuz.

15. $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 64$ denklemini gerçekleyen bütün x, y, z, w pozitif tam sayı takımlarını bulunuz.

16. *Genel hal.* Üç bilinmeyenli üç denklemden ibaret

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

sistemini ele alalım. Verilmiş 12 tane a_1, b_1, c_1, d_1, $a_2 \ldots$, d_3 sayısının reel olduğunu farzediyoruz. Eğer bu sistem tek bir çözümü (yani onu gerçekliyen üç sayıdan ibaret tek bir x, y, z takımını) haiz ise ona *belirli*, eğer sonsuz sayıda çözümü haiz ise ona *belirsiz*, eğer hiçbir çözümü haiz değilse ona *tutarsız* bir sistem denir. Türlü bakış noktalarından bakıldığı zaman sistemin belirli olduğu hal, genel, mutâd, normal, regüler hal ve

diğer haller istisnaî, mûtad olmayan, anormal, irregüler haller olarak görünür.

(*a*) Geometrik olarak, x, y, z gibi üç sayıdan teşekkül eden bir takımı bir dik koordinat sisteminde bir nokta ve yukarıki her denklemi de onu gerçekleyen noktaların cümlesi, yani bir düzlem olarak tefsir edebiliriz. (Hakikatte bu tefsir için her denklemin sol tarafında en aşağı bir katsayının sıfırdan farklı olduğunu farzetmemiz lâzımdır, fakat bunun böyle olduğunu kabûl edelim.) Üç denklemli bir sistem yalnız ve ancak o denklemlere tekabül eden üç düzlemin tek bir ortak noktayı haiz olması halinde belirlidir. Eğer bu düzlemlerin iki ortak noktası varsa, bir ortak doğruları da mevcut olup, sistem belirsiz olur. Eğer üç düzlem aynı bir doğruya paralel, fakat hiçbir ortak noktayı haiz değil ise, sistem tutarsızdır. Eğer üç düzlem «genel durumda» ise, eğer bu düzlemler «keyfî olarak seçilmiş» iseler, tek bir ortak noktayı haiz olurlar ve sistem belirli olur.

(*b*) Cebirsel olarak, üç denklemli bir sistem yalnız ve ancak sol taraftaki 9 tane katsayının determinatının sıfırdan farklı olması halinde belirli olur. Şu halde bu sayılar üzerinde denklem şeklinde bir şart veya *sınırlama* konulmadıkça sistem belirlidir.

(*c*) 9 tane reel katsayının teşkil ettiği $(a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots, c_3)$ takımını dokuz boyutlu uzayda bir nokta olarak tefsir edebiliriz. Belirli olmayan (yani belirsiz veya tutarsız) sistemlere tekabül eden noktalar bir denklem (sistemin determinantı $= 0$) gerçeklerler ve bundan dolayı *daha küçük boyutlu* bir çokluk (sekiz boyutlu «hiperyüzey») teşkil ederler.

(*d*) Gelişigüzel verilmiş üç bilinmeyenli ve üç lineer denklemli bir sistemin belirsiz olması *sonsuz derecede ihtimal dışıdır*. Misâl 14.23 e bakınız.

17. Beş düzgün cismin herbirinin içine ve dışına çizilen küreleri düşünelim. Bu cisimlerin her biri için böyle iki kürenin yarıçaplar oranını hesaplayınız.

18. Eğer küp ile düzgün sekizyüzlüyü yahut düzgün on ikiyüzlü ile düzgün yirmiyüzlüyü aralarında değiştirseydik, Cedvel I deki Sütün (3) te bir değişiklik olmazdı. Bu da Kepler'in teorisini müşkül duruma sokacak bir belirsizlik yaratırdı. Fakat Kepler, tıpkı protokolda bir baronun bir baronetten daha önce geldiği gibi bu beş asil cisimden birinin ötekine nazaran neden daha asil olması gerektiğine dair sebepler bulmakta müstesna bir meharet göstermektedir.

Kepler'in dünyanın yörüngesi dışına yerleştirdiği üç düzgün cismi, bu yörünge içine yerleştirdiği iki düzgün cisimden ayırdeden basit bir geometrik özelik bulunuz.

19. *Hiçbir fikir aslında kötü değildir.* «Birçok tahminlerin yanlış, fakat buna rağmen bizi daha iyi bir tahmine sevketmek suretiyle faydalı olduğu sonradan ortaya çıkmıştır.» «Kritik davranışı elden bırakmadıkça, hiçbir fikir aslında kötü değildir. Asıl kötü olan şey, hiçbir fikre sahip olmamaktır.» ([6]) Ben bu sözleri iyi niyetli fakat çocuksu fikirlerle bana gelen bir veya diğer öğrencimi teselli etmek üzere hemen hergün kullanırım. Bu cümleler hem trivial günlük durumlara, hem de ilmî araştırmalara uygulanabilir. Kepler'in misâline ise onlar en parlak bir şekilde uygulanabilir. Kafası ortaçağ zihniyetinden modern düşünceye geçişin teşkil ettiği benzeri olmayan durum içinde bulunan Kepler'e, kendisinin altı gezegeni beş düzgün cisimle terkip etme fikri parlak görünmüştü. Fakat Kepler'in çağdaşı olan Galileo'nun böyle bir fikri tasavvur edebileceğini düşünemiyorum. Tabiat hakkındaki geri kalan bilgilerimizle pek az ilgisi olan bu fikir modern bir kafaya daha baştan iyice kötü gelebilir. Hattâ müşahedeler tarafından daha kuvvetle desteklenmiş olsaydı bile, Kepler'in faraziyesi bilinen başka şeylerle benzerlik desteğinden mahrum olduğu için gene de kuvvetli temellere dayanmış sayılmıyacaktı.

([6]) *How to Solve It*, S. 207-8.

Bununla birlikte Kepler'in, yanlışlığı sonradan ortaya çıkan faraziyesinin daha iyi bir faraziyeye yol açmak suretiyle son derece faydalı olmuş olduğu muhakkaktır. Bu faraziye Kepler'i, gezegenlerin benzer tarzda «izah» etmeyi ümit ettiği ortalama uzaklıklarını, yörüngelerini, dönme müddetlerini daha yakından incelemeğe sevketmiş ve böylece onu sonunda gezegenlerin hareketlerine dair meşhur «Kepler Kanunları»na götürmüştür. Bu kanunlar da Newton'a ve dolayısıyla bütün modern ilim anlayışımıza yol açmıştır.

20. *Buluşa yardım etmek üzere yapılan bazı mûtad kabûller.* Bu, kendisinden çok daha etraflı bahsedilmeye değer bir konu olmakla beraber, biz çok kısa bir liste ve kroki tarzında kısa bilgiler vermekle yetineceğiz. «Genel olarak» sözünü «pratik», neticede ister istemez biraz müphem, bir manada tefsire dikkat etmeliyiz.

«Eğer bir denklem sisteminde bilinmiyenlerin sayısı kadar denklem varsa, bilinmeyenler bu sistem vâsıtasıyla *genel olarak* belirlenir.»

Eğer bir problemde elimizdeki parametrelerin sayısı kadar «şart» varsa, bir deneme mahiyetinde olmak üzere, problemin bir çözümü haiz olduğunu farzederek işe başlamak akla yakın bir davranıştır. Meselâ n değişkenli bir kuadratik form $n(n+1)/2$ tane katsayıyı haizdir ve n değişkenli bir ortogonal sübstitüsyon da $n(n-1)/2$ tane parametreye bağlıdır. Şu halde n değişkenli herhangi bir kuadratik formun uygun bir ortogonal sübstitüsyonla, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bu sübstitüsyonla ithâl edilen yeni değişkenler, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ uygun parametreler olmak üzere,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

şekline sokulabileceği daha başta pek âlâ akla yakın görünür. Hakikaten bu sonuncu ifade n tane parametreye bağlı olup,

$$n(n+1)/2 = n(n-1)/2 + n$$

dir. İddianın $n=2$ ve $n=3$ özel hallerindeki ispatlarından ve bu hallerin geometrik manalarının izahından sonra yapılacak yukarıki gibi bir ihtar genel halin lehinde iyice kuvvetli bir hava yaratabilir.

«*Genel olarak*, iki limit operasyonunun sırası değiştirilebilir.»

Bu limit operasyonlarından birinin bir sonsuz serinin toplanması, ötekinin integrasyon olması halinde paragraf 7 de bahsedilmiş olan hali (7) elde ederiz.

«*Genel olarak*, limite kadar doğru olan şey, limitte de doğrudur.» (8)

$$a_n > 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

olduğu verilmişse, buradan $a > 0$ neticesini *çıkaramayız*; doğru olan şey ancak $a \geq 0$ dır. Bir eğriyi kendi içine çizilmiş bir çokgenin ve bir yüzeyi de kendi içine çizilmiş bir çokyüzlünün limiti olarak düşünelim. Eğrinin uzunluğunu kendi içine çizilmiş çokgenin uzunluğunun limiti olarak hesaplamak doğru netice verir, fakat yüzeyin alanını kendi içine çizilmiş bir çokyüzlünün limiti olarak hesaplamak yanlış bir netice verebilir. (9) Yukarda zikretmiş olduğumuz buluşa yardımcı prensip bizi kolayca yanlış yola sevkedebilmekle beraber, bize fikirler ilham etmekte son derece verimlidir. Meselâ, Misâl 9.24 e bakınız.

«Bilinmeyen bir fonksiyona, *ilk başlangıçta* monoton gözüyle bakınız.»

---

(7) G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, 7 th ed., S. 493-496 ya bakınız.

(8) William Whewell, *The Philosophy of the Inductive Sciences*, new ed., vol. I. S. 146 ya bakınız.

(9) *H. A. Schwarz. Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd 2, S. 309 - 311 e bakınız.

Paragraf 2 de, bir cismin şekli değişince hacmının da değişeceğini kabûl ettiğimizde bu tavsiyedekine benzer bir yol tutmuş ve yanlış bir neticeye varmıştık. Bununla beraber, yukarda ifade edilen prensip ekseriya faydalıdır. $a > b$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

şeklinde bir eşitsizliği ispat etmemiz lâzımgelebilir. İşe bundan daha fazlasını, yani

$$f(x) < g(x)$$

i ispata çalışmakla başlayabiliriz. Bu da türevi $g(x) - f(x)$ olan fonksiyonun monoton olduğuna dair yukarıki tipten bir başlangıç faraziyesine dökülür. (Problem bu fonksiyonun $x = a$ ve $x = b$ için değerlerinin karşılaştırılmasından ibarettir.) Yukarıki prensip, «en basit şeyi ilk önce deneyiniz» şeklindeki daha genel buluşa yardımcı prensibin bir özel halidir.

«*Genel olarak*, bir fonksiyon bir kuvvet serisine açılabilir, ki bu serinin daha ilk terimi fonksiyonun kabûl edilebilir bir yaklaşımını verir ve serinin baştan itibaren ne kadar çok sayıda terimini alırsak, yaklaşım o kadar iyi olur.»

İyice anlaşılması lâzımgelen «genel olarak» kaydı çıkarılırsa bu ifade muazzam bir hatâ olur. Bununla birlikte, fizikçiler, mühendisler ve Diferansiyel ve İntegral Hesabı kendi branşlarına uygulayan diğer Fenciler bu ifadeyi pek sever görünmektedirler. Bu ifade bundan önce vermiş olduğumuz prensipten çok daha geniş tesir sahalı diğer bir prensip ihtiva etmektedir: «Bilinmeyen bir fonksiyona, *ilk başlangıçta* lineer gözüyle bakınız.» Hakikaten eğer

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

ise, yaklaşık olarak

$$f(x) \sim a_0 + a_1 x \quad \text{tir.}$$

(Zamanında Diferansiyel ve İntegral Hesabı tanımamış olan Galileo'nun lineer fonksiyona kuvvetli bir meyli vardır; paragraf 4 e bakınız.) Bu prensip, izafî hatânın ilk terimine ekseriya atfedilen büyük önemin dayanağıdır (Paragraf 5.2 ye bakınız.) Hakikate yakın fikirler ilham etmekte bir çok hallerde faydalı olmuş olan bu prensip, kolaylıkla hakikatten çok uzak şeyler de telkin edebilir. Hakikaten, bir fizikçi (veya bir mühendis, veya bir biyolog) y gibi fizikî bir büyüklüğün x gibi diğer bir fizikî büyüklüğe aralarında

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem cari olacak tarzda bağlı bulunduğu kanaatına varmış olabilir ve bu diferansiyel denklemin integrasyonu çok güç olabilir, yahut $f(y)$ fonksiyonunun şekli bilinmeyebilir. Fizikçi her iki halde de $f(y)$ fonksiyonunu y nin kuvvetlerine göre açarak aşağıki diferansiyel denklemlere yukarda verilmiş olanların ard arda yaklaşımları gözüyle bakabilir:

$$\frac{dy}{dx} = a_0,$$

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y,$$

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2.$$

Bununla beraber, bu üç diferansiyel denklemi gerçekleyen eğriler birbirinden çok farklı tabiatta olup, teşebbüs ettiğimiz yaklaşım bizi tamamen hatâya sürükleyebilir. Bereket versin ki, fizikçiler dikkatli matematik işlemlerinden daha çok dikkatli muhakemeye güvendiklerinden, matematik bakımından yanlışlı-

ğın verdiğimiz misâldekinden daha az aşikâr ve dolayısıyla daha fazla tehlikeli olduğu hallerde bile iyi neticeler elde etmişlerdir.

21. *Mükâfatlandırılan eşitsizlik.* a, b, c, d, e, f, g ve h büyüklükleri verilmiş olsun. Dört tane x, y, u ve v bilinmeyenine göre dört denklemden ibaret

$$(S)\qquad \begin{aligned} ax+by+cv+du&=0,\\ ex+fy+gv+hu&=0,\\ hx+gy+fv+eu&=0,\\ dx+cy+bv+au&=0 \end{aligned}$$

sisteminin $x=y=u=v=0$ trivial çözümünden başka bir çözümü haiz olup olmadığını araştıralım. Bu (S) sisteminin yalnız ve ancak determinantı sıfır olduğu zaman trivial olmayan bir çözümü haiz olduğunu biliyoruz, fakat bu dördüncü mertebeden determinantı doğrudan doğruya hesaplamak istemiyoruz. (S) sisteminin kendine has simetrisi

$$u=x,\quad v=y$$

vaz'etmeyi aklımıza getirebilir. O zaman (S) sisteminin ilk denklemi dördüncü ile, ikinci denklemi de üçüncü ile intibak ederek dört denklemli sistem sadece iki müstakil denklem ihtiva eden bir sisteme iner:

$$\begin{aligned} (a+d)\,x+(b+c)\,y&=0,\\ (e+h)\,x+(f+g)\,y&=0. \end{aligned}$$

Bu son sistem yalnız ve ancak determinantı sıfır olduğu zaman trivial olmayan bir çözüm kabûl eder.

Fakat (S) sistemini

$$u=-x,\quad v=-y$$

vaz'etmek suretiyle de daha basit bir sisteme indirebiliriz. Bu halde de

$$(a-d)\,x+(b-c)\,y=0\,,$$

$$(e-h)\,x+(f-g)\,y=0$$

dan ibaret gene iki farklı denklem elde ederiz.

İki denklemli sistemlerden herbirinin determinantının sıfır oluşu, (S) sisteminin determinantının da sıfır olmasını icabettirir. Buradan (eğer yeter derecede eyimser isek) dördüncü mertebeden olan bu son determinantın, her biri ikinci mertebeden olan önceki iki determinantın çarpımına eşit olmasından şüphelenebiliriz.

(*a*) Bunu ispat ediniz, ve neticeyi n. mertebeden determinantlara genelleştiriniz.

(*b*) Burada hangi bakımdan eyimserlik gösterdik?

22. Paragraf 9.4 teki gibi bir koordinat sistemi alınız. x-ekseni yatay ve y-ekseni aşağı doğru olmak üzere düşeydir. Koordinatların başlangıç noktasını (a, b) noktasına

(1) bir doğru ile,

(2) merkezi x-ekseni üzerinde bulunan bir daire yayı ile birleştiriniz.

Koordinatların başlangıç noktasında sükûnetten harekete geçen bir maddî nokta (1) yahut (2) yolunu tâkip ederek (a, b) noktasına kadar sırasıyla T_1 yahut T_2 zamanında (sürtünmesiz) olarak kayıyor. Galileo (paragraf 9.4 te söylenmiş olduğu gibi) $T_1 > T_2$ olduğunu ileri sürmüştü. Biraz uğraşmadan sonra bu eşitsizliğin,

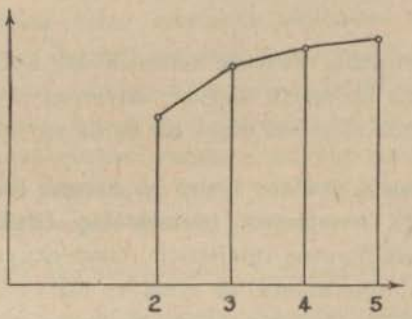
$$a^2\,(a^2+b^2)^{-1}=h$$

vaz'edilmek şartıyla,

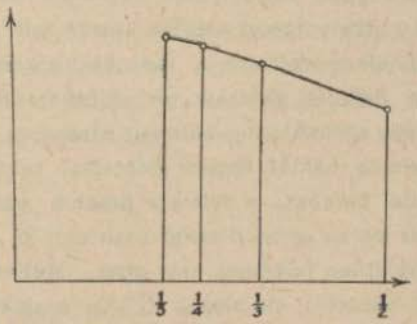
$$\int_0^h [\,x\,(1-x)\,]^{-\frac{3}{4}}\,dx<4\,h^{\frac{1}{4}}\,(1-h)^{-\frac{1}{4}}$$

eşitsizliğine denk olduğu ortaya çıkar. Bu son eşitsizliği, her iki tarafını h nın kuvvetlerine göre açmak suretiyle ispat etmeye çalışabiliriz. Bu hususta en basit (yahut «en eyimser») imkân ne olabilir?

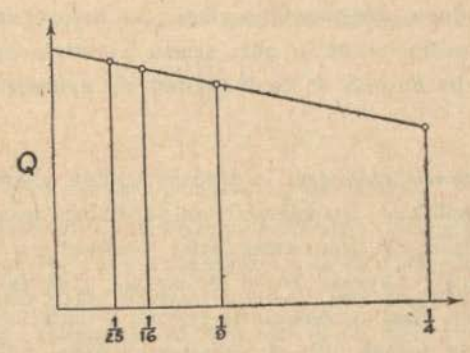
23. *Nümerik Hesaplar ve Mühendis.* Fen adamı olmayan kimseler genellikle, fen adamlarının yaptıkları hesapların şaşmaz, fakat sıkıcı olduğunu zannederler. Halbuki fen adamlarının hesapları pek âlâ heyecan verici bir macera gibi, fakat güvenilmez olabilirler. Eski astronomların yapmış oldukları gibi, modern mühendisler de noksan bilinen hâdiseler hakkında noksan bilinen



Şek. 11.4. Bir deneme: Absis n dir.



Şek. 11.5. Diğer bir deneme: Absis $1/n$ dir.



Şek. 11.6. Absis $1/n^2$ dir: Başarı!

matematik vâsıtalarla nümerik neticeler elde etmeye çalışırlar. Buna dair tipik bir misâli aşağıda veriyoruz. (Burada verilmeyecek olan teknik teferruat başka bir yerde yayınlanacaktır.)

Bir mühendis, kenarı 1 olan bir kareye ilişik Q gibi bir fizikî büyüklüğü hesaplamak istemektedir. (Hakikatte Q, kare kesitli bir kirişin burulma rijiditesidir, fakat okuyucunun bunu-hattâ burulma rijiditesinin ne olduğunu bile-bilmesine lûzum yoktur.) Tam doğru bir çözüm bir takım matematik güçlüklerle uğraşmayı icabettireceğinden mühendisimiz, mühendislerin ekseriya yaptıkları gibi, yaklaşımlara başvurur. Bilinen bir yaklaşım metodunu tâkip ederek verilen kareyi eşit «eleman» lara, yani herbirinin alanı $1/n^2$ olan n^2 tane küçük kareye böler. (Bir çifte integralin değerini yaklaşık olarak hesaplarken de verilen alanı aynı tarzda elemanlarına böleriz.) n sonsuza gittiği zaman, yaklaşık değerin de hakikî değere gideceğini beklemek akla yakındır. Bununla beraber, n arttıkça hesabın yürütülmesindeki güçlük te artar ve bu artış o kadar hızlı olur ki, hesabın yürütülmesi çabucak fiilen imkânsız hale girer. Mühendisimiz yalnız $n=2, 3, 4, 5$ hallerini ele alarak Q için aşağıki yaklaşık değerleri elde ediyor:

0,0937 0,1185 0,1279 0,1324 .

Bu sayıların, onları hesaplarken kullandığımız küçük karelerin alanlarının sırasıyla

1/4 1/9 1/16 1/25

değerlerine tekabül ettiklerini unutmayalım.

Mühendisimiz bu neticeleri bir grafik halinde gösterecektir. Q için elde ettiği yukarıki yaklaşık değerleri ordinatlar olarak almaya karar veriyor, fakat absislerin seçiminde tereddüt etmektedir. Absis olarak evvelâ n, sonra $1/n$ ve nihayet $1/n^2$ (bu sonuncusu yaklaşık değer hesabında kullanılan küçük karenin alanının nümerik değeridir) yi deniyor: Sırasıyla Şek. 11.4, 11.5 ve 11.6 ya bakınız. Son seçim içlerinde en iyisidir; Şek. 11.6 daki dört nokta *hemen hemen aynı doğru üzerinde*dir. Mühendisimiz bu hususa dikkat ettikten sonra, o doğruyu ordinatlar eksenini kesinceye kadar uzatıyor ve kesim noktasının ordinatına Q nün «iyi» bir yaklaşık değeri gözüyle bakıyor.

(*a*) Neden? Bunun dayandığı fikir nedir?

(*b*) Şek. 11.6 yı nümerik olarak kontrol ediniz: herbir noktayı yanındakine bir doğru ile birleştirip, bu üç doğrunun eğimlerini hesaplayınız.

(*c*) Şek. 11.6 da en çok güvenilebilir iki nokta seçerek mühendisin çiziminde onlardan geçen doğruyu kullanınız, Q nün bunun neticesinde elde edilen yaklaşık değerini hesaplayınız ve bu değeri Q nün hakikî değeri olan 0,1406 ile karşılaştırınız.

OKUYUCUYA SON SÖZ

Buraya kadar olan bölümleri dikkatle okumuş ve oradaki problemlerin bir kısmını çözmüş olan bir okuyucu akla yakın muhakeme tarzının bazı yönlerini tanımak hususunda iyi bir fırsat bulmuş olmaktadır. Akla yakın muhakemenin tabiatı hakkında genel bir fikir hâsıl etmek, bu eserin II. cildinde toplanmış olan, geri kalan beş bölümün amacıdır. Bu amaç kanaatımca büyük bir teorik ilgiye lâyıktır, fakat onun pratik bir değeri de olabilir: Dayandığı mücerret fikri daha fazla anladığımız takdirde, müşahhas bir görevi daha iyi yapabiliriz.

Bir takım akla yakın muhakeme modellerini formüle etmek, II. cildin esas gayesi olacaktır. Fakat bu modeller müşahhas misâllerden çıkarılacak ve onlarla yakın temas halinde incelenecektir. Şu halde II. cilt, I. ciltte incelenen matematik misâllerine daha birçoklarını katacak ve onları aynı tarzda inceleyecektir.

ÇÖZÜMLER

ÇÖZÜMLER

I. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. 1 ile biten asal sayılar.

2. [Stanford 1948]

$$(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n+1)^2=n^3+(n+1)^3.$$

Sol taraftaki terimler bir aritmetik dizi teşkil eder.

3. $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

4. 1, 9, 36, 100, ... kare şeklinde sayılardır.

How to Solve It, S. 104 e bakınız.

5. [Stanford 1949] n tek veya çift olduğuna göre, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ yahut $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Her iki halde de aynı şekilde cari olan bir kanun: $(n+1)^2/4$'e en yakın tam sayı.

6. Birinci sorunun cevabı: Evet. İkincinin cevabı: Hayır; 33 bir asal sayı değildir.

7. Bu soru asal sayılarla biraz tecrübesi olanlar [Misâl 1, 6, 9 a bakınız] için değildir. Hakikaten, (1) ispatlanabilir (bu, Kaluza'nın bir teoreminin bir özel halidir: *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 28 (1928), S. 160-170 e bakınız) ve (2) de cerhedilebilir: soruda yazılmış olanlardan sonra gelen ilk katsayı (x^7 nin katsayısı) $-3447=-3.3.383$ tür. Burada «formel hesaplama» açık bir manâyı haizdir.

$$\left(\sum_0^\infty n!\, x^n\right)^{-1} = \sum_0^\infty u_n x^n$$

vaz'edersek, $u_0 = 1$ olur ve $u_1, u_2, u_3, \ldots$ katsayıları

$$0!\, u_n + 1!\, u_{n-1} + 2!\, u_{n-2} + \cdots + (n-1)!\, u_1 + n!\, u_0 = 0$$

rekürrans formülünden sırasıyla $n = 1, 2, 3, \ldots$ için hesaplanır.

8. Müşahede edilen değerlerine dayanarak A_n nin pozitif olduğunu ve n ile birlikte arttığını tahmin etmek pek âlâ akla yakın gelebilir. Fakat bu faraziye tamamiyle yanlıştır. Daha ileri vâsıtalar (İntegral Hesap, veya bir kompleks değişkenin Analitik Fonksiyonlar Teorisi) kullanmak suretiyle, büyük n ler için A_n in değerinin yaklaşık olarak $(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(\log n)^{-2}$ olduğunu ispat edebiliriz.

10. $2n = 60$ halinde birinci veya ikinci usûlü seçtiğimize göre 9 veya 7 tane deneme

($p = 3, 5, 7, 11, 11, 17, 19, 23, 29$ yahut $p' = 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59$)

yapmamız gerekir. n nin daha büyük değerleri için deneme sayıları arasında, ikinci usûlün lehinde olmak üzere, daha da büyük bir farkın bulunması beklenebilir.

Cevaplandırılmayan No. lar: 9, 11, 12, 13, 14.

II. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. C veya D nin «tam doğru genelleştirme» olduğu ve B nin «hedefi aştığı» fikrindeyim. Siz C veya D yi tercih edebilirsiniz; bu tercih sizin yetişmenize bağlıdır. Bununla birlikte C ve D nin her ikisi de lineer denklemlerle işe başlamayı telkin etmekte ve sonunda bizi şu plâna götürmektedir: İlk iki (lineer!) denklemden iki bilinmeyeni üçüncüsü cinsinden ifade ediniz ve bu ifadeleri son denklemde yerine koyarak üçüncü bilinmeyen için bir

ikinci derece denklemi elde ediniz. (İçinde bulunduğumuz A halinde, ilk iki denklemden *herhangi iki* bilinmeyenin ifadesini çıkarabilir misiniz?) A nın iki çözümü vardır:

$$(x, y, z) = (1, -2, 2), \quad (29/13, -2/13, 2).$$

2. Ekseni etrafında 180° döndürüldüğü takdirde, piramit kendisi ile çakışır. Bu piramidin doğru genelleştirilmesi bu türlü bir *simetri eksenini* haiz olan bir cisimdir ve *en basit* çözüm de verilen nokta ile eksenden geçen bir düzlemdir. (Sonsuz sayıda başka çözümler de mevcuttur; süreklilik dolayısıyla, hacmı ikiye bölen düzlemin verilmiş bir doğrudan geçmesini şart koşabiliriz.) Beşgen tabanlı bir düzgün piramidin iki eşit parçaya bölünmesine dair benzer problemin bunun kadar basit bir çözüm kabûl etmediğine dikkat ediniz. *How to Solve It*, S. 98-99 a bakınız:

3. A, B nin bir özel hali olup, B de P nin O ile çakışması ile elde edilir; fakat bu iki problem birbirine denktir: A ve B de istenen düzlemler birbirine paralel olup, bu problemlerden birinin çözümü, ötekininkini de birlikte getirir.

Daha genel olan B probleminin çözümü, $P + O$ olduğu takdirde daha kolaydır: Öteki iki doğru üzerinde $OP = OQ = OR$ olacak şekilde Q ve R gibi birer nokta alınız. P, Q ve R den geçen düzlem problemin şartını gerçekler. Şu halde A problemi sorulursa, daha genel olan B problemine geçmekte avantaj vardır.

4. A, B nin ($p = 1$ için) bir özel hali olmakla beraber, bu iki problem birbirine denktir: $x = yp^{1/2}$ değişken dönüştürümü B yi A ya irca eder.

Daha genel olan B probleminin çözümü daha kolaydır: Kolay hesaplanabilen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (p + x^2)^{-1} \, dx$$

integralinin p parametresine göre iki kere türevini alınız. Şu halde A sorulursa, daha genel olan B ye geçmekte avantaj vardır.

Misâl 3 t.ki durumla olan paralelliğe dikkat ediniz.

6. Dairelerden birinin bir noktaya dejenere olduğu aşırı özel halin çözülmesi daha kolaydır ve genel hal de bu aşırı özel hale irca edilebilir. Hakikaten, her iki dairenin yarıçapları aynı miktarda azalırsa bunların bir ortak dış teğeti kendisine paralel kalır ; ve yarıçaplardan biri bir miktar azalır, diğeri aynı miktar çoğalırsa bir ortak iç teğet kendisine paralel kalır. Her iki halde de, ortak teğetin doğrultusunu değiştirmeksizin dairelerden birini bir noktaya irca edebiliriz.

8. Çevre açısının kenarlarından birinin dairenin merkezinden geçtiği özel hal, «baş özel hal» dir. Genel çevre açısını böyle iki özel halden toplama veya çıkarma ile meydana getirebiliriz. (Klâsik ispatın (Öklid III 20) ruhu budur.) «Baş özel hal» e dair şayanı dikkat bir misâl için *How to Solve It* S. 166—170 e bakınız.

12. Eğer bir düzlemde bulunan iki doğru üç paralel doğru ile kesilirse, meydana gelen karşılıklı doğru parçaları birbiriyle orantılıdır. Bu, uzay geometrideki benzer, fakat daha güç, teoremin ispatına yardım eder (Öklid XI 17 ye bakınız.)

13. Bir paralelkenarın köşegenleri birbirini iki eşit parçaya böler.

14. Bir üçgenin herhangi iki kenarının toplamı üçüncü kenardan büyüktür. İki benzer teoremden daha basit olanı (Öklid I 20) daha güç olanının (Öklid XI 20) ispatında kullanılmaktadır.

15. Paralelyüz, dikdörtgenler prizması (kutu), küp, bir ikiyüzlü açının açıortay düzlemi. *Bir dörtyüzlünün altı tane iki*

yüzlü açısının açıortay düzlemleri, dörtyüzlünün içine çizilmiş kürenin merkezi olan, bir noktada kesişirler.

16. Prizma, dik prizma, küre. *Bir kürenin hacmı, tabanı kürenin yüzeyi ile aynı alanı haiz ve yüksekliği kürenin yarıçapıyla aynı uzunlukta olan bir piramidin alanına eşittir.*

17. Eğer bir piramidin tepesinden çıkan bütün kenarları birbirine eşit ise, o piramide bir *ikizkenar piramit* diyelim. Bir ikizkenar piramidin bütün yan yüzeyleri ikizkenar üçgenlerdir. *Bir ikizkenar piramidin tabanı bir daire içine çizilmiş olup, yüksekliği de bu daireein merkezinden geçer.* Misâl 9.26 ya bakınız.

22. Evet. x yerine $-x$ koyarsak x^2, ve E ye göre $\frac{\sin x}{x}$ i gösteren çarpım değişmez.

23. Önceden söyleme: E den

$$\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots=-\frac{\pi^2}{x(x+\pi)}\cdot\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}$$

olup, burada $x\to\pi$ için, türevin tarifi dolayısıyla,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots=-\frac{\pi^2}{\pi\,.\,2\pi}\cos\pi=\frac{1}{2}$$

bulunur.

Gerçekleme:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}\cdot\frac{2\,.\,4}{3\,.\,3}\cdot\frac{3\,.\,5}{4\,.\,4}\cdots\frac{(n-1)\,(n+1)}{n\,.\,n}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\,.$$

24. 1/6, Misâl 23 teki gibi, yahut Misâl 2.5 in $k=2$ için özel hali.

25. Önceden söyleme: Eğer k bir pozitif tam sayı ise

$$\prod_{n=1}^{k-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\prod_{n=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)=\lim_{x\to k\pi}\frac{k^2x^2}{x(x+k\pi)}\frac{\sin x}{k\pi-x}$$

$$=(1/2)(-\cos k\pi)=(-1)^{k-1}/2 \quad \text{dir.}$$

Gerçekleme: $N\geqq k+1$ için

$$\prod_{n=1}^{k-1}\frac{(n-k)(n+k)}{n\ n}\prod_{n=k+1}^{N}\frac{(n-k)(n+k)}{n\ n}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,(N-k)!\cdot(N+k)!/(k!\,2k)}{(N!/k)^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{(N-k)!\,(N+k)!}{N!\,N!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{(N+1)(N+2)\cdots(N+k)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)}$$

olduğundan, $N\to\infty$ için bu ifade $\dfrac{(-1)^{k-1}}{2}$ limitine gider.

26. $\pi/4$, yani çapı 1 olan bir dairenin alanı. E den $x=\pi/2$ için

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\cdots$$

$$=\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\frac{5\cdot7}{6\cdot6}\cdot\frac{7\cdot9}{8\cdot8}\cdot\frac{9\cdot11}{10\cdot10}\cdots$$

elde ederiz. Wallis (1616—1703) 'e ait olan bu formül Euler tarafından iyi bilinmekteydi. Wallis formülü şu değişik şekilde de ifade edilebilir:

$$\frac{1}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2 n.$$

27. Misâl 21 de $x = \pi z$ koyunuz ve sonsuz çarpım tarifini kullanınız.

28. Evet. Misâl 27 den

$$\frac{\sin \pi (z+1)}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{z+n+1}{z-n} \cdot \frac{(z+n)\cdots(z+1)\,z\,(z-1)\cdots(z-n)}{(-1)^n\,(n!)^2}$$

elde edilir.

29. Misâl 27 ve 26 dan

$$\cos \pi z = \sin \pi (-z+1/2)$$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-z+n+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-z+\frac{3}{2}\right)\left(-z+\frac{1}{2}\right)\left(-z-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-z+\frac{1}{2}-n\right)}{(-1)^n\,(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1-2z)\cdots(3-2z)(1-2z)(1+2z)(3+2z)\cdots(2n-1+2z)}{(2n-1)\cdots 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{-z+n+\frac{1}{2}}{n} \cdot \pi \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 n$$

$$= \left(1-\frac{4z^2}{1}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25}\right)\cdots$$

elde edilir.

30. Evet. E ve Misâl 29 dan

$$\frac{2\sin \pi z/2}{\pi z} \cdot \cos \pi z/2 = \left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{16}\right)\left(1-\frac{z^2}{36}\right)\cdots$$

$$\cdot \left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\left(1-\frac{z^2}{25}\right)\cdots$$

$$= \left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\left(1-\frac{z^2}{16}\right)\cdots$$

$$= \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

31. Önceden söyleme: Misâl 29 da $x=\pi$ konulursa aranan değer için $\cos\pi=-1$ elde edilir.

Gerçekleme: ilk n çarpanın çarpımı

$$\frac{-1\cdot3}{1\cdot1}\cdot\frac{1\cdot5}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot7}{5\cdot5}\cdot\frac{5\cdot9}{7\cdot7}\cdots\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)(2n-1)}=-\frac{2n+1}{2n-1}\to-1$$

verir.

32. Önceden söyleme: Misâl 29 da aranan değer için $\cos 2\pi=1$ verir.

Gerçekleme: Misâl 31 deki gibi, yahut Misâl 31 ve 35 vâsıtasıyla.

33. Önceden söyleme: $x=n\pi$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) için Misâl 29

$$\left(1-\frac{4n^2}{1}\right)\left(1-\frac{4n^2}{9}\right)\left(1-\frac{4n^2}{25}\right)\cdots=\cos\pi n=(-1)^n$$

değerini verir.

Gerçekleme: $\cos 0=1$ ve Misâl 35 ten, yahut doğrudan doğruya Misâl 31 den.

34. Evet. Misâl 22 deki gibi.

35. Evet. Misâl 28 in neticesi veya metodu ile.

36. $$1-\sin x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin\pi(1-2z)/4}{\sin\pi/4}\right)^2$$

dir (Burada $x=\pi z$ vaz'ettik). Misâl 27 dolayısıyla

$$\frac{\sin \pi\,(1-2z)/4}{\sin \pi/4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+(1-2z)/4}{n+1/4} \cdots \frac{1+(1-2z)/4}{1+1/4} \frac{(1-2z)/4}{1/4} \frac{-1+(1-2z)/4}{-1+1/4} \cdots \frac{-n+(1-2z)/4}{-n+1/4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1-2z}{4n+1} \cdots \frac{5-2z}{5} \frac{1-2z}{1} \frac{3+2z}{3} \cdots \frac{4n-1+2z}{4n-1}$$

$$= \left(1-\frac{2z}{1}\right)\left(1+\frac{2z}{3}\right)\left(1-\frac{2z}{5}\right) \cdots \left(1+\frac{2z}{4n-1}\right)\left(1-\frac{2z}{4n+1}\right) \cdots$$

37. Misâl 21 veya 27 de logaritmelere geçerek türev alınız. Sağ tarafın tam anlamı

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x+n\pi} + \cdots + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \cdots + \frac{1}{x-n\pi}\right)$$

dir.

38. Misâl 37 dolayısıyla

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

$$= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{x^2}{n^4\pi^4} + \frac{x^4}{n^6\pi^6} + \cdots\right)$$

dır.

$$y = \cot x = \frac{1}{x} + a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + \cdots$$

vaz'edelim. Bu takdirde, x^{2n-1} in iki taraftaki katsayısını eşit kılarak $n=1, 2, 3, \ldots$ için

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots=-\frac{a_n\pi^{2n}}{2}$$

buluruz. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ katsayılarını bulmak için $y=\cot x$ in gerçeklediği

$$y'+y^2=-1$$

diferansiyel denklemini kullanırız.

Burada y ve y' yerine onların açılımlarını koyar ve her iki taraftaki x in aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşit kılarsak $a_1, a_2, a_3, \ldots$ katsayıları arasında münasebetler elde ederiz. Bu münasebetleri aşağıki tabloda uygun bir şekilde ifade edebiliriz:

	x^{-2}	1	x^2	x^4	x^6	$\cdots$
y'	-1	a_1	$3a_2$	$5a_3$	$7a_4$	$\cdots$
y^2	1	$2a_1$	$2a_2$	$2a_3$	$2a_4$	$\cdots$
			a_1^2	$2a_1a_2$	$2a_1a_3$	$\cdots$
					a_2^2	$\cdots$
	0	-1	0	0	0	$\cdots$

Misâl 5.1 e bakınız. Bu suretle

$$3a_1=-1, \quad 5a_2+a_1^2=0, \quad 7a_3+2a_1a_2=0, \ldots$$

ve buradan $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ için sırayla

$$S_{2n}=-\frac{a_n\pi^{2n}}{2}=\frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{\pi^4}{90}, \quad \frac{\pi^6}{945}, \quad \frac{\pi^8}{9450}, \ldots$$

elde ederiz.

39. Misâl 37 ve 38 in metodunu Misâl 36 nın neticesine tatbik edelim. Burada

$$y=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=b_1+b_2x+b_3x^2+b_4x^3+\cdots$$

vaz'edelim. Bu takdirde

$$T_n=1+\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{(-1)^n}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{(-1)^n}{11^n}+\cdots=\frac{b_n\pi^n}{2^{n+1}}$$

olur. y,

$$2y'=1+y^2$$

diferansiyel denklemini gerçekler ki, bu da bize ($b_1=1$ olduğuna dikkat ediniz) şu tabloyu verir:

	1	x	x^2	x^3	x^4	...
	1					
y^2	1	$2b_2$	$2b_3$	$2b_4$	$2b_5$	...
			b_2^2	$2b_2b_3$	$2b_2b_4$	...
					b_3^2	...
						...
$2y'$	$2b_2$	$4b_3$	$6b_4$	$8b_4$	$10b_6$	...

Buradan evvelâ $2b_2=2$, $4b_3=2b_2$, $6b_4=2b_3+b_2^2$, ... münasebetlerini ve sonra da

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

için sırayla

$$T_n=\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi^2}{8},\quad \frac{\pi^3}{32},\quad \frac{\pi^4}{96},\quad \frac{5\pi^5}{1536},\quad \frac{\pi^6}{960},\ \ldots$$

değerlerini elde ederiz.

40. Genel olarak

$$S_{2n}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2^{2n}} \qquad -\frac{1}{4^{2n}} \qquad -\cdots$$

$=T_{2n}$ dir. Bu netice Misâl 38 ve 39 daki nümerik hesapları kontrol etmekte kullanılabilir:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8},\quad \frac{1}{90}\cdot\frac{15}{16}=\frac{1}{96},\quad \frac{1}{945}\cdot\frac{63}{64}=\frac{1}{960}.$$

41. $$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\arcsin x\cdot dx$$

$$=\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}x^3\,dx+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{6}\frac{2\cdot4}{3\cdot5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{7}\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$$

Şimdi kendisinden hareket etmiş olduğumuz integrali hesaplayınız ($=(\pi/2)^2/2$) ve Misâl 40 ı kullanınız. Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, S. 178—181 e bakınız.

42. $$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}(\arcsin x)^2\,dx$$

$$=\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}x^2dx+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}x^4\,dx+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{\pi}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right).$$

Şimdi kendisinden hareket etmiş olduğumuz integrali hesaplayınız ($=(\pi/2)^2/3$). $(\arcsin x)^2$ nin yukarda kullanmış olduğumuz açılımı Misâl 5.1 de çıkarılacaktır. Euler, *Opera Omnia*, ser. 1, vol. 14, S. 181—184 e bakınız.

43. (*a*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\, dt = -\int_0^x t^{-1} \log(1-t)\, dt;$$

kısmî integrasyon metodu ile integre ettikten sonra $s = 1-t$ yeni integrasyon değişkenini ithâl ediniz.

(*b*) $x = 1/2$. Bu değer, x ile $1-x$ in maksimumunu en küçük yapan değerdir.

44. Eğer $P_n(x) = 0$ ise

$$\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n,$$

$$1+\frac{ix}{n} = e^{2\pi ki/n}\left(1-\frac{ix}{n}\right),$$

$$x = \frac{n}{i}\,\frac{e^{\pi ki/n} - e^{-\pi ki/n}}{e^{\pi ki/n} + e^{-\pi ki/n}} = n \tan\frac{k\pi}{n}$$

olur. Burada n tek olduğu takdirde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ alırız.

45. n tek ise, köklerin ifadesinde

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-1)/2$$

alabiliriz (Misâl 44 e bakınız).

Şu halde

$$\frac{P_n(x)}{x} = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 (k\pi/n)}\right)$$

olur. k sabit olduğu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} n \tan (k\pi/n) = k\pi$$

olduğuna dikkat ediniz.

Burada varmış olduğumuz noktadan, modern standartlara göre kabûl edilebilir bir ispata geçmek için nispeten küçük tek bir adıma ihtiyaç vardır. Euler'in muhakemesinin Cauchy tarafından verilen biraz başka türlü düzenlenmiş bir şekli, eliptik fonksiyonların sonsuz çarpımlarla gösterilişini benzerlik yardımıyla keşfeden Abel'e modellik etmiştir. A. Cauchy, *Oeuvres complètes*, ser. 2, vol. 3, S. 462—465 ve N. H. Abel, *Oeuvres complètes*, vol. 1, S. 335—343 e bakınız.

46. Sonlu bir sayıda terimlerin toplamı, bu terimler hangi sırada alınırsa alınsın, daima aynıdır. Yapılan hata bu ifadeyi düşünmeden sonsuz sayıda terime uygulamak, yani bir *sonsuz serinin* toplamının, terimler hangi sırada alınırsa alınsın, aynı kalacağını kabûl etmektir. Bu ifade yanlıştır; verdiğimiz misâl onun yanlış olduğunu ispat eder. Böyle bir yanlıştan korunmanın çaresi, kullanılan terimlerin tariflerine dönerek sadece bu tariflere dayanan kesin ispatlara güvenmektir. Böylece, bir sonsuz serinin toplamı, tarif olarak, belirli bir dizinin («kısmî toplamlar» dizisinin) *limiti*dir ve, misâlde yaptığımız gibi, sonsuz sayıda terimin sırasını değiştirirsek, bu diziyi esas itibariyle değiştirmiş oluruz. (Belirli bir *kısıtlayıcı şart* altında, bir sonsuz serinin terimlerinin sırasını değiştirmek bu serinin toplamını değiştirmez (Hardy, *Pure Mathematics* S. 346—347, 374, 378—379 a bakınız). Fakat bu şart içinde bulunduğumuz halde gerçekleşmemektedir.)

Cevaplandırılmayan No. lar: **5. 7, 9, 10, 11, 18, 19, 20, 21.**

III. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. Evet: $F=2n$, $V=n+2$, $E=3n$.

2. (1) Evet: $F=m(p+1)$, $V=pm+2$, $E=m(p+1)+pm$,
(2) $p=1$, $m=4$.

3. (1) Bir an için düzgün dörtyüzlüyü bir kenara bırakalım. Bu takdirde geri kalan altı çokyüzlüyü üç çifte ayırabiliriz, öyle ki, meselâ küp ve düzgün sekizyüzlü gibi, aynı çiftte bulunan iki çok yüzlü aynı E yi haiz olsun, fakat birinin F si ötekinin V sine eşit olsun. Düzgün dörtyüzlü bu esnada yalnız kalır, fakat o da kendi kendisiyle yukarda tarif edilen şekilde ilgilidir. (2) Küpü alınız. Küpün herhangi iki komşu yüzünün merkezlerini bir doğru ile birleştiriniz. Bu suretle elde edilen 12 doğru bir düzgün sekizyüzlünün kenarlarını teşkil eder. Bu sekizyüzlü küpün içine, çizilmiş olup, onun 6 köşesi küpün 6 yüzünün merkezlerinde bulunur. Karşıt olarak, düzgün sekizyüzlünün 8 yüzünün merkezleri sekizyüzlünün içine çizilmiş bir küpün 8 köşesini teşkil eder. Diğer hallerde de aynı çifte dahil iki çokyüzlü arasında bu türlü bir karşılıklı münasebet vardır. (Düzgün onikiyüzlü ve düzgün yirmiyüzlü için mukavvadan modeller kullanınız.) Düzgün dörtyüzlü ise kendi kendisiyle şu kendine has münasebeti haizdir: Bir düzgün dörtyüzlünün 4 tane yüzünün merkezleri, o dörtyüzlünün içine çizilen diğer bir düzgün dörtyüzlünün köşeleridir. (3) Aynı çifte dahil bir çokyüzlüden diğerine geçiş Euler formülünü muhafaza eder.

4. Küre, E tane *kırmızı* sınır çizgisi vâsıtasıyla F tane memlekete ayrılır; ikiden fazla memleketin sınırına ait V tane nokta vardır. Her memlekette bir nokta (memleketin «merkezi») seçiniz. Herhangi iki komşu memleketin merkezini bir «yol» ile birbirine bağlayınız, öyle ki her yol tek bir sınır çizgisini kessin ve farklı yollar birbirini kesmesin; bu yolları *mavi* renkte

çiziniz. Böylece tam E tane mavi çizgi (yol) meydana gelir ve bunlar küreyi F' memlekete ayırırlar ve V' nokta bu memleketlerden üç veya daha fazlasının ortak sınır noktası olur. $V' = F$ ve $F' = V$ olduğuna kanaat getiriniz. Kürenin kırmızı ve mavi çizgiler vâsıtasıyla elde edilen ayrılışları arasındaki münasebet karşılıklıdır, bunlardan birinden diğerine geçiş Euler formülünü muhafaza eder.

5. Euler formülünün «çatılama» (paragraf 4) dan sonra cari olabilmesi için gerek ve yeter şart, aynı formülün çatılamadan evvel de cari olmasıdır. Verilen bir çokyüzlünün üçgen şeklinde olmayan bütün yüzlerini çatılamak suretiyle ise yalnız üçgen şeklinde yüzleri haiz bir çokyüzlü elde ederiz.

6. Misâl 5'e benzer: tıpkı çatılamanın üçgen şeklinde yüzler ithâl etmesi gibi, «kesme» de üç kenarlı köşeler ithâl eder. Bu hali Misâl 4 ü kullanmak suretiyle Misâl 5 e irca edebiliriz.

7. (1) $N_0 = V$, $N_1 = E$, $N_2 = F - 1$. 0, 1, 2 indeksleri boyutları göstermektedir (paragraf 7 ye bakınız).

(2) $N_0 - N_1 + N_2 = 1$.

8. $l + m = c_1$, $lm = c_2$ vaz'edin. Bu takdirde

$$N_0 = (l+1)(m+1) = 1 + c_1 + c_2,$$

$$N_1 = (l+1)m + (m+1)l = c_1 + 2c_2,$$

$$N_2 = lm = c_2.$$

(2) Evet, bir dikdörtgenin bu basit ayrılışı her nekadar tam Misâl 7 de anlatılan tarzda meydana getirilmezse de, bu ayrılış için de $N_0 - N_1 + N_2 = 1$ dir.

9. $N_2\, 180° = (N_0 - 3)\, 360° + 180°$. Hedefimiz olan Misâl 7

deki (2) denklemine yaklaşmağa çalışırken yukarıki eşitliği sırasıyla

$$2N_0 - N_2 - 5 = 0,$$

$$2N_0 - 3N_2 + 2N_3 - 3 = 2$$

haline getiririz. Kenarları iki farklı şekilde saymak suretiyle

$$3N_3 = 2N_1 - 3$$

elde ederiz. Son iki denklem

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1$$

verir ki, bu da Misâl 7 (2) dolayısıyla Euler formülünü ispat eder.

10. $l + m + n = c_1$, $lm + ln + mn = c_2$ ve $lmn = c_3$ olsun. Bu takdirde

$$N_0 = (l+1)(m+1)(n+1) = 1 + c_1 + c_2 + c_3,$$

$$N_1 = l(m+1)(n+1) + m(l+1)(n+1) + n(l+1)(m+1)$$

$$= c_1 + 2c_2 + 3c_3,$$

$$N_2 = (l+1)mn + (m+1)ln + (n+1)lm = c_2 + 3c_3,$$

$N_3 = lmn = c_3$ tür.

(2) Evet, $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 1$.

11. $n = 3$ halini paragraf 16 da görmüştük. O hal ile meşgûl olurken $n = 3$ haline has hiçbir basitleştirici keyfiyet kullanmadığımızdan, bu özel hal paragraf 17 de ima edilmiş olduğu gibi pek âlâ (Misâl 2.10 daki manada) genel hali «temsil» edebilir. Okuyucu 3 yerine n, 4 yerine $n+1$, 7 yerine P_n ve 11 yerine P_{n+1} koymak suretiyle ve biraz ihtiyatla paragraf 16 daki münakaşayı tekrar etmelidir. Misâl 12 ye de bakınız.

12. Paragraf 17 nin telkinlerini ve Misâl 11 ile olan benzerliği tâkip ediniz. Genel durumda n tane düzlem verilmiş olsun. Bu düzlemler uzayı S_n parçaya ayırırlar. Bunlara bir düzlem daha ilâve ediniz; bu düzlem önceki n düzlem tarafından n tane doğru üzerinde kesilirler. Bu doğrular *genel durumda olduğundan* düzlem üzerinde P_n tane bölge belirtirler. Bu türlü her düzlem bölge bir «diafram» vazifesini görür: böyle bir bölge uzayın eski bir bölmesini (S_n tane bölmeden birini) iki yeni bölmeye ayırarak bir eski bölmenin ortadan kalkmasına ve iki yeni bölmenin meydana çıkmasına sebep olur ve böylece neticede bölmelerin eski S_n sayısını bir birim fazlalaştırır. Buradan da ispat etmek istediğimiz münasebet çıkar.

13. Paragraf 14 teki cedvelin üçüncü sütununa bakınız.

14. Paragraf 14 teki cedvelin ikinci sütunu

$$S_n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

değerleri ile çakışır; burada binom katsayılarına ait mutâd yazış tarzını kullandık.

15. Sonlu parçaların sayısı: 3, sonsuzlarınki: 8.

16. P_n^{∞}, Misâl 11 de tarif edilen P_n tane parçanın içinde sonsuz olanların sayısını göstersin. Müşahede ile

$$n = 1,\ 2,\ 3 \qquad \text{için}$$
$$P_n^{\infty} = 1,\ 4,\ 6$$

buluruz. Tahmin: $P_n^{\infty} = 2n$. İspat: Sonlu parçalardan birinin içinde bir nokta alarak bu nokta merkez olmak üzere gittikçe

artan yarıçaplı bir daire tasavvur ediniz. Bu daire çok büyük olduğu zaman $P_n - P_n^\infty$ tane sonlu parça pratik bakımdan bu dairenin merkeziyle çakışır. Bir dairenin merkezinden geçen n tane farklı doğru ise dairenin çevresini $2n$ noktada keser ve bu çevreyi $2n$ parçaya ayırır. Buradan, hakikaten $P_n^\infty = 2n$ olduğu görülür.

$$P_n - P_n^\infty = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Meselâ, Misâl 15 in cevabı

$$1 - 4 + 6 = 3 \quad \text{tür.}$$

17. Misâl 16 nın çözümüne olan benzerlik dolayısıyla, bu çözüm Misâl 18 inkinin aynıdır.

18. Misâl 19 unkinin aynı.

19. Misâl 20 ye bakınız.

20. Düzlemde herhangi ikisi genel durumda kesişen n tane daire nazarı itibara alalım. Misâl 17, 18 ve 19 u gözönünde tutarak bu dairelerin düzlemi ayırdığı parçaların sayısına S_n^∞ diyelim. Paragraf 16 ile olan benzerlik dolayısıyla, bir dairenin kendisini kesen n tane daire tarafından bölündüğü parçaların sayısının $2n$ (burada genel durum kabûl edilmektedir) olduğuna dikkat ediniz.

$n = 1$	2	3	4	için
$2n = 2$	4	6	8	ve
$S_n^\infty = 2$	4	8	14	

olduğunu müşahede ediniz (S_n^∞ un her üç tefsirini de düşününüz).

Tahmin : $S_{n+1}^\infty = S_n^\infty + 2n$. İspat: Misâl 11, 12 de olduğu gibi. Meselâ

$S_5^{\infty} = S_4^{\infty} + 8 = 14 + 8 = 22$ dir.

Misâl 17, 18 ve 19 un çözümü işte budur. Diğer bazı tahminler:

$$S_n^{\infty} = 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2},$$

$$S_n - S_n^{\infty} = -\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

21. Misâl 22—30 'a bakınız.

22. Yanlış: $F=1,\ V=E=0,\ 1+0+0+2.$

23. Yanlış: $F=2,\ V=0,\ E=1,\ 2+0+1+2.$

24. Yanlış: $F=3,\ V=0,\ E=2,\ 3+0+2+2.$

25. Doğru : $F=3,\ V=2,\ E=3,\ 3+2=3+2.$

26. Yanlış: $F=p+1,\ V=0,\ E=p,\ (p+1)+0+p+2.$

($p=0,\ 1,\ 2$ halleri için sırasıyla Misâl 22, 23, 24 e bakınız.) İçinde bulunduğumuz halde Misâl 2 (1) in çözümünün uygulanamıyacağına dikkat ediniz.

27. $m=3,\ p=0$ hali doğrudur (Misâl 25 e bakınız), daha genel olarak $m \geq 3$ halleri de doğrudur: $F=m,\ V=2,\ E=m,\ m+2=m+2.$ $m=0,\ p=0$ hali yanlıştır (Misâl 22 ye bakınız). Gerikalan iki hal doğru *görünebilecek* bir tarzda tefsir edilebilir. (1) $m=1,\ p=0$: iki uç noktalı bir iç mâniayı haiz bir memleket, $F=1,\ V=2,\ E=1,\ 1+2=1+2.$ (2) $m=2,\ p=0$: iki eğri yayı ve iki köşeyle ayrılmış iki memleket, $F=2,\ V=2,\ E=2,\ 2+2=2+2.$ Misâl 23 te verilen daha aşikâr tefsir «yanlış» tır. Bu tefsirle Misâl 2 (1) in çözümü $m>0,\ p=0$ haline de uygulanabilmekte devam eder.

28. $m \geq 3,\ p \geq 1.$ İspat her konveks çokyüzlüde her yü-

zün en aşağı üç kenar tarafından çevrelendiği ve her köşeden en aşağı üç kenarın çıktığı keyfiyetini kullanmaktadır.

29. Misâl 22—28 iki şart telkin etmektedir: F içinde, bir konveks çokyüzlünün bir yüzü olarak, sayılan bir memleket bir «dairesel bölge» tipinde olmalıdır; ne bir kürenin bütün yüzeyi, ne de bir halka bu tiptedir. (2) E içinde, bir konveks çokyüzlünün bir kenarı olarak, sayılan bir çizgi köşelerde son bulmalıdır; bir dairenin bütün çevresi böyle son bulmaz (aslında hiç te son bulmaz). Misâl 22, (1) i gerçeklememekte, Misâl 23, (2) yi gerçeklememekte, Misâl 24 ise hiçbirini gerçeklememektedir. Misâl 25 veya, daha genel olarak Misâl 27 nin çözümündeki gibi tefsir edilen $m > 0$, $p = 0$ hali, hem (1), hem de (2) yi gerçeklemektedir.

30. (1) Misâl 2 (1) in (3, 2) halini alınız (Misâl 26 ya bakınız), fakat her meridyen üzerinde iki paralel daire arasında kalan yayı siliniz: Bu halde $F = 7$, $V = 8$, $E = 12$, $7+8=12+2$, memleketler arasında bir küre kuşağı kalır ve bu suretle Misâl 29 un (1) şartı ihlâl edilmiş, fakat (2) şartı ihlâl edilmemiş olur.

(2) $F = 1$, $V = 1$, $E = 0$ (Kuzey kutbunda bir matematik nokta müstesna olmak üzere bütün dünyayı kaplayan tek bir memleket): Doğru, $1 + 1 = 0 + 2$, Misâl 29 un (1) ve (2) şartları ile çatışma yok, v.s.

32. $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots = 2E.$

33. Sırasıyla 4π, 12π, 8π, 36π, 20π.

34. $\Sigma\alpha = \pi F_3 + 2\pi F_4 + 3\pi F_5 + \cdots$.

35. Misâl 34, 32, 31 dolayısıyla

$$\Sigma\alpha = \pi\Sigma(n-2)F_n = 2\pi(E - F).$$

36. n kenarlı bir konveks küresel çokgen $n-2$ tane küresel çokgene bölünebilir. Şu halde

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - (n-2)\pi$$
$$= 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - \cdots - (\pi - \alpha_n)$$
$$= 2\pi - a_1' - a_2' - \cdots - a_n'$$
$$= 2\pi - P'.$$

37. Bir çokyüzlünün bir köşesinden geçen yüzleri aralarında bir iç uzay açısı ihtiva ederler; Descartes bu açının bütünleyicisine çokyüzlünün bir dış uzay açısı adını vermişti. Gözönüne alınan köşe merkez olmak üzere 1 yarıçaplı bir küre çiziniz, fakat kürenin sadece dış uzay açısı içinde kalan sektörünü muhafaza ediniz. Çokyüzlünün bütün köşelerinde bu suretle meydana gelen sektörler kaydırılmak suretiyle bir araya getirilerek tam bir küre teşkil ederler — tıpkı benzer düzlem şekildeki (Şek. 3.7) daire sektörlerinin kaydırılarak bir araya getirildiğinde bir tam daire meydana getirdikleri gibi. Bir uzay açısının ölçüsü olarak kendisine birim küre üzerinde tekabül eden küresel çokgenin alanını alırız, bu suretle bir çokyüzlünün bütün dış uzay açılarının toplamı hakikatên 4π dir.

38. $P_1, P_2, \ldots, P_V$, çokyüzlünün V tane iç uzay açısına tekabül eden küresel çokgenlerin çevrelerini göstersin. Bu takdirde Misâl 36 ve 37 dolayısıyla

$$\Sigma\alpha = P_1 + P_2 + \cdots + P_V$$
$$= 2\pi - A_1' + 2\pi - A_2' + \cdots + 2\pi - A_V'$$
$$= 2\pi V - 4\pi$$

olur.

39. Misâl 35 ve 38 dolayısıyla

$$2\pi(E - F) = \Sigma\alpha = 2\pi(V - 2).$$

40. Misâl 31, 32 dolayısıyla

$$3F = 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots$$

$$\leqq 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots = 2E$$

olup, bu da sorulmuş olan altı eşitsizlikten ilkini verir. Burada eşitliğe $F = F_3$, yani bütün yüzlerin üçgen olması halinde erişilir. Euler teoremi ile biraz önce ispat edilmiş eşitsizlik arasında evvelâ E yi, sonra F yi yok edersek, ilk sıradaki diğer iki eşit-eşitsizliği elde ederiz; bu eşitsizlikler yalnız ve ancak bütün yüzlerin üçgenlerden ibaret olması halinde eşitliklere dönüşürler. Misâl 3 ve 4 te telkin edildiği gibi, F ile V nin rollerini aralarında değiştirirsek ikinci sırada sorulan üç eşitsizliği elde ederiz; bu eşitsizlikler yalnız ve ancak çokyüzlünün her köşesinden üçer kenar çıkması halinde eşitliklere dönüşürler. Yukarda ispat edilen eşitsizliklerin bazıları Descartes'ın notlarında verilmiştir.

41. Euler Teoreminden

$$6F - 2E = 12 + 2(2E - 3V),$$

ve buradan da, Misâl 31, 32 ve 40 dolayısıyla

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + 2(2E - 3V) + F_7 + 2F_8 + \cdots,$$

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 \geqq 12$$

ve bu suretle *her konveks çokyüzlünün 6 dan daha az kenarlı bir takım yüzleri haiz olması gerektiği* keyfiyeti elde edilir.

Cevaplandırılmayan No.: **31.**

IV. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. $R_2(25) = 12$, paragraf 2 ye bakınız; $S_3(11) = 3$

2. $R_2(n)$, bir düzlemin merkezi koordinatların başlangıç noktasında ve yarıçapı $\sqrt{n}$ olan bir dairenin çevresi üzerinde bulunan kafes noktalarının sayısını göstermektedir ($n = 25$, Misâl 1, halini alarak buna ait daireyi çiziniz.) $R_3(n)$ merkezi koordinatların başlangıç noktasında ve yarıçapı $\sqrt{n}$ olan bir kürenin yüzeyi üzerinde bulunan kafes noktalarının sayısıdır.

3. p bir tek asal sayı ise, P nin 4 ile bölündüğünde 1 veya 3 kalanını bıraktığına göre $R_2(p^2) = 12$ veya 4 tür.

4. Cedvellerin karşılaştırılması bize şu faraziyeyi telkin eder: p bir tek asal sayı ise, ya hem p, hem de p^2 iki kare toplamı olarak gösterilebilir, yahut ta ne p, ne de p^2 böyle gösterilebilir. Daha açık olan şu faraziye de müşahedelerimiz tarafından bir parça desteklenir: p bir tek asal sayı ise, p nin 4 ile bölündüğünde 1 veya 3 kalanını bıraktığına göre, $R_2(p) = 8$ veya 0 dır.

5. $$p = x^2 + y^2$$

ise, buradan

$$p^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

çıkar. Yani, eğer $R_2(p) > 0$ ise $R_2(p^2)$ de > 0 dır. Bu bizim daha az açık olan ilk faraziyemizin ancak yarısı, ve daha açık ikinci faraziyemizin ancak ufak bir kısmıdır. (Eğer $R_2(p^2) > 0$ olduğu bilinirse, $R_2(p)$ ye dair ondan bir hüküm çıkarmak muhakkak ki daha az aşikârdır.) Bununla birlikte, böyle bir kısmî gerçeklemenin daha az açık faraziyeye olan güvenimizi büyük ölçüde arttırması ve daha açık faraziyeye olan güvenimizi de bir parça arttırması akla yakın gelmektedir.

6. $n=7$, 15, 23 ve 28 için $R_8(p)=0$ ve 30 a kadarki n ler içinde bütün gerikalanlar için $R_8(p)\neq 0$ dır (S. 74—75 teki Cedvel II ye bakınız.)

7. (1), (2), (3), (4), (5) in $S_4(n)$ e yaptığı katkılar sırasıyla 24, 12, 6, 4, 1 dir.

8. Evvelâ, Misâl 7 de ayırdedilen hallere müracaat ediniz. Eğer $S_4(4u)$ tek ise, (5) hali ister ister istemez zuhûr eder ve böylece

$$4u=a^2+a^2+a^2+a^2,$$
$$u=a^2$$

olur. Sonra, u nun her d bölenine diğer bir u/d böleni tekabül eder, ve $u=d^2$ olmadıkça bu iki bölen birbirinden farklıdır. Şu halde, u nun bir kare olup olmadığına göre u nun bölenler sayısı tek veya çifttir; aynı şey u nun bölenlerinin toplamı için de doğrudur, çünkü u nun her böleni, u nun kendisi gibi tektir. Paragraf 6 da $S_4(4u)$ nun ve u nun bölenler toplamının birbirine eşit olduğu faraziyesini ileri sürmüştük; şimdi bu iki sayının 2 ile bölününce aynı kalanı bıraktığını ispat ettik. Faraziyemizin bir parçasını ispat edince, tabiî ona olan güvenimiz de fazlalaştı.

9. (1) $24\times 2^4=8\times 48$ (6) $24\times 2^2=8\times 24$

(2) $12\times 2^4=8\times 24$ (7) $12\times 2^2=8\times 12$

(3) $6\times 2^4=8\times 12$ (8) $4\times 2^2=8\times 4$

(4) $4\times 2^4=8\times 8$ (9) $12\times 2^2=8\times 6$

(5) $1\times 2^4=8\times 2$ (10) $6\times 2^2=8\times 3$

(11) $4\times 2=8\times 1$.

10. S. 74 teki Cedvel II ye bakınız. En aşağı birkaç satırı kontrol ediniz. Misâl 9 dan $R_4(n)$ nin 8 ile bölünebildiği çıkar.

11. (Paragraf 6 da yapmış olduğumuz gibi) hiç olmazsa bazı kısmî kaideler keşfetmek için uğraşırken bazı göze çarpan halleri şöyle gruplandırmaya sevkedilmiş olabiliriz:

(1)	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
	3	4	6	8	12	14	18	20	24	30
(2)		2		4		8		16		
		3		3		3		3		
(3)	4	8	12	16	20	24	28			
	3	3	12	3	18	12	24.			

Burada (1), (2) ve (3) ün ilk satırı n nin, ikinci satırı $R_4(n)$ nin değerlerini vermektedir.

12. Misâl 11 in çözümünde yapılmıştır: (1) asal sayılar, (2) 2 nin kuvvetleri, (3) 4 ile bölünebilen sayılar.

13. n, 4 ile bölünemediği takdirde, paragraf 6 ya olan benzerlik ve biraz müşahede yardımıyla kanunun keşfi nispeten kolaydır. Şu halde dikkatimizi Misâl 11 in çözümündeki (3) hali üzerinde toplayalım.

$n=4$	8	12	16	20	24	28
$n/4=1$	2	3	4	5	6	7
$R_4(n)/8=3$	3	12	3	18	12	24

Üçüncü satırda kalın puntoyla basılmış olan sayılar ikinci satırda kendilerine tekabül eden sayıların *bölenleri toplamı* ve neticede birinci satırda onlara tekabül eden ve asıl ilgi konumuz olan sayıların *bazı* bölenlerinin toplamıdır. Bu müşahede bizi diğer bir denemeye sevkeder:

n	=	4	8	12	16
$R_4(n)/8$	=	1+2	1+2	1+2+3+6	1+2
n	=	20		24	28
$R_4(n)/8$	=	1+2+5+10		1+2+3+6	1+2+7+14

Burada hangi bölenler toplanmıştır? Hangileri toplama katılmamıştır?

14. n nin dört kare toplamı olarak gösterilişlerinin sayısı olan $R_4(n)$, n nin 4 ile bölünemiyen bölenleri toplamının 8 katına eşittir. (Eğer n nin kendisi 4 ile bölünemiyorsa, bölenlerinin hiçbiri de 4 ile bölünemez, ve daha sık olan bu halde kaide daha basit bir şekil alır.)

15. Cedvel II nin sütunlarına tekabül etmek üzere:

31	$25+4+1+1$	12×16	$32=31+1$
	$9+9+4+4$	4×16	
32	$16+16$	6×4	$3=2+1$
33	$25+4+4$	12×8	$48=33+11+3+1$
	$16+16+1$	12×8	
	$16+9+4+4$	12×16	

16. $5=1+1+1+1+1=4+1$

$$R_8(5)=\binom{8}{5}2^5+8.7.2^2=2016=16\times 126$$

$$40=25+9+1+1+1+1+1+1$$

$$40=9+9+9+9+1+1+1+1$$

$$S_8(40)=8.7+\binom{8}{4}=126.$$

17. Misâl 16. Cedvel III aslında Misâl 16 dakinden daha az zahmetli bir metodla düzenlenmiştir (Misâl 6.17 ve 6.23 e bakınız).

18. Cedvel III ün sınırları içinde hem $R_8(n)$, hem de $S_8(8n)$, n ile devamlı şekilde artmakta, halbuki $R_4(n)$ ve $S_4(4(2n-1))$ intizamsız bir şekilde raksetmektedirler.

19. $R_4(n)$ ile $S_4(4(2n-1))$ arasındaki benzerlik bölenlere işaret etmektedir. Şu kısmî kaide kolayca müşahede edilebilir: Eğer n tek ise $R_8(n)/16$ ile $S_8(8n)$ birbirine tamamen eşittir; eğer n çift ise, aradaki fark birçok hallerde nispeten küçük olmakla beraber, bunlar birbirinden farklıdır.

20. Tek ve çift sayılar daha Misâl 19 da ele alınmıştır. 2 nin kuvvetleri:

n	1	2	4	8	16
$S(8n)$	1	8	64	512	4096.

Burada ikinci satır da 2 nin kuvvetlerinden mürekkeptir:

n	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
$S(8n)$	2^0	2^3	2^6	2^9	2^{12}.

Buradaki 2 nin üsleri hangi kanuna uyar?

21. Eğer n, 2 nin bir kuvveti ise, $S(8n) = n^3$ tür. Bu (ve $R_8(n)$ ile $S_8(8n)$ nin düzgün artışı) bizi aşağıki cedveli düzenlemeye sevkeder:

n	$R_8(n)/16 - n^3$	$S_8(8n) - n^3$
1	0	0
2	−1	0
3	1	1
4	7	0
5	1	1
6	−20	8
7	1	1
8	71	0
9	28	28
10	−118	8

n	$R_8(n)/16 - n^7$	$S_8(8n) - n^8$
11	1	1
12	260	64
13	1	1
14	−336	8
15	153	153
16	583	0
17	1	1
18	−533	224
19	1	1
20	946	64

$R_8(n)$ e dair olan sütunda + ve − işaretleri muntazam bir şekilde dağılmışlardır.

22. Bölenlerin küpleri!

n	$R_8(n)/16 = S_8(8n)$
1	1^3
3	3^3+1^3
5	5^3+1^3
7	7^3+1^3
9	$9^3+3^3+1^3$
11	11^3+1^3
13	13^3+1^3
15	$15^3+5^3+3^3+1^3$
17	17^3+1^3
19	19^3+1^3

n	$R_8(n)/16$	$S_8(8n)$
2	2^3-1^3	2^3
4	$4^3+2^3-1^3$	4^3
6	$6^3-3^3+2^3-1^3$	6^3+2^3
8	$8^3+4^3+2^3-1^3$	8^3
10	$10^3-5^3+2^3-1^3$	10^3+2^3
12	$12^3+6^3+4^3-3^3+2^3-1^3$	12^3+4^3
14	$14^3-7^3+2^3-1^3$	14^3+2^3
16	$16^3+8^3+4^3+2^3-1^3$	16^3
18	$18^3-9^3+6^3-3^3+2^3-1^3$	$18^3+6^3+2^3$
20	$20^3+10^3-5^3+4^3+2^3-1^3$	20^3+4^3

23. (1) $(-1)^{n-1} R_8(n)/16$, n nin bütün tek bölenlerinin küpleri toplamından gene n nin bütün çift bölenlerinin küpleri toplamının çıkarılmasıyla elde edilen sayıya eşittir. (2) $S_8(8n)$, n nin bölenleri içinde tamamlayıcı bölenleri tek olanlarının küpleri toplamına eşittir (Eğer d, n nin bir böleni ise, n/d ye d nin tamamlayıcı böleni denir). Bu teoremlerin tarihçesi ve bunlara dair referanslar için Misâl 6.24 e bakınız.

24. Sağa ve aşağı doğru sonsuz olarak uzanmış tasavvur edilecek

0	3	6	9	12
5	8	11	14	
10	13			

cedvelini inşa ediniz. Bu cedvel bize, sorulan şekilde ifade edilemiyen yegâne sayıların 1, 2, 4, 7 olduğunu gösterir.

25. $a=3$, $b=5$ hali Misâl 24 te yapılmıştı. Burada a ile b aralarında asaldır. $ax+by$ şeklinde gösterilemiyen son sayı $ab-a-b=(a-1)(b-1)-1$ dir. Bunun ispatı, kare toplamlarına dair teoremlerin ispatlarına nazaran onlarla mukayese edilemiyecek kadar kolaydır.

26. (1) genel olarak doğrudur. (2) genel olarak doğru değildir. fakat onun ilk istisnası $n=341$ için vukubulur. (G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938, S. 69, 72 ye bakınız.)

V. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. [Putnam 1948 e bakınız]

(*a*) $$x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\frac{4}{5}x^5+\cdots+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

(*b*) Diferansiyel denklemi gerçekledikten sonra

$$y = a_0 x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + \cdots + a_n x^{2n+1} \cdots$$

vaz'ediniz. Eşit kuvvetlerin katsayılarını karşılaştırmak için şu tabloyu kullanabilirsiniz:

	1	x^2	x^4	$\cdots$	x^{2n}	
y'	a_0	$3a_1$	$5a_2$	$\cdots$	$(2n+1)\,a_n$	$\cdots$
$-x^2y'$		$-a_0$	$-3a_1$	$\cdots$	$-(2n-1)\,a_{n-1}$	$\cdots$
$-xy$		$-a_0$	$-a_1$	$\cdots$	$-a_{n-1}$	$\cdots$
	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$

Bu tablo bize $a_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için $(2n+1)\,a_n = 2n a_{n-1}$ verir.

2. [Putnam 1950 ye bakınız]

(*a*) $$y = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{1.3.5 \ldots (2n-1)} + \cdots$$

(*b*) Bu açılım için

$$y' = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.3} + \frac{x^6}{1.3.5} + \cdots$$

olup, neticede onun $y' = 1 + xy$ diferansiyel denklemini gerçeklediği görülür. Verilmiş olan y çarpımı da aynı diferansiyel denklemi gerçekler ve hem yukarıki açılım, hem de çarpım $x = 0$ için sıfıra eşit olurlar. Şu halde ikisi birbirine eşittir.

3. a_n katsayıları arasında

$$\frac{1}{1+x} + \frac{4a_1 x}{(1+x)^3} + \frac{16 a_2 x^2}{(1+x)^5} + \cdots$$
$$= 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots = f(x)$$

ten elde edilen münasebetler aşağıki cedvelde ortaya serilmiştir (Misâl 1 e bakınız):

1	-1	1	-1	1
	$4a_1$	$-4a_1\cdot 3$	$4a_1\cdot 6$	$-4a_1\cdot 10$
		$16a_2$	$-16a^2\cdot 5$	$16a_2\cdot 15$
			$64a_3$	$-64a_3\cdot 7$
				$256a_4$
1	0	a_1	0	a_2

Buradan

$$f(x)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2x^4+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2x^6+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\right)^2x^8+\cdots$$

elde edilir. Bu misâl tarihî bir önemi haizdir. Gauss, *Werke*, Bd 3, S. 369 a bakınız.

4. Aşağıki tablonun düzenleniş tarzını inceleyiniz (Misâl 1, 3 e bakınız):

$f(x)^3$	a_0^3	$3a_1a_0^2$	$3a_2a_0^2$	$3a_3a_0^2$	$3a_4a_0^2$
			$3a_1^2a_0$	$6a_2a_1a_0$	$6a_3a_1a_0$
				a_1^2	$3a_2^2a_0$
					$3a_2a_1^2$
$3f(x)f(x^2)$	$3a_0^2$	$3a_1a_0$	$3a_2a_0$	$3a_3a_0$	$3a_4a_0$
			$3a_0a_1$	$3a_1a_1$	$3a_2a_1$
					$3a_0a_2$
$2f(x^3)$	$2a_0$			$2a_1$	
	$6a_1$	$6a_2$	$6a_3$	$6a_4$	$6a_5$

$a_0=1$ den hareket ederek, arka arkaya a_1, a_2, a_3, a_4, ve $a_5=8$ i hesaplıyabiliriz. G. Pòlya, *Zeitschrift für Kristallographie*, Bd. (A) 93 (1936), S. 415—443 ve *Acta Mathematica* Vol. 68 (1937), S. 145—252 ye bakınız.

5. Paragraf 1 deki açılımları karşılaştırmak suretiyle elde edilir.

6. (*a*) $\varepsilon^2/15$. (*b*) $+\infty$. Her iki sınır halinde hatâ pozitif, yani yaklaşık değer hakikî değerden daha büyüktür.

7. (*a*) $\varepsilon^2/15$. (*b*) 1/3. Her iki sınır halinde yaklaşık değer hakikî değerden büyüktür.

8. $4\pi(a^2+b^2+c^2)/3$. Bu yaklaşık formülün hakikî değerden daha büyük değerler verdiğinden şüphelenmek için bazı sebepler vardır. G. Polya, *Publicaciones del Institute di Matematica*, Rosario, vol. 5 (1943) e bakınız.

9. İntegrallerden seriye geçerken binom açılımını ve Misâl 2.42 deki integral formüllerini kullanınız.

$$P=2\pi a\left[1-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right],$$

$$P'=2\pi a\left[1-\sum_{1}^{\infty}\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}\cdots\frac{4n-1}{4n}\,\frac{\varepsilon^{2n}}{4n-1}\right].$$

10. Misâl 9 un çözümünü kullanarak

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}=g_n$$

vaz'ediniz. O takdirde $n\geq 2$ için $g_1>g_n$ olur ve $\varepsilon>0$ için

$$E-P=2\pi a\sum_{2}^{\infty}(g_1g_n-g_n^2)\,\varepsilon^{2n}/(2n-1)>0$$

elde edilir.

11. P'' nün izafî hatasının başlangıç terimi

$$-[\alpha+3(1-\alpha)]\,\varepsilon^4/64+\cdots$$

olup, $\alpha = 3/2$ ve neticede $P'' = P(P-P')/2$ olmadıkça bu terim 4. mertebedendir.

12. Küçük ε 'lar için $(P''-E)/E = 3\cdot 2^{-14}\varepsilon^3 + \cdots$,

$\varepsilon = 1$ için $(P''-E)/E = (3\pi - 8)/8 = 0{,}1781$,

$\varepsilon = 4/5$ için $(P''-E)/E = 0{,}00019$ dur.

Buradan $P'' > E$ faraziyesi elde edilir. G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, S. 231—236 ya bakınız.

13. $$e^p = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n.$$

Şu halde istenilen netice

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n(a_1+a_{n+p})}{(n+p)\,a_n}\right)^n \geq 1$$

e denktir.

Aksi faraziye, N uygun bir sabit olmak üzere, $n > N$ için

$$\frac{n(a_1+a_{n+p})}{(n+p)\,a_n} < 1$$

olmasını icabettirir ki, bu da

$$\frac{a_{n+p}}{n+p} - \frac{a_n}{n} < -\frac{a_1}{n+p}$$

ile aynı şeydir. $n = (m-1)\,p$ değerlerini düşünelim:

$$\frac{a_{mp}}{mp} - \frac{a_{(m-1)\,p}}{(m-1)p} < -\frac{a_1}{mp},$$

$$\frac{a_{(m-1)\,p}}{(m-1)\,p} - \frac{a_{(m-2)\,p}}{(m-2)\,p} < -\frac{a_1}{(m-1)\,p},$$

.....

Buradan, paragraf 5 teki gibi, C uygun bir sabit olmak üzere

$$\frac{a_{mp}}{m} < C - a_1\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

neticesini çıkarırız ki, bu da $m \to \infty$ için bizi $a_n > 0$ faraziyesi ile bir tenakuza götürür.

14. Paragraf 4 ün $a_n = n^c$ misâli

$$a_1 = 1, \quad \text{ve} \quad n = 2, 3, 4, \ldots \text{ için}$$

$$a_n = n \log n$$

dizisini ilham eder. Bu seçimle

$$\left(\frac{a_1 + a_{n+p}}{a_n}\right)^n = \left\{\frac{1+(n+p)\left[\log n + \log\left(1+(p/n)\right)\right]}{n \log n}\right\}^n$$

$$= \left\{\frac{(n+p)\log n + 1 + (n+p)\left[\frac{p}{n} - \frac{p^2}{2n^2} + \cdots\right]}{n \log n}\right\}^n$$

$$= \left\{1 + \frac{p+\alpha_n}{n}\right\}^n \to e^p$$

elde edilir. (Çünkü $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ dır.)

15. Söz konusu mantisler, yavaş yükselen $y = \log x - 2$ eğrisinin $x = 100, 101, \ldots, 999$ absislerine tekabül eden 900 tane ordinattır; burada log işareti âdi logaritmeyi göstermektedir. Cedvel I, eğri üzerindeki bu 900 noktanın kaçar tanesinin 1/10 kalınlığında bazı yatay şeritler içine düştüğünü belirtmektedir. Eğrinin böyle bir şeride girdiği ve onu terkettiği noktaları gözönüne alalım. Eğ r x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ için böyle bir noktanın absisi ise,

$$\log x_n - 2 = n/10,$$

$$x_n = 100 \cdot 10^{n/10}$$

dir. Herhangi bir aralıkta bulunan tam sayıların sayısı yaklaşık olarak aralığın uzunluğuna eşittir. Aradaki fark bir birimden azdır. Şu halde söz konusu mantisler içinde ilk rakamı n olanların sayısı 1 den küçük bir hatâ ile $x_{n+1} - x_n$ dir.

$$x_{n+1} - x_n = 100\,(10^{1/10} - 1)\,10^{n/10}$$

ise ortak oranı $10^{1/10} = 1.25893$ olan bir geometrik dizinin n. terimidir.

Altı ondalık basamaklı bir âdi logaritme cedvelinde buna tekabül eden hâdiseyi önceden söyleyiniz ve onu bizzat müşahede ediniz.

16. Peryodik tekerrüre bir nevi simetri gözüyle bakılabilir ve böyle yapılmalıdır; fakat bu durum bütün hallerde bulunduğundan ondan tekrar bahsetmiyeceğiz. Tasnifimizde aşağıki simetri tipleri rol oynayacaktır:

(1) Simetri merkezi. Yazılış tarzı: c, c'.

(2) Simetri doğrusu. Yazılış tarzı: doğru yatay ise h, düşey ise v yahut v'.

(3) Kayma simetrisi: yatay olarak kaydırılan ve *aynı zamanda* merkezî yatay doğruya göre yansıtılan tezyinat şeridi kendi kendisi ile çakışır (5, 7, *a*, *b*) şeritlerinde olduğu gibi). Yazılış tarzı: g.

Aşağıki simetri tipleri Şek. 5.2 de temsil edilmiştir. ($'$ işareti şekildeki durumları birbirinden esaslı olarak farklı olan aynı cinsten iki simetriyi birbirinden ayırdetmek için kullanılmıştır: c ve c' veya v ve v' gibi).

1, d: Hiçbir simetri (peryodilikten başka)

2, g: c, c', c, c', ...

3, f: v, v', v, v', ...

4, e: h

5, a: g

6, c: h; (v, c), (v', c'), (v, c), (v', c'), ...

7, b: g; v, c, v, c, ...

Kendi kendinize endüktif olarak kanaat getirebileceğiniz gibi, mümkün olan bütün simetri nevileri Şek. 5.2 de temsil edilmiştir.

17. Şek. 5.3 te üç farklı simetri nev'i temsil edilmiştir: 1 ile 2 aynı tipten olduğu gibi, 3 ile 4 te aynı tiptendir. Bütün tipleri bulmaya çalışınız. G. Polya, *Zeitschrift für Kristallographie*, Vol. 60 (1924), S. 278—282, P. Niggli, *aynı mecmuanın aynı sayısı*, S. 283—298 ve H. Weyl, *Symmetry*, Princeton, 1952 ye bakınız.

18. Baskı stiline dair bazı ayrıntıları nazarı itibara almazsak, 1. kümedeki harfler bir düşey simetri doğrusunu, 2. kümedekiler bir yatay simetri doğrusunu, 3. kümedekiler bir simetri merkezini, 4. kümedekiler yukarıki simetrilerin hepsini haizdirler, 5. kümedekiler hiçbir simetriyi haiz değildirler. Aynı şeyler dik koordinatlarda verilen denklemlerle ifade edilen beş eğri için sırasıyla caridir. Bu problem veya onun değişik bir şekli analitik geometri dersinde öğrencilerin alâkasını canlandırmak için kullanılabilir.

VI. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

2. $x(1-x)^{-2}$. Bu, $f(x)=(1-x)^{-1}$ olmak üzere Misâl 3 ün özel halidir. Aynı neticeyi Misâl 4 ve 5 in terkibi ile de elde ediniz.

3. $xf'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$.

4. $xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$.

5. $(1-x)^{-1}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$; bu, Misâl 6 nın bir özel halidir.

6. $f(x)\,g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0)x^n$.

7. $D_3=1$, $D_4=2$, $D_5=5$, $D_6=14$. D_6 için Şek. 6.1 e müracaat ediniz; bu halde I tipinde 2 tane, II tipinde 6 tane, III tipinde 6 tane farklı ayrılış vardır.

8. Rekürrans formülü $n=6$ için gerçekleşmektedir:

$$14=1\times 5+1\times 2+2\times 1+5\times 1.$$

Çokgenin bir kenarını (Şek. 6.2 deki yatay kenarı) çokgenin tabanı olarak seçiniz, ve çokgeni ayırmaya ilk kenarı taban olan A üçgeninin ikinci ve üçüncü kenarlarını çizmek suretiyle

başlayınız. Δ yı seçtikten sonra, geriye daha ayrılacak iki çokgen kalır: biri Δ nın solunda k kenarlı, diğeri Δ nın sağında $n+1-k$ kenarlı iki çokgen; bu iki çokgen bir arada $D_k\, D_{n+1-k}$ tane farklı ayrılış verir. $k=2, 3, 4, \ldots, n-1$ olarak seçiniz; tabiî $k=2$ halini uygun bir tarzda tefsir etmelisiniz.

9. Misâl 4 ve 6 dolayısıyla D_n 'e dair rekürrans formülü

$$x\, g(x) = D_2\, x^3 + [g(x)]^2$$

verir. $g(x)$ 'e göre 2. dereceden olan bu denklemin açılımı x^2 ile başlayan çözümünü seçiniz:

$$g(x) = (x/2)\,[1-(1-4x)^{1/2}].$$

Sağ tarafı açarak ve binom katsayılarına dair işaretleri kullanarak

$$D_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n-1}(-4)^{n-1}$$

bulursunuz.

10. En iyisi denklemin sağ tarafını şöyle tefsir etmektir:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} x^{u^2} \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} x^{v^2} \cdot \sum_{w=-\infty}^{\infty} x^{w^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} x^{u^2+v^2+w^2}$$

Burada u, v, w ($-\infty$ da $+\infty$ a kadar) bütün tam sayı değerlerini birbirinden müstakil olarak almaktadırlar, yani sağdaki üçlü toplam uzaydaki bütün kafes noktaları (Misâl 4.2 ye bakınız) üzerinde alınacaktır. Bunun $R_3(n)$ nin doğuray fonksiyonu olduğunu görmek için, $u^2+v^2+w^2$ üssünün aynı n değerini aldığı bütün terimleri birleştirmek kâfidir.

11. $$\sum_{n=0}^{\infty} R_k(n)\, x^n = \Big[\sum_{n=0}^{\infty} R_1(n)\, x^n\Big]^k.$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty} S_k(n)\, x^n = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} x^{(2n-1)^2}\Big]^k.$$

13. I, J, K ve L bütün katsayıları tam sayılar olan belirli bir takım kuvvet serilerini göstersin. Bu takdirde $R_1(n)$, $R_2(n)$, $R_4(n)$ ve $R_8(n)$ nin doğuray fonksiyonları sırasıyla

$$1+2I,$$

$$(1+2I)^2 = 1+4J,$$

$$(1+4J)^2 = 1+8K,$$

$$(1+8K)^2 = 1+16L$$

şeklindedir.

14. $$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} + \cdots$$

$$= x\,(1 + x^8 + x^{24} + x^{48} + x^{80} + \cdots) = x\,P,$$

burada P ile gösterilen kuvvet serisinde n üssü 8 ile bölünmediği takdirde x^n nin katsayısı 0 dır.

$$S_1(n),\ S_2(n),\ S_4(n),\ S_8(n)$$

nin doğuray fonksiyonları sırasıyla

$$x\,P,\ x^2P^2,\ x^4P^4,\ x^8P^8$$

dir.

15. G, $R_1(n)$ nin doğuray fonksiyonunu göstermek üzere, Misâl 6 ve ve 11 den

$$G^{k+l} = G^k\,G^l$$

elde edilir.

16. Misâl 15 e benzer tarzda, Misâl 6 ve 12 den.

17. $k=l=4$ için Misâl 15 ve 16 yı kullanınız. O cedvelin hesaplanması aslında da bu metodla yapılmış, fakat arada sırada Misâl 4.16 ve Misâl 23 gibi başka kaynaklardan kontrol edilmiştir.

18. (1) Misâl 14 ve Misâl 16 dan

$$S_4(4)\,S_4(8n-4)+S_4(12)\,S_4(8n-12)+\cdots+S_4(8n-4)\,S_4(4)=S_3(8n).$$

Paragraf 4.6 da $S_4(4(2n-1))=\sigma(2n-1)$ olduğu ve Misâl 4.23 te, u bir tek sayı olduğu takdirde, $S_3(8u)=\sigma_3(u)$ olduğu birer faraziye olarak ileri sürülmüştü.

(2) $$\sigma(1)\sigma(9)+\sigma(3)\sigma(7)+\sigma(5)\sigma(5)+\sigma(7)\sigma(3)+\sigma(9)\sigma(1)$$

$$=2(1\times 13+4\times 8)+6\times 6$$

$$=126=5^3+1^3=\sigma_3(5).$$

(3) Böyle bir gerçeklemenin her iki faraziyeye olan güvenimizi bir dereceye kadar arttırması akla yakın görünmektedir.

19. $u=1,\ 3,\ 5,\ldots$ için

$$\sum\left[\frac{u-1}{2}-5\,\frac{k(k+1)}{2}\right]s_{u-k(k+1)}=0$$

dır. Burada toplam $0\leq k(k+1)<u$ eşitsizliğine uyan ve negatif olmayan bütün k tam sayıları üzerinde alınacaktır.

20. $$\sigma(3)=4\sigma(1)$$

$$2\sigma(5)=3\sigma(3)$$

$$3\sigma(7)=2\sigma(5)+12\sigma(1)$$

$$4\sigma(9)=\sigma(7)+11\sigma(3).$$

Sonuncu eşitliğin doğruluğu

$$4 \times 13 = 8 + 11 \times 4$$

ten çıkar.

21. $S_4(4(2n-1))$ e dair rekürrans formülü Misâl 19 da ispat edilmişti. Hakikatten bu rekürrans formülü, $S_4(4)$ verildiği takdirde bütün $S_4(4(2n-1))$ değerlerini tamamen belirleyen bir sonsuz münasebet sistemi demektir. Şimdi biliyoruz ki

$$S_4(4) = \sigma(1) = 1$$

dir. Eğer $\sigma(2n-1)$ de $S_4(4(2n-1))$ in gerçeklediği rekürrans bağıntılarını gerçeklerse, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$S_4(4(2n-1)) = \sigma(2n-1)$$

dir, çünkü bu rekürrans bağıntılarının âynı başlangıç değerine tekabül eden çözümü tektir. Eğer karşıt olarak, son eşitlik cari ise, $\sigma(2n-1)$ de $S_4(4(2n-1))$ in gerçeklediği rekürrans bağıntılarını gerçekler.

22.

$$G = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$H = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots,$$
$$G^k = H$$

olduğunu farzedelim. Buradan evvelâ Misâl 19 da olduğu gibi

$$G \times H' - k \times G' H = 0$$

elde edilir. x^n nin katsayısını 0 a eşit kılınız:

$$\sum_{m=0}^{n} [n - (k+1)m] a_m u_{n-m} = 0$$

a_0, a_1, a_2,... katsayılarını verilmiş kabûl edelim. $a_0 \neq 0$ ise son denklemden u_n yi u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_1, u_0 cinsinden hesaplıyabilirsiniz. $u_0 = a_0{}^k$ olduğuna dikkat ediniz.

23. Misâl 22 yi $k=8$ ve

$$G = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + 2x^{16} + \cdots .$$

hâline uygulayınız. Misâl 22 nin neticesi, Misâl 11 dolayısı ile

$$n\,R_8(n) = 2(9-n)\,R_8(n-1) + 2(36-n)\,R_8(n-4) + 2(81-n)\,R_8(n-9) + \cdots$$

verir. $R_8(n)/16 = r_n$ diyelim. Bu takdirde $r_0 = 1/16$ olur, ve r_1, r_2, r_3, ..., r_{10} u sırayla

$$\begin{aligned}
r_1 &= 16\,r_0 \\
2\,r_2 &= 14\,r_1 \\
3\,r_3 &= 12\,r_2 \\
4\,r_4 &= 10\,r_3 + 64\,r_0 \\
5\,r_5 &= 8\,r_4 + 62\,r_1 \\
6\,r_6 &= 6\,r_5 + 60\,r_2 \\
7\,r_7 &= 4\,r_6 + 58\,r_3 \\
8\,r_8 &= 2\,r_7 + 56\,r_4 \\
9\,r_9 &= 54\,r_5 + 144\,r_0 \\
10\,r_{10} &= -2\,r_9 + 52\,r_6 + 142\,r_1
\end{aligned}$$

den buluruz.

Bu formülleri nümerik hesapta kullanırken elimizde önemli bir sağlama kaidesi vardır: r_n yi veren denklemin sağ tarafı n ile ile bölünebilmelidir.

Aynı metod, $k \geq 2$ verilmiş herhangi bir tam sayı olduğuna göre $R_k(n)$ yi hesaplamak için de bir rekürrans formülü verir. Kezâ $S_k(n)$ için de aynı yolla bir rekürrans formülü bulabiliriz.

25. Sonsuz çarpıma s deyin. $-x\dfrac{d(\log s)}{dx}$ i hesaplar ve Euler'in muhtırasındaki No. 10 u kullanırsanız,

$$k \sum \sigma(l)\, x^l = \frac{\sum n a_n x^n}{1 - \sum a_m x^m}$$

elde edersiniz. Burada her üç toplam da 1 den ∞ a kadar alınacaktır. Bu eşitliği sağ tarafın paydası ile çarparak dikkatinizi x^n in katsayısı üzerinde toplayınız.

Euler $k=1$ halini ele almıştı. $k=3$ hali de oldukça basit bir netice verir (Misâl 24 te zikredilen Hardy and Wright'ın eserinde S. 282 ve 283 de teorem 353 ve 357 ye bakınız). Diğer hallerde a_n nin tâbi olduğu kanun hakkında yeter bilgimiz yoktur.

Cevaplandırılmayan No. lar: 1, 24.

VII. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. [Stanford 1950]

$$1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

n den $n+1$ geçmek için

$$(-1)^n (n+1)^2 = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğini gerçeklemelidir.

2.

$$P_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2},$$

$$S_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3},$$

$$S_n^{\infty}=2\binom{n}{0}+2\binom{n}{2}$$

olduğunu ispat etmek için, sırasıyla Misâl 3.11, P_n nin ifadesi ile terkip edilen Misâl 3.12, ve Misâl 3.20 yi kullanırız. O halde, yukarıki ifadeleri doğru kabûl ederek

$$P_{n+1}-P_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}$$

$$S_{n+1}-S_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$$

$$S_{n+1}^{\infty}-S_n^{\infty}=2\binom{n}{1}.$$

olduğunu gerçeklememiz gerekir. Bunların her üçü de iyi bilinen (Pascal üçgenindeki esas münasebet)

$$\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}$$

münasebetinden çıkar.

3. *How to Solve It*, S. 103—110.

4. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}=\frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}=\frac{6}{10}, \ldots, \frac{n+1}{2n}.$

n den $n+1$ e geçiş

$$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{2n+2}\cdot\frac{2n}{n+1}$$

eşitliğini gerçeklemeyi gerektirir. Misâl 2.23 e bakınız.

5. $$-\frac{3}{1}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{9}{7}, \ldots, -\frac{2n+1}{2n-1}.$$

n den $n+1$ e geçiş

$$1-\frac{4}{(2n+1)^2}=\frac{2n+3}{2n+1}\,\frac{2n-1}{2n+1}$$

eşitliğini gerçeklemeyi gerektirir. Misâl 2.31 e bakınız.

6. Genel hal hakikatte

$$\frac{x}{1-x}=-\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\frac{8x^8}{1+x^8}+\cdots$$

limit haline denk olup, sorudaki özel hal bu limit halinden şöyle elde edilir: Burada x yerine x^{16} koyup, 16 ile çarparak

$$\frac{16x^{16}}{1-x^{16}}=\frac{16x^{16}}{1+x^{16}}+\frac{32x^{32}}{1+x^{32}}+\cdots$$

elde ettikten sonra bunu ilk denklemden çıkarınız. Genel halde $2^{n+1}=m$ dersek, n den $n+1$ e geçiş

$$\frac{mx^m}{1+x^m}=-\frac{2m\,x^{2m}}{1-x^{2m}}+\frac{mx^m}{1-x^m}$$

olmasını gerektirir.

7. $$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$$

olduğunu ispat etmek için n den $n+1$ geçiş

$$2n+1=(n+1)^2-n^2$$

olduğunu gerçeklemeyi gerektirir.

8. Cedvelin dördüncü satırındaki n. terim

$$(1+2)+(4+5)+\cdots+(3n-5+3n-4)+3n-2$$

$$=3+9+\cdots+[6(n-1)-3]+3n-2$$

$$=6\frac{n(n-1)}{2}-3(n-1)+3n-2=3n^2-3n+1 \quad \text{dir.}$$

Hakikaten $n-1$ den n ye geçiş

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

olmasını gerektirir.

9. n^2, n^3 ve n^4 ten sonra n^k ya ait genel hâl aşikârdır. İçlerinde en basiti olan n^2 hali eski çağlardan beri bilinmekteydi; diğerleri yakın zamanda Alfred Moessner tarafından ampirik endüksiyonla keşfedilmiş ve Oskar Perron tarafından matematik endüksiyonla ispat edilmiştir. *Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissenschaften*, Math.—naturwissenschaftliche Klasse, 1951, S. 29—43 e bakınız.

10. $k=1$ için teorem şu aşikâr özdeşliğe iner:

$$1-n=-(n-1).$$

k dan $k+1$ e geçiş şu eşitliğin gerçeklenmesini gerektirir:

$$(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1}-(-1)^k\binom{n-1}{k},$$

ki bu da, daha önce de (Misâl 2 de) rastlamış olduğumuz, Pascal üçgenindeki esas münasebettir.

11. [Stanford 1946]. $2n$ oyuncunun aranan eşleştirme sayısına P_n deyiniz. n. oyuncu geri kalan $2n-1$ tane oyuncunun

herhangi biriyle eşleştirilebilir. Bu oyuncunun hasmı seçildikten sonra, geriye

$$2n-2=2(n-1)$$

tane oyuncu kalır ki, bunlar da P_{n-1} türlü eşleştirilebilirler. Buradan

$$P_n=(2n-1)\,P_{n-1}$$

bulunur.

12. $f_n(x)$ e dair ispatı istenen ifadeye A_n diyelim. Biz A_n yerine aşağıki A_n' ifadesini ispat edeceğiz:

$A'_n \cdot f_n(x)$ fonksiyonu bir bölüm olup, *paydası* $(1-x)^{n+1}$ ve payı, sabit terimi 0 ve diğer katsayıları pozitif tam sayılar olan, n. *dereceden* bir polinomdur.

A'_n nin A_n den daha fazla şey ifade ettiğine dikkat ediniz: A'_n nin A_n yi aştığı hususlar italiklerle belirtilmiştir. A'_n yi doğru kabûl ederek $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$(1-x)^{n+1}\,f(x)=P_n(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

vaz'edelim. Sorudaki rekürrans tarifinden şu rekürrans formülünü elde ederiz:

$$P_{n+1}(x)=x\,[(1-x)\,P'_n(x)+(n+1)\,P_n(x)\,].$$

Bu formül ise, $P_{n+1}(x)$ te $x, x^2, x^3, \dots, x^n$ ve x^{n+1} in katsayılarının sırasıyla

$$a_1,\ na_1+2a_2,\ (n-1)\,a_2+3a_3,\ \dots,\ 2a_{n-1}+a_n,\ a_n$$

olduğunu gösterir ki, bu da iddiayı aşikâr kılar.

13. (1) $P_n(x)$ in bütün katsayılarının toplamı $n!$ dir. Hakikaten, bu toplam $P_n(1)$ olup, rekürrans formülü

$$P_{n+1}(1) = (n+1)\, P_n(1)$$

verir.

(2) $P_n(x)/x$ bir karşıt polinom, yani

$$P_n(1/x)\, x^{n+1} = P_n(x)$$

tir. Hakikaten, $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}$,... olduğunu kabûl edersek, $P_{n+1}(x)$ in katsayıları arasında bunlara tekabül eden münasebetler bu katsayıların Misâl 12 nin sonunda verilen ifadelerinden çıkar.

16.

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 3,\ Q_3 = 45,\ Q_4 = 4725$$

$$Q_2/Q_1 = 3,\ Q_3/Q_2 = 15,\ Q_4/Q_3 = 105$$

aklımıza şu tahmini getirir:

$$Q_n = 1^n\, 3^{n-1}\, 5^{n-2} \ldots (2n-3)^2\, (2n-1)^1 .$$

Hakikaten, Q_n lerin tarifinden

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}} = \frac{Q_n\, Q_{n+1}}{Q_{n-1}\, Q_n} = \frac{(2n)!\,(2n+1)!}{(n!\,2^n)^2} = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2\,(2n+1)$$

elde edilir ve buradan Q_n e dair genel kanunu $n-1$ den $n+1$ e geçmek suretiyle ispat edersiniz.

$$\frac{2n!}{n!\,2^n} = \frac{1.2.3.4.5.6\ldots(2n-1)\,2n}{2\ .\ 4\ .\ 6\ldots\ .\ 2n}$$

olduğuna dikkat ediniz.

17. Bizi 3 ten 4 e götüren muhakeme n den $n+1$ e geçişe de uygulanabilir, ancak bunun bir tek istisnası vardır: bu muha-

keme 1 den 2 ye geçerken suya düşer ki, bunun da zaten böyle olması lâzımdır.

18.

$n = 3$ ten $n + 1 = 4$ e geçiş: a, b, c, d

gibi dört doğru düşününüz. Evvelâ bu dört doğru içinde birbirinden farklı en az iki doğru, meselâ b ve c, bulunan hali ele alalım. Bu takdirde b ve c nin kesişme noktası tek olarak belirli olduğundan bu nokta a üzerinde de bulunmak zorundadır (çünkü iddia $n = 3$ için doğru farzedilmişti), aynı şekilde kesişme noktası d üzerinde de bulunmak zorundadır (aynı sebepten). Şu halde, bu hal vâki olduğu takdirde iddia $n + 1 = 4$ için de doğrudur. Eğer verilen dört doğru içinde birbirinden farklı iki doğru bulunmazsa, iddia bu halde aşikârdır. Bu muhakeme tek bir istisna ile n den $n + 1$ e geçişe uygulanabilir. O istisna da 2 den 3 e geçiştir. Bu halde muhakeme suya düşer ki, bunun da zaten böyle olması lâzımdır.

Cevaplandırılmayan No. lar: 14, 15.

VIII. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. Sorulan en kısa ve en uzun yollar şunlardır: (1) o noktaları birleştiren doğru parçası, (2) noktadan doğruya indirilen dikme, (3) ortak dikme, (4) verilen nokta ve dairenin merkezinden geçen doğru üzerinde birer doğru parçası (Öklid III 7, 8), (5) dairenin merkezinden verilen doğruya dik doğru üzerinde bir doğru parçası, maksimum yok (6) merkezleri birleştiren doğru üzerinde doğ-u parçaları. Minimum uzaklığın 0 olduğu haller, önemli olabilmekle beraber, aşikâr olduğundan devamlı surette bir kenara bırakılmıştır.

2. Sorulan en kısa ve en uzun yollar şunlardır: (1) Noktaları birleştiren doğru parçası, (2) noktadan düzleme indirilen dikme, (3) ortak dikme, (4) noktadan doğruya indirilen dikme, (5) ortak dikme, (6) paragraf 4 e bakınız, (7) Verilen noktayı kürenin merkezine birleştiren doğru üzerinde birer doğru parçası, (8) kürenin merkezinden düzleme indirilen dik doğru üzerinde bir doğru parçası, maksimum yok, (9) kürenin merkezinden doğruya indirilen dik doğru üzerinde bir doğru parçası, maksimum yok, (10) merkezleri birleştiren doğru üzerinde birer doğru parçası. Minimum uzaklığın 0 olduğu haller bir kenara bırakılmıştır.

3. (1) Aynı merkezli daireler, (2) paralel doğrular, (3) aynı merkezli daireler.

4. (1) Aynı merkezli küreler, (2) paralel düzlemler, (3) aynı eksenli silindirler, (4) aynı merkezli küreler.

5. (2) paragraf 3 e bakınız. Diğerleri benzer şekilde.

6. (6) Birinci doğruyu eksen, ikinciyi teğet olarak kabûl eden tam bir tane silindir vardır. Teğetin değme noktası minimum uzaklığı veren doğru parçasının bir uç noktasıdır. Diğerleri de buna benzer.

7. Verilen kenarlardan birine taban diyelim. Tabanın mevkiini sabit tutarak diğer verilmiş kenarı sabit ucunun etrafında döndürelim ve bu kenarın değişen ucuna X diyelim. X bir daire çizmek zorundadır, tesviye çizgileri tabana paraleldir, alanı maksimum alan üçgen diktir (ki bu da aşikârdır).

8. Verilen kenara taban deyin, tabanın mevkiini sabit tutun ve, adına X diyeceğiniz, tabanın karşısındaki köşeyi değişken olarak alın. X in evvelden verilen yolu bir elips olup,

tesviye çizgileri tabana paraleldir ve neticede maksimum alanlı üçgen ikizkenardır.

9. Tesviye çizgileri $x+y=$ sabit doğrularıdır, evvelden verilen yol, A verilmiş alanı göstermek üzere, denklemi $xy=A$ olan eşkenar hiperbolün bir koludur. Simetri dolayısı ile $x=y$ şartına uyan bir değme noktası mevcuttur.

10. Ortak merkezleri verilen nokta olan ve gittikçe genişleyen daireler düşünelim. Bunlar arasında verilen doğruya dayanan bir ilk dairenin mevcut olacağı sezgi ile besbellidir; bu dairenin yarıçapı aranan en kısa uzaklıktır. Misâl 1 (2) ve (4) hallerinde durum muhakkak ki böyledir.

11. Burada yolun tesviye çizgisini kesmesinden maksat, o yolun tesviye çizgisinin bir tarafından öbür tarafına geçmesi ve fonksiyonun bu taraflardan birinde kesişme noktasındakinden daha büyük ve ötekinde kesişme noktasındakinden daha küçük değerler almasıdır.

12. Hayır; bu olabilir, fakat muhakkak şart değildir. Gezintinizde vardığınız en yüksek nokta (etrafın manzarasını görmek istediğiniz takdirde) P tepesi, yahut (bir vadiden ötekine giderken geçebileceğiniz) S geçit noktası, yahut yolunuzun başlangıç noktası, yahut yolunuzun bitim noktası, yahut ta onun bir köşe noktası (yani sağdan ve soldan teğetlerin aynı doğrultuda bulunmadığı bir nokta) olabilir.

13. (1) 180° ye tekabül eden tesviye çizgisi AB doğru parçası, 0° ye tekabül eden tesviye çizgisi, A ile B yi birleştiren doğrunun AB doğru parçası çıktıktan sonra kalan kısmıdır. Diğer herhangi bir tesviye çizgisi her ikisinin de uçları A, B olan ve A ve B den geçen doğruya göre simetrik bulunan iki daire yayından ibarettir. (2) Eğer iki tesviye çizgisi birbirinden farklı

ise, bunlardan birisi ötekinin tamamiyle içinde bulunur; $\sphericalangle AXB$ içteki tesviye çizgisi üzerinde daha büyük dıştaki üzerinde daha küçük değer alır. Uygun bir surette tefsir edilmek şartıyla, bu $0°$ ye tekabül eden tesviye çizgisi için de doğrudur.

14. Minimuma, l doğrusunun A ve B den geçen doğruyu, yani bir tesviye çizgisini, kestiği noktada erişilir. Bu, Misâl 11 de konmuş olan prensibi bozmaz; $\sphericalangle AXB$ bu özel tesviye çizgisinin her iki tarafında da onun üzerindekinden daha büyük değerler alır.

15. Yazış tarzını paragraf 6 daki gibi seçelim. c yi bir an için sabit tutalım. Bu takdirde, $V = abc/3$ verilmiş olduğundan, ab de sabit kalır ve

$$S = 2ab + 2(a+b)c$$

ifadesi $2(a+b)$, yani verilmiş ab alanını haiz bir dik dörtgenin çevresi, minimum olduğu zaman kendi minimumuna ulaşır. Bu da $a = b$ olduğu zaman vâki olur. Şimdi hareket ettiğiniz noktayı değiştirerek, başka bir kenarı sabit tutunuz.

16. Kenarlardan birini sabit tutunuz. Bu takdirde Misâl 8 deki hal ile karşı karşıya bulunursunuz, ki bu halde geri kalan iki kenar birbirine eşit olmalıdır (üçgen ikizkenardır). Bu muhakeme herhangi iki kenara uygulanabileceğinden, maksimumu veren üçgen eşkenar olmalıdır.

17. Taban düzlemini ve onun karşısındaki köşeyi sabit tutunuz, fakat bu takdirde verilen bir daire içine çizilmiş bir üçgen olan, tabanı değişken olarak düşününüz. Dörtyüzlünün yüksekliği sabittir; paragraf 4 (2) ye göre taban alanı (ve onunla birlikte dörtyüzlünün hacmı) tabanın eşkenar olması halinde maksimum olur. Dörtyüzlünün herhangi bir yüzünü taban olarak

seçebileceğimizden, her yüz eşkenar olmalıdır. Şu halde hacmın maksimum olması için dörtyüzlü düzgün olmalıdır.

18. Kenarlarından ikisi a ve b olan üçgene taban gözüyle bakınız. Bunun karşısındaki yüksekliği değiştirmeden tabanı bir dik üçgen şekline sokunuz. Bu değişiklik tabanın alınını arttırır (Misâl 7) ve neticede hacmı da arttırır. Şimdi diğer bir kenar çiftine aynı şeyi uygulayabilirsiniz, fakat doğrudan doğruya c yi hem a, hem de b ye dik yapmak daha iyidir.

19. En kısa uzaklığı veren doğru parçasının silindir üzerindeki ucunu sabit tutarak, Misâl 2 (7) dolayısıyla bu doğru parçasının küreye dik olduğunu bulursunuz. Bu doğru parçasının küre üzerindeki ucunu sabit tutarak, onun silindire de dik olduğunu görürsünüz. Şu halde en kısa uzaklığı veren doğru parçası her ikisine de dik olmalıdır. Bu doğrudan doğruya da gösterilebilir.

20. Misâl 19 daki metod, en küçük uzaklığı veren doğru parçasının her iki silindire de dik olduğunu gösterir. Hakikaten, bu doğru parçası silindirlerin eksenleri arasındaki en küçük uzaklığı veren doğru parçası ile aynı doğru üzerinde bulunur (paragraf 4 (1) e bakınız).

21. Misâl 10 un uzaydaki bir benzeri olup, Misâl 19 un metodu uygulanır.

22. Faraziyeye göre, $X, Y, Z, \ldots$ nin bütün kabûl edilebilir değerleri için

$$f(X, Y, Z, \ldots) \leq f(A, B, C, \ldots)$$

dir. Şu halde özellikle

$$f(X, B, C, \ldots) \leqq f(A, B, C, \ldots)$$

$$f(X, Y, C, \ldots) \leqq f(A, B, C, \ldots)$$

ilâh...; $X, Y, Z, \ldots$ değişken sayılar, uzunluklar, açılar, noktalar, ... olabilir.

24. Ya $x_1 = y_1 = z_1$ dir (istisnaî hal), yahut $n \geqq 1$ için üç x_n, y_n, z_n değerinden tam ikisi farklıdır. Bu farkın mutlak değerine d_n diyelim; meselâ

$$d_1 = |x_1 - z_1|, \quad d_2 = |y_2 - x_2|$$

olsun. Tarife göre

$$\pm d_2 = x_2 - y_2 = \frac{z_1 + x_1}{2} - y_1 = \frac{z_1 + x_1}{2} - z_1 = \frac{x_1 - z_1}{2} = \pm \frac{d_1}{2},$$

yahut $d_2 = \frac{d_1}{2}$ dir. Aynı şekilde

$$d_n = d_{n-1}/2 = d_{n-2}/4 = \cdots = d_1/2^{n-1},$$

ve neticede

$$\left| x_n - \frac{l}{3} \right| = \left| x_n - \frac{x_n + y_n + z_n}{3} \right| = \frac{|x_n - y_n + x_n - z_n|}{3}$$

$$\leqq 2d_n/3 \to 0 \quad \text{olur.}$$

25. Aritmetik ortalaması verilen A sayısına eşit olan n tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif sayısı nazarı itibara alalım:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA.$$

Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hep birbirine eşit değilse, içlerinde biri, meselâ x_1 en küçük ve diğer biri, meselâ x_2 en büyüktür. (İndekslerin bu seçimi sırf yazış tarzında kolaylık için yapılmış

olan zararsız bir basitleştirmedir. Yoksa *yalnız* x_1 in en küçük değeri aldığına dair, caiz olmayan bir kabûlde *bulunmuş değiliz.*) Bu takdirde

$$x_1 < A < x_2 \quad \text{dir.}$$

Şimdi

$$x_1' = A,\ x_2' = x_1 + x_2 - A,\ x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n$$

diyelim, Bu takdirde

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1' + x_2' + \cdots + x_n'$$

ve

$$x_1'\, x_2' - x_1\, x_2 = Ax_1 + Ax_2 - A^2 - x_1\, x_2 = (A - x_1)\,(A - x_2) > 0$$

olur. Şu halde

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n < x_1'\, x_2'\, x_3' \ldots x_n'$$

dir. Eğer $x_1', x_2' \ldots, x_n'$ hep birbirine eşit değilse, bu işlemi tekrar ederek

$$x_1' + x_2' + \cdots + x_n' = x_1'' + x_2'' + \cdots + x_n''$$
$$x_1'\, x_2'\, x_3' \ldots x_n' < x_1''\, x_2''\, x_3'' \ldots x_n''$$

olacak şekilde n tane $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ sayısından ibaret diğer bir takım elde ederiz.

$x_1', x_2', \ldots, x_n'$ takımı A ya eşit en az bir terim, $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ takımı A ya eşit en az iki terim ihtiva eder. En geç $x_1^{(n-1)}, x_n^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)}$ takımı $n-1$, ve neticede n, tane A ya eşit terim ihtiva eder ve böylece

$$x_1 x_2 \cdots x_n < x_1^{(n-1)}\, x_2^{(n-1)} \cdots x_n^{(n-1)}$$
$$= A^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

26. x, y, z dikmelerinin ortak başlangıç noktalarını üçgenin üç köşesi ile birleştirirsek, bu üçgeni daha küçük üç üçgene ayırmış oluruz. Bu üç parçanın alanları toplamının bütün üçgenin alanına eşit olduğunu yazarak, $x+y+z=l$ elde ederiz. $x=$ Sabit denklemi eşkenar üçgenin tabanına paralel bir doğru gösterir, $y=z$ denklemi üçgenin yüksekliğini gösterir. Şek. 8.9 daki kırık çizginin ilk kenarı tabana paralel olup, yükseklik üzerinde son bulmaktadır. Misâl 25 teki ilk adım tabana paralel bir doğru parçası ile gösterilmekte ve denklemi $y=l/3$ olan doğru üzerinde son bulmaktadır ki, bu doğru diğer bir kenara paralel olup, merkezden geçmektedir. Ikinci adım $y=l/3$ doğrusu üzerindeki bir doğru parçası ile gösterilmekte ve merkezde son bulmaktadır.

27.

Misâl 25 modeline göre yapılan çözüm için Rademacher-Toeplitz S. 11—14, 114—117 ye bakınız. (1)

28. Kısmî değişim modeli.

29. Ekstremuma ulaşılan noktada

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

denklemleri λ nın uygun bir değeri için cari olurlar. Bu şart, $\partial g/\partial x$ ve $\partial g/\partial y$ nin ikisinin birden sıfıra eşit olmaması faraziyesi altında elde edilmiştir. $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ nin de ikisinin birden sıfıra eşit olmaması faraziyesini buna ilâve edersek, λ lı denklemler $g=0$ (verilmiş yol) eğrisinin ekstremumdan geçen $f=$ Sabit (tesviye çizgisi) eğrisine o noktada teğet olduğunu ifade ederler.

(1) Bu son eserin Türkçe çevirisinde (Türk Matematik Derneği yayınları, Sayı : 25) S. 19–24, 180–185 e bakınız. [Çevirenin notu].

30. Bir tepede, veya bir geçit noktasında,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

dır. Verilmiş yolun bir köşe noktasında, (eğer mevcut iseler) $\partial g/\partial x$ ve $\partial g/\partial y$ nin her ikisi de sıfıra eşit olur. Verilmiş yolun başlangıç (veya bitim) noktasında vukubulan bir ekstremum, Misâl 29 da zikredilen ve $g(x, y)=0$ ı gerçekleyen bir noktanın bir civarındaki aynı denklemi gerçekleyen *bütün* (x, y) noktalarına göre izafî bir ekstremum olmasına dair analitik şartın uygulama alanına hiç te girmez.

31. Sorulan şart

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial g}{\partial z}=0$$

dır. Bu şart, g nin üç kısmî türevinin hep birden sıfır olmaması faraziyesi altında caridir. Bundan başka, bir de f nin üç kısmî târevinin hep birden sıfır olmadığı farzedilirse, bu λ lı denklemler ekstremum noktasından geçen $g=0$ ve $f=$ Sabit yüzeylerinin o noktada birbirlerine teğet olduğunu gösterir.

32. Sorulan şart üç denklemden ibaret olup, bunlardan x-eksenine dair olan birincisi

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

dır. Bu şart ilki

$$\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}$$

olan üç determinantın hep birden sıfır olmaması faraziyesine dayanır. Bundan başka bir de f nin üç kısmî türevi hep birden

sıfıra eşit değilse, yukarıki üç denklem $g=0$ ve $h=0$ yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin, ekstremum noktasından geçen $f=$ Sabit yüzeyine o noktada teğet olduğunu ifade eder.

34. İstenilen netice şudur: Ancak küp maksimuma erişir. Şu halde eşitsizlik eşitliğe döndüğü zaman küpün ortaya çıkması gerekir; yani, maksimum için $x=y$, yahut (alanlara bakarak) $x^2=xy$ olmalıdır. Halbuki, (başarısız olarak) kullandığımız eşitsizlik $2x^2=4xy$ olduğu zaman eşitliğe dönüyor. Buradan, onun olumlu sonuç vermiyeceğini önceden kestirebilirdik.

Paragraf 6 ya bir göz atarak, veya atmadan, S yi üç karşılıklı yüz çiftine ayıralım:

$$S=2x^2+2xy+2xy,$$

ve buna ortalamalar teoremini uygulayalım:

$$(S/3)^3 \geqq 2x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy = 8x^4y^2 = 8V^2.$$

Burada eşitliğe ancak ve ancak $2x^2=2xy$, yahut $x=y$ halinde, yani yalnız küp için ulaşılır.

Buradan şu ders çıkar: eşitlik halini önceden görmek, size tutacağınız yolda rehberlik edebilir, size bir ip ucu verebilir.

35. V, S, x ve y silindirin sırasıyla hacmını. yüzey alanını, yarıçapını ve yüksekliğini göstersin. Böylece

$$V=\pi x^2y \quad , \quad S=2\pi x^2+2\pi xy$$

olur. Burada istenilen netice olan $y=2x$ bize rehberlik eder:

$$S=2\pi x^2+\pi xy+\pi xy$$

şeklinde yazılırsa, ortalamalar teoremi

$$(S/3)^3 \geqq 2\pi x^2 \cdot \pi xy \cdot \pi xy = 2\pi^2 x^4y^2 = 2\pi V^2$$

verir ki, burada eşitlik ancak $y=2x$ için cari olur.

36. Misâl 34 bunun bir özel hali, Misâl 35 te bir sınır halidir. V, S, y ve x prizmanın sırasıyla hacmını, yüzey alanını, yüksekliğini ve tabanının kenarlarından birini göstersin. a ve l de, tabana benzer ve tabanın x uzunluğundaki kenarına tekabül eden kenarının uzunluğu 1 olan bir çokgenin sırasıyla alan ve çevresini göstersin. Bu takdirde

$$V = ax^2y \ , \quad S = 2ax^2 + lxy$$

olur. Misâl 34 ve 35 te S nin maksimum taban alanına (burada ax^2) $S/6$ olduğu zaman erişilmişti. Bunun elimizdeki genel halde de böyle olacağını beklemek bize bir ip ucu verir; bu yüzden

$$S = 2ax^2 + lxy/2 + lxy/2$$

yazarsak, ortalamalar teoremini kullanmak suretiyle

$$(S/3)^3 \geqq 2ax^2 \cdot (lxy)^2/4 = [l^2/(2a)]\, V^2$$

elde ederiz ki, burada eşitlik

$$ax^2 = lxy/4 = S/6$$

olduğu zaman vukubulur.

37. V, S, x ve y çifte piramidin sırasıyla hacmını, yüzey alanını, tabanının bir kenarını ve kendisini teşkil eden piramitlerden birinin yüksekliğini göstersin. Bu takdirde

$$V = 2x^2y/3, \qquad S = 8x\,[(x/2)^2 + y^2]^{1/2}/2$$

olur. Düzgün sekizyüzlü halinde, kendisini teşkil eden piramitlerden birinin yüksekliğinin iki katı tabanın çapına eşittir, yahut

$$2y = 2^{1/2}\,x, \quad \text{yahut} \quad 2y^2 = x^2$$

dir. Bu ip ucunu elde ettikten sonra,

$$S^2 = 4x^2(x^2 + 2y^2 + 2y^2)$$

yazarız ve

$$(S^2/3)^3 \geq 4^3 x^6 x^2 2y^2 2y^2 = 4^4 x^8 y^4 = (6V)^4$$

elde ederiz. Burada eşitlik ancak $x^2 = 2y^2$ için vaki olur. Bu halde $S = 3^{1/2} 2x^2$ olduğuna dikkat ediniz.

38. V, S, x ve y çifte koninin sırasıyla hacmını, yüzey alanını, tabanın yarıçapını ve kendisini teşkil eden konilerden birinin yüksekliğini göstersin. Bu takdirde

$$V = 2\pi x^2 y/3, \qquad S = 2 \cdot 2\pi x (x^2 + y^2)^{1/2}/2$$

olur. Dik kenarları x, y ve hipotenüsü $(x^2 + y^2)^{1/2}$ olan dik üçgeni nazarı itibara alalım. x in hipotenüs üzerindeki izdüşümü (minimum halinde vaki olacağını umduğumuz gibi) bu hipotenüsün 1/3 üne eşit olursa

$$x^2 = (x^2 + y^2)/3$$

yahut $2x^2 = y^2$ olur. Bu ipucunu elde ettikten sonra

$$S^2 = 2\pi^2 x^2 (2x^2 + y^2 + y^2)$$

yazarız ve

$$(S^2/3)^3 \geq 8\pi^6 x^6 \cdot 2x^2 y^2 y^2 = \pi^2 (3V)^4$$

elde ederiz. Burada eşitlik ancak $2x^2 = y^2$ halinde vaki olur. Bu halde $S = 3^{1/2} 2 \cdot \pi x^2$ olduğuna dikkat ediniz.

39. V, S, ve y çifte piramidin sırasıyla hacmını, yüzey alanını, ve kendisini teşkil eden çifte piramitlerden birinin yük-

sekliğini göstersin. x, a, ve l yi çifte piramidin tabanına tıpkı Misâl 36 nın çözümündeki aynı harfleri taşıyan büyüklerin oradaki prizmanın tabanına bağlı oldukları şekilde bağlayalım. p, tabanın içine çizilen dairenin yarıçapını göstersin. Bu takdirde

$$V = 2\,a\,x^2\,y/3,$$

$$ax^2 = l\,x\,p/2,$$

$$S = 2\,l\,x\,(p^2+y^2)^{1/2}/2 = (4\,a^2\,x^4 + l^2\,x^2\,y^2)^{1/2}$$

olur. S, Misâl 37 ve 38 de $S = 3^{1/2}\,2\,a\,x^2$ olduğu zaman minimum olur ki, bu

$$l^2\,x^2\,y^2 = 8\,a^2\,x^4$$

verir. Bu ip ucunu gözönüne alarak

$$S^2 = 4\,a^2\,x^4 + l^2\,x^2\,y^2/2 + l^2\,x^2\,y^2/2$$

yazarız ve buradan

$$(S^2/3)^3 \geqq 4\,a^2\,x^4 \cdot (l^2\,x^2\,y^2)^2/4 = (l^4/a^2)\,(3\,V/2)^4$$

elde ederiz. Burada eşitlik, ancak ve ancak ax^2 tabanı $= S/(3^{1/2}\,2)$ olması halinde vukubulur.

40. Burada akla yakın bir faraziye vardır: Eşkenar üçgen, verilmiş bir alanı haiz üçgenler içinde en küçük çevreyi haizdir, yahut verilmiş bir çevreyi haiz üçgenler içinde en büyük alanı haizdir. a, b, c, A ve $L = 2p$ üçgenin sırasıyla üç kenarı ile, alanını ve çevre uzunluğunu göstersin. Heron'un formülüne göre

$$A^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$$

dir. Burada ortalamalar teoreminin kullanılması bize kuvvetle telkin edilmektedir: p verildiği takdirde A fazla büyük olmama-

lıdır; sağ taraf bir çarpımdır. Teoremi nasıl uygulamalıyız? İşte bir ip ucu: *eğer* üçgen eşkenar ise, $a=b=c$, yahut $p-a=p-b=p-c$ dir. Şu halde şöyle hareket ederiz:

$$A^2/p=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\leq\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

$$=(p/3)^3$$

yani $A^2\leq L^4/(2^4 3^3)$ olup, eşitlik yalnız eşkenar üçgen halinde vukubulur. Misâl 16 ya bakınız.

41. Burada akla yakın bir faraziye vardır: Kare.

a ile b nin arasındaki açı Φ, c ile d nin arasındaki açı Ψ olsun. $\Phi+\Psi=\varepsilon$ olur ve

$$2A=ab\sin\Phi+cd\sin\Psi$$

elde ederiz. Φ ile Ψ yi ayıran köşegenin karesini iki türlü ifade ederek

$$a^2+b^2-2ab\cos\Phi=c^2+d^2-2cd\cos\Psi$$

elde ederiz. Şimdi aralarında Φ ve Ψ yi yok etmek üzere elimizde üç münasebet vardır.

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2\cos^2\Phi+4c^2d^2\cos^2\Psi-8ab\,cd\cos\Phi\cos\Psi$$

$$16A^2=4a^2b^2\sin^2\Phi+4c^2d^2\sin^2\Psi+8ab\,cd\sin\Phi\sin\Psi$$

yi toplayarak

$$16A^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8ab\,cd\cos\varepsilon$$

$$=4(ab+cd)^2-16ab\,cd(\cos\varepsilon/2)^2$$

elde ederiz.

Nihayet, kare farklarını gözönüne alarak ve

$$a+b+c+d=2p=L$$

diyerek

$$A^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-ab\,cd\,(\cos\varepsilon/2)^2$$

buluruz.

Muhtemel minimum (kare) halinde kenarlar eşit olduğu gibi $p-a$, $p-b$, $p-c$, $p-d$ de eşittir. Bu ip ucu ile (yukarıki eşitlikten ve ortalamalar teoreminden)

$$A^2 \leqq (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

$$\leqq \left(\frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4}\right)^4$$

$$=(p/2)^4=(L/4)^4$$

elde ederiz. Rastladığımız her iki eşitsizliğin de eşitliğe dönüşmesi için $\varepsilon=180^\circ$ ve $a=b=c=d$ olmalıdır.

42. Prizma, iyice hazırlandıktan sonra Misâl 46 ve 47 de ele alacağımız, diğer iki cisimden çok daha kolay ele alınabilir. L, prizmanın tabanının çevre uzunluğunu, h da yüksekliğini göstersin. Prizmanın her yan yüzü bir paralelkenardır ; bu paralelkenarın tabanı prizma tabanının bir kenarı ve yüksekliği $\geqq h$ dır. Şu halde prizmanın yan yüzey alanı $\geqq Lh$ olup, eşitlik yalnız ve ancak bütün yan yüzlerinin tabana dik olması ve neticede verilen prizmanın bir dik prizma olması halinde vukubulur.

43. x_j, y_j $j=0, 1, 2, \ldots, n$ için P_j nin koordinatları olsun. $j=1, 2, \ldots, n$ için

$$x_j=x_{j-1}+u_j, \qquad y_j=y_{j-1}+v_j$$

vaz'ediniz. Bu takdirde istenilen eşitsizliğin sol tarafı $P_0P_1P_2\cdots P_n$ kırık çizgisinin uzunluğu, sağ tarafı da bu kırık çizginin uç noktaları arasındaki en kısa yol olan P_0P_n doğru parçasının uzunluğudur.

44. $n=2$ halinde (hafifçe değişik bir yazış tarzıyla)

$$(u^2+v^2)^{1/2}+(U^2+V^2)^{1/2}\geq[(u+U)^2+(v+V)^2]^{1/2}$$

iddiasını incelemek için, bu eşitsizliğin her iki tarafının karesini almak ve diğer bazı cebirsel işlemler yapmak suretiyle kendisine denk olan şu ifadeleri elde ederiz:

$$(u^2+v^2)^{1/2}(U^2+V^2)^{1/2}\geq uU+vV,$$

$$u^2V^2+v^2U^2\geq 2uvUV,$$

$$(uV-vU)^2\geq 0.$$

Bu son şekliyle iddia aşikâr olarak doğrudur. Eşitliğe yalnız ve ancak

$$u:v=U:V$$

halinde erişilir.

$n=3$ halini ispat için, $n=2$ halini üst üste birkaç kere uygularız:

$$(u_1^2+v_1^2)^{1/2}+(u_2^2+v_2^2)^{1/2}+(u_3^2+v_3^2)^{1/2}$$

$$\geq[(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2]^{1/2}+(u_3^2+v_3^2)^{1/2}$$

$$\geq[(u_1+u_2+u_3)^2+(v_1+v_2+v_3)^2]^{1/2}.$$

$n=4, 5, \ldots$ için de benzer şekilde hareket edilir. Hakikatte, burada matematik endüksiyon kullanılmaktadır.

45. Üçgenin yüksekliği h olsun, tabanı da yüksekliğin ayağı tarafından p ve q uzunluğunda iki parçaya ayrılsın. Burada şu eşitsizliği ispat etmeliyiz:

$$(p^2+h^2)^{1/2}+(q^2+h^2)^{1/2}\geq 2\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+h^2\right]^{1/2}$$

$$=[(p+q)^2+(h+h)^2]^{1/2},$$

ki bu da Misâl 43 ün bir özel halidir. Burada Eşitlik için

$$p : h = q : h,$$

yahut $p = q$ olmalı, yani üçgen ikizkenar olmalıdır.

46. h, P nin yüksekliği, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, P nin tabanının kenarları ve $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de yüksekliğin ayağından sırasıyla yukarıki kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları olsun. Σ, j üzerinde ve $j = 1$ den $j = n$ ye kadar yapılan toplamayı gösterdiği takdirde

$$A = \Sigma\, a_j p_j / 2$$
$$S = A + \Sigma\, a_j (p_j^2 + h^2)^{1/2} / 2$$

olur. Bu ifadeler bir P_0 dik piramidi için basitleşirler, çünkü bu halde yüksekliğin ayağından bütün kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları aynı bir p_0 değerini haizdir. Şu halde böyle bir piramit için

$$A_0 = L_0 p_0 / 2,$$
$$S_0 = A_0 + L_0 (p_0^2 + h^2)^{1/2} / 2$$
$$= A_0 + (4 A_0^2 + h^2 L_0^2)^{1/2} / 2$$

olur; P ve P_0 aynı $3 V/A = 3 V_0/A_0 = h$ yüksekliğini haizdir. Misâl 43 ü ve faraziyelerimizi kullanarak

$$2 (S - A) = \Sigma\, [(a_j p_j)^2 + (a_j h)^2]^{1/2}$$
$$\geqq [(\Sigma\, a_j p_j)^2 + (\Sigma\, a_j h)^2]^{1/2}$$
$$= [4 A^2 + h^2 L^2]^{1/2}$$
$$\geqq [4 A^2 + h^2 L_0^2]^{1/2}$$
$$= 2 (S_0 - A)$$

elde ederiz. Şu halde $S \geqq S_0$ dır. Burada eşitlik için, yukarda

rastlamış olduğumuz her iki eşitsizlik te eşitliğe dönmeli, ve böylece iki şart gerçekleşmelidir. Birincisi:

$$p_1 : h = p_2 : h_2 = \cdots = p_n : h_n ,$$

yani P bir dik piramit olmalıdır. İkincisi: $L = L_0$ olmalıdır.

47. Çözümü iki adımda yapacağız: (1) D nin tabanını D_0 ınkine ve D yi teşkil eden iki piramidi dik piramitlere dönüştüreceğiz, fakat bu piramitlerin yüksekliklerini sabit bırakacağız. Böylece, mutlaka bir dik çifte piramit olması icabetmeyen, bir D' çifte piramidi elde ederiz. (D' yü teşkil eden iki piramidin her ikisi de diktir, fakat bunların yükseklikleri farklı olabilir.) (2) D' yü D_0 a dönüştürürüz. Misâl 46 ya göre (1) adımı yüzey alanını ancak küçültür. D' yü teşkil eden iki piramidin, h_1 ve h_2 uzunluklarındaki, yükseklikleri aynı doğru üzerindedir. D_0 ın tabanının içince çizilen dairenin yarıçapı p_0 olsun. Bu takdirde Misâl 45 dolayısıyle D' nün yüzey alanı

$$S = [(p_0^2 + h_1^2)^{1/2} + (p_0^2 + h_2^2)^{1/2}]\, L_0/2$$

$$\geq 2\left[p_0^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2\right]^{1/2} \frac{L_0}{2} = S_0$$

dır.

48. V hacmını hep sabit bırakarak, çözümü üç adımda yapacağız: (1) Tabanı gerek biçim, gerek büyüklük bakımında sabit tutarak verilen prizmayı bir dik prizmaya dönüştüreceğiz. (2) Tabanı, A alanını sabit tutarak, bir kareye çevireceğiz. (3) Bu kare tabanlı dik prizmayı bir küpe dönüştüreceğiz. (1) ve (3) adımları, sırasıyla Misâl 42 ve 34 dolayısıyla, prizmanın S yüzey alanını ancak küçültür. (2) adımı prizmanın $h = V/A$ yüksekliğini sabit bırakır ve, Misâl 41 dolayısıyla, tabanın L çevre uzunluğu ancak küçültür; diğer taraftan $S = 2A + Lh$ olduğundan bu adım da S yi ancak küçültür. Şu halde verilen prizma daha başlangıçta bir küp olmadıkça, yuka-

rıki üç adımdan en aşağı biri S yi küçültür. Daha zayıf olan Misâl 34 teki teorem burada bir atlama taşı vazifesini görmüştür.

49. Bu problemin çözümü, tıpkı Misâl 48 in Misâl 42, 41 ve 34 ten çıktığı gibi, Misâl 47, 41, ve 37 den elde edilir. Fakat burada, Misâl 47 nin keskin ifadesi sayesinde, Misâl 48 deki (1) ve (2) adımlarını tek bir adım halinde birleştirebiliriz.

50. Herhangi bir üçgen tabanlı piramitten (düzgün olması icabetmeyen herhangi bir dörtyüzlüden) hareket ederiz. Bu dörtyüzlüyü, V hacmını ve tabanının A alanını sabit tutarak, fakat (gerekirse) tabanını bir eşkenar üçgen haline sokarak, bir dik piramide dönüştürürüz. Bu, Misâl 40 dolayısıyla, tabanın çevre uzunluğunu azaltır ve neticede, Misâl 46 dolayısıyla, S yüzey alanını azaltır. Yeni piramidin yan yüzleri ikizkenar üçgenlerdir. Bunlar eşkenar olmadıkça, içlerinden birini taban olarak seçer ve yukarıki işlemi tekrarlıyarak S yi daha da azaltırız. Kısmî değişim prensibi (Misâl 22) dolayısıyla, eğer verilen V hacmını haiz dörtyüzlüler içinde S yüzey alanı minimum olan biri varsa, bu dörtyüzlü düzgün olmalıdır.

51. Misâl 53 e bakınız.

52. Misâl 53 e bakınız.

53. V, S ve y piramidin sırasıyla hacmını, yüzey alanını ve yüksekliğini göstersin ve x, a ve l piramidin tabanına Misâl 36 nın çözümündeki gibi bağlanmış olsun. p, tabanın içine çizilen dairenin yarıçapını göstersin. Bu takdirde

$$V = ax^2y/3$$

$$ax^2 = lxp/2$$

$$S = ax^2 + lx\,(p^2 + y^2)^{1/2}/2$$

$$= ax^2 + (4\,a^2x^4 + l^2\,x^2\,y^2)^{1/2}/2.$$

Tabanın biçimine tâbi, fakat büyüklüğüne tâbi olmayan ifadeler ithâl etmeye çalışırken

$$\frac{S}{ax^2}=1+\left[1+\left(\frac{ly}{2\,ax}\right)^2\right]^{1/2}=1+(1+t)^{1/2}$$

(burada $[ly/(2\,ax)]^2=t$ vaz'etmek suretiyle bir kısaltma ithâl ettik) ve

$$\frac{S^3}{(3\,V)^2}=\frac{l^2}{4\,a}\,\frac{[1+(1+t)^{1/2}]^3}{t}$$

yi nazarı itibara almaya sevkediliriz. V nin verildiğine ve S nin de minimum olması gerektiğine göre, sonuncu eşitliğin sol tarafı minimum olmalıdır. Şu halde sağ taraf ta minimum olmalıdır. Fakat tabanın biçimi ve böylece l^2/a verilmiştir. Şu halde, geriye kalan şey t nin sağ tarafı minimum yapan değerini bulmaktır: bu değer *tabanın biçiminden müstakildir*. Şu halde bu değer bütün özel biçimler, meselâ Misâl 51 ve 52 de bahsedilen biçimler, için aynı hizmeti görür. Fakat neticesini bildiğimiz bir özel biçim vardır: taban bir eşkenar üçgen ise, en iyi $S:ax^2$, yani yüzey alanının tabana en iyi oranı, Misâl 50 dolayısıyla, 4 : 1 dir. $S/(ax^2)$ yalnız t ye tâbi olduğundan, bu netice bütün biçimler için doğru olup

$$1+(1+t)^{1/2}=4, \qquad t=8$$

verir.

54. Okuyucu aşağıki cedveli, her Misâl numarası yerine uygun bir şekil koyarak kopye etmelidir.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(a)	34	35	36	42	u	48	x
(b)	51	52	53	46	50	v	y
(c)	37	38	39	47	w	49	z
(d)	—	—	—	—	40	41	n

Burada satırlar şunları gösterir: (a) prizmalar, (b) piramitler, (c) çifte piramitler, (d) çokgenler (ancak son üç sütunda manası vardır).

Sütunlar da şu sıfatları gösterir: (1) kare tabanlı dik, (2) daire tabanlı dik, (3) tabanı verilmiş bir biçimde dik, (4) eğikten dike geçiş, (5) keyfî üçgen tabanlı, (6) keyfî dörtgen tabanlı, (7) n kenar sayısı verilmiş keyfî bir çokgen tabanlı.

Benzerlik, u, v, w, x, y, z, ve n ile işaretlenmiş olan boşlukları doldurmak üzere teoremler ilham edebilir. İşte bunlardan bazıları:

(u) Verilmiş bir hacmı haiz bütün üçgen tabanlı prizmalar içinde en küçük yüzey alanını haiz olan prizma şu özeliklere sahiptir: bu prizmanın tabanı bir eşkenar üçgendir, taban alanı bütün yüzey alanının 1/6 sıdır, bu prizma herbir yüzüne o yüzün merkezinde teğet olan bir kürenin dışına çizilmiştir.

(y) Hacmı verilmiş ve tabanı n kenarlı birer çokgen olan bütün piramitler içinde en küçük yüzey alanını haiz olanı şu özeliklere sahiptir: bu piramidin tabanı düzgün bir çokgendir, tabanın alanı bütün yüzey alanının 1/4 üdür, bu piramit herbir yüzüne o yüzün ağırlık merkezinde teğet olan bir kürenin dışına çizilmiştir.

Yukarıkilere dayanarak (u), (v) ve (w) yi kolayca ispat edebiliriz, fakat (x), (y) ve (z), (n) ye dayanmakta olup, bu sonuncusu daha sonra ele alınacaktır (paragraf 10.7 (1) e bakınız).

55. (1) Paragraf 6 nın *metod*unu ve yazış tarzını kullanarak

$$V = abc, \qquad S_s = ab + 2\,ac + 2\,bc,$$

ve neticede

$$(S_s/3)^3 \geqq ab \cdot 2\,ac \cdot 2\,bc = 4\,V^2$$

elde ederiz. Burada eşitlik yalnız ve ancak

$$ab = 2ac = 2bc,$$

yahut $a = b = 2c$ halinde vukubulur : kutu bir yarım küptür.

(2) Paragraf 6 nın *neticesini* kullanarak S_6 te sayılmayan yüzün düzlemine bir ayna gözüyle bakarız. Kutunun kendisi aynadaki hayali ile birlikte, *bütün* yüzey alanı verilmiş ($= 2S_6$) olan $2V$ hacımlı yeni bir kutu teşkil eder. Paragraf 6 ya göre bu yeni (çifte) kutu, hacmı maksimum olduğu zaman bir küp olmalıdır.

56. Misâl 55 e uyarak, noksan olan yüze bir ayna gözüyle bakınız. Maksimum hacım, bir küpün köşegen düzlemi ile ikiye ayrılması neticesinde elde edilen bir üçgen tabanlı prizma için vukubulur. Misâl 48 i bir ilâve mülâhaza ile birlikte uygulayınız.

57. [Putnam 1950] Misâl 55 ve 56 ya uyarak, noksan olan her iki yüze birer ayna gözüyle bakınız. Maksimum hacım bir küpün dörtte biri olan üçgen tabanlı prizma için vukubulur. Bu küp, biri bir köşegen düzlemi, diğeri bu düzleme dik ve iki yüze paralel olan, iki simetri düzlemi vâsıtasıyla dört eşit parçaya ayrılmış olarak düşünülmektedir.

58. A, L, r ve s daire sektörünün sırasıyla alan, çevre uzunluğu, yarıçap ve yay uzunluğunu göstersin. Bu takdirde

$$A = rs/2, \qquad L = 2r + s$$

$$(L/2)^2 \geq 2r \cdot s = 4A$$

olur. Burada ortalamalar teoremini kullanıyoruz. Eşitliğe ancak $s = 2r$ ve neticede sektörün açısı iki radyan olduğu zaman erişilir.

59. u, v ve w üçgenin kenarlarını, A alanını, γ da w nin karşısındaki verilmiş açıyı göstersin. Bu takdirde

$$2A = uv \sin \gamma$$

olur. Ortalamalar teoremi dolayısıyla

$$(1) \qquad [(u+v)/2]^2 \geq uv = 2A/\sin \gamma$$

olur. Burada eşitliğe $u = v$, yani üçgenin ikizkenar olması halinde erişilir.

$$(2) \qquad w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma$$
$$= u^2 + v^2 - 4A\cot\gamma,$$
$$(u^2+v^2)/2 \geq uv = 2A/\sin\gamma.$$

Burada eşitliğe ve neticede w nin minimumuna $u^2 = v^2$ ve neticede üçgenin ikizkenar olması halinde erişilir.

(3) Hem $u+v$, hem de w için olduğu gibi, $u+v+w$ de üçgenin ikizkenar olması halinde minimum olur.

60. Misâl 59 un yazış tarzını kullanınız. Verilen nokta w kenarı üzerinde bulunmaktadır. Bu noktadan, v ve u üzerinde son bulan ve sırasıyla u ve v ye paralel olan iki doğru parçası çizerek, uzunluklarına sırasıyla a ve b deyiniz. a ve b sabittir (hakikaten bunlar verilen noktanın eğik koordinatlarıdır). Benzer üçgenlerden

$$\frac{v-b}{a} = \frac{b}{u-a}, \qquad \text{yahut} \qquad \frac{a}{u} + \frac{b}{v} = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{4} = \left(\left[\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right]/2\right)^2 \geq \frac{ab}{uv} = \frac{ab\sin\gamma}{2A},$$

$$A \geq 2ab\sin\gamma$$

çıkar. Burada eşitliğe, yalnız ve ancak

$$\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{1}{2}, \qquad u=2a, \qquad v=2b$$

alması halinde erişilir ki, bu takdirde verilen nokta w nin orta noktası olur.

61. Paragraf 6 nın yazış tarzını ve ortalamalar teoremini kullanınız.

(1) $$V=abc\leqq[(a+b+c)/3]^3=[E/12]^3$$

(2) $$S=2ab+2ac+2bc$$
$$\leqq a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2,$$

yani

$$3S\leqq 2(E/4)^2.$$

Her iki halde de eşitliğe ancak $a=b=c$, yani küp, halinde erişilir.

62. Paragraf 6 nın yazış tarzını ve ortalamalar teoremini kullanınız. Kutunun uzunluğu c, kuşak genişliği $2(a+b)$ dir ve

$$V=(2a\cdot 2b\cdot c)/4\leqq[(2a+2b)/3]^3/4\leqq l^3/108$$

dir. Eşitliğe ancak $2a=2b=c=l/3$ halinde erişilir.

63. Misâl 35 in çözümündeki yazış tarzını kullanınız. Bu takdirde

$$d^2=(2x)^2+(y/2)^2=2(x^2+x^2+y^2/8),$$

ve şu halde ortalamalar teoremi dolayısıyla

$$V^2=x^2x^4y^2=8x^2x^2\cdot x^2\cdot y^2/8\leqq 8x^2(l^2/6)^3$$

olur. Burada eşitliğe ancak

$$x^2=y^2/8=d^2/6$$

halinde erişilir. Bu problemin tarihi için O. Toeplitz, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung* adlı kitapta S. 78—79 a bakınız.

Cevaplandırılmayan No. lar: **23, 33.**

IX. BÖLÜMDEKİ SORULARIN CEVAPLARI

1. (1) Bir l den, diğeri m den geçmek üzere, resim düzlemine dik iki ayna düşününüz. P deki bir şahıs m ye baksın ve kendisini kenardan seyretsin: P den gelen ışık, evvelâ l de, sonra m de olmak üzere iki defa yansıdıktan sonra tekrar m ye döner. Işık burada en kısa yolu seçerek, aranan en kısa çevreli $\triangle PYZ$ yi çizer; $\triangle PYZ$ nin kenarları l ve m ile sırasıyla Y ve Z noktalarında eşit açılar teşkil ederler. (2) P' ve P'', P nin sırasıyla l ve m aynalarındaki hayalleri olsun. P' ile P'' yü birleştiren doğru l ve m yi sırasıyla istenilen Y ve Z noktalarında keser, ve $P'P''$ doğru parçasının uzunluğu istenilen en kısa çevre uzunluğunu verir (Şek. 9.3 teki fikrin iki kere uygulanması sonucu olarak).

2. (1) Işık üç dairesel aynada arka arkaya üç defa yansıdıktan sonra, aksi yönden kaynağına döner. (2) Üç katı halka kapalı bir lâstik şeritle bağlanmıştır. Her iki tefsir tarzı da, aranan üçgenin verilen bir daire üzerinde birleşen iki kenarının dairenin o noktadan geçen yarıçapı ile eşit açılar teşkil ettiğini bize telkin eder.

3. Misâl 2 deki gibi, ışığın dönüp dolaşarak aynı noktaya dönmesi veya kapalı lâstik şerit; XY ve XZ, BC ile eşit açılar teşkil ederler, ve s.

4. Verilmiş olan n kenarlı bir çokgenin içine çizilen n kenarlı ve minimum çevreli bir çokgen şu özeliği haizdir: Bu mi-

nimum çevreli çokgenin, ortak köşesi verilmiş çokgenin s gibi herhangi bir kenarı üzerinde bulunan iki kenarı s ile eşit açılar teşkil eder. Bununla beraber, Misâl 6 ve 13 e bakınız.

5. l ve m nin kesişme noktasına A diyerek, m üzerinde bir B ve l üzerinde bir C noktası seçiniz, öyle ki P noktası (180° den küçük olan) $\sphericalangle BAC$ nin içinde bulunsun. Bu takdirde yansıma neticesinde

$$\sphericalangle P''AB = \sphericalangle BAP, \quad \sphericalangle PAC = \sphericalangle CAP'$$

ve buradan

$$\sphericalangle P''AP' = 2\sphericalangle BAC$$

olur. Bu çözüm $\sphericalangle P''AP' \geq 180°$, yahut aynı şey olan, $\sphericalangle BAC \geq 90°$ olduğu zaman suya düşer.

6. Verilmiş bir üçgenin 90° ye eşit veya 90° den büyük bir açısı varsa, o çözüm uygulanamaz (Misâl 5 e bakınız). Misâl 4 ün çözümü ise, tabii *daha kuvvetle* bu istisnaya mâruzdur.

7. Bir an için X i BC kenarı üzerinde P mevkiinde sabit tutalım. Bu takdirde Misâl 1 in (2) çözümü uygulanabilir ($\sphericalangle BAC$ dar olduğundan, Misâl 5 e bakınız); minimum çevre uzunluğu $P'P''$ ye eşittir. Şimdi, $P'P''$ uzunluğu P ye bağlı olduğundan, geriye $P'P''$ nün minimumunu bulmak kalıyor. ($P'P''$ nün kendisi de bir minimum olarak elde edildiğinden, burada bir minimumların minimumunu, yahut ta bir «minimum minimorum» u arıyoruz.) Yansıma dolayısı ile $P''A = PA = P'A$ dır. Şu halde $\triangle P''AP'$ ikizkenar olup, onun A daki açısı P den müstakildir (Misâl 5 e bakınız), ve böylelikle bu üçgenin *biçimi* P *ye bağlı değildir*. Şu halde $P'P''$, $P'A = PA$ minimum olduğu zaman minimum olur ki, bu halde aşikâr olarak $PA \perp BC$ olduğu zaman vukubulur (paragraf 8.3 e bakınız).

Verilmiş bir dar açılı üçgenin içine çizilen minimum çevreli üçgenin köşeleri, verilmiş üçgenin üç yüksekliğinin ayaklarıyla çakışır. Bunu Misâl 3 ün çözümü ile karşılaştırarak, *dar açılı bir üçgenin yüksekliklerinin, ilk üçgen içine çizilmiş olan ve ayaklarının köşelerini teşkil ettikleri üçgenin kendilerine tekabül eden köşelerindeki açılarını iki eşit parçaya böldüklerini* görürüz. Bu son netice, tabiatıyla, tamamen elemanterdir. Vermiş olduğumuz bu çözüm L. Fejér'e aittir. Courant - Robbins, S. 346 - 353 'e bakınız.

8. Hayır. Eğer ΔABC nin 120° ye eşit veya ondan büyük bir açısı varsa, bu açının tepesi aranan trafik merkezidir. Bu, paragraf 2 (2) deki mekanik çözüm tarafından kuvvetle telkin edilmektedir.

9. [Putnam 1949] Bu, paragraf 1 (4), paragraf 2 (2) ve Misâl 8 de ele alınmış olan daha basit düzlem probleme yakından benzer. Burada hangi metodu kullanmalıyız?

(1) Şek. 9.7 modeline göre *Mekanik tefsir:* Burada, herbiri verilen dört A, B, C, D noktasından birinde olmak üzere, dört tane makara vardır. Dört tane sicim X noktasında birbirine bağlanmış olup, her sicim makaralardan biri üzerinden geçtikten sonra öteki ucunda bir librelik bir ağırlık taşımaktadır. Paragraf 2 (2) de olduğu gibi, (potansiyel enerjiye dair) bir ilk mülâhaza bu mekanik sistemin denge durumunun sorulmuş olan minimum problemine tekabül ettiğini gösterir. İkinci bir mülâhaza X noktası üzerine tesir eden kuvvetlere dairdir. Burada böyle dört tane kuvvet vardır. Bu kuvvetler büyüklük bakımından eşit olup, A, B, C ve D ye giden dört ipin gergin durumdaki yönlerindedir. Bu kuvvetlerden ilk ikisinin bileşkesi, son ikisinin bileşkesine büyüklükçe eşit, yönce onunkinin aksi yönde olmalıdır. Şu halde, bu bileşkeler, hem $\measuredangle AXB$ ve hem de $\measuredangle CXD$ yi iki eşit kısma bölen aynı doğru üzerinde bulunmalıdır. Bu açıların eşitliği (her ikisi de eşkenar dörtgen olan) iki kuvvetler

paralelkenarının eşitliğinden çıkar. Birbiriyle aynı münasebeti haiz diğer çiftler şunlardır: $\sphericalangle AXC$ ile $\sphericalangle BXD$, $\sphericalangle AXD$ ile $\sphericalangle BXC$.

(2) Şek. 9.4 modeli üzerine *kısmî değişim ve optik tefsir.* (Bir an için) iki uzaklığın toplamı olan $CX + DX$ i sabit tutunuz. Bu takdirde X noktası odakları C ve D noktalarında olan uzun (dönel) elipsoit üzerinde dolaşmak zorunda kalır. Bu yüzeyi bir ayna olarak düşünelim. A dan çıkan ve elipsoit aynamızda yansıdıktan sonra B ye dönen ışık $AX+XB$ yi minimum yapar; ışığın bu yolu boyunca $\sphericalangle AXB$ açısı aynanın X noktasındaki normali tarafından iki eşit kısma ayrılır. Aynı normal paragraf 1 (3) veya paragraf 2 (1) dolayısıyla $\sphericalangle CXD$ yi de iki eşit parçaya böler. Fakat $\sphericalangle AXB$ ve $\sphericalangle CXD$ nin eşitliği bu metodla o kadar kolay elde edilemez: her ne kadar daha basit benzer halde her iki metod da kolaylıkla uygulanabiliyorsa da, bunlar içinde bulunduğumuz teoreme aynı kolaylıkla uygulanamamaktadırlar.

10. Evet. X noktası nerede olursa olsun, iki nokta arasındaki en kısa yol onları birleştiren doğru parçası olduğundan

$$AX + XC \geq AC, \qquad BX + XD \geq BD$$

olup, bu eşitsizlikler yalnız ve ancak X noktası AC ve BD köşegenlerinin kesişme noktasında bulunduğu zaman eşitliğe dönerler: işte trafik merkezi bu noktadır. Misâl 9 un ifadesi, dörtgen düzleminin normali her ikisi de düz (180° lik) açı olan $\sphericalangle AXC$ ve $\sphericalangle BXD$ nin bir ortak açıortayı olduğu vâkıası dolayısıyla, tamamen doğru kalmakta devam eder.

11. Paragraf 1 (4) ün neticesinden kısmî değişimle çıkarılır. Courant - Robbins, S. 354—361 e bakınız.

13. Topu masanın bir köşegenine paralel olarak sürünüz. Şek. 9.14, Misâl 12 yi dört kere arka arkaya uygulamaktadır.

Şek. 9.14 ü şeffaf kâğıt üzerine çizilmiş olarak tasavvur ediniz ve bu kâğıdı yansıma doğruları boyunca katlayınız; bu takdirde PP doğrusunun yansımış dikdörtgenler içinde kalan parçaları bilârdo topunun çizdiği yolun parçalarına tekabül eder. Bu arada, bu Misâl bize Misâl 4 ün sonsuz sayıda çözümü haiz olan bir halini de vermiş oluyor.

14. (Şeffaf kâğıt üzerine çizilmesi gereken) Şek. 9.15 dolayısıyla

$$n\,2\alpha < 180° < (n+1)\,2\alpha,$$

$$90°/(n+1) < \alpha < 90°/n$$

dir. $n = 1, 2, 3,$ hallerini gösteren şekilleri çiziniz. $n = \infty$ halini ele alınız.

15. Paragraf 1 ve Misâl 12 de ele alınmış olan özel hal bize birçok fikirler verir (Misâl 16, 17 ve 18 e bakınız).

16. A, B ile $AX + XB$ verildiği takdirde X in geometrik yeri odak noktaları A ve B olan bir uzun sferoit (dönel elipsoid) tir; yani bu türlü elipsoitler problemimizin tesviye yüzeyleridir. Verilen l doğrusunun X noktasında teğet bulunduğu elipsoit bize çözümü verir. Bu elipsoidin X noktasındaki normali, elipsin paragraf 1 (3) ve 2 (1) de ispatlanmış olan bir özeliğine göre l ye dik olup, $\sphericalangle AXB$ yi iki eşit parçaya ayırır.

17. İkiye katlanmış bir kâğıdı şekil üzerine o suretle koyunuz ki, kat yeri l ile çakışsın ve kâğıt tabakasının bir yarısı (yani bir yarı düzlem) A dan, diğer yarısı B den geçsin. Aranan en kısa yolu bu katlanmış kâğıt üzerine çizdikten sonra katı açarsak, bu yol bir doğru parçası olur. Buna göre XA ve XB doğruları gerek katlanmış, gerek katlanmamış kâğıt üzerinde *l ile eşit açılmış teşkil ederler.*

18. Uygun uzunlukta bir lâstik şeridin bir ucunu A ya bağlayın ve şeridi X noktasında l katı çubuğunun üzerinden geçirdikten sonra diğer ucunu şerit gergin olacak surette B ye bağlayın: (sürtünme ihmal edildiği takdirde) şerit bu haliyle Misâl 15 te istenilen en kısa yolu teşkil eder. X noktasında üç kuvvet tesir eder: biri A ya, öteki B ye doğru yönelmiş ve büyüklükçe eşit iki gerilme kuvveti ile (sürtünme ihmâl edildiğinden dolayı) l ye dik olan çubuğun reaksiyon kuvveti. Burada kuvvetler paralelkenarı bir eşkenar dörtgen olup, bundan dolayı l nin bir normali $\sphericalangle AXB$ yi iki eşit parçaya böler. Bu netice, Misâl 16 nın neticesi ile uygunluk halindedir. Çubuğun reaksiyonunun çubuğa paralel bileşeni olmadığından, gerilme kuvvetlerinin l ye paralel birleşenleri birbirine eşit büyüklükte (ve aksi yönde) olmalıdır. Şu halde XA ve XB, Misâl 17 nin neticesiyle uygunluk halinde olarak, l ile eşit açılar teşkil eder. Bu arada, Misâl 16 ile 17 nin neticelerinin birbirine denk oluşunun bir parça uzay geometri ile gösterilebileceğine işaret edelim. (Eğer iki üçyüzlü açıda üçer tane uygun veri birbirine eşitse, bu üçyüzlü açılar birbirine eşittir.)

19. Sabit tutulan üç tığ etrafına bir lâstik şerit geçirildiğini düşününüz. Kısmî değişim ve Misâl 16, yahut Misâl 18 i uygulayınız; bir üçgenin üç açı ortayı o üçgenin içine çizilen dairenin merkezinde birleşirler. Misâl 3 bu problemin bir sınır halidir.

20. Aranan üçgenin her köşesi küpün bir kenarının orta noktasıdır. Bu üçgen eşkenar olup, merkezi küp'ün merkezindedir ve çevre uzunluğu $3\sqrt{6}\,a$ dır.

21. Kısmî değişim prensibi, paragraf 8.3, ve paragraf 1 (4) yahut 2 (2) dolayısıyla TX, TY ve TZ sırasıyla a, b, c ye dik olup. aralarında (120° lik) eşit açılar teşkil ederler.

T ye «üç aykırı doğrunun trafik merkezi» adını verebilir-

dik. Paragraf 1 (4) teki problem bunun bir aşırı özel halidir: Bu halde a, b, c doğruları birbirine paraleldir. Bu problemin aşikâr bir genelleştirilmesi ve bazı aşikâr benzer halleri mevcuttur: üç kürenin trafik merkezi; bir nokta, bir doğru ve bir düzlemin trafik merkezi, v. s.

22. Bir küp'ün üç aykırı kenarının trafik merkezi, tabiî bu küp'ün merkezindedir. Küp'ün verilen üç aykırı kenarı birbirine dönüştüren 120° lik dönmesini ve Misâl 20 de bulunan üçgenin durumunu açık bir şekilde gösteriniz.

23. Bir çokyüzlünün yüzeyi üzerinde alınan A ve B gibi iki nokta arasındaki en kısa yolu bulmak için, çokyüzlü yüzeyini mukavvadan kesilmiş bir takım düzlem çokgenlerin uygun surette birbirine eklenmesiyle meydana getirilmiş tasavvur edelim. Çokyüzlü yüzeyini bir düzlem üzerine açalım (mukavvadan çokyüzlüyü masa üzerine serelim): Bu esnada çokyüzlü üzerindeki aranan en kısa çizgi *A yı B ye birleştiren doğru parçasına* dönüşür. Bununla beraber, çokyüzlü yüzeyini düzlem üzerine açmadan evvel, onu öyle kenarlar boyunca kesmeliyiz ki, bu kenarlar en kısa yol ile *kesişmesin*. En kısa yolun hangi yüzler üzerinde bulunduğunu ve hangi kenarlarla kesiştiğini önceden bilmediğimizden, bu yüz ve kenarların mümkün olan bütün kombinezonlarını elden geçirmeliyiz. Şimdi sorulmuş olan probleme dönerek, söz konusu olabilecek bütün yüz dizilerinin bir listesini ve her diziden sonra o yüz dizisi üzerinde örümcek ile sinek arasındaki doğru parçasının karesini veriyoruz:

(1) Uç duvar, tavan, uç duvar:

$$(1+20+7)^2=784;$$

(2) Uç duvar, tavan, yan duvar, uç duvar:

$$(1+20+4)^2+(4+7)^2=746;$$

(3) Uç duvar, tavan, yan duvar, taban, uç duvar:

$$(1+20+1)^2+(4+8+4)^2=740\,.$$

24. Küre üzerinde bir büyük daire yayı kürenin bir jeodeziğidir. Bir büyük daire bir düzlem eğri olup, bu dairenin düzlemi dairenin bütün noktalarında onun oskülâtör düzlemidir. Bu düzlem kürenin merkezinden geçer, ve bu yüzden kürenin büyük daireye ait noktalardan geçen bütün normallerini (yani bu noktalardan geçen bütün yarıçapları) ihtiva eder. Bir küçük daire bir jeodezik değildir; hakikaten, bir küçük dairenin düzlemi kürenin küçük daire üzerindeki noktalardan geçen hiçbir normalini ihtiva etmez.

25. Enerjinin sakınımı prensibine göre, her nekadar noktanın hızının doğrultusu tabiatıyle değişse bile, bu hızın büyüklüğü sabit kalır. Noktanın yörüngesine ait kısa bir yayın iki uç noktasındaki hız vektörleri arasındaki fark yüzeyin normal reaksiyonlarından doğar, ve bu yüzden bu farkı gösteren vektör yüzeye hemen hemen diktir. Bu ise, bir jeodeziğin karakteristik özeliğidir (Misâl 24 (2) ye bakınız). Aynı muhakemenin başka bir ifade şekli: Misâl 24 (2) deki lâstik şerit boyunca gerilme kuvvetlerini yörünge boyunca hızlar olarak yeniden tefsir ediniz. Bütün bu vektörler aynı büyüklükte olup, doğrultularındaki değişiklik her iki halde de normal reaksiyonlardan doğmaktadır.

26. Çokyüzlü yüzeyinin n tane serbest kenarını hafifçe bastırmak suretiyle bu çokyüzlüyü bir düzlem (masanızın düzlemi) üzerine oturtunuz. Bu şekilde n tane ikizkenar yan yüzlü ve tabanı istediğimiz çokgen olan bir piramit elde edilmiş olur. Hakikaten bu taban, merkezi piramidin yüksekliğinin ayağında bulunan bir daire içine çizilmiştir. Bu dairenin yarıçapı, hipotenüsü mukavva üzerine çizilmiş büyük dairenin yarıçapı ve dik kenarlarından biri piramidin yüksekliğinden ibaret olan bir dik üçgenin öteki kenarından ibarettir.

27. Eğer konveks çokyüzlünün ağırlık merkezi tabana mümkün olan en çok yakınlıkta ise, çokyüzlü dengededir. Bu kadar az bir Mekanik bilgisi bize istenen çözümü ilham etmeye yeter: P nin yüzeyi üzerinde öyle bir D noktası alınız ki, CD uzaklığı minimum olsun. Kolay bir inceleme D noktasının P nin bir köşesi olamıyacağı gibi, P nin bir kenarı üzerinde de bulunamıyacağını ve CD nin, P nin D yi ihtiva eden F yüzüne dik olacağını gösterir. Polya - Szegö, *Analysis*, vol. 2, S. 162, problem 1 e bakınız.

28. (a) Kürenin (dünyanın) tamamiyle kuruyarak, bütün tepe, geçit ve çukurların açığa çıktığını tasavvur edelim. Şimdi tek bir çukuru su ile kapatalım. Kürenin gerikalan kısmında P tepe, S geçit ve $D-1$ çukur bulunur ve bu kısma bir ada gözüyle bakılabilir. Metinde ispat edilen netice dolayısıyla

$$P+(D-1)=S+1$$

dir.

(b) Tesviye çizgileri ve en çabuk iniş eğrileri küreyi (Misâl 3.2 de kullanılan terimlere göre) F tane «memleket» e ayırır. O kadar sayıda nokta alınız ki, tepe, çukur veya geçit gibi her şayanı dikkat nokta bir köşe olsun (Şek. 9.16 ve 9.17) ve hiçbir memleketin sınırı üzerinde birden fazla şayanı dikkat nokta bulunmasın.

Şimdi her kenarı, yahut sınır çizgisini, kendisinin ayırdığı iki memleket arasında herbirine 1/2 kenar vermek suretiyle eşit olarak bölüştürelim. Aynı surette her köşeyi de ait olduğu memleketler arasında eşit olarak bölüştürelim. Buna karşılık olarak ta her memleket

$$V-E+F=2$$

eşitliğinin sol tarafına katkıda bulunacaktır; bu katkı F ye bir birim ve V ile $-E$ ye de birimin uygun birer kesrinden ibarettir. Türlü memleket nevileri için bu katkıyı hesaplıyalım:

I. Eğer bir memleketin sınırı üzerinde hiçbir şayanı dikkat nokta yoksa, bu memleket iki tesviye çizgisi ile iki en çabuk iniş eğrisi arasında kalan bir dörtgen şeklindedir. Bu memleketin $V-E+F$ ye katkısı

$$4\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}+1=0$$

dır.

II. Eğer bir memleketin sınırı üzerinde bir tepe yahut bir çukur bulunursa, memleket bir üçgen şeklindedir (Şek, 9.16 ya bakınız). Eğer bu tepe yahut çukur n tane memleketin ortak köşesi ise bu memleketlerden herbirinin $V-E+F$ ye katkısı

$$\left(2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right)-3\times\frac{1}{2}+1=\frac{1}{n}$$

olup, bütün n memleketin toplam katkısı $n\cdot 1/n=1$ olur.

III. Eğer bir memleketin sınırı üzerinde bir geçit varsa, o memleket bir dörtgen şeklindedir (Şek. 9.17 ye bakınız). Bu memleketin $V-E+F$ ye katkısı

$$\left(3\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-4\times\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{8}$$

olup, o geçidin ortak köşesi bulunduğu 8 tane memleketin toplam katkısı

$$8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-1$$

dir.

Euler teoremine göre, bütün bu yukarıki katkıların toplamı

$$P+D-S=2$$

dir.

(c) «Tufan» fikrini kullanmak suretiyle yapılan ispat, hakikî manasıyle bir «fiziksel matematik» misâli teşkil etmez: bu ispat sadece günlük tecrübelere dayanan, fakat hiçbir belirli fizik teorisine ihtiyaç göstermeyen fikirler kullanmaktadır. Sorunun (b) kısmında bize yapılan teklif, bizi yanlış yola sevkeden bir teklifti: bu teklif P, D ve S nin herhangi bir şekilde F, V ve E ye benzer olduğunu telkin eder görünüyordu, halbuki bu asla doğru değildir. Buna rağmen, bu faydalı bir telkin olmuştur, çünkü dikkatimizi Euler Teoremine çevirmemize sebep olmuştur. Bu ise tamamiyle tabiî bir durumdur: problemlerin çözümünde bize rehberlik eden fikirler ekseriya yanlış, fakat ona rağmen faydalıdırlar.

29. (a) Taşın aşağı düşüş zamanı t_1 ve sesin yukarı çıkış zamanı t_2 olsun. Bu takdirde

$$t = t_1 + t_2, \qquad d = gt_1^2/2, \qquad d = ct_2$$

dir. t_1 ve t_2 yi yoketmek ve 2. dereceden bir denklem çözmek suretiyle

$$d^{1/2} = -c(2g)^{-1/2} \pm [c^2(2g)^{-1} + ct]^{1/2}$$

buluruz. $t = 0$ ın $d = 0$ vermesi gerektiğinden, burada $+$ işaretini seçmeliyiz. O halde

$$d = c^2 g^{-1} + ct - c^2 g^{-1}[1 + 2gc^{-1}t]^{1/2}, \qquad \text{yani}$$

(b) $$d = gt^2/2 - g^2 t^3/(2c) + \cdots$$

olur. Burada yazılmamış olan terimleri ihmâl ederek, açılımın ilk terimini uygun bir yaklaşık formül olarak kullanabiliriz.

(c) Açılımın ilk terimini ve hattâ düzeltme teriminin işaretini fizikî mülâhazalarla önceden görebilmemiz bu çeşit problemlerin tipik bir özelliğidir. Uygun bir yaklaşık formül elde etmek için kullandığımız matematik metod da tipiktir: d yi ve-

ren ifadeyi *küçük bir büyüklüğün* (t zamanı) *kuvvetlerine göre açtık*. Paragraf 5.2 ye bakınız.

30. Eliptik ayna bir parabolik aynaya döner ki, böyle bir ayna eksenine paralel olarak üzerine düşen bütün ışınları kendi odak noktasında toplar. Böyle bir parabolik ayna bir yansıtan (aynalı) teleskopun en esaslı parçasıdır.

31. Verilen diferansiyel denklem değişkenleri ayrılabilir tipten olup, bazı aşikâr değişiklerle

$$dx = \left(\frac{y}{c-y}\right)^{1/2} dy$$

elde ederiz.

$$\left(\frac{y}{c-y}\right)^{1/2} = \tan \varphi$$

vaz'etmek suretiyle bir φ yardımcı değişkeni ithâl edersek,

$$y = c \sin^2 \varphi, \quad x = c\left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right)$$

elde ederiz. Burada x yukarıki ilk denklemden integrasyonla bulunmuş olup, integrasyon sabiti öyle seçilmiştir ki, eğrimiz koordinatların başlangıç noktasından geçsin, yani $\varphi = 0$ dan $x = 0$, $y = 0$ çıksın. Bu denklemlerde $2\varphi = t$, $c = 2a$ vaz'ederek sikloit denklemlerini alışık olduğumuz şekilleriyle elde ederiz:

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t).$$

Bu sikloit, koordinatların başlangıcı olan A noktasından geçer. a nın ancak tek bir değeri sikloidin ($0 < t < 2\pi$ ye tekabül eden) ilk kolunun B noktasından geçmesini sağlar. Bunu görebilmek için, a yı 0 dan ∞'a kadar değiştirelim; bu esnada sikloit şişer, ve bir çeyrek daire tararken tam gereken miktarda şiştiği zaman B noktasına çatar.

33. a (paragraf 5 te olduğu gibi) kürenin yarıçapı, h küre parçasının yüksekliği, V bu parçanın hacmı, C de küre parçası ile aynı tabanı ve aynı h yüksekliğini haiz koninin hacmı olsun. Koordinatların başlangıç noktası (Şek. 9.13 teki O noktası) küre parçasının ve koninin ortak tepesidir. Elemanter geometri ve paragraf 5 te verilen dairenin denkleminden

$$C = \frac{\pi (2ah - h^2)\, h}{3}$$

çıkar.

Şek. 9.13 ü kullanın, fakat şimdi sadece O dan $0 < x < h$ şartına uyan x uzaklığındaki kesitleri göz önüne alın. (A) denklemi ile ifade edilen kesitler dengesinden cisimler (küre parçası, koni — fakat hacmı C olmayanı — ve silindir) dengesine geçerek

$$(B) \qquad 2a\,(V + \pi h^2 \cdot h/3) = (h/2)\,\pi\,(2a)^2\, h$$

buluruz. Buradan

$$V = \frac{\pi h^2\,(3a - h)}{3} = \frac{a + (2a - h)}{2a - h}\, C$$

çıkar. $2a - h$ tamamlayıcı küre parçasının yüksekliğidir.

34. Paragraf 5 te ele alınmış olan dairenin denklemini

$$(A) \qquad 2a\,\pi x^2 = x\,\pi y^2 + x\,\pi x^2$$

şeklinde yazınız. Şimdi Şek. 9.13 ün H noktasında sadece πx^2, koninin kesiti, asılıdır. Kürenin πy^2 kesiti ile birinciye eşit diğer bir koninin πx^2 kesiti (absisi x olan) başlangıçtaki yerlerinde kalırlar. $0 < x < a$ olduğunu düşünerek, bu üç cismin dengesine geçiniz, yarım kürenin ağırlık merkezinin $\bar{x}$ absisini ithâl ediniz ve bir koninin ağırlık merkezinin yerini (bu noktanın koninin tepesinden uzaklığı yüksekliğin 3/4 üne eşittir) hatırlayınız.

$$(B) \qquad 2a \cdot \pi a^2 \cdot a/3 = \bar{x} \cdot 2\pi a^3/3 + (3a/4)\,\pi a^2 \cdot a/3,$$

$$\bar{x} = 5a/8.$$

35. Misâl 33 ün yazış tarzını muhafaza ediniz, fakat Misâl 34 ünkini bir hususta değiştiriniz: Burada $\bar{x}$, yüksekliği h olan bir küre parçasının ağırlık merkezinin absisini göstersin.

$0 < x < h$ olduğunu düşünerek, Misâl 34 ün (A) formülünden

$$(B) \qquad 2a \cdot \pi h^2 \cdot h/3 = \bar{x}\, V + (3h/4)\, \pi h^2 \cdot h/3$$

e geçiniz. Bu son formülden, V nin Misâl 33 te bulunmuş olan değerini kullanarak

$$\frac{\bar{x}}{h - \bar{x}} = \frac{h + 4\,(2a - h)}{h + 2\,(2a - h)}$$

elde edilir.

36. h, dönel paraboloit parçasının yüksekliğini, V de hacmını göstersin. Alışık olduğumuz parabol denklemini

$$(A) \qquad 2p \cdot \pi y^2 = x \cdot \pi\,(2p)^2$$

şeklinde yazınız. Burada πy^2 nin paraboloitin kesitini, $\pi\,(2p)^2$ nin de bir silindirin kesitini gösterdiğine dikkat ediniz. $0 < x < h$ olduğunu göz önüne alarak ve bu cisimlerin kesitlerinin dengesinden cisimlerin kendilerinin dengesine geçmek suretiyle

$$(B) \qquad 2p \cdot V = (h/2)\, \pi\,(2p)^2\, h, \quad V = \pi p h^2 = (3/2)\, \pi 2ph\, (h/3)$$

elde ederiz. Parabolün denklemi dolayısıyla, $\pi 2ph$ nın paraboloit parçasının tabanı olduğuna dikkat ediniz.

37. Misâl 36 daki yazış tarzını muhafaza ediniz ve paraboloit parçasının ağırlık merkezini $\bar{x}$ ile gösteriniz. Şimdi parabolün denklemini

$$(A) \qquad x \cdot \pi y^2 = 2p \cdot \pi x^2$$

şeklinde yazınız. Burada πx^2 nin bir koninin kesiti olduğuna dikkat ediniz. $0 < x < h$ olduğunu düşünerek ve kesitlerden cisimlere geçerek

$$\bar{x}\, V = 2p \cdot \pi h^2 (h/3),$$

ve buradan da Misâl 36 dolayısıyla

$$\bar{x} = 2h/3$$

buluruz.

38. $n = 0$: bir prizmanın hacmı, bir paralelkenarın alanı; $n = 1$: bir üçgenin alanı, bir paralelkenarın veya bir prizmanın ağırlık merkezi; $n = 2$: bir koni veya bir piramidin hacmı, bir üçgenin ağırlık merkezi. $n = 3$: bir koni veya bir piramidin ağırlık merkezi.

Paragraf 5 ve Misâl 33-38 de verilen şekliyle, Arşimetin metodunun Analitik Geometri derslerinde pekâlâ yer alabileceğine ve mûtad sunuş tarzıyla çabucak kuru ve sıkıcı olabilen bu disiplini canlandırabileceğine dikkat ediniz. «Metod» un burada ele almadığımız teoremleri de benzer şekilde ispatlanarak aynı tarzda kullanılabilir.

Çözümü verilmeyen No. lar: **12, 32.**

X. BÖLÜMDEKİ SORULARIN CEVAPLARI

1. Hayır. Bu kabûllerin ispatta bıraktığı boşluk çok kötü değildir: maksimumun varlığı, VIII. Bölümün 3 No. lı dip notunda zikredilen genel teoremin yardımı ile ispat edilebilir.

2. Misâl 8.41 in çözümünde verilmiş olan açık formül,

$$A^2 \leq (p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)$$

olduğunu ve eşitliğe ancak ve ancak $s = 180^\circ$ olduğu zaman erişildiğini gösterir ki, bu son halde dikdörtgen bir daire içine çizilmiş olur.

3. A, B ve C, n kenarlı bir düzgün çokgenin üç müteakip köşesi ve M de BC nin orta noktası olsun. $\triangle ABM$ yerine ($AB' = B'M$ olmak üzere) aynı AM tabanını ve aynı çevre uzunluğunu, neticede daha büyük bir alanı haiz $\triangle AB'M$ üçgenini koyunuz (Misâl 8.8 e bakınız).

4. Her iki alanı da dairenin r yarıçapı ve çokgenin n kenar sayısı cinsinden ifade edersek, geriye

$$\frac{\pi^2 r^2}{n \tan (\pi/n)} < \pi r^2$$

eşitsizliğini ispat etmek kalır. Bir düzgün çokgenin bir daire dışına çizilebileceğinden hareket ederek daha güzel bir çözüme varabiliriz: istenilen netice Misâl 5 in bir özel halidir.

5. Alanı A ve çevresi L olan bir çokgen yarıçapı r olan bir dairenin dışına çizilmiş olsun. Bu takdirde aşikâr olarak $\pi r^2 < A$ dır. Dairenin merkezinden çokgenin köşelerine çizilen doğrular, çokgeni yükseklikleri hep r uzunluğunda olan birtakım üçgenlere ayırır. Buradan $A = Lr/2$ çıkar. Elde ettiğimiz iki neticeyi birleştirerek

$$A = \frac{L^2 r^2}{4A} < \frac{L^2}{4\pi}$$

buluruz. Buradaki $L^2/(4\pi)$ ise çevresi L olan dairenin alanından başka birşey değildir.

6. A verilen eğrinin alanını, L de çevre uzunluğunu göstersin. Aynı çevre uzunluğunu haiz dairenin yarıçapına r diyelim, bu suretle $L = 2\pi r$ olur. $n \to \infty$ için verilen eğriye yaklaşan bir P_n çokgeninin alanına A_n, çevre uzunluğuna da L_n diyelim. Bu takdirde A_n, A ya ve L_n, L ye yaklaşır. Şimdi P_n çokgenine benzer ve çevre uzunluğu L olan P_n' çokgenini düşünelim; P_n' nin alanı $A_n (L/L_n)^2$ dir. P_n', yarıçapı r olan bir

daire ile aynı çevre uzunluğunu haiz olduğundan, paragraf 7 (4) ten

$$A_n (L/L_n)^2 < \pi r^2$$

neticesini çıkarırız. Limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} A_n (L/L_n)^2 = A \leqq \pi r^2$$

buluruz. Bu da paragraf 8 deki I ifadesini haklı çıkarır. Bununla birlikte paragraf 7 (5) in metni itiraz götürür: O metnin verdiği intibaın aksine, biz orada $A < \pi r^2$ olduğunu *aslâ* ispat etmiş değiliz. Hakikaten, « $<$ » ile ifade edilen bir münasebet limite geçildiğinde « $\leqq$ » şekline girebilir.

7. Her iki ifade de

$$\frac{216\ V^2}{S^3} \leqq 1$$

eşitsizl'ğine denktir. Burada V kutunun hacmını, S de yüzey alanını gösterir. Paragraf 8.6 da bu eşitsizliği doğrudan doğruya ispat etmiştik.

8. I′, II′, III′ nün birbirine denkliği, I, II, III ün birbirine denkliğini ispat için paragraf 8 de kullanılan metodla gösterilebilir. Bununla beraber I′, I e denk değildir. Hakikaten I, daireden başka bir eğrinin daire ile aynı çevre ve aynı alanı haiz olup olamıyacağı sorusunu cevapsız bırakmakta, fakat I′ böyle bir imkânın mevcut olamıyacağını açıkça ifade etmektedir. Misâl 6 daki genişletilmiş şekliyle paragraf 7 (5) teki muhakeme I i ispat eder, fakat I′ yü ispat etmeye yetmez: Bu muhakeme I için yeten « $\leqq$ » münasebetini ispat etmektedir, fakat I′ için « $<$ » münasebetini ispatlamak gerekir.

9. Bu problemin çözümü, Misâl 8 deki I′ yü elde etmek için paragraf 8 deki I e ilâve etmemiz gereken şeyi bize sağlıyacak-

tır. Bu problemin önemi buradan geliyor; sorunun diğer noktaları için Misâl 10-13 e bakınız.

10. C yi ihtiva eden en küçük üçgene C'', bu üçgenin çevre uzunluğuna L'' ve alanına A'' diyelim. Bu takdirde aşikâr olarak $L'' < L$ ve $A'' > A$ dır. C' olarak C'' ye benzer ve çevre uzunluğu L olan üçgeni alınız. C' nün

$$A' \text{ alanı} = A''(L/L'')^2 > A'' > A \quad \text{olur.}$$

11. C *konveks olmayan* herhangi bir eğri olduğuna göre, evvelâ C yi ihtiva eden en küçük C'' konveks eğrisini, sonra C'' ye benzer ve C ninkine eşit bir çevre uzunluğunu haiz olan C' eğrisini göz önüne alırız. Misâl 10 un nihaî eşitsizliğe kadar bütün muhakemesi bu daha genel durumda tekrarlanabilir.

12. C kapalı eğrisi üzerinde P ve Q gibi farklı iki nokta alalım. C nin tamamı bir doğru üzerinde bulunamıyacağından, C üzerinde R gibi öyle bir üçüncü nokta bulunmalıdır ki, P ve Q den geçen doğrunun dışında olsun. P, Q ve R den geçen daireyi ele alalım. Eğer bu daire C ile çakışmazsa, C üzerinde öyle bir S dördüncü noktası vardır ki, bu dairenin dışında olsun: Misâl 9 un problemi Misâl 13 ünkine denktir.

13. Eğer C konveks değilse, Misâl 11 istenilen çizimi verir. Eğer C konveks ise, P, Q, R ve S uygun bir sırada bir konveks dörtgenin müteakip köşeleri olurlar, C nin çevrelediği bölgede bu dörtgenle dört «eğri segmanı»ndan ibaret olur. Herbir eğri segmanı, yukarıki dörtgenin bir kenarı ile P, Q, R, S nin C yi böldüğü dört yaydan o kenar ile aynı uçları haiz olanının arasında kalan düzlem parçasıdır. Steiner'in fikrine uyarak (paragraf 5 (2), Şek. 10.3 ve 10.4 e bakınız) bu dört segmanı katı (mukavvadan), ve mafsallı (dört köşesinde menteşeli) olarak düşüneceğimiz dörtgenin kendilerine tekabül eden kenarlarına katı olarak bağlanmış tasavvur edeceğiz. Burada Misâl 8.41 in yazış

tarzını kabul ediyoruz. Bu takdirde esas şartımıza göre $\varepsilon \neq 180°$ dir. Mafsallı dörtgenin hafif bir hareketi ε u ε' ye çevirsin. ε' yü ε a o kadar yakın seçeriz ki, dörtgenin kenarlarına katı olarak bağlanmış dört yay bu son durumda da kendi kendini kesmeyen bir eğri teşkil etmekte devam etsin. Bundan öteye ε' u öyle seçebiliriz ki

$$|\varepsilon' - 180°| < |\varepsilon - 180°|$$

olsun. Bu ise, A^2 ye dair Misâl 8.41 in çözümünde verilmiş olan formül dolayısıyla C' nün alanının C ninkinden daha büyük olduğu neticesini verir. Bununla beraber, C' nün çevresi, aynı dört yaydan meydana gelen C nin çevresiyle aynı uzunluğu haizdir.

14. Her iki muhakeme de aynı mantık yapısını haizdir. Yanlışlığı aşikâr bir neticeye götüren ikinci muhakemenin doğru olmaması gerekir. Şu halde, her nekadar doğru olabilecek bir neticeyi kendisine hedef alsa da, birinci muhakeme de doğru olamaz. Birincinin ince bir benzeri olan ikinci muhakeme aslında O. Perron tarafından verilmiştir.

Bu iki hal arasındaki fark, verdiğimiz metinde bahsedilenlerin dışında olan bir sebepten meydana gelmiş olmalıdır. Bir en büyük tam sayı yoktur. Fakat aynı çevre uzunluğunu haiz bütün kapalı eğriler içinde en büyük alanı haiz bir eğri vardır. Ama bu hususu Misâl 10-13 ten öğrenmiş değiliz.

15. C eğrisi bir daire değildir, fakat belirli bir daire ile aynı çevre uzunluğunu haizdir. Misâl 6 ya göre, C nin alanı bu dairenin alanından daha büyük olamaz. Ben C nin alanının daireninkine eşit te olamıyacağını iddia ediyorum. Çünkü aksi halde, Misâl 10-13 ten bildiğimize göre gene daire ile aynı çevre uzunluğunu, fakat daha da büyük bir alanı haiz diğer bir C' eğrisi bulunurdu, ki bu da Misâl 6 da verdiğimiz ispat dolayısiyle mümkün değildir.

16. Şek. 10.13 teki A, B gibi bir kere bir doğru parçası ve bir kere de değişen bir eğri ile birbirine bağlanmış iki nokta verilmiş olsun, öyle ki bu doğru parçası ile değişen eğri aralarında bir düzlem bölge çevrelesinler. Eğrinin uzunluğu ile bölgenin alanını ele alıyoruz. Metinde eğrinin uzunluğuna verilmiş gözüyle bakarak bölgenin alanının maksimumunu aramıştık. Burada alana verilmiş gözüyle bakarak eğrinin uzunluğunun minimumunu arıyoruz. Her iki halde de çözüm aynıdır: Bir daire yayı. Hattâ ispat ta her iki halde esas itibariyle aynıdır. Orada olduğu gibi burada da Şek. 10.14 ü kullanabiliriz. Tabiî arada aşikâr bazı değişiklikler de vardır: Şek. 10.14, I deki (taranmamış) daire parçası burada verilmiş bir eğri uzunluğundan değil de, verilmiş bir alandan hareket ederek çizilir ve burada Teorem I′ yerine, Misâl 8 deki Teorem II′ yü kullanırız.

17. Misâl 16 yı kullanınız: Şek. 10.11 deki X ve Y noktalarına Şek. 10.13 teki A ve B noktalarının rolünü veriniz ve Şek. 10.13 e sabit $\triangle XYC$ yi ilâve ediniz. Maksimuma verilmiş uzunluğu haiz eğrinin bir daire yayı olması halinde erişilir.

18. Şek. 10.11 de CY doğrusuna bir ayna gözüyle bakınız. X', X in bu aynadaki hayâli olsun. Misâl 17 yi $\measuredangle XCX'$ ve bu açının iki kenarı üzerinde verilmiş X ve X' noktalarına uygulayınız. Maksimuma uzunluğu verilmiş eğrinin CY ye Y noktasında dik bir daire yayı olması halinde erişillr.

19. Kısmî değişimler metodunu kullanınız. X e sabit gözüyle bakınız: Misâl 18 e göre, çözüm CY ye dik bir daire yayıdır. Y ye sabit gözüyle bakınız: bu daire yayı CX e de diktir. Netice olarak, çözüm hem CX, hem de CY ye dik ve bu yüzden, paragraf 9 da faraziye olarak ileri sürülmüş olduğu gibi, merkezi C de olan bir daire yayıdır.

20. Sözü geçen doğru, açının ortayına dik olduğu zaman bir maksimum vardır. Eğer çözümün tek olduğunu evvelden bil-

seydik, bunu simetrinin bir neticesi olarak elde ederdik. Bununla beraber, yukarıki netice Misâl 8.59 (2) den böyle bir bilgiye lûzum kalmadan çıkar.

21. Şek. 10.14 ün verdiği fikir dolayısıyla, BC ve DA iplerinin AB ve CD sopalarını kiriş olarak kabûl eden *aynı* bir dairenin yayları olmaları halinde bir maksimum vardır.

22. Daima bir sopa ve bir ipin yan yana gelmesi şartıyla, n sopa ve n ipten teşekkül eden $2n$ parçalı bir kapalı eğri bütün sopaların aynı bir dairenin kirişleri ve bütün iplerin de önceki dairenin yayları olması halinde bir maksimum alan çevreler.

23. Misâl 22 nin bütün ipleri 0 uzunluğunda olduğu zaman paragraf 5 (2) deki netice ile Şek. 10.3 ve 10.4 ü elde ederiz.

24. Misâl 16 ya benzer: Verilmiş dairenin (sabit olan) yüzeyi, alanı verilmiş olan değişken yüzey ve her ikisinin sınırını teşkil eden daire, sırasıyla oradaki sopa, ip ve A, B nokta çiftine tekabül eder. Burada Misâl 16 nın metodu uygulanabilir. (Şek. 10.14 te I dairesini düşey çapı etrafında döndürünüz ve aynı şeyi Şek. II nin tabanındaki doğru parçası için de yapınız, fakat bu son şeklin üst tarafını daha keyfî bir tarzda değiştiriniz.) Uzaydaki izoperimetri teoremini kabûl edersek şunu elde ederiz: Yukarıki iki yüzey arasındaki alan, alanı verilmiş olan yüzeyin bir kürenin parçası (tek tabanlı bir küre kuşağı) olması halinde maksimum olur.

25. Üçyüzlü açıyı teşkil eden üç düzlemi birbirine dik alınız ve uzaydaki izoperimetri teoremini doğru kabûl ediniz. Bu takdirde üçyüzlü açı uzayın sekiz eşit kısmından birini teşkil eder ve Şek. 10.12 nin uzaydaki benzeri kullanılabilir. Açının üç yüzüne göre yapılacak müteakip yansımalarla açıyı kesen yüzey bir *kapalı* yüzey haline getirilir; bu son yüzeyin alanı

ve hacmı sırasıyla verilen alanın ve başlangıçtaki yüzey parçasının üçyüzlü açıdan ayırdığı hacmın sekizer katıdır. Alanı verilmiş ve maksimum hacım çevreleyen kapalı yüzey küre olduğundan, sorulan problemin yukarıda göz önüne aldığımız özel halinde, alanı verilen yüzey parçası, merkezi üçyüzlü açının tepesinde olan, bir küre yüzeyinin bir parçası (1/8 i) olduğu zaman maksimum hacme erişilir.

26. Misâl 25 te göz önüne alınmış olan şekil aşağıki genel durumun $n=2$ için bir özel halini teşkil eder: $n+1$ tane düzlem mevcut olsun; bunların n tanesi aynı doğrudan geçerek uzayı $2n$ tane eşit ikiyüzlü açıya ayırsınlar ve sonuncu düzlem de ilk n düzleme dik olsun. Bu $n+1$ düzlem uzayı $4n$ tane eşit üçyüzlü açıya ayırır ki, bu açıların herhangi birine Misâl 25 te kullanılmış olan tekrarlanan yansımalar metodu uygulanabilir ve böylece oradakinin aynı olan şu netice elde edilir: *Alanı verilmiş yüzey parçasının üçyüzlü açıdan ayırdığı hacım, bu yüzeyin merkezi üçyüzlü açının tepesinde olan bir küre yüzeyi parçası olması halinde maksimum olur.*

(Üçyüzlü açılara dair aynı metodun uygulanabileceği ve aynı neticeyi veren üç şekil daha vardır. Bu şekiller düzgün cisimlerle ilgili olup, ilki dörtyüzlü, ikincisi küp ve sekizyüzlü, üçüncüsü de oniki ve yirmiyüzlü ile ilgilidir. Bunların incelenmesi daha fazla emek veya daha fazla ön bilgiye ihtiyaç gösterdiğinden, onları sadece (yukarıki basit şekil ile başlayan) aşağıki cedvelde zikretmekle yetineceğiz:

Düzlemler	Uzay parçalarının sayısı	Açılar
$n+1$	$4n$	$90°$ $90°$ $180°/n$
6	24	$90°$ $60°$ $60°$
9	48	$90°$ $60°$ $45°$
15	120	$90°$ $60°$ $36°$

Bu cedveldeki «düzlemler» simetri düzlemleri, «uzay parçaları» üçyüzlü açılar ve «açılar» da bu üçyüzlü açıları teşkil eden üçer düzlemin ikişer ikişer teşkil ettikleri açılar anlamındadır.)

Bu neticenin *herhangi bir* üçyüzlü için de doğru kalacağı faraziyesi tabiî olarak akla gelir. Bu faraziye listede verilen hallerle endüktif olarak desteklendiği gibi, benzerlikle de desteklenmektedir. Hakikaten, bir düzlemdeki açılara dair benzer şekilde elde edilmiş olan faraziye (paragraf 9) Misâl 19 da ispatlanmıştır.

Bu faraziyeyi hattâ çok yüzlü açılara genişletmek tabiî olup, hiç olmazsa orada kolay gerçeklenebilen bir limit hali bulabiliriz. Burada bir dar (düzlem) açının kenarlarından biri etrafında dönmesiyle taranan sonsuz uzay parçasına bir «koni» diyeceğiz. Alanı verilmiş ve koniden maksimum hacmı ayıran yüzeyi arıyoruz. Bu yüzeyin (1) bir dönel yüzey, (2) bir küre yüzeyinin parçası, (3) bu kürenin merkezinin koninin tepesi ile çakışık olduğu ispat edilebilir. Burada ayrıntılara girişmemekle beraber, ispatın (2) numaralı kısmının Misâl 24 ten, tıpkı Misâl 17 nin çözümünün Misâl 16 dan elde edildiği gibi, çıkarılabileceğine işaret edelim. Steiner tarafından ortaya atılmış olan Misâl 25 in problemi tam bir çözümünü hâlâ beklemektedir.

27. Eğer alanı A olan bir bölge hiçbir ortak noktası bulunmayan iki alanortay kabûl etseydi, bu bölge söz konusu alanortaylar tarafından üç parçaya (alt bölgeye) ayrılırdı ki, bunlardan ikisinin alanı $A/2$, üçüncüsünki de sıfırdan farklı bir sayı olurdu. Bu ise aşikâr olarak mümkün değildir.

28. Doğru parçası daha kısadır: $1 < (\pi/2)^{1/2}$.

29. Misâl 30 a bakınız.

30. Verilen alanortayın uç noktalarının üçgenin O tepesinde birleşen iki farklı kenar üzerinde bulunduğunu, fakat bu uç noktalarından hiçbirinin O ile çakışmadığını kabûl

ediniz. Uygun yansıtmalarla (yani Şek. 10.12 nin fikrini kullanarak) içlerinden biri başlangıçtaki üçgen olan altı eşit üçgen elde ederiz. Aynı zamanda, biri verilmiş alanortaydan ibaret olan altı eşit eğri yayı elde ederiz. Bu altı üçgen O merkezli bir düzgün altıgen teşkil eder. Altı yay ise bu altıgenin alanının yarısını çevreleyen bir kapalı eğri teşkil eder ki, bu eğri kendisinin üç simetri ekseninin O kesişme noktasını da çevreler. Alanortayın uzunluğu minimum olduğu takdirde kapalı eğri, (bu Misâl 30 da olduğu gibi) bütün alanortayların veya (Misâl 29 da olduğu gibi) sadece doğru parçası şeklindeki alanortayların kabûl edildiğine göre, sırasıyla bir daire veya bir düzgün altıgen olmalıdır. Burada sırasıyla Misâl 8 deki Teorem II′, yahut paragraf 7 (1) deki teoremin eşleniğini kullanmamız gereklidir. Misâl 30 un çözümü, merkezi üçgenin köşelerinden birinde olan bir dairenin altıda biridir; Misâl 29 un çözümü kenarlardan birine paralel bir doğrudur. Her iki halde de üç tane çözüm vardır. Verilen alanortay başka bir durumda alabilir, meselâ her iki ucu aynı kenar veya aynı köşe üzerinde, v. s. olabilirdi. Fakat bu hallerin incelenmesi yukarda elde ettiğimiz neticeyi sadece kuvvetlendirir.

31. [Putnam 1949]. Dairenin merkezine O diyelim. Eğer PP' doğru parçası O noktasında iki eşit kısma ayrılıyorsa P, P' ye *birbirinin karşısındadır* denir. Eğer iki eğriden biri, ötekinin noktalarının karşısındaki noktalar tarafından meydana getirilmişse, bu eğrilere *birbirinin karşısındadır* denir. Şimdi A ve B, adına kısaca AB diyeceğimiz alayortayın uç noktaları olsun. A', B' noktaları ve $A'B'$ yayı sırasıyla A, B ve AB nin karşısında olsunlar. Bu takdirde $A'B'$ de bir alanortaydır. P, AB ile $A'B'$ nün bir ortak noktası (Misâl 27) ve P' de P nin karşısındaki nokta olsun. Bu takdirde P' de AB ile $A'B'$ nin bir ortak noktasıdır. A, P, P' ve B noktaları AB üzerinde bu yazdığımız sırada birbirini izlesin ve PB', PA ve PB' yaylarının içinde kısa

olanı (yani uzunu değil) olsun. (Böyle bir seçim mümkün olup, aslında bir yazış tarzı meselesidir.) Şu iki parçadan ibaret olan eğriyi düşününüz: ($A''B'$ nün) $B'P$ yayı ile (AB nin) PB yayı. Bu eğri (1) AB den daha kısadır (daha uzun değil), (2) B den B' ye doğru yol olan BB' çapından daha uzundur (daha kısa değil). (1) ve (2) den AB nin BB' çapından daha uzun (daha kısa değil) olduğu neticesi çıkar, ki bu da sorulan teoremdir.

32. Elipsin küçük ekseni. Misâl 33 e bakınız.

33. *Herhangi bir bölgenin en kısa alanortayı ya bir doğru parçası veya bir daire yayıdır.* Misâl 16 ya bakınız. *Eğer bölgenin* (kare, daire, elipste olduğu, fakat eşkenar üçgende olmadığı gibi) *bir simetri merkezi varsa en kısa alanortay bir doğru parçasıdır.* İspat, daire için verilenin hemen hemen aynıdır (Misâl 31).

34. Pratik olarak Misâl 27 nin aynı.

35. Misâl 16.

36. Beş halin hepsinde de en kısa alanortayın düzlemi düzgün cismin dışına çizilmiş olan kürenin merkezinden geçer. Bu hallerin herbirindeki en kısa alanortaylar şunlardır:

Düzgün dörtyüzlü: İki karşılıklı kenara paralel uygun bir düzlem içindeki kare; 3 tane çözüm.

Küp: kenarların birine paralel kare; 3 tane çözüm.

Düzgün sekizyüzlü: Yüzlerden birine paralel uygun bir düzlem içindeki düzgün altıgen; 4 tane çözüm.

Düzgün onikiyüzlü: Yüzlerin birine paralel uygun bir düzlem içindeki düzgün ongen; 6 tane çözüm.

Düzgün yirmiyüzlü: Karşılıklı iki köşeyi birleştiren bir eksene dik uygun bir düzlem içindeki ongen; 6 tane çözüm.

Son dört halde ispat, genel bir ihtarla büyük ölçüde kolaylaşır (Misâl 38 e bakınız).

37. Kürenin merkezi O olsun. Birbirinin karşısındaki nokta ve eğrileri Misâl 31 deki gibi tarif ediniz. b bir alanortay olsun. Bu takdirde b nin karşısındaki b' eğrisi de bir alanortay olur ve b ve b' bir P ortak noktasını haiz olurlar (Misâl 34). P nin karşısındaki P' noktası da bir ortak nokta olur. P ve P' noktaları b yi öyle iki yaya ayırır ki, bunların hiçbiri P ile P' yü birleştiren en kısa yoldan — bir büyük dairenin yarısı — daha kısa olamaz.

38. Beş düzgün çokyüzlüden dördü (düzgün dörtyüzlüden başka hepsi) bir simetri merkezini haizdir. *Bir simetri merkezini haiz bir kapalı yüzeyin aynı zamanda jeodezik olan bir alanortayı vardır.* İspat, küre için yapılanın hemen hemen aynıdır (Misâl 37).

39. (*Elemente der Mathematik*, Bd. 4 (1949), S. 93 ve Bd 5 (1950), S. 65, problem 65 e bakınız.) Diyaframın kenarının tepesine olan uzaklığına d deyiniz. Bu takdirde diyaframın alanı πd^2 olur (Bu teorem Arşimet tarafından verilmiştir. Misâl 11.4 e bakınız).

(1) Eğer S nin merkezi diyaframın tepesi ise, $d=a$, $\pi d^2=\pi a^2$ dir.

(2) S küresinin C merkezini diyaframın bir parçasını teşkil ettiği diğer kürenin C' merkezine birleştiren doğruya l diyelim. l nin S yi C ye göre C' nün bulunduğu tarafta kestiği nokta A, l nin diyaframı ve diyaframın kenarından geçen düzlemi kestiği noktalar sırasıyla D ve B olsun. Eğer diyafram S hacmını iki eşit kısma bölerse, A, B, C ve D noktaları l üzerinde bu *yazdığımız sırada* birbirini izlerler. l nin diyaframın kenarına en yakın noktası B' dir ve D nin bu kenara olan uzaklığı C ninkinden daha büyüktür. Şu halde $d>a$, $\pi d^2>\pi a^2$.

(3) Faraziye: Yarıçapı a olan bir kürenin hacmını iki eşit kısma bölen hiçbir yüzeyin alanı πa^2 den küçük olamaz. Bunun ispatı güç olabilir.

41. $f=n^2$ maksimumuna

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=1 \text{ yahut } -1$$

için erişilir. $f=0$ minimumuna $n\geqq 3$ halinde birbirinden farklı sonsuz sayıda $x_1,\ldots,x_n$ sistemi için erişilir.

(2) Maksimum öncekinin aynı olup, tektir. $f=n$ minimumuna

$$x_1=n^{1/2},\quad x_2=\cdots=x_n=0$$

halinde ve buna benzer diğer $n-1$ halde erişilir.

42. Faraziye köşeleri üçkenarlı olan düzgün cisimler için doğrudur, fakat üçten fazla kenarlı köşeleri haiz olanlar için yanlıştır. M. Goldberg, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 40 (1935), S. 226—236 ya bakınız.

Cevaplandırılmayan No. lar: **40, 43.**

XI. BÖLÜMDEKİ SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. (*a*) evet (*b*) hayır: α lûzumsuzdur, alan $ah/2$ dir.

2. (*a*) evet (*b*) hayır: α ve β lûzumsuzdur, alan mh dır.

3. $2\pi rh$. *Bu alan d ye tâbi değildir.*

Çözüm Arşimet metodu veya İntegral Hesap vâsıtasıyla yapılır: $x^2+y^2=r^2$ den

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2,\quad \int_d^{d+h} 2\pi y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}dx=2\pi rh$$

çıkar.

4. h, alanı hesaplanacak olan kuşağın yüksekliği olsun. Benzer üçgenlerden $h:a=a:2b$ bulunarak, istenilen alan için

$2\pi bh = \pi a^2$ elde edilir ki, bu da b *den müstakildir*. Bu küre kuşağı $b = a/2$ için bir tam küre, $b = \infty$ için bir daire halini alır. Misâl 10.39 a bakınız.

5. Misâl 1-4 ün birbirleriyle benzerliğine dikkat ettiniz mi? Oyulmuş kürenin hacmı elemanter olarak veya

$$\int_{-h/2}^{h/2} \pi y^2\,dx - \pi y_1^2 h = \pi h^3/6$$

şeklinde Analitik Geometri ve İntegral Hesabı kullanmak suretiyle elde edilebilir. Burada $x^2+y^2=r^2$ olup, y_1, $x=h/2$ ye tekabül eden ordinatı göstermektedir.

6. $\pi h^3/12$. Bu netice a *ve* b *den müstakildir*. Çözüm Misâl 5 inkine benzer olup, Misâl 7 ninkiyle ilgilidir. $a=b=0$ aşırı halinde küre tabakası çapı h olan bir dolu küre olur. h nın küçük olması halinde Mh ile V nin arasındaki farkın çok küçük olduğu sezgi ile görülür.

7. $\pi c^2 h/6$. Bu netice r *den müstakildir*. $c=h$ halinde koni bir silindire dejenere olur ve paragraf 2 ve Misâl 5 teki hal elde edilir. Çözüm Misâl 8 inkine benzerdir.

8. O koordinatların başlangıç noktası ve OX te x ekseni olduğu takdirde, Şek. 11.3 teki daire ve parabolün denklemleri sırasıyla

$$(x-d)^2+y^2=r^2, \quad 2px=y^2$$

olur. x_1 ve x_2, $x_1<x_2$ olmak üzere, bu iki eğrinin kesişme noktalarının absislerini gösterdiği takdirde $x_2-x_1=h$ olup, istenen hacım

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}[r^2-(x-d)^2-2px]\,dx=\pi\int_{x_1}^{x_2}(x_2-x)(x-x_1)\,dx=\pi h^3/6$$

olur ki, bu netice r *ve* d *den müstakildir;* integralde $x - x_1 = t$ vaz'ediniz. Burada iki kökü ve x^2 nin katsayısı bilinen bir ikinci derece polinomunun çarpanlara ayrılışını kullandık.

9. (*a*) evet; hacım $\pi h^2 (a + 2b)/3$ tür.
(*b*) hayır.

10. Evet. u_1 ve u_2 keyfî olarak verilebileceğinden

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

rekürrans münasebetini gerçekleyen sonsuz sayıda $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ sistemi mevcuttur. Biz şu iki özel sistemi inceleyeceğiz:

$u_1' = 0$, $u_2' = 1$ olmak üzere $u_1', u_2', u_3', \dots, u_{10}'$ ve

$u_1'' = 1$, $u_2'' = 1$ olmak üzere $u_1'', u_2'', u_3'', \dots, u_{10}''$

sistemleri. Bu sistemler için

$$u_7' = 8, \quad u_1' + u_2' + \cdots + u_{10}' = 88,$$

$$u_7'' = 13, \quad u_1'' + u_2'' + \cdots + u_{10}'' = 143$$

buluruz.

Talihin biraz yardımıyla

(*) $u_1' + u_2' + \cdots + u_{10}' = 11\,u_7'$, $u_1'' + u_2'' + \cdots + u_{10}'' = 11\,u_7''$

olduğunun farkına varabilir ve sonra

(**) $$u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 11\,u_7$$

olduğu faraziyesini ileri sürebilir ve nihayet bu faraziyeyi ispat edebiliriz. Bu ispat şöyledir:

(***) $$u_n = (u_2 - u_1)\,u_n' + u_1\,u_n''$$

münasebetinin $n = 1$ ve $n = 2$ için doğru olduğunu doğrudan

doğruya gerçekler ve aynı münasebetin $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$ için de doğru olduğunu rekürrans münasebetini kullanarak çıkarabiliriz. Farkına varmış olduğumuz (*) münasebetlerinin ilkini $u_2 - u_1$ ile, ikincisini de u_1 ile çarptıktan sonra toplarsak, (***) ı kullanarak istenilen (**) ı elde ederiz. İspatın esas fikri: (daha uygun olarak ikinci mertebeden lineer homogen bir fark denklemi denilen) rekürrans münasebetimizin u_n genel çözümü (ikinci mertebeden bir lineer homogen diferansiyel denkleminin genel integralinin iki özel integralin bir lineer kombinezonu olduğu gibi) iki müstakil u_n' ve u_n'' özel çözümünün bir lineer kombinezonudur.

11.
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{x^{-\alpha}+1}\,\frac{1}{x^{-1}+x}\,\frac{dx}{x}$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^\alpha}{1+x^\alpha}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Bu netice α *dan müstakildir*. İkinci şekilden üçüncüye geçerken x^{-1} i yeni integrasyon değişkeni olarak ithâl ettik. $\alpha = 0, \infty, -\infty$ için verilen integral sırasıyla

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1+x^2},\quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

şekline iner. Bu haller yukarıki çözümü aklımıza getirebilirdi.

12. Bu türlü en aşikâr vâkıa

$$f(-u) = -f(u) \quad \text{ise} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 0$$

olmasıdır. Burada

$$u = \log x,\quad f(\log x) = F(x)$$

vaz'ediniz:

$$F(x^{-1}) = -F(x) \quad \text{ise} \quad \int_0^\infty F(x)\, x^{-1}\, dx = 0$$

olduğu elde edilir. Bu, aşağıki genelleştirmeyi akla getirir: Eğer $g(x^{-1}) = g(x)$, $h(x^{-1}) = -h(x)$ ise

$$\int_0^\infty g(x)\,[\,1 + h(x)\,]\, x^{-1}\, dx = \int_0^\infty g(x)\, x^{-1}\, dx \quad \text{tir.}$$

Misâl 11 bunun

$$g(x) = \frac{x}{2(1+x^2)}, \quad h(x) = \frac{1-x^a}{1+x^a}$$

için bir özel halidir.

13. $0x = 0$, yahut $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, v. s.

14. $x = y = 8$; $x = 8, 9, 10, 11$ değerlerini denemek yeter.

15. Deneme ile $x = y = z = w = 4$ bulunur.

17. [Stanford 1948 e bakınız]. Bir düzgün cismin simetri düzlemleri o cismin merkezinden geçer ve aynı merkezi haiz bir küreyi bir takım küresel üçgenlere ayırır. Böyle bir küresel üçgenin üç köşesinden geçen üç yarıçap, çokyüzlünün sırasıyla bir köşesinden, bir yüzünün merkezinden ve bir kenarının ortasından geçer. Küresel üçgenin bu çaplara tekabül eden açıları π/v, π/f ve $\pi/2$ dir. Küresel üçgenin $\frac{\pi}{2}$ açısının karşısındaki kenarına (hipotenüsüne) c diyelim. Çokyüzlünün içine çizilen kürenin çapının dışına çizilen kürenin çapına olan oranı $\cos c$ olup, küresel trigonometri yardımıyla

$$\cos c = \cot(\pi/f)\cot(\pi/v)$$

bulunur. f ve v sayıları ile onlardan elde edilen $\cos c$ nin değerleri aşağıki cedvelde düzgün dörtyüzlü, altıyüzlü (küp), sekizyüzlü, oniki yüzlü ve yirmiyüzlü için gösterilmektedir:

	Dörtyüzlü	Altıyüzlü	Sekizyüzlü	Onikiyüzlü	Yirmiyüzlü
$f=$	3	4	3	5	3
$v=$	3	3	4	3	5
$\cos c=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$	

H. Weyl, *Symmetry*, Princeton 1952 adlı kitapta Kepler'in orijinal şekli (S. 76, Şek. 46 da) tekrar verilmiştir.

18. Misâl 10.42 ye bakınız.

21. (*a*) $a_{j,k}$ elemanları $j, k=1, 2, 3, \ldots, n$ için

$$a_{j,k}=a_{n+1-j,\,n+1-k}$$

şartını gerçekleyen n. mertebeden bir determinanta merkezî simetriktir denir. *n mertebeden bir merkezî simetrik determinant iki determinantın çarpımına eşittir. n çift veya tek olduğuna göre, bu iki çarpanın her ikisi de $n/2$. mertebeden veya bunlardan biri $(n+1)/2.$, diğeri $(n-1)/2.$ mertebedendir. Misâller:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a+b)\,(a-b), \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & c & d \\ c & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+c & b \\ 2d & c \end{vmatrix}(a-c),$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ h & g & f & e \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+d & b+c \\ e+h & f+g \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f-g & e-h \\ b-c & a-d \end{vmatrix}.$$

İspat: n çift veya tek olduğuna göre $n = 2m$ veya $n = 2m + 1$ vaz'ediniz. Determinantın son sütununu birinciye, sonra sondan bir evvelkini ikinciye, ilâh... ilâve ediniz, tâ ki ilk m tane sütun değişmiş olsun. Bundan sonra birinci satırı sonuncudan, ikinci satırı sondan bir evvelkinden, ilâh... çıkarınız, tâ ki son m tane satır değişmiş olsun. Bu işlemler sonunda determinantın alt sol köşesinde elemanları tamamen 0 lardan ibaret bir $m \times (m+1)$ dikdörtgeni veya bir $m \times m$ karesi meydana gelir.

(*b*) Dördüncü mertebeden determinant ikinci mertebeden her iki determinantla, bunların çarpımıyla *bölünmeden* de, bölünebilirdi. Bu son hal bu iki ikinci mertebe determinantının bir ortak çarpanı haiz olması halinde vukubulurdu. Biz burada iyimserlik göstererek, böyle bir ortak çarpanın mevcut olmadığını kabûl ettik, yani en basit faraziyeyi denedik ve başarıya ulaştık.

22. En eyimser imkân: h nın herhangi bir kuvvetinin sol taraftaki katsayısı, h nın aynı kuvvetinin sağ taraftaki katsayısından küçük veya ona eşittir. Bu faraziye hakikaten doğrudur: $4h^{1/4}$ ile böldükten sonra her iki taraftaki sabit terim 1 e eşit olur, ve $n \geq 1$ için h^n nin iki taraftaki katsayıları sırasıyla

$$\frac{3}{4}\,\frac{7}{8}\,\frac{11}{12}\cdots\frac{4n-1}{4n}\,\frac{1}{4n+1} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{4}\,\frac{5}{8}\,\frac{9}{4}\cdots\frac{4n-3}{4n}$$

olur. Aşikâr olarak

$$3.7.11\cdots(4n-1) < 5.9\cdots(4n-3)\,(4n+1)$$

dir.

23. (*a*) Verilen karenin n^2 tane küçük kareye bölünüşü ile ve sorudaki metodla elde edilen yaklaşık değere P_n diyelim. P_n nin n^{-1} in kuvvetlerine göre bir seriye açılabileceğini kabûl ediniz:

$$P_n = Q_0 + Q_1\, n^{-1} + Q_2\, n^{-2} + \cdots$$

(«Genel olarak, bir fonksiyon bir kuvvet serisine açılabilir.» Misâl 20 ye bakınız.) $n \to \infty$ için $P_n \to Q_0$ olduğundan $Q_0 = Q$ neticesini çıkarırız. Diğer taraftan Şek.11.6 daki dört nokta bir doğruya, Şek. 11.5 tekilerden daha yakındır. Bu durum $Q_1 = 0$ olduğunu ve n^{-3}, n^{-4}, ... ihtiva eden terimlerin hattâ küçük n ler için ihmâl edilebileceğini bize *telkin* eder. Bu da bizi şu formüle götürür:

$$P_n \sim Q + Q\, n^{-2}.$$

Eğer n^{-2} yi absis ve P_n de ordinat olarak alırsak, bu (yaklaşık olarak) bir doğru gösterir. Buna az çok benzer bazı hallerde yaklaşımın hatâsının $1/n^2$ büyüklük mertebesinden olduğu ispat edilmiş olduğundan, bu benzerliğin ışığı altında tahminimiz daha az cür'etli görünür.

(*b*) Aşağıki cedvelin sütunları şunları ihtiva etmektedir: (1) n nin değerleri, (2) ordinatlar, (3) ordinatların farkları, (4) absisler, (5) absislerin farkları, (6) ((3) ün (5) e oranı olarak hesaplanmış) eğimler. Ancak (5) ve (6) da — işareti konulmamıştır.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2	0,0937		0,2500		
		0,0248		0,1389	0,1785
3	0,1185		0,1111		
		0,0094		0,0486	0,1934
4	0,1279		0,0625		
		0,0045		0,0225	0,2000
5	0,1324		0,0400		

(*c*) $n = 5$ için yapılan hesaba en güvenilir ve $n = 4$ için yapılana da ondan sonra en güvenilir hesap gözüyle bakmak

tabiîdir. Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları denklemi $y=mx+b$ olan doğru üzerinde bulunuyorlarsa, (m ve b ye göre iki denklemli bir sistemden) kolayca

$$b=\frac{y_1/x_1-y_2/x_2}{1/x_1-1/x_2}$$

buluruz ki, bu da içinde bulunduğumuz halde

$$Q\sim\frac{25\times 0{,}1324-16\times 0{,}1279}{25-16}=0{,}1404$$

verir. Eğer bundan daha iyi bir şey beklemişseniz, çok nikbinsiniz.

Cevaplandırılmayan No. lar: **16, 19, 20.**

BİBLİOGRAFYA

I. KLÂSİKLER

EUCLID, *Elements* (ÖKLİD'in *Elemanları*). Everyman's Library serisindeki kısaltılmış (İngilizce) ucuz baskı burada kâfidir. Kitabımızda «Öklid III 7» gibi bir atıf, Elemanlar'ın III. Kitabının 7. Teoremine delâlet etmektedir.

DESCARTES, *Oeuvres*, Charles Adam ve Paul Tannery tarafından yapılan baskı. Burada «Regulae ad Directionem Ingenii», vol. 10, S. 359-469, adlı eser bilhassa ilgi çekicidir.

EULER, *Opera Omnia*, «Societas scientiarum naturalium Helvetica» tarafından basılmıştır.

LAPLACE, *Oeuvres complètes*. Cilt 7, S. V-CLIII teki «Essai philosophique sur les probabilités» adı altında ayrı olarak ta basılmış olan (ve bu şekliyle daha çok tanınan) «Başlangıç» bilhassa ilgi çekicidir.

II. BENZER TEMAYÜLDE BAZI KİTAPLAR

R. COURANT AND H. ROBBINS, *What is mathematics?*

H. RADEMACHER und O. TOEPLITZ *Von Zahlen und Figuren*. (1)

O. TOEPLITZ. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*: bilhassa ilgi çekicidir.

---

(1) *Sayılar ve Şekiller* adı altında Türkçeye çevrilmiştir (Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı : 25, İstanbul 1964). [Çevirenin Notu]

III. YAZARIN BU KİTAPLA İLGİLİ ÖNCEKİ YAYINLARI

Kitaplar

1. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2 cilt, Berlin 1925 (G. Szegö ile birlikte yazılmıştır). New York 1945 te yeniden basılmıştır.

2. *How to Solve It*, Princeton, 1945. 1948 tarihli 5. baskısı biraz arttırılmıştır.

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fehlerausgleichung, Statistik. *Abderhalden's Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden*, Abt. V, Teil 2, S. 669-758.

Makaleler

1. Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift*, 1919, 11 Sahife.

2. Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, V. 63, 1932, S. 159-169.

3. Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? *Acta Psychologica*, V. 4, 1938, S. 113-170.

4. Heuristic reasoning and the theory of probability. *American Mathematical Monthly*, V. 48, 1941, S. 450-465.

5. On Patterns of Plausible Inference. *Courant Anniversary Volume*, 1948, S. 277-288.

6. Generalization, Specialization, Analogy. *American Mathematical Monthly*, V. 55, 1948, S. 241-243.

7. Preliminary remarks on a logic of plausible inference. *Dialectia*, V. 3, 1949, S. 28-35.

8. With, or without, motivation? *American Mathematical Monthly*, V. 56, 1949, S. 684-691.

9. Let us teach guessing. *Etudes de Philosophie des Sciences, en hommage à Ferdinand Gonseth*, 1950, S. 147-154. Editions du Griffon, Neûchatel, İsviçre.

10. On plausible reasoning. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1950, V. 1, S. 739-747.

IV. PROBLEMLER

Kitapta çözülmek üzere sorulan misâller arasında *William Lowell Putnam Matematik Yarışması* ile *Stanford Üniversitesi Matematik Yarışma İmtihanlarında* sorulan problemlerden alınanlar da vardır. Bu duruma, verilen çözümün başına problemin soruluş senesini de belirtmek üzere «Putnam 1948» veya «Stanford 1946» kaydını koymak suretiyle işaret edilmiştir. Putnam Yarışmasında sorulan problemler her sene *American Mathematical Monthly*'de yayınlanmakta olduğu gibi, ekseri Stanford imtihanları da orada yayınlanmıştır.

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatâlar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
16 — Rasyonel ve İrrasyonel sayılar (600 Krş.)
17 — Çeşitli Geometriler (750 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş)
21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
22 — Algoritmalar ve otomatik hesap makinaları (400 Krş.)
23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
24 — Matematiksel sonsuz (100 Krş.)
25 — Sayılar ve şekiller (850 Krş.)
26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen şekiller (300 Krş.)
27 — Oyunlar teorisine giriş (300 Krş.)
28 — İhtimaliyet ve İnformasyon (750 Krş.)
29 — Matematikte Endüksiyon ve benzetme (Cilt I) (750 Krş.)
30 — Matematikte Endüksiyon ve benzetme (Cilt II) (750 Krş.)

Türk Matematik Derneğinin adresi:
Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü
Vezneciler—İstanbul

Fiatı 750 Krş.