

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 2

E. B. DYNKİN

W. A. USPENSKİ

Ç O K R E N K P R O B L E M L E R İ

(Matematik Sohbetleri I)

Çevirenler :

A. R. ÖZBEK

M. A. ÖZKAN

İSTANBUL — 1962

Bu Yayınlar Hakkında

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik, askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hatta sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için hertürlü fedakârlığa katlanmak enönemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır : a) Problem vaz'ı sun'î olmamalı, b) Bunları anlatmak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 2

E. B. DYNKİN

W. A. USPENSKİ

ÇOKRENK PROBLEMLERİ

(Matematik Sohbetleri I)

Çevirenler :

A. R. ÖZBEK

M. A. ÖZKAN

İSTANBUL — 1962

ŞİRKETİ MORETTİBİYE BASİMEVİ
İSTANBUL — 1962

Bu Yayınlar Hakkında

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik , askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hatta sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için hertürlü fedakârlığa katlanmak enönemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranan özellikler kısaca şunlar olmalıdır : a) Problem vaz'ı sun'î olmamalı, b) Bunları anlatmak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

KİTABIN KULLANILŞI İHAKKINDA AÇIKLAMALAR

Matematiksel Sohbetler I, II, III adı altında yayınlanan: *Çokrenk problemi* (I), *Sayılar teorisine dair problemler* (II), *İhtimaller hesabına dair problemler* (*Tesadüfi hareketler*) (III) kitaplarının her üçü de, birbirinden bağımsız oldukları için okuyucu bunları istediği sıra üzere okuyabilir. Maamafih bu arada I. kitabı teşkil eden *çokrenk probleminin* bunlardan en kolayı, III. kitabı teşkil eden *tesadüfi hareketlerin* ise en zoru olduğuna dikkat edilmelidir. Birinci kitabın sonuna konan EK mahiyet itibarıyla bu kitabın konusuna bağlanabilecek bir problemin çözümünü ihtiva etmekle beraber anlaşılabilmesi bakımından, regüler boyama tarifinden başka hiçbir şeye ihtiyaç göstermediği için, bu kitaptan bağımsız olarak da okunabilir.

Her kitap bir konuya tahsis edilmiştir; bir kitaptaki muhtelif bölümler aralarında sıkı münasebetlerle birbirine bağlıdırlar. Bu yüzden her kitap arada bir boşluk bırakmaksızın başından sonuna kadar okunmalıdır. Sadece ikinci kitabın birer yıldız ile işaretlenen ikinci ve dördüncü bölümleri bir istisna teşkil ederler. Bunlar kitabın ana hattından biraz ayrılmakta olup ilk okunuştta, daha sonrakilerin anlaşılabilmesi bakımından hiçbir mahzur olmaksızın, terkedilebilirler (2. bölüm esas itibarıyla 1. bölümün, 4. bölüm ise 3. bölümün bir tamamlayıcısıdır).

Bu kitaplar okuyucunun çalışmasını aktif hale getirmek için düşünülmüştür. Bu sebeple her kitap kendisinin aslı ve organik parçaları olarak bir seri problemi ihtiva etmektedir. Problemlerden çoğu gruplar halinde bir araya toplanmış, ve bu şekildeki gruplardan herbiri kendi içinde kapanmıştır. Biri diğeri üzerine kurulmuş olan bu mün-

ferit problemler çoğu zaman okuyucuyu en sonunda, her bir gruptaki sonuncu problemin ihtiva ettiği kesin bir neticeye götürürler (meselâ I. kitabın 21-27, 38-41, II. kitabın 28-32, 71-75 ci problemleri ilh. gibi).

Bazan böyle bir gruptaki çözümler belli bir sonuca doğru yönelmeyip yeni bir metod getirirler. (Meselâ I. kitabın 11-14 cü problemleri gibi). Nihayet bazı problemlerde sadece alıştırma mahiyetinde olup, bunlar yardımı ile okuyucu yeni kavramlara aşinalık kazanabilir (meselâ II kitabın 1-8 veya III. kitabın 1-3 cü problemleri gibi v.s.).

Ele alınan bir grubun problemlerini teker teker çözmeden önce, bu gruba ait bütün problemlerin ifadelerini gözönüne almak tavsiyeye değer. Okuyucuya, ancak bir gruba dahil bütün problemleri çözdükten sonra, kitabın sonunda verilmiş bulunan çözümlere bakmasını tavsiye ederiz. Orada verilen bu çözümlerin hepsi belirli yollardan elde edilmişlerdir ; halbuki okuyucu kendi kendine düşünmek suretile kendine has ispat metodları bulabilir. Netekim pratikte bazan, yazarın düşünmüş olduğundan daha basit ve daha güzel çözümler bulunabildiği görülmüştür. Münferit problem grupları güçlük derecesi bakımından, birbirinden büyük ölçüde farkedirler. Bununla beraber edinilen tecrübeler göre, ortalama olarak bir haftalık bir zamana, bir ilâ iki problem grubu için yeter çalışma süresi gözüyle bakılabilir. Belki okuyucu bir grup içindeki bütün problemleri kendi kendine çözmeyi, bütün hallerde, başaramıyabilir. Şayet okuyucu bir problemi çözdükten sonra ikincisinde yenemeyeceği bir güçlükle karşılaşacak olursa, bu takdirde kendisine daha önce çözmüş olduğu ilk problemi yeniden gözden geçirmesini tavsiye ederiz.

Bu sayede, bütün iyi niyete rağmen evvelce başarılmıyan çözümün bazan bulunuvermesi mümkün olur. Şayet güçlükler aşılamıyacak şekilde gözükürlerse, o zaman evvelâ bu zor problemin (kitabın sonunda) verilen çözü-

müne bakmalı ve ancak ondan sonra müteakip problemin çözümüne geçmelidir.

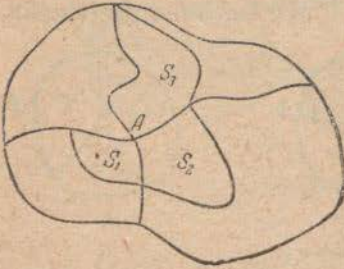
İçindeki problemlerin esaslı bir rol oynamalarına rağmen, bu kitaplar hiç de birer problem derleme kitapları değildirler. Problemler kadar kitapta verilen teorik bilgiler de önemlidir. Problemlerle bu teorik kısımlar arasındaki bağıntılar herbir bölüm için farklıdır. Bazan esaslı kısım problemlerin hipotezlerinde bulunmakta, metin kısmının rolü ise yeni kavramlar ithaline ve neticeler çıkarmaya münhasır kalmaktadır (meselâ I. kitabın ilk paragrafında, II. kitabın 5. bölümü v.s. de olduğu gibi). Diğer hallerde (meselâ II. kitabın 2. bölümünde ve III. kitabın tamamında olduğu gibi) öz, teorik kısımlarda bulunmakta, problemler ise ikinci derecede rol oynamaktadırlar. Bütün hallerde metin ve problemler sıkı münasebetlerle birbirine bağlı olup, bunlar herbir kitaptaki konuş sırasına göre okunmalıdır.

Bu kitapların önemli bir kısmını da problemlerin çözümleri teşkil etmekte olup, bu çözümlere ekseriya esas bakımından karakteristik netice ve ihtarlar eklenmiş bulunmaktadır. Bu yüzden problemler bizzat okuyucu tarafından çözülebilsen bile, yine de verilen çözümleri okumalıdır.

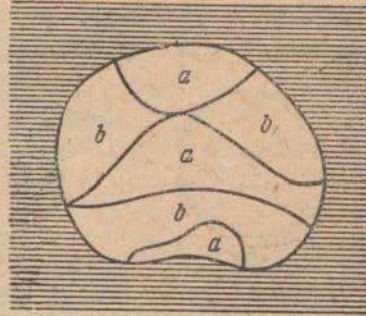
Nihayet okuyucuya, problemlerin çözümü için zamanını harcamaktan çekinmemesini tavsiye ederiz. Kendi başına çözdüğü her problem grubu, hatta her problem, okuyucunun faydalanması için hazır bulunan bilgiler dağarcığını zenginleştirir. Kendi emeği ile kazanılan bir fikir, başkası tarafından öğretilen on fikre bedeldir. Hattâ problemin çözümü için yapılan çaba başarısızlığa uğrasa bile, harcanan zaman yine de boşa gitmiş sayılmaz; problem iyice işlenmiş olunca verilen çözüm bambaşka gözle okunur, başarısızlığın sebepleri araştırılır ve yardımcı görüşler arasından başarıya götüren esaslı fikirlerin bu ' lunmasına alışılır.

GİRİŞ

Bir haritada, elverişlilik bakımından farklı memleketler farklı renklerle boyanır. Bu esnada umumiyetle her memleketi özel bir renkle boyamak gerekmez. Komşu memleketlerin, yani şek. 1 deki ¹⁾ meselâ S_1 ve S_2 memleketleri gibi ortak bir sınır çizgisini haiz olanların, farklı renklerle boyanmaları kâfi gelir. Böyle bir boyamaya *regüler* boyama diyeceğiz. Verilen bir haritayı regüler boyayabilmek için kaç renge ihtiyaç olduğu sorusu kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. Memleket sayısı kadar



Şek. 1



Şek. 2

renkle işin içinden çıkılacağı açık ise de biz bu netice ile yetinmek istemiyoruz. Bizi ilgilendiren, verilen bir haritayı regüler boyamaya yetecek en az boya sayısıdır. İki renkle maksadın sağlandığı bir harita teşkil etmek kolaydır (şek. 2).

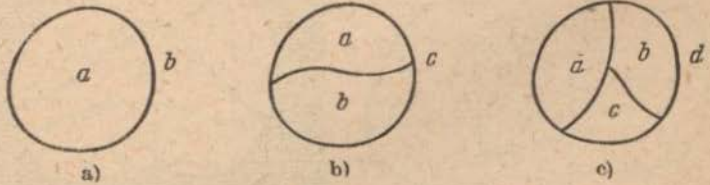
Şek. 2 deki harita bir adanın haritasıdır. Bu ada tarama ile gösterdiğimiz denizde bulunmaktadır. Denizi ne a

¹⁾ A noktasında birbirine değmelerine rağmen S_1 ve S_3 memleketleri (ortak sınır çizgileri olmadığından) komşu sayılmıyacaklardır.

ne de b rengi ile boyamadık. Fakat bir haritada umumiyetle denizin de aynı şekilde boyanmakta olması, sahilde bulunan, yani bir sınırı deniz kıyısı ile çakışan memleketlerin farklı olarak boyanmasını gerektirir. Bu yüzden deniz bizim için herhangi bir memlekettten farksızdır. Deniz sınırının bir kısmının harita içine düşmemesi, yani haritamızda denizin sanki sınırsız olması, bizce önemli değildir. Bu yüzden aşağıda denizi ayrı düşünmeyip onu memleketlerin sayısı içine alacağız.

O halde gözönüne alacağımız haritalar ada haritaları olmayacak, bunların bütün düzlemi kapladığı kabul edilecektir. Bu görüş noktasına göre şek. 2 deki harita artık iki renkle regüler boyanamaz.

Şimdi bir haritanın regüler boyanması için gerekli renklerin en az sayısı sorusuna dönelim. Şek. 3 de, bu sayının 2 veya 3 yahut da 4 olduğu haritalar çizilmiştir.



Şek. 3

Bunun dışında daha başka misâller veremiyoruz. Daha bu güne kadar, renklerin en az sayısının beş veya daha fazla olduğu, yani dört renkle regüler boyanamıyan, hiçbir harita çizilememiştir. Her haritanın dört renkle regüler boyanabileceği tahmini mevcuttur. (Bu da meşhur «dörtrenk problemi» nden ibarettir). Bu ise bu güne kadar hiç kimse tarafından isbatlanmamıştır; diğer taraftan her haritanın beş renkle regüler boyanabileceği gösterilmiştir. (İsbatı § 4 de vereceğiz.) O halde, aralarındaki can sıkıcı boşluğu dolduramadan sadece şu iki önermede bulunabiliriz:

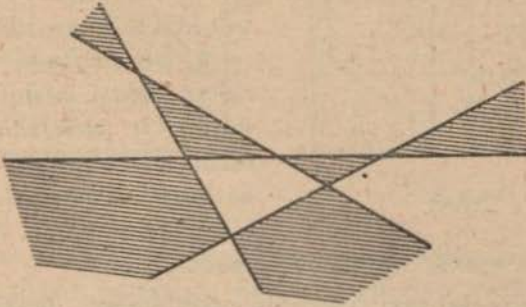
Her harita üç renkle regüler boyanamaz (şek. 3c).

Her harita beş renkle regüler boyanabilir.

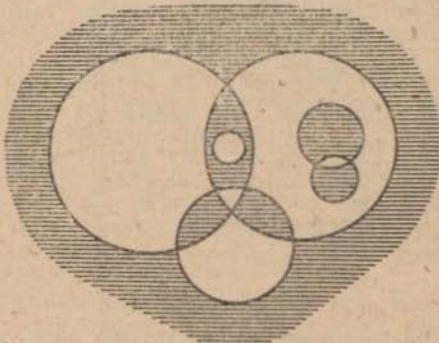
Aşağıdaki paragraflarda, hangi haritalar için iki rengin (§ 1) ve hangi haritalar için üç rengin (§ 2) yeteceği sorusu ile meşgul olacağız. § 3 de ne zaman dört rengin kâfi geleceğine dair birkaç kriter vermeğe çalışacağız ; § 4 de beş renge dair teoremi isbatlıyoruz.

§ 1. İki renge dair problemler

1. Düzlemde n tane doğru çizilmiş olsun. Böylece meydana gelen haritanın iki renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz (şek. 4).



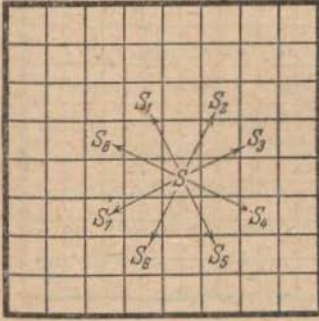
Şek. 4



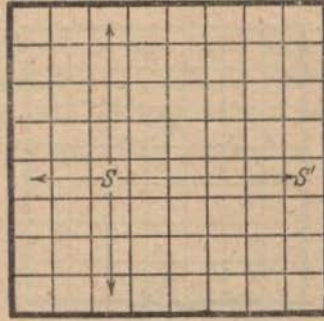
Şek 5

2. Düzlemde bulunan n çemberin teşkil ettiği haritanın iki renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz (şek. 5).

mütekabil düşey veya yatayın her hanesine gidebilir (sürülebilir) (şek. 9). Problemlerin çözümünde, S hanesinden S' hanesine giden kalenin (şek. 9) aradaki bütün hanelere uğradığı kabulünü kararlaştıralım.



Şek. 8



Şek. 9

5. Bir at, hiç bir haneye iki defa uğratılmadan, 5×5 lik bir satranç tahtasının bütün hanelerine sürülebilir.

6. 25 kareden ibaret bir satranç tahtasının bütün hanelerini, bir evvelki problemde atın hanelere sürülmüş olduğu sıraya göre numaralayınız ve çift numaralı bütün haneleri tarayınız. Sözü geçen işlemin mümkün olduğu herhangi sayıda kareli bir satranç tahtası üzerinde aynı konstrüksiyon yapıldığı takdirde nasıl bir boyamanın meydana geldiğini söyleyiniz.

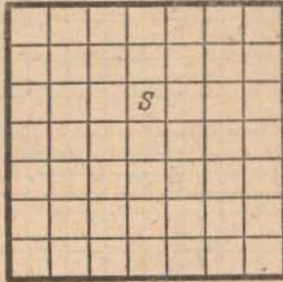
7. Bir atın 49 haneli bir satranç tahtasının bütün hanelerine, her haneye yalnız bir defa uğratılmak ve son hamle çıkış hanesinin bir komşusunda bitmek üzere, sürülebilir sürülemeyeceğini araştırınız.

8. S hanesinde bulunan bir atı (şek. 10), her haneye yalnız bir defa uğratılmak üzere 49 kareli bir satranç tahtasının bütün hanelerine sürmenin imkânsız olduğunu gösteriniz.

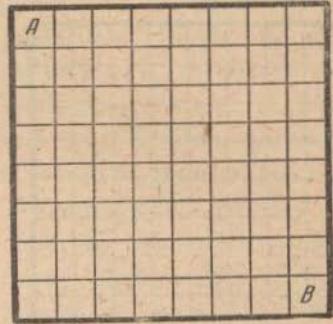
9. Bit at n hamleden sonra çıkış hanesine dönüyorsa, n nin çift bir sayı olduğunu gösteriniz.

Çokrenk problemleri

10. 64 kareden ibaret bir satranç tahtasının A köşesinde bulunan bir kaleyi, bütün hanelere uğratılmak şartı ile karşı B köşesine sürmenin imkânsız olduğunu gösteriniz (şek. 11).



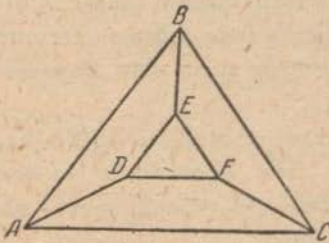
Şek. 10



Şek. 11

11. Domino oyununun 28 taşının hepsi o şekilde zincirlenebilir mi ki : zincirin bir ucunda 6, diğer ucunda 5 bulunsun.

12. Her insan ömrü boyunca belli bir sayıda el sıkışır. El sıkma sayıları bir tek sayı olan insanların sayısının çift olduğunu gösteriniz ¹⁾.



Şek. 12.

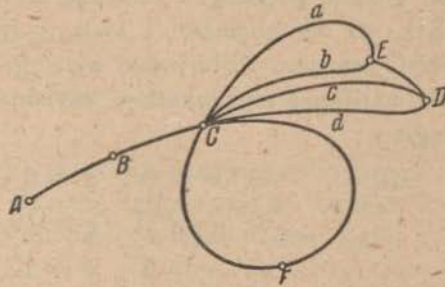
13. Bir toplantıda mevcut 225 şahsın her biri kendi tanıdıklarını el sıkışma ile selâmladığına göre, hazır bulunanlardan en az birinin çift sayıda tanıdığının elini sıkıldığını gösteriniz.

14. Şek. 12 de A, B, C, D, E, F gibi 6 nokta verilmiş ve bunlardan her biri geri kalan beş taneden üçü

¹⁾ Sıfır çift bir sayı olduğuna göre, kimsenin elini sıkmamış bir insan bir çift sayıda el sıkışmış sayılır.

ile birleştirilmiştir. Şunu gösteriniz : altı yerine sadece beş nokta verilseydi, bağlama çizgilerini (bunların muhakkak doğru olmasına da lüzum yoktur) beş noktanın her birini geri kalanların tam üçü ile birleştirecek şekilde çizmek imkânsızdır.

Bir düzlemde herhangi bir eğri ağı (eğri şebekesi) çizelim. Bu ağın belli bir noktasından ağa ait eğriler k farklı yönde geçiyorlarsa, bu noktanın *geçerlik* (= parite, Wertigkeit)-i k ya eşittir diyeceğiz. Şek. 13 deki ağ için meselâ A noktasının geçerliği 1'e eşittir. B ve F noktalarının geçerlikleri 2'ye, D ve E için 3'e ve C noktası için de 7'ye eşittir. Ağın, geçerlikleri 2'den farklı olan noktalarına *köşe noktası* diyeceğiz. Misâl olarak verdiğimiz ağın (A, C, D, E olmak üzere) topyekûn dört köşe noktası vardır. Ağın bir eğrisinin ardışık iki köşe noktası arasındaki parçasına *sınır* denir. Netice itibarile her sınır üzerinde iki köşe noktası bulunmaktadır. (Münferit hallerde bu iki köşe çıkabilir). Ağımızda (şek. 13) yedi sınır vardır : $ABC, ED, CaE, CbE, CcD, CdD$, ve CFC . Son halde CFC sınırını belirten her iki köşe noktası birbiri ile çakışmaktadır. Köşe noktaları sayısını daima v ile, sınırların sayısını da g ile göstereceğiz.



Şek. 13

Şek. 13

15. a) $v = 3, g = 5;$
b) $v = 7, g = 11$

olan bir eğri ağı inşa ediniz.

16. Bir eğri ağının tam g tane sınırı, geçerlikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_v$ olan v tane de köşe noktası bulunduğuna göre :

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_v = 2g$$

bağıntısını isbatlayınız.

17. Her eğri ağında, geçerliği tek olan köşe noktaları sayısının çift olduğunu gösteriniz.

Her eğri ağına bir harita denemez. Bir harita üzerinde, bir sınır muhakkak komşu iki memleketi ayırır. Bu yüzden geçerliği 1 olan hiç bir nokta mevcut olamaz. (Şek. 13 de geçerliği 1 olan A köşe noktasından çıkan ABC sınırının birbirinden ayırdığı iki memleket yoktur.) Bir haritanın memleketleri sayısını daima s ile göstereceğiz.

18. a) $v = 5$, $g = 8$, $s = 5$;
 b) $v = 11$, $g = 19$, $s = 10$;
 c) $v = 6$, $g = 12$, $s = 9$

olan bir harita inşa ediniz.

19. Bir harita g tane sınır ve mütekabilen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ sınırlı s tane de memleket ihtiva ettiğine göre :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s = 2g$$

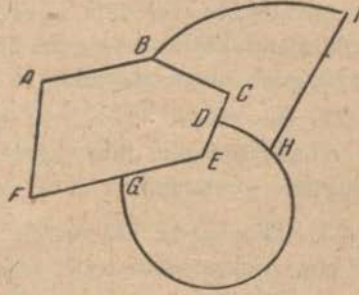
bağıntısını isbat ediniz.

20. Herhangi bir haritada, tek sayıda sınırı haiz memleketlerin sayısının çift olduğunu gösteriniz.

Bir eğri ağının köşe noktaları olarak geçerliği 2 den farklı olan noktaları göstermeğe karar vermiştik. Fakat arada sırada geçerliği 2 olan bir kaç noktayı da köşe noktası olarak göstermek elverişli olur. Sınır deyiminden, yine eskisi gibi, herhangi bir ağ eğrisinin ardışık iki köşe noktası arasındaki parçasını anlıyacağız. Şek. 14 deki harita, meselâ 9 tane A, B, C ,

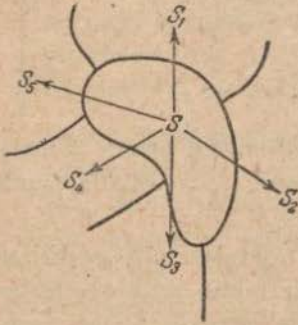
D, E, F, G, H, I köşe noktalarını, 11 tane de $AB, BC, CD, DE, EG, GF, FA, BI, IH, HD, HG$ sınırlarını haizdir.

Yukarıda geçen problemlerin iddia ve çözümlerinin, «köşe noktası» kavramının yeni tarifinde de baki kalacağını isbat etmek kolaydır.

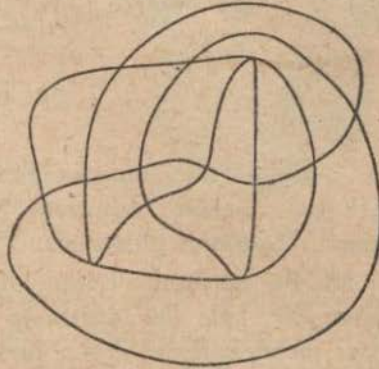


Şek. 14

Herhangi bir haritanın iki renkle regüler boyanmasına dair problemler. Satranç tahtasındaki benzer şekilde, bir kaleyi, herhangi bir haritaya ithal edelim. Kale,



Şek. 15



Şek. 16

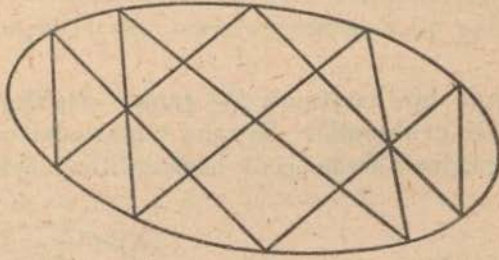
memleketleri, bir hamle ile her memleketden komşu her memlekete geçebilecek şekilde gezecektir (şek. 15 de S den $S_1, \dots, S_5$ e).

21. Bir kaleyi şek. 16 daki memleketlerin hepsine, bir memlekete iki defa uğratmadan sürünüz. Bu esnada bütün memleketleri, kalenin herbir memlekte sürüldüğü sıraya göre numaralayınız, ve çift numaralıları tarayınız.

22. Bir kaleyi şek. 17 deki bütün memleketlere, bir memlekete iki defa uğratmadan sürmenin imkânsız olduğunu gösteriniz.

23. Bir harita iki renkle regüler boyanmış ise, bütün köşe noktalarının çift geçerlikli olduğunu gösteriniz.

24. Bir haritanın bütün köşe noktaları çift geçerlikli olsun. Bir kale bu haritanın bir takım memleketlerine,



Şek. 17

hiç birine iki defa uğramadan sürülmüş ve çıktığı memlekete geri dönmüş bulunsun. Kalenin çift sayıda hamle yapmış olduğunu gösteriniz.

25. Bir haritanın bütün köşe noktaları çift geçerlikli olsun. Bir kale bu haritanın bir takım memleketlerine (bazı memleketlere birden fazla da uğramış olması muhtemel olmak üzere) sürülmüş ve çıkış memleketine dönmüş ise, kalenin çift sayıda hamle yaptığını gösteriniz.

26. Bir haritanın bütün köşe noktaları çift geçerlikli olsun. Kale, S_0 memleketinden belli bir yoldan S_1 memleketine p hamlede, başka bir yoldan q hamlede gelmiş

bulunsun. p ile q nun ya her ikisinin de çift veya her ikisinin de tek olduklarını gösteriniz.

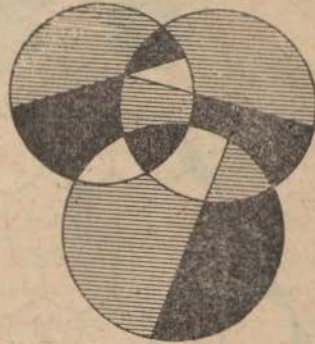
27. Bir haritanın bütün köşe noktaları çift geçerlikli olsun. Bu haritanın regüler boyanması için iki rengin yeteceğini gösteriniz. (Problem 23 ile kıst.¹⁾).

Problem 23 ve 27 iki renkle regüler boyama problemini tam olarak çözen şu teoremi verir :

Bir harita ancak ve ancak bütün köşe noktaları çift geçerlikli ise, iki renkle regüler boyanabilir.

§ 2. Üç renkle boyama

28. Bir düzlemdeki n çemberin her biri içinde öyle birer kiriş çiziliyor ki, farklı iki çemberdeki kirişlerin en çok bir ortak noktası bulunsun. Böylece elde edilen haritaların daima üç renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz (şek. 18 böyle bir haritaya bir misâldir).



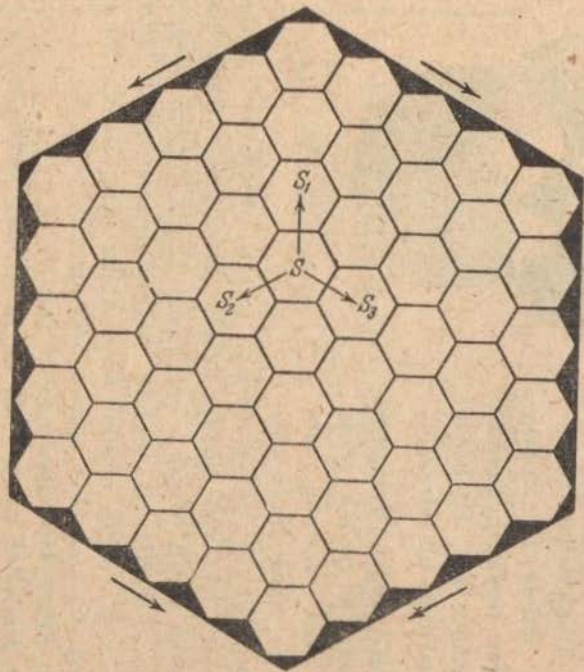
Şek. 18

Petek örneğine dair problemler. İki renk problemi için satranç tahtası ne manâ ifade edi-

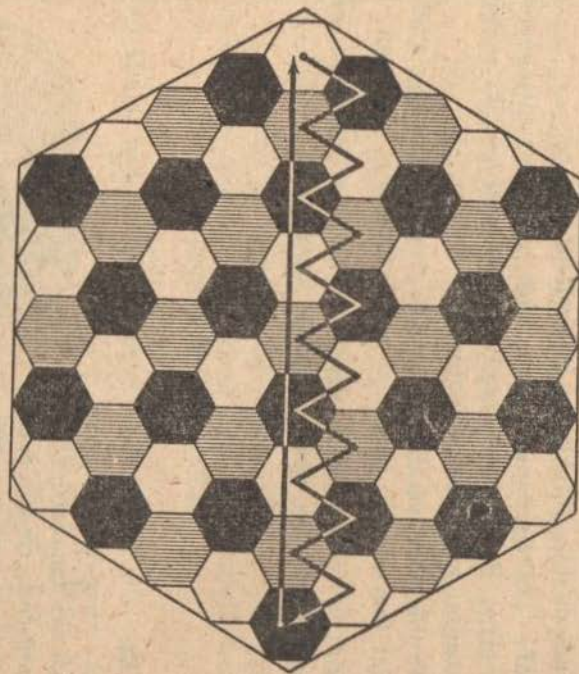
yorsa, şek. 19 da gösterilen petek örneği de üç renk problemi için aynı manâyı haizdir. Bu örnek, satranç tahtasından farklı olarak, karelerden değil düzgün altıgenlerden ibarettir ve meselâ beyaz, kırmızı, siyah olmak üzere üç renkle regüler boyanabilir (şek. 20)²⁾. Böyle

¹⁾ kıst. = karşılaştırmadır.

²⁾ Şek. 20 de kırmızı renk, tarama ile işaret edilmiştir.



Şek. 19



Şek. 20

bir tahta üzerinde satranç tahtasındakilere benziyecek olan oyun kaideleri icad olunabilirdi. Biz bu hususta *deve* adını vereceğimiz bir oyun taşı ithal etmekle yetiniyoruz. Deve, bir hamle ile bir haneden şek. 19 da okla işaretlenmiş yönlerdeki üç haneden birine geçebilir (sürülebilir): Yuriya, sol aşağıya, sağ aşağıya.

Meselâ deve S hanesinden S_1, S_2, S_3 hanelerinin birine geçebilir. Şek. 20 de bir devenin, tahtanın en alt köşesinden üsttekilere ve en üstten alttakilere gittiği yol çizilmiştir.

Petek örneğimizin bizzat kendisi bir altıgenin şeklini haizdir. Bu tahtanın bir kenar şeridi muhtelif sayıda altıgen hanelerden meydana gelebilir. (Şek. 19 da bir petek tahtasının kenarı beş altıgen haneden meydana gelmiştir).

29. Kenarları beşer, altışar ve m -er haneden ibaret olan bir altıgen tahtanın hane sayısını bulunuz.

30. Bir kenarı üç haneden meydana gelen öyle bir petek örneği çiziniz ki, şeklin merkez hanesinde bulunan bir deve, bir haneye iki defa uğramaksızın bütün hanelere sürülebilsin.

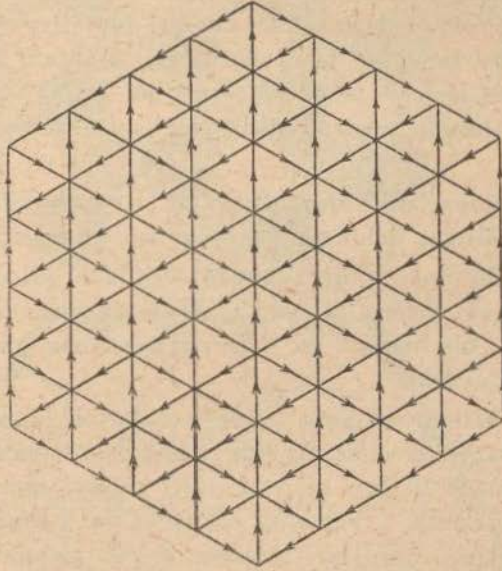
31. Altıgen tahtanın bütün hanelerini, problem 30 da devenin hanelere sürülmüş olduğu sıra üzere numaralayınız. Numaraları 3 ün katı olan haneleri siyaha, numaralarının 3 ile bölümünde 1 kalanını verenleri de kırmızıya boyayınız. Böylece nasıl bir boyama çeşidi meydana gelir? Bir deve ile yukarda bahsedildiği şekilde dolaşılabilen başka bir tahta üzerinde aynı şeyler yapılırsa hangi boyama elde edilir?

32. Bir deve n hamle yaptıktan sonra çıkış hanesine geri gelmiş olsun. n nin 3 ile bölünebildiğini gösteriniz.

33. Bir deveyi, bir köşe haneden çıkıldığı takdirde, bir kenarı üç haneli altıgen bir tahtanın bütün hanelerinin her birine bir defa sürmenin imkânsız olduğunu gösteriniz.

34 Bir deveyi, bir kenarı m haneli altıgen bir tahtanın bütün hanelerinin her birine bir defa sürmek ve son hamle ile çıkış hanesinin bir komşusuna ulaşmak mümkün müdür?

Altıgen tahtamızın her hanesinin merkez ∇ noktasını işaretliyelim ve her komşu hane çiftinin merkez noktalarını bir doğru parçası ile birleştirelim. Şimdi hanelerin çevreleri silinir ve yalnız işaretlediğimiz merkezler ile doğru parçaları bırakılırsa, böylece şek. 21 de çizilmiş



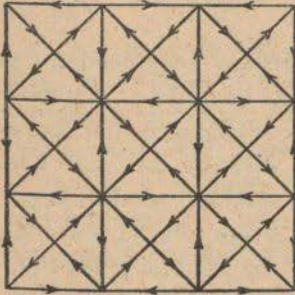
Şek. 21

olan şema elde edilir. Şek. 21 deki noktalar şek. 19 daki hanelere karşılıktır. Böylece çizdiğimiz şema, bir devenin yoluna dair olan problemlerin çözümleri için çok uygundur. (Devenin hareket edebileceği yönler oklarla işaretlenmişlerdir).

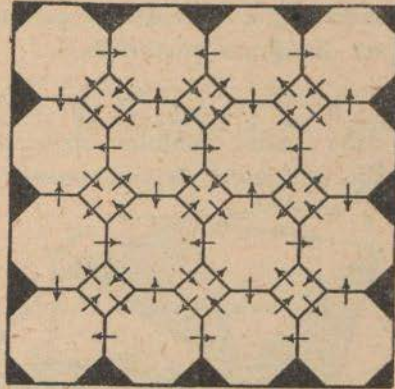
35. Bir deveyi, bir haneye iki defa uğratmaksızın, şek. 19 daki tahtanın bütün hanelerine (veya aynı şekilde

şek. 21 deki şemanın bütün noktalarına) sürmenin imkân-sız olduğunu gösteriniz.

Şek. 22 de, yönlü doğru parçaları ile belirtilmiş 25 noktalı bir sistem çizilmiştir. Şimdi bir noktadan komşu noktaya bir doğru parçası üzerinde ve işaretlenmiş yönde hareket eden bir oyun taşını deve olarak gösteriyoruz. Bir deve ister altıgen bir tahtanın haneleri üze-



Şek. 22



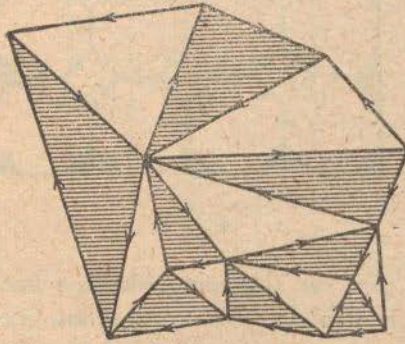
Şek. 23

rinde, ister şek. 21 deki gibi bir şemanın noktaları üzerinde dolaşsın, bunların birbirinden farksız olduğunu gördük. Bu manâda şek. 21 deki şema ile şek. 19 daki tahta birbirlerine düâldir. Şek. 23 de, şek. 22 deki şemaya düâl olan bir tahta gösterilmiştir. Bu tahta kare ve altıgen olmak üzere başka başka iki çeşit hanelerden meydana gelmektedir. Burada her bir kare ve her bir altıgenin merkez noktaları işaretlenip komşu hanelerin merkez noktaları birleştirilir ve bundan sonra hanelerin merkez çizgileri silinirse, şek. 22 de gösterilen şema elde edilir.

36. Bir deve şek. 22 deki şemanın bütün noktalarına, hiçbir nokta iki defa uğranılmamak şartı ile sürülüyor. Şemanın noktalarını, devenin herbir noktaya sürül-müş olduğu sıra üzere numaralıyarak her numara yerine kendisinin 3 ile bölümündeki kalanı koyunuz. Şek 23 deki tahtanın, şek. 22 deki şemanın 0 numaralı noktalarına karşılık tutulan bütün hanelerini siyaha, 1 numaralı noktalara karşılık tutulan bütün hanelerini de kırmızıya boyayınız.

37. Bir deveyi, çıkış hanesi olarak bir sekizgen seçildiği takdirde, şek. 23 deki tahtanın bütün hanelerine ardı ardına (her birine yalnız bir defa) sürmenin imkân-sız olduğunu gösteriniz.

Bir deve, şek. 21 ve 22 de görülen örneklerden çok daha genel tahtalar üzerinde de gözönüne alınabilir. Bir çokgenin *üçgenlenmesi* diye, çokgenin, her üçgen



Şek. 24

(veya düzlemin) bölündüğü üçgenlerin meselâ siyah ve beyaz olmak üzere iki renkle regüler boyandığını kabul edelim (şek. 24 e bak). *Deve* olarak, üçgenlerin kenarları ve köşe noktaları üzerinde ilerliyen ve bir hamle ile bir köşe noktasından komşu ¹⁾ bir köşe noktasına

¹⁾ Aynı kenara ait iki köşe noktasına *komşu* adı verilir.

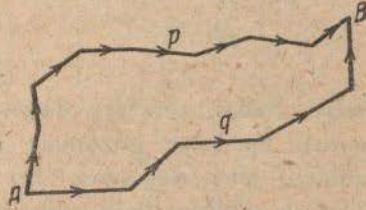
geçen bir oyun taşını alalım. Burada hareketin yönü o şekilde olacaktır ki, yürünmekte olan kenara göre, siyah üçgen daima sağda, beyaz ise solda bulunsun. (Şek. 24 de mümkün hareket yönleri oklarla işaretlenmiştir.)

Evvelce geçen problemlerin aksine olarak aşağıdaki dört problem bir özel şemaya değil, kendimizce tarif edilecek keyfî şemalara istinad etmektedir.

38. Bir devenin, bir şemanın herhangi bir köşe noktasından çıkarak geri kalanların her birine gidebileceğini gösteriniz.

39. Bir deve n hamle yapıp çıkış hanesine geri döndüğüne göre, n nin 3 ile bölünebileceğini gösteriniz (problem 4 e bak).

40. A ve B bir şemanın herhangi iki köşe noktası olsun. Deve A noktasından B noktasına başka başka yollardan gidebilir. Bunlardan biri için gerekli adım sayısı p , diğer biri için q olsun. $p - q$ farkının 3 ile bölünebileceğini gösteriniz (Şek. 25).



Şek. 25

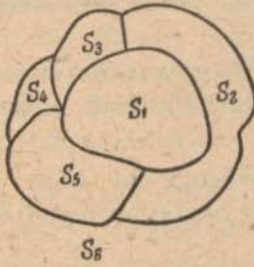
41. Bir çokgen (veya düzlem) üçgenlenmiş ve elde edilen üçgenler iki renkle regüler boyanmış olsun. Bütün üçgenlerin köşe noktalarının, her komşu köşe çiftine farklı rakamlar düşecek şekilde, 0, 1, 2 rakamları ile numaralanabileceğini gösteriniz ¹⁾ (problem 3 ile kışt.).

Regüler boyama için gerekli boya sayısının, memleketlerin büyüklüğüne, şekline ve sınırların uzunluğuna bağlı olmadığı açıktır. Bu sayı sadece memleketlerin kar-

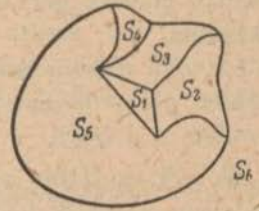
¹⁾ Böyle bir numaralamaya *regüler* denileceğine dair kararı hatırlıyalım.

şıklı durumları, sınırlar ve köşe noktaları ile belirli olur. Lâstik bir levha üzerine çizilen bir haritadan, lâstik levhanın düzgün olmıyan herhangi şekildeki (fakat yırtılmaksızın) çekilmesi ile meydana gelen bütün haritalar bizce ilk haritaya tamamen denktir. Meselâ şek. 26 ve 27 deki iki harita böyle meydana gelmişlerdir.

Problem 3 ve 41 in ifadelerinde, kenarları doğru çizgili üçgenlerden meydana gelen haritalardan bahsedil-

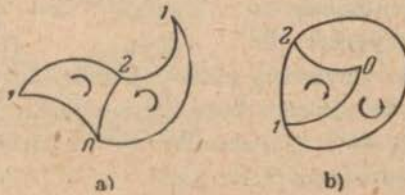


Şek. 26



Şek. 27

mişti. Fakat sınırları doğru çizgili haritalar yerine eğri sınırlı haritalar gözönüne alınırsa, bu problemlerin çözümleri yine değişmez. Bu sebeple problem 41 in neticesi şu şekilde ifade edilebilir :



Şek. 28

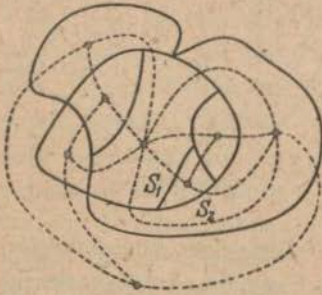
Herbiri üç sınırlı ¹⁾ memleketlerden meydana gelen bir harita iki renkle regüler boyanabiliyorsa, bu harita-

¹⁾ Böyle memleketlere üçköşe-adını vereceğiz; genel halde bir memleketin n sınırı varsa, onu n -köşe olarak adlandırıyoruz.

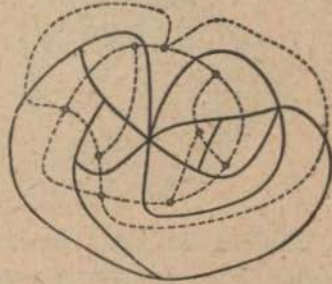
daki her memleketin köşe noktaları üç rakamla regüler numaralanabilir.

Problem 3 ün neticesi aynı şekilde genelleştirilebilir. Burada komşu iki üçgen birbiri ile iki türlü (şek. 28 a ve b) sınır teşkil edebilmelerine rağmen, yine eskisi gibi farklı yönleri haiz bulunduklarından, çözüm aynen cari kalır.

Düal haritalar. Şek. 29 daki haritayı gözönüne alalım ve her memleketde başkenti bir nokta ile göstereyim. Her komşu memleket çiftinin başkentlerini, bu iki memleketten başka hiçbir memlekete uğramıyan ve hiçbir köşe



Şek. 29



Şek. 30

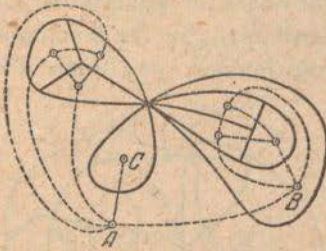
noktasından geçmiyen bir tren hattı (şek. 29 da noktalı çizgiler) ile bağliyalım. Meselâ şek. 29 daki S_1 ve S_2 memleketlerinde olduğu gibi iki memleketin birçok ortak sınırı bulunması halinde, bahis konusu iki başkenti, herbiri bir ortak sınırdan geçecek şekilde birçok tren hatları ile bağliyalım. Bu esnada farklı tren hatlarının kesişmemesine dikkat etmeliyiz.

Şimdi haritamızdaki noktalı çizgileri dolu çizer ve «sınırları» da noktalarsak, böylece şek. 30 daki haritayı elde ederiz. Bu esnada ilk harita ile demiryollarının haritası rollerini değiştirirler: İlk harita kendi demiryolu haritasının demiryolu haritası olur. Netice olarak birindeki

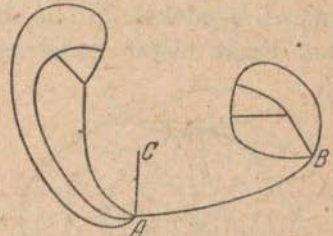
noktalı çizginin diğerinde dolu çizilmiş olduğu şek. 29 (ve şek. 30) daki her iki harita aralarında simetriklerdir: bunlardan herbiri diğerinin demiryolu haritasıdır. Bu çeşit haritalara *düal* haritalar diyeceğiz ¹⁾.

Düal haritalar arasında şu önemli bağıntılar caridir :

1. Bu haritalardan birinin her sınırı düal haritanın bir ve yalnız bir sınırını keser.
2. Bu haritalardan birinin her memleketi içinde düal haritanın bir ve yalnız bir köşe noktası bulunur.



Şek. 31



Şek. 32

Böylece iki düal haritanın elemanları (memleketler, sınırlar, köşe noktaları) arasında : birinin memleketlerine düalinin köşe noktaları, köşe noktalarına memleketler, sınırlara da yine sınırlar karşılık gelmek üzere birebir bir tekabül teşkil edilmiştir ²⁾.

3. Bu haritalardan birinin bir köşe noktasının geçerliği k ya eşit ise, düal haritada karşıt memleketin k tane

¹⁾ Şek. 19 daki haritadan şek. 21 deki haritayı elde ettiğimiz metod, şimdi kullandığımız metoddan sadece orada dış bölgeyi nazari itibara almadığımız için farkedir. O halde, şek. 19 daki haritaya tekabül eden düal haritayı elde etmek için şek. 21 deki haritaya, bu haritanın bütün dış köşe noktaları ile birleştirilmesi gereken biricik köşe noktasının ithali kâfi gelir. Aynı şey şek. 22 ve 23 deki haritalar hakkında da söylenebilir.

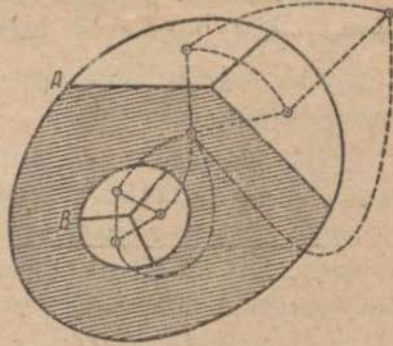
²⁾ Yani bu haritalardan birinin her elemanına düal haritanın tamamen belirli bir elemanı tekabül eder.

köşe noktası vardır, yani anlaşılmamıza göre bu memleket bir k - köşedir.

Herhangi haritalar için tren hatlarını inşa denemesine girişince iki türlü güçlükle karşılaşırız :

a) Demiryolu şemasının, hiçbir şekilde bizim anladığımız manâda bir harita teşkil etmemesi mümkündür. Mîsâl olarak şek. 31 deki demiryolu haritasını gözönüne alalım (bu şema şek. 32 de görülmektedir). Bu şemada, her iki tarafta aynı memleketin bulunduğu, hiç bir memleket sınırlamıyan (ayırıcı olmıyan) «sınırlar» da (AB ve AC) mevcuttur.

b) Şek. 33 deki demiryolu şeması bir hakiki harita teşkil etmekle beraber, demiryolu haritasına ait dış memleket ilk haritanın iki A , B köşe noktalarını ihtiva etmektedir. Öyle ise bu halde



Şek. 33

esas harita ile demiryolu haritası arasında hiçbir düallik mevcut değildir.

b) deki güçlükden, yalnız *bağımlı* haritaları gözönüne almak suretile kaçınılabilir. *Bağımlı* haritalar diye, öyle haritalara diyeceğiz ki, bunlarda hiçbir memleket diğer memleketleri, birbirine değmeyen iki veya daha çok parçaya ayırmasın. Diğer bir deyimle: bir haritayı bir kâğıt parçasına çizdikten sonra bir memleket kesilerek haritadan çıkarılırsa, geri kalan kısım tek tek parçalara ayrılamamalıdır. Şek. 33 deki harita bağımlı bir harita değildir. («Ayrıcı» memleket taranmıştır.) Bağımlı bir harita şu şekilde de tarif edilebilir: sınırlar üzerinde ilerlenmek şartile haritanın her köşe noktasından diğer her köşe noktasına varılabilir.

a) güçlüğünden, aynen b) güçlüğündeki yoldan, yani bu zorluğun zuhur ettiği haritaları konu dışı bırakarak kaçınabiliriz. Fakat biz burada ters yoldan giderek : şek. 32 deki haritaya tekabül eden, yani ayırıcı olmıyan sınırları da ihtiva eden haritalar ithal ederiz. Aşağıda böyle haritalara rastlamıyacağız. Burada bunlar, sadece düallik prensibimizin bozulmamasını sağlamak için ithal edilmektedirler. Şimdi bağımlı haritalar için düallik prensibini ifade ediyoruz :

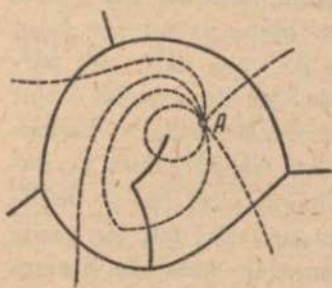
a) Bağımlı bir haritanın demiryolu şeması yine bir harita, hem de bağımlı bir haritadır.

b) Her bağımlı harita, kendi demiryollarına ait haritanın demiryolu şemasıdır.

Böylece bağımlı bir harita ile kendisine ait demiryolu haritası daima aralarında düal olup, bunlar için yukarıda 1. den 4. e kadar sıraladığımız bağıntılar caridir ¹⁾.

Artık düal haritaların 3 numaralı özeliğinden doğrudan doğruya elde edilen şu teoremi tesis edebiliriz :

Bir haritanın memleketleri n renkle regüler boyanabildikleri takdirde; buna ait düal haritanın köşe noktaları n rakamla regüler numaralanabilir; bir haritadaki köşe noktalarının n rakamla regüler numaralanabil-



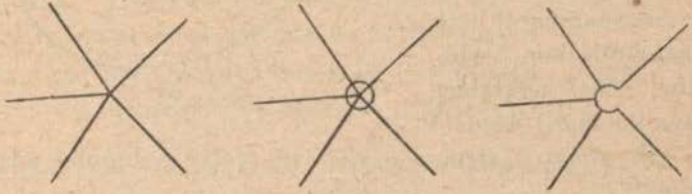
Şek. 34

¹⁾ 4 özeliğinin cari kalması için ayırıcı olmıyan her sınırın çift sayılması gerektiğini görebilmek zor değildir. Meselâ şek. 34 deki memleket bir sekiz köşedir (düal haritanın 4 köşesinin geçerliği 8 dir). Bu kayıt altında, meselâ problem 19 ve 20 de olduğu gibi, memleketlerin sınır sayılarının bulunması istenen problemlerin hepsi cari kalır.

§ 3. Dörtrenk problemi. WOLYNSKI teoremi.

Bu paragrafta haritaların dört renkle boyanmasını gözönüne alacağız. (Tabii bu soruyu tamamen cevaplandırmaya muvaffak olamayacağız).

Genel dörtrenk probleminin çözümü için normal haritaların gözönüne alınması kâfidir; zira dört renkle normal haritalar regüler boyanabilirse, diğer bütün haritalar da dörtrenkle boyanabilir. Netekim, herhangi bir haritada geçerliği 3 den büyük olan her köşe noktasının etrafını küçük bir çember ile çevirir, bu çember içindeki bütün sınırları kaldırır ve onu bitişik memleketlerden birine katarsak, hakikaten bir normal harita elde ederiz (şek. 36). Eğer bu normal harita dört renkle regüler boyana-



Şek. 36

bilirse, bunun esas harita için de cari olacağı açıktır. Bu yüzden aşağıda yalnız normal haritaları gözönüne alacağız.

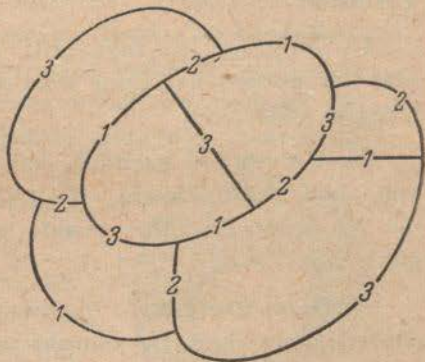
Şimdiye kadar haritalarda yalnız memleketlerin regüler boyanmasını ve köşe noktalarının regüler numaralanmasını gözönüne almıştık. Şimdi de sınırların regüler numaralanmasını ithal edeceğiz :

Ortak bir köşe noktasını haiz iki sınıra *komşu* denir.

Sınırların, her komşu sınır çifti farklı numaralar alacak şekilde numaralanmasına *regüler* adı verilir. Şek. 37, sınırların regüler numaralanışına dair bir misâli gösteriyor.

Dörtrenk problemi, sınırların 3 rakamla regüler numaralanması problemine denktir. Bu denklik şu WOLYNSKI teoreminde ifadesini bulmaktadır: ¹⁾

Bir normal harita, ancak ve ancak haritanın sınırlarının üç rakamla regüler numaralanabilmesi halinde dört renkle regüler boyanabilir. Bu teoremin isbatı 43 den 45 e kadar olan problemlerden netice olarak çıkarılabilir. Dört renk ye-



Şek. 37

rine bundan böyle dört numara kullanmak bizim için daha elverişli olacaktır; numara olarak (0, 0), (0, 1), (1, 0) ve (1, 1) sayı çiftlerini seçiyoruz. Bu çiftler terim terime toplanabilir. Bu esnada başka rakamlar kullanmak zorunda kalınmaması için, meselâ

$$(1, 0) + (1, 0) = (0, 0)$$

$$(0, 1) + (1, 1) = (1, 0)$$

da olduğu gibi, toplamın neticesi yerine 2 ile bölümündeki kalan konabilir.

43. Dört renkle regüler boyanabilen bir normal haritada sınırların üç rakamla regüler numaralanabileceğini gösteriniz.

44. Bir normal haritanın sınırları üç tane (0, 1), (1, 0), (1, 1) sayı çifti ile regüler numaralanmış olsun. Bir kale,

¹⁾ Wladimir Viktorowitsch WOLYNSKI (1923-1943), kabiliyetli, genç bir matematikçi idi. 1939 dan 1942 ye kadar Moskova Devlet Üniversitesinin Mekanik-Matematik Fakültesinde tahsil etmişti. 1943 de İkinci Dünya Savaşında cephede öldü.

bu haritanın bir takım hanelerine sürüldükten sonra çıkış hanesine geri gelmiş bulunsun. Kalenin geçtiği bütün sınırların numaraları toplamının $(0, 0)$ a eşit olduğunu gösteriniz.

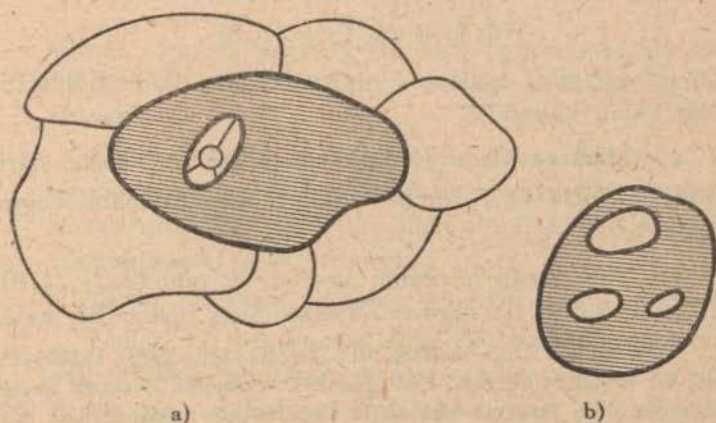
45. Sınırları üç sayı çifti ile regüler numaralanmış olan bir normal haritanın dört renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz.

46. Bir normal haritada her memleketin sınırları sayısı üçle bölünebilsin. WOLYNSKI teoremini kullanarak bu haritanın dört renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz.

Dörtrenk problemi, okuyucu EULER teoremini gördükten sonra, bundan sonraki paragrafın sonunda, memleket sayısı onikiden daha az olan haritalar için çözülecektir.

§ 4. EULER teoremi. Beş renk üzerine teorem.

Bir memleketin sınırları, münferit, bağımsız parçalara bölünmüş olabilir (şek. 38 a ve b). Fakat bu halde - şekilden gözüktüğü gibi - ayırıcı bir memleket



Şek. 38

bahis konusudur ; dolayısıyla böyle haritalar bağımlı değildirler. Bununla beraber bağımlı haritalara münhasır kaldığı takdirde her memleketin sınırları, iki köşe noktası arasındaki parçalar - umumiyetle - eğrisel olma farkı ile, doğrusal bir çokgenin çevresine benzer bir kenar teşkil ederler. (Şek. 39 da gösterildiği üzere münferit halde bu çevre bizzat kendisine değebilir.) Bağımlı bir haritanın memleketleri ile alelâde çokgenler arasındaki bu benzerlikten faydalanarak meşhur EULER ¹⁾ teoremini isbat edeceğiz.

Bağımlı bir haritanın memleketleri sayısı s , köşe noktaları sayısı v , sınırları sayısı g olduğuna göre

$$s + v = g + 2$$

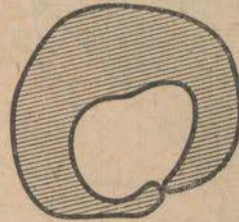
dir.

Bu teoremi, önce memleketleri doğrusal kenarlı çokgenler olan haritalar için isbatlıyalım. Deniz, böyle bir haritada, bir çokgenin dış kısmıdır (şek. 40 da deniz taranmıştır.)

Haritamızı teşkil eden bütün çokgenlerin iç açıları toplamını hesaplıyalım. Bu çokgenlerin (deniz hariç bütün memleketler) sayısı $s - 1$ dir. R bir dikaçıyı göstermek üzere, n kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamı $2R(n - 2)$ ye eşittir. O halde $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{s-1}$ çokgenlerimizin kenar sayıları olduğuna göre, bütün çokgenlerin iç açıları toplamı

$$T = 2R(n_1 - 2) + 2R(n_2 - 2) + \dots + 2R(n_{s-1} - 2)$$

dir. Bu toplam

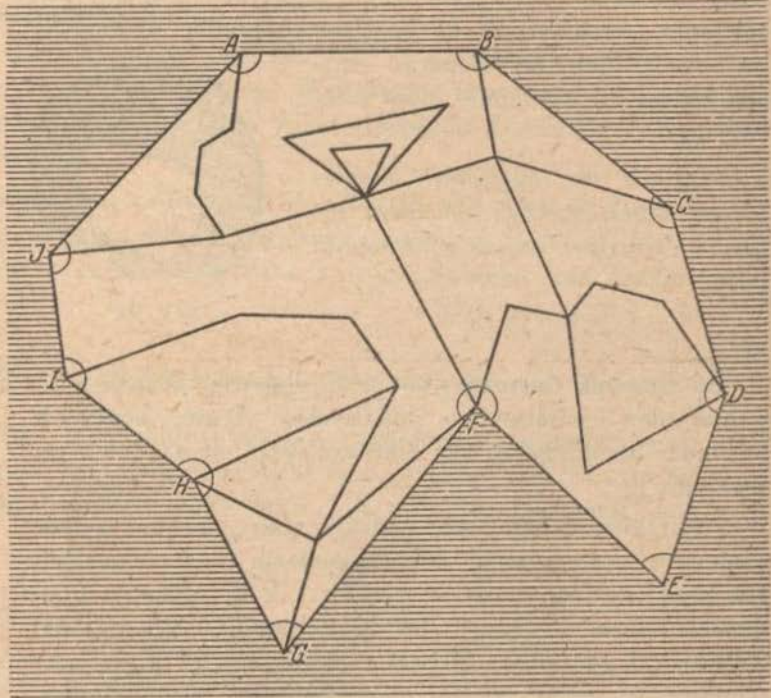


Şek. 39

¹⁾ Leonhard EULER, en büyük matematikçilerden biri olup 1707 de Basel de doğmuş, 1727 den 1741 e ve 1766 dan hayatının sonuna kadar St. Petersburg ilim akademisinde, 1741 den 1766 ya kadar Berlin ilim akademisinde çalışmıştır.

$$T = 2R [n_1 + n_2 + \dots + n_{s-1} - 2(s-1)]$$

e eşittir. Dış sınırların (deniz kıyısında bulunanların) sayısını g_a ile, bütün iç sınırların (deniz kıyısında bulunmayanların) sayısını da g_i ile gösterelim. Bu takdirde $g = g_i + g_a$ olur, (şek. 40 da $g_i = 32$, $g_a = 10$ dur.)



Şek. 40

Prob. 19 a göre

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{s-1} + g_a = 2g,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{s-1} = 2g - g_a$$

olup, buradan

$$T = 2R [2g - g_a - 2(s-1)]$$

bulunur.

Şimdi bu T toplamını başka bir yoldan hesaplıyalım. v_i iç köşe noktalarının, v_a da denize ait köşe noktalarının sayısı olsun (şek. 40 da $v_i = 19$, $v_a = 10$ dur). $v = v_a + v_i$ ve $g_a = v_a$ olduğu açıktır. Çokgenlerin bir iç köşe noktasına ait olan açılarının toplamı $4R$ dir. O halde iç köşe noktalarına ait bütün açılar toplamı $4Rv_i$ ye eşit olur. T yi elde etmek için, buna, deniz kıyısında bulunan bütün açıları (bunlar şek. 40 da işaretlenmişlerdir), diğer bir deyimle, $A, B, C, \dots, J$ çokgeninin bütün iç açıları toplamını yani $2R(v_a - 2)$ yi eklemelidir. Böylece

$$\begin{aligned} T &= 4Rv_i + 2R(v_a - 2) = 4R(v - v_a) + 2R(v_a - 2) \\ &= 2R(2v - v_a - 2) \end{aligned}$$

bulunur. T nin her iki ifadesi birbirine eşitlenerek

$$2R[2g - g_a - 2(s - 1)] = 2R[2v - v_a - 2],$$

$$2g - g_a - 2(s - 1) = 2v - v_a - 2$$

elde edilir. $g_a = v_a$ dan

$$2g - 2(s - 1) = 2v - 2,$$

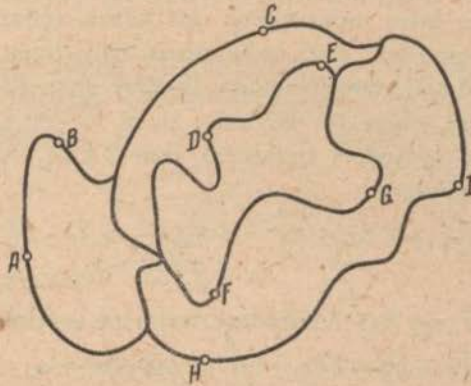
$$g - s + 1 = v - 1,$$

$$s + v = g + 2$$

çıkar.

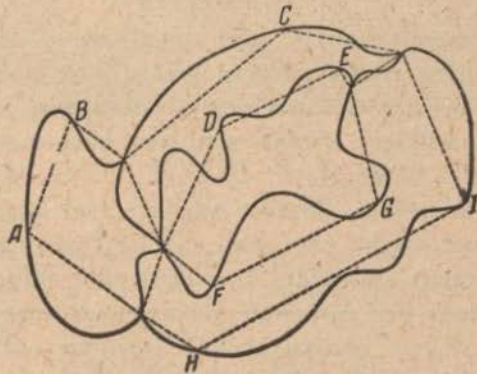
Şimdi memleketlerin eğri sınırlı da olabildiği genel hali gözönüne alalım. Eskisi gibi v köşe noktalarının, s memleketlerin, g de sınırların sayısı olsun. Sınırlar üzerinde, geçerlikleri 2 olan yardımcı köşe noktaları ithal edelim (şek. 41 de $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ bu çeşit köşe noktalarıdır). Böylece sayıları yeni köşe noktalarınınkine eşit olacak olan yeni sınırlar (eski sınırların yeni köşe noktaları arasındaki kısımları) elde edilir. Şimdi de yeni haritada, her eğri sınır yerine, aynı köşe noktalarını haiz bir doğru parçası alalım. Yardımcı noktalar yeteri kadar sık seçildiği takdirde (bu noktalardan istenildiği kadar çok ithal edilebilir), bu doğru parçaları kesiş-

mezler. Böylece bütün memleketleri doğrusal kenarlı çokgenler olan yeni bir harita elde ederiz (şek. 42 de noktalı çizgiler). Yardımcı köşe noktalarının sayısı v' ye ve yeniden ortaya çıkan sınırların sayısı da g' ye eşit



Şek. 41

olduğuna göre, yeni haritada köşe noktalarının toplam sayısı $v' + v$ ye, sınırlarınki ise $g' + g$ ye eşit olacaktır. Memleketlerin sayısı sabit kalır. İsbat edildiği üzere bu harita için EULER teoremi caridir, yani



Şek. 42

$$(v + v') + s = (g + g') + 2$$

dir; $v' = g'$ den, isbat edilecek olan,

$$v + s = g + 2$$

çıkar.

47. Bir düzlemde altı nokta verilmiş ve her nokta her defasında diğer noktalardan dördüne, birbirleri ile hiç kesişmiyen eğrilerle bağlanmış olsun. Elde edilen harita üzerindeki bütün memleketlerin üçköşe olduğunu gösteriniz.

48. Bir düzlemde yedi nokta verilmiş olsun. Her noktayı diğer noktalardan dördüne, birbirleri ile hiç kesişmiyen eğrilerle bağlamanın imkânsız olduğunu isbatlayınız. (Burada problem 4 ün sonucunu kullanmalıdır).

49. Üç ev ile üç çeşme verilmiş olsun. Her evi her çeşmeye, birbirleriyle hiçbir yerde kesişmiyen yollarla bağlamanın imkânsız olduğunu gösteriniz.

50. Düzlemde beş nokta verilmiş olsun. Her noktayı diğer her noktaya, birbirlerini kesmiyen eğrilerle bağlamanın imkânsız olduğunu gösteriniz.

51. Üzerindeki beş memleketden herbirinin her defasında geri kalan 4 memleketle sınırdaş bulunduğu hiçbir haritanın mevcut olmadığını gösteriniz.

Problem 51, dört rengin herhangi bir haritanın regüler boyanmasına kâfi geldiği tahminini akla yakın kılıyor. Beş renk hakkındaki teorem bu problemin neticesine dayanır. Bu teoremin isbatında geçerliği iki olan bütün noktaların atılabileceği açıktır. 52 den 54 e kadar olan problemlerde her noktanın geçerliğinin en az üçe eşit olduğunu kabul edeceğiz.

52. Bütün köşe noktalarının geçerlikleri en azından üç olan keyfî her haritada, sınır sayısı altıdan az olan bir memleketin mevcut olduğunu gösteriniz.

53. Her haritanın altı renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz ¹⁾.

54. Beş renk teoremi. Her haritanın beş renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz ¹⁾. (Problem 51 in neticesini kullanınız).

Beş renk hakkındaki problemin çözümünde uygulanlara benzer metodlarla özel bir hal için dörtrenk problemi çözülebilir. Bu, problem 55 ve 56 da yapılacaktır. Aynen beş renk hakkındaki problemde olduğu gibi, gözönüne alınan haritanın, geçerliği iki olan hiçbir köşe noktasını ihtiva etmediğini farzediyoruz.

55. Köşe noktalarının geçerlikleri en azından üç olan bağımlı bir harita için

$$g \leq 3s - 6$$

eşitsizliğinin cari olduğunu gösteriniz

56. Onikiden az memleket ihtiva eden her haritanın dört renkle regüler boyanabileceğini gösteriniz.

Son Düşünceler

Şekil ve cisimlerin, parçalanmaksızın ve başka türlü birleştirilmeksizin maruz kaldıkları keyfî deformasyonlardaki (şekil değiştirmelerindeki) davranış ve özelliklerine dair problemler (bilhassa çokrenk problemleri hakkındaki-ler böyledirler), matematiğin *topoloji* denilen özel bir problem çevresine girerler. Topoloji matematiğin en genç kollarından biridir ve gelişerek geçen yüzyılın sonlarında başlı başına bir matematik disiplini haline gelmiştir. Topolojinin daha da gelişmesinde son otuz yılda, en mümtaz mümessilleri PAWEŁ SAMOIŁOWITSCH URYSOHN (1898 - 1924), PAWEŁ SERGEJEWITSCH ALEXANDROFF (doğum 1896) ve LEW SEMJONOWITSCH PONTRJAGIN (doğum

¹⁾ Haritanın ayrırcı olmıyan hiç bir sınırı ihtiva etmediği farzediliyor (s. 23 deki not ¹⁾ e bak).

1908) olan Sovyet topoloji okulu önemli bir rol oynamaktadır. Son zamanlarda topoloji sahasında üstün neticeler Fransız matematikçileri (J. LERAY, J. P. SERRE ve diğerleri) tarafından elde edilmiştir.

Okuyucu EULER teoremi ve dörtrenk problemi ile ilgili ve irae itibarile bu kitaptakinden farklı olan soruları şu kitaplarda bulabilir :

G. RADEMACHER ve O. TOEPLITZ, «Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik» Springer-Verlag, Berlin 1930, Kap. 13. (Sayılar ve şekiller hakkında. Matematikseverler için matematiksel düşünüş denemeleri), 13. bölüm.

D. HILBERT ve S. COHN-VOSSEN, «Anschauliche Geometrie». Springer-Verlag, Berlin 1932, Kap. IV. (Gösterimli geometri), VI. bölüm.

D. HILBERT'in bu kitabında, daha karışık yüzeyler üzerindeki haritaların boyanmasına dair problemler çözülmüştür. Okuyucu burada topolojinin ilk esaslarını da bulur. Topolojinin daha geniş ölçüde tetkiki için şu kitaplar tavsiye edilebilir :

P. S. ALEXANDROFF ve W. A. JEFREMOWITSCH, «Über die einfachsten Begriffe der modernen Topologie», 1935, (Modern topolojinin en basit kavramları hakkında).

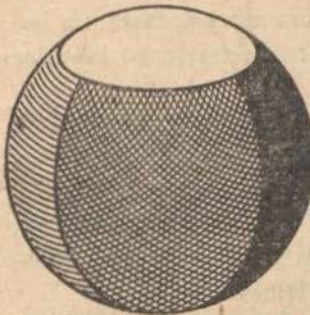
P. S. ALEXANDROFF ve W. A. JEFREMOWITSCH, «Abriss der grundlegenden Begriffe der Topologie», 1936, (Topolojinin temel kavramları derlemesi).

O. K. SHITOMIRSKI, W. D. LWOWSKI ve W. I. MILINSKI, «Aufgaben zur höheren Geometrie» Kısım I, 1935, Bölüm I. (Yüksek geometri problemleri).

E K

KÜRE YÜZEYİNİN ÜÇ RENKLE BOYANMASI HAKKINDA

Bir küre yüzeyi belli bir sayıda bölgelere ayrılmış, yani küre yüzeyi üzerinde bir harita çizilmiş olsun. Burada çapsalkarşı, yani bir küre çapının iki ucunda bulunan, iki noktayı ihtiva eden bir memleketin mevcut olup olmadığı sorusunu inceliyelim. Memleketlerin sayısının dörde eşit olması halinde çapsalkarşı noktaları bulunan hiçbir memleketin mevcut olmaması mümkündür (şek. 43). O halde memleket sayısının dörtten büyük olması halinde illâ



Şek. 43

böyle bir memleketin mevcut olması gerekmez. Tersine olarak harita sadece iki memlekettten ibaret ise, memleketlerden biri muhakkak surette bir çapın iki uç noktasını ihtiva eder¹⁾ (elbette bu noktaların, tam her iki memleket arasındaki sınırda bulunması hali de vaki olabilir. Misâl olarak iki yarım küre yüzeyine bölünmüş bir küre yüzeyi seçilir). Şimdi haritanın üç memlekettten ibaret olması halinde durumun nasıl olacağı sorusu ortaya çıkar. İki memleket halinde olduğu gibi, üç memleket ha-

¹⁾ İsbat için iki memleket arasındaki sınıra ait herhangi bir A noktasını gözönüne almak yeter. Bu noktanın A' çapsalkarşı noktası iki memlekettten birine aittir. A aynı memlekete ait olduğundan (sınırın bir noktası her iki memlekete aittir) A ile A' aranan nokta çiftini teşkil eder.

linde de daima çapsalkarşı iki nokta ihtiva eden bir memleketin bulunacağını isbat edeceğiz ; hatta çok daha genel şu iddia bile isbatlanabilir :

Bir küre yüzeyi herhangi bir sayıda bölgelere ayrılmış ve bu bölgeler herhangi bir şekilde üç grupta toplanmış olduğuna göre, aynı bir grubun memleketlerine ait daima iki çapsalkarşı nokta bulunur.

1. Bu teoremi vasıtalı (indirekt) yoldan isbatlıyacağız. Küre yüzeyi üzerindeki K haritasının üç renkle boyanmış olduğu ve aynı renkteki memleketler içinde çapsalkarşı hiçbir nokta çiftinin (böyle çiftlere eşrenk diyeceğiz) bulunmadığı kabul edilsin.

Bu kabulü aşağıdaki şekilde çelişmeye götüreceğiz : İsbat ederiz ki, eşrenk hiçbir nokta çifti ihtiva etmeyen her haritadan, yine eşrenk hiçbir nokta çifti ihtiva etmeyen, fakat birinciden daha az sayıda memlekettten meydana gelen yeni bir harita inşa edilebilir. O halde mevcudiyetini kabul etmiş bulduğumuz K haritasından hareket ederek, hiçbir eşrenk nokta çifti ihtiva etmeyen daha az sayıda memleketli bir K_1 haritası inşa ederiz. Sonra K_1 haritasından da aynı metodla bir K_2 haritası inşa edebiliriz v. s.. Böylece hiçbir eşrenk nokta çifti ihtiva etmeyen

$$K, K_1, K_2, K_3, \dots, K_m, \dots$$

gibi bir sonsuz harita dizisi elde ederiz. K haritasının memleket sayısı n , K_i lerinki de n_i ile gösterildiğine göre

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > \dots > n_m > \dots$$

elde edilir. Bu suretle pozitif tam sayıların monoton azalan bir sonsuz dizisini elde etmiş oluruz; bu ise imkânsız olduğundan bir çelişme teşkil eder. Pozitif tam sayıların monoton azalan bir sonsuz dizisinin elde edildiği vasıtalı bir isbatın burada kullandığımız metoduna *düşürme* (deszendenz) metodu denir.

O halde hiçbir eşrenk nokta çifti ihtiva etmeyen herhangi bir K haritası verilmiş olsun. Şimdi aynı şekilde

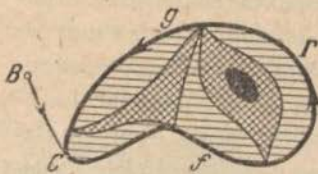
hiçbir eşrenk nokta çifti ihtiva etmiyen, fakat K haritasından daha az sayıda memleketten meydana gelen bir K_1 haritasının inşası gerekmektedir.

2. K haritasının regüler olmaması, yani harita içinde aynı renkli memleketleri ayıran sınırların mevcut bulunması halinde, bu sınırların kaldırılması suretile istenilen haritanın hemen elde edileceğini burada kaydedelim. Bu yüzden aşağıda K haritasının yalnız regüler boyanmış olduğu halleri gözönüne alacağız.

Şu yardımcı teoremi isbat edelim :

Bir sınır noktasına çapsalkarşı olan nokta bir iç noktadır, yani bir memleketin hakikaten iç kısmında bulunur.

Gerçekten regüler boyanmış bir haritada her sınır nok-



Şek. 44

tası farklı boyanmış en az iki memlekete aittir. A sınır noktası meselâ kırmızı bir memleketle mavi bir memlekete ait olsun. Bu takdirde onun A' çapsalkarşı noktası ne mavi ne de kırmızı memlekete ait olamaz, yani bir siyah memle-

ketin hakikaten iç kısmında bulunur.

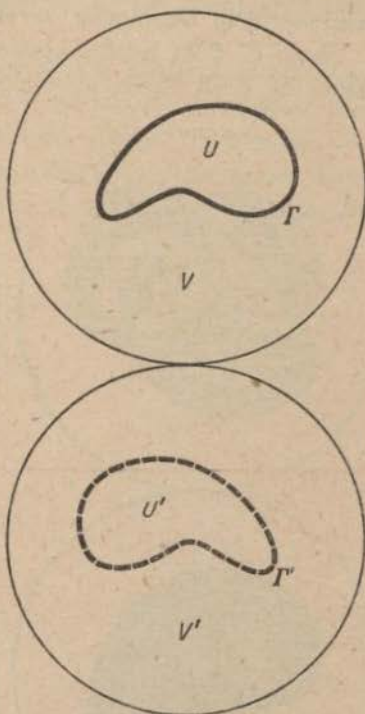
3. B bir kırmızı memleketin sınırı üzerinde bulunan bir nokta olsun. B noktasından çıkarak haritanın sınırları üzerinde o şekilde ilerliyelim ki, solumuzda daima kırmızı memleketler bulunsun (şek. 44)¹⁾. Bu harekete, daha önce bir defa uğramış olduğumuz bir C noktasına varıncaya kadar devam edelim. Şimdi Γ ile göstereceğimiz ikikat noktasız $CfgC$ (şek. 44) eğrisini gözönüne alıyoruz. Küre yüzeyi üzerindeki haritayı yalnız «kuzey» ve «güney» yarım küreler için çizeceğiz. Genelliği bozmaksızın, gösterimlilik bakımından, Γ eğrisinin tamamen kuzey kürede bulunduğunu farzedelim (şek 45).

¹⁾ Şek. 44, 46 ve 47 de kırmızı renk tarama ile, mavi renk ise kareleme ile işaretlenmiştir.

Şimdi Γ eğrisinin çapsalkarşı noktalarından meydana gelen Γ' eğrisini inşa edelim. Yardımcı teorem uyarınca Γ' eğrisi sadece iç noktalardan ibaret olur, yani hiçbir yerde haritanın sınırlarını, özellikle sınırlardan meydana gelen Γ eğrisini kesmez.

Γ eğrisi küre yüzeyini U ve V gibi iki kısma ayırır. Aynı şekilde Γ' de küre yüzeyini, U nun noktalarının çapsalkarşı noktalarından meydana gelen U' ile V ninkilerin çapsalkarşı noktalarından ibaret olan V' kısımlarına ayırır. Γ ile Γ' kesişmedikleri için Γ' , U veya V kısımlarından birinde, meselâ V de bulunur. Bu takdirde Γ da V' de bulunur.

4. Γ' , haritanın hiçbir sınırını kesemediği için, bir memleketin tamamen iç kısmında bulunur. Γ nın bütün noktaları kırmızı memleketlere ait olduğundan, Γ' nın hiçbir noktası bir kırmızı memleke ait olmayacak ve Γ' nın içinde bulunduğu memleket kırmızıya boyanamıyacaktır. Genelliği bozmadan bu memleketin siyaha boyanmış olduğunu kabul edelim (şek. 46)¹⁾. Bu halde Γ nın hiçbir noktası siyah bir memlekete ait olamaz, yani Γ yı teşkil eden bütün sınırlar mavi ve kırmızı memleketler arasındaki sınırlardan ibarettir.

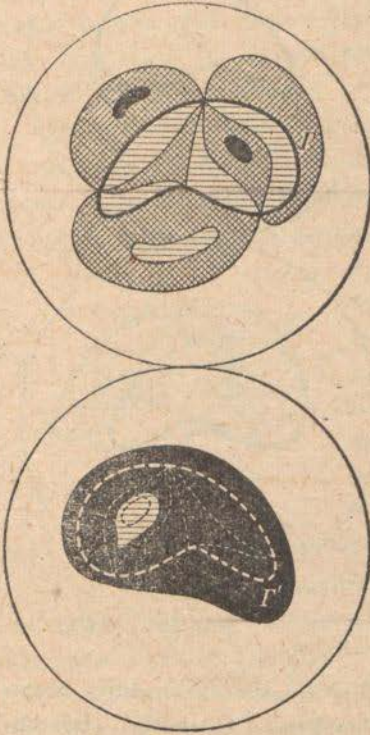


Şek. 45

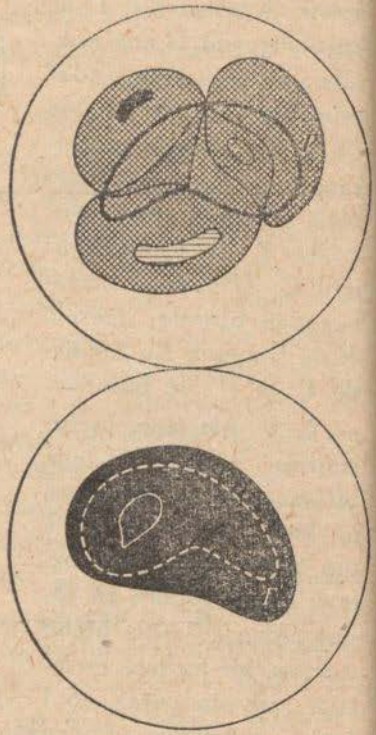
¹⁾ Şek. 46 da U bölgesindeki sınır noktalarının çapsalkarşı noktalarından meydana gelen çizgiler gösterilmiş bulunmaktadır.

Γ nın bir tarafında sadece kırmızı memleketler bulunduğu için diğer yanında sadece maviler bulunacaktır (harita regüler boyanmıştır). Meselâ — 46 numaralı şeklimizde olduğu gibi — U tarafında kırmızı, V tarafında ise mavi memleketlerin bulunması gerekmektedir.

Şimdi U daki bütün memleketleri maviye ve aynı zamanda U' deki bütün memleketleri de siyaha boyayalım.



Şek. 46



Şek. 47

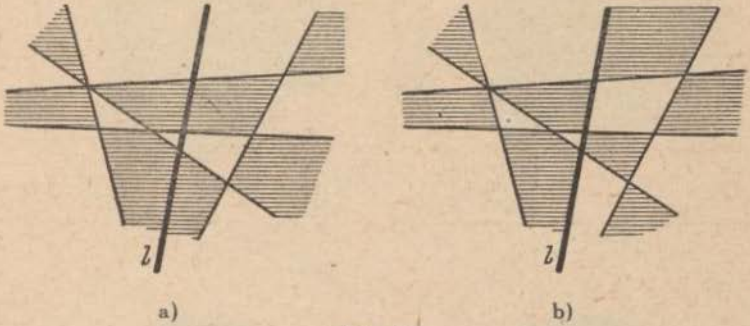
Fakat bu takdirde Γ ya her iki yandan aynı renkli, yani mavi memleketler değmiş olur (şek. 47). İşaret edelim ki: bu boyama değişikliği esnasında hiçbir eşrenk nokta çifti zuhur etmez. Çünkü bir yandan U daki noktaların mavi, bunların U' deki çapsalkarşılıarı da siyah olmuşlar, öte yandan diğer bütün noktalarla bunların çapsalkarşılıarı

renklerini değiştirmemişlerdir. şimdi artık Γ yı ve U ile U' nün iç tarafında bulunan bütün memleketleri atalım. Bu esnada haritamızın memleketlerinin toplam sayısı azalacaktır (zira Γ muhakkak en az iki memleketi birbirinden ayırıyordu).

Bu suretle hiçbir eşrenk nokta çifti ihtiva etmiyen herhangi bir harita için, daha az sayıda memleketi olan ve yine eşrenk hiçbir nokta çifti ihtiva etmiyen bir K_1 haritası inşa etmiş olduk. Daha nce No. 1 de tesbit etmiş bulunduğumuz üzere, böylece teoremimiz isbatlanmış olur.

Ç Ö Z Ü M L E R

1. Bu teoremi matematiksel indüksiyon ile isbatlıyacağız ¹⁾. Bir tane doğru ile teşkil edilen bir harita iki renkle regüler boyanabilir. Teorem n doğru için isbatlanmış olsun. Bu takdirde teoremin $n+1$ tane doğru için de cari olduğunu göstereceğiz. $n+1$ doğrudan teşkil edilen bir



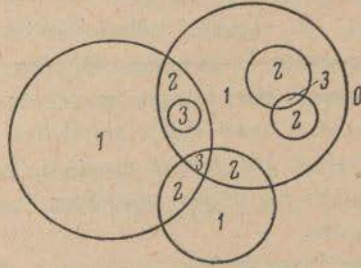
Şek. 48

K haritasını gözönüne alalım ve bir doğruyu, meselâ l doğrusunu, atalım. Bu halde farzımıza göre iki renkle regüler boyanabilen bir K^* haritası elde ederiz. Bu haritayı siyah ve beyaz memleketlere boyayalım. Bundan sonra evvelce kaldırılan l doğrusunu tekrar katalım. Bu doğru haritayı, herbiri iki renkle regüler boyanmış olan iki parçaya böler (şek. 48 a ya bak). Şimdi iki kısımdan birindeki bütün memleketlerin renklerini muhafaza edelim, diğer kısımda ise siyah yerine beyaz, beyaz yerine siyah koyalım (şek. 48 b ye bak). Bu esnada yarım düzlemlerin herbiri regüler boyanmış olarak kalır; eğer K haritasının

¹⁾ Bu hususta I. S. SOMINSKI'nin dilimize çevrilerek bu seride yayımlanan «matematiksel indüksiyon metodu» adlı kitabına bakınız.

komşu iki memleketi ayrı yarıdüzlemlerde bulunurlarsa, bu hal, bu memleketlerin doğrunun bir parçası boyunca sınırdaş olduklarını ve K^* haritasının herhangi bir memleketinin doğru tarafından bölünmesile ortaya çıkmış bulunduklarını ifade eder. K^* in bu memleketi herhangi bir renkle boyanmıştı; bunun iki memlekete bölünmesinden sonra parçalardan birinin rengini değiştirmiştik. Dolayısıyla, hakikaten bu halde de K haritasının komşu iki memleketi farklı renklerle boyanmıştır; böylece regüler bir boyama elde etmiş oluruz. Teorem $n = 1$ için caridir; isbatlanılana göre $1 + 1 = 2$ doğru için, $2 + 1 = 3$ doğru v.s. için, dolayısıyla herhangi bir sayıdaki doğru için de cari olur.

2. Bu problem tıpkı yukardaki gibi matematiksel indüksiyonla çözülebilir. Bununla beraber biz böyle yapmayıp (fakat bunu okuyucuya faydalı bir ekzersiz olarak tavsiye ediyoruz) şu düşünceye göre hareket edeceğiz. Düzlemin parçalandığı her bölge için, bunun çemberlerimizden kaç tanesi ile çevrildiğini sayalım (şek.5 deki harita için bu sayımın neticesi şek. 49 da verilmiştir). Komşu bölgelere tekabül eden sayıların daima 1 kadar fark

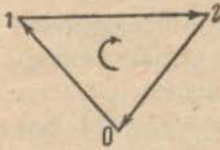


Şek. 49

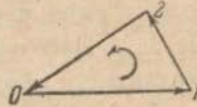
kettigine dikkati çekelim. Gerçekten, eğer A ve B komşu bölgeleri bir C çemberinin bir yayı ile ayrılmış iseler, bölgelerden biri C nin iç, diğeri de dış kısmında bulunacaktır; fakat C den farklı diğer her çembere göre A ve B bölgelerinin her ikisi de aynı zamanda ya içte veya dışta bulunur. Şimdi renklerden biri ile tek numaralı, diğeri ile de çift numaralı memleketleri boyarsak haritamızın regüler bir boyanışını elde ederiz.

3. Bu numaralamada herbir üçgenin köşeleri 0, 1, 2 rakamları ile işaretlenmiştir. Üçgenin kenarları boyunca

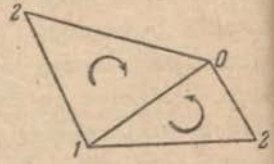
0 dan 1 e, 1 den 2 ye ve 2 den 0 a doğru olan yönlerde oklar çizelim. Böylece her üçgen belli bir yön (dolanım yönü) kazanır. Bu üçgenler saat ibreleri yönünde ve saat ibrelerinin ters yönünde olmak üzere yönlendirilmiş iki tipe



Şek. 50



Şek. 51



Şek. 52

ayrılabilir (şek. 50 ve 51). Birinci tip üçgenleri beyaza, ikinci tipleri de siyaha boyayalım. İki komşu üçgen daima birbirine zıt yönlü olduklarından (şek. 52 ye bak) regüler bir boyama elde ederiz.

4. Tersini kabul edelim ve haritamızı siyahla beyaza regüler boyayalım. Böylece sınır sayıları $n_1, n_2, \dots, n_k$ olan k tane beyaz memleketle, sınır sayıları $n'_1, n'_2, \dots, n'_l$ olan l tane siyah memleket elde edilmiş olsun. Her sınır yalnız bir beyaz memleketle yalnız bir siyah memlekete aittir; o halde, sınırların toplam sayısı g ile gösterildiğine göre,

$$g = n_1 + n_2 + \dots + n_k = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_l$$

bağıntısı caridir. $n_1, n_2, \dots, n_k; n'_1, n'_2, \dots, n'_l$ sayılarından $k + l - 1$ tanesinin m ile bölünebildiği biliniyorsa, bu denklemden *hepsinin* m ile bölünebileceği çıkar.

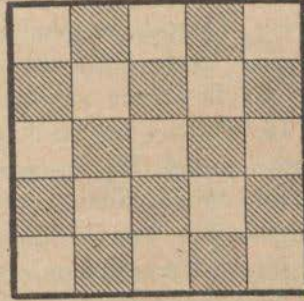
5. Şek. 53 de haneler, atın sürülmüş olduğu sıra üzere numaralanmışlardır.

6. Bu hususta şek. 53 ve 54 e bakınız. Burada 25 hanelen meydana gelen satranç tahtasının regüler bir boyanışını elde ettik. Diğer herhangi satranç tahtaları üzerinde aynı şekilde regüler bir boyama elde ederiz. Netekim bir satranç tahtasının iki renkle regüler boyanmış olması halinde at, her hamlede bir rengin bir hanesinden diğer ren-

gin bir hanesine sürülür. Bu sebepten, bütün haneler atın herbir haneye sürülmüş olduğu sıra üzere numaralandığı takdirde, çift numaralı haneler renklerden birini

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

Şek. 53

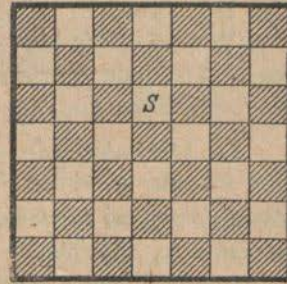


Şek. 54

(meselâ siyah), tek numaralı olan bütün haneler ise renklerden diğerini (meselâ beyaz) alırlar. Tersine olarak çift numaralı haneleri siyaha boyarsak, neticede doğrudan doğruya önceki boyamaya döner, yani regüler bir boyama elde ederiz.

7. Hayır, bu imkânsızdır. Tahtayı iki renkle regüler boyayalım ve hanelerini atın sürülmüş olduğu sıra üzere numaralıyalım. Birinci hane 1, sonuncusu 49 numarasını alacak, dolayısıyla her ikisi de aynı rengi haiz bulunacaktır (çünkü bunlar tek numaralı hanelerdir ; bir önceki problemin çözümü ile kıst.). Halbuki komşu iki hane daima farklı boyanmıştır.

8. Tahtamızı iki renkle regüler boyayalım. Bu boyamada *S* hanesi beyaz rengi alsın (şek. 55 e bak). At bu haneden çıkıp tahtayı dolaşmış ve bütün haneler atın sürülmüş olduğu sıra üzere numaralanmış olsaydı, tek numaralı haneler beyaz rengi alır-



Şek. 55

lar (problem 6'nın çözümü ile kışt.) ve bunlar 1, 3, 5, ..., 49 haneleri olurlardı. Buna göre beyaz hane sayısının (şek. 55 den görüldüğü gibi) 24 değil, 25 olması gerekirdi.

9. Atın her sürülüşünde üzerine vardığı hanenin rengi değişir. O halde at çıkış hanesinin rengindeki bir haneye (verilen halde çıkış hanesinin bizzat kendisine) varırsa, çift sayıda atlama yapmış olur.

10. Kalenin her hamlesi yerine bir haneden komşu bir haneye yaptığı bir seri adımlar (küçük hamleler) alınabilir. Kalenin bu şekildeki her basit hamlesinde vardığı hanenin rengi değişir. Satranç tahtasının dolaşılmasında kale 63, yani tek bir sayıda basit hamle yapar. Buna göre son olarak çıkış hanesinden farklı boyanmış bir haneye varır. Halbuki *A* ve *B* haneleri aynı renktedir.

11. Hayır, bu imkânsızdır. Bir domino taşı, her biri üzerinde 7 tane 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarından biri işaretlemlenmiş olan iki kısma bölünmüştür. Bu sayıların ikiye ikiye teşkil ettikleri sayı çiftleri kadar taş vardır. Diğer sayılarla gruplamalarda bir sayı altı defa görülür; bunun dışında bu sayının her iki kısımda bulunduğu yalnız bir taş vardır. O halde bir sayı topyekûn sekiz defa görülür. Domino taşları zincirinin teşkilinde daima eşit sayılı yarılar birbirile birleştirildiğinden, n çift bir sayı olmak üzere, her sayı, zincirin iç kısmında n defa, uçlarında ise $8-n$, yani yine çift bir sayı defa görülür. Netice olarak bir sayı ya hiçbir uçta görülmez (sıfır çift bir sayıdır) veya her iki uçta aynı zamanda görülür.

12. Herhangi bir zamanda yer yüzünde yaşamış bulunan insanların sayısı N , bunların el sıkma sayıları da m olsun. Herkesi numaralıyalım ve k -yıncı kimsenin el sıkma sayısına n_k diyelim.

k -yıncı kimse l -yincinin elini sıkmış ise, bu el sıkma hem n_k , hem de n_l sayısı içinde sayılmış bulunmaktadır. O halde

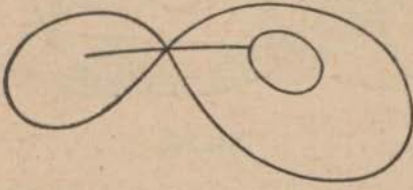
$$S = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N \quad (N \text{ terim})$$

toplamı içinde de her el sıkma iki defa sayılmış olur ve

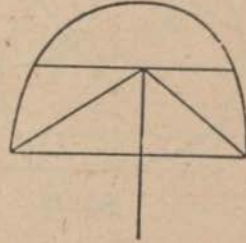
$$S = 2m$$

dir. Halbuki bir takım tam sayıların toplamı çift ise, terimlerden tek olanların sayısı da çifttir.

13. Toplantıdaki bütün üyeler tek sayıda tanıdık eli sıkılmış olsalardı, 225 kimseden (225 tek bir sayıdır) herbiri



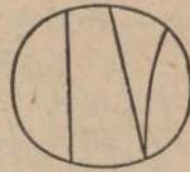
Şek. 56



Şek. 57

tek sayıda el sıkılmış olurdu. Bu ise bir önceki problemle (orada $N = 225$ alınırsa) çelişme halindedir.

14. Bu mümkün olsaydı, her noktada üç tane bağlama çizgisinin başlaması gerekirdi. Nokta sayısını (beş) 3 ile çarpınca, her çizginin iki uç noktası olduğundan, çizgiler sayısının iki katını, dolayısıyla çift bir sayıyı elde etmemiz icabederdi. Fakat bu



Şek. 58

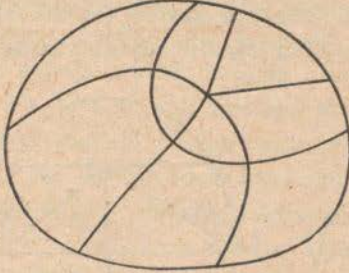
$$5 \cdot 3 = 15$$

olup tek bir sayıdır.

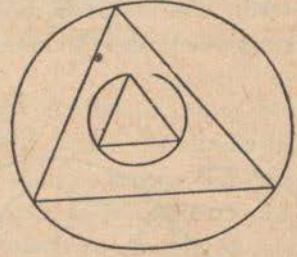
15. Mümkün çözümlerden biri: a) için şek. 56 dan, b) için de şek. 57 den gözükmektedir.

16. $k_1 + k_2 + \dots + k_v$ toplamında her sınır iki defa sayılmıştır; çünkü bunlar uç noktalarının her birinin geçeliklerinde hesaba katılmışlardır, (uç noktaların çakışması halinde de bu sınır, mütekabil köşe noktasının geçerliğinin sayımında iki defa sayılır).

17. İddia problem 16 dan çıkar. Bir takım tam sayıların toplamı çift ise, toplamda tek sayı olan terimler çift bir sayıda bulunur.



Şek. 59

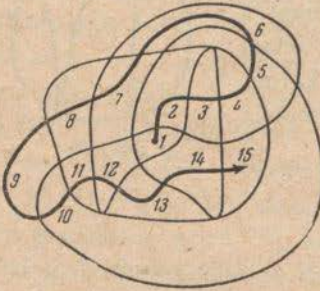


Şek. 60

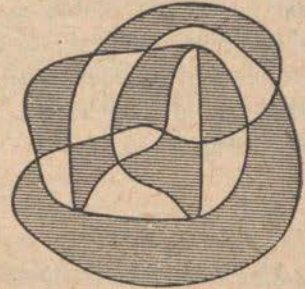
18. a), b) ve c) için mümkün çözümler şek. 58, 59 ve 60 dan görülmektedir.

19. $n_1 + n_2 + \dots + n_s$ toplamında her sınır iki defa bulunmaktadır; zira bunlardan herbiri her iki komşu memlekete de aittir.

20. Tıpkı problem 17 nin problem 16 dan çıktığı gibi, bu da problem 19 dan elde edilir.



Şek. 61

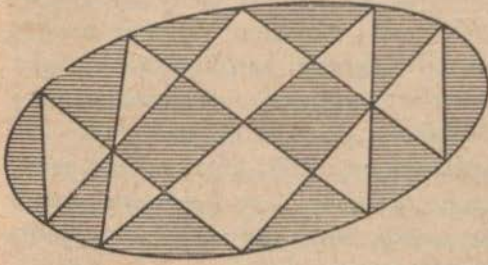


Şek. 62

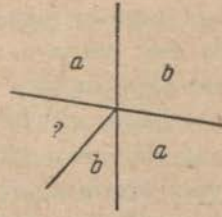
21. Şek 61 ve 62 ye bak.

22. Haritamızı iki renkle regüler boyayalım(şek.63'e bak). Memleketleri kalenin sürülmüş olduğu sıra üzere numaralarsak, çift numaralı bütün memleketler bir rengi, tek numaralı

memleketler de diğer rengi alırlar; zira kale her hamlede bir renkteki bir memleketden öteki renkteki birine varır (problem 6'nın çözümü ile kıst.). Hepsi 21 tane olan mem-

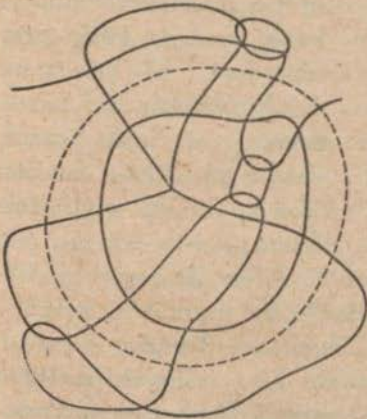


Şek. 63

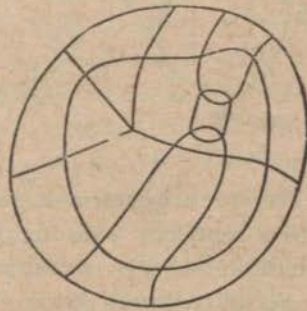


Şek. 64

leketlerden 11 tanesinin tek (1., 3., ..., 21.), 10 tanesinin de çift numaralı olması gerekirdi. Halbuki burada 12 siyah ye yalnız 9 tane de beyaz memleket bulunmaktadır.



Şek. 65

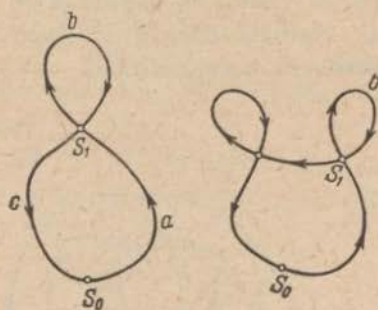


Şek. 66

23. Herhangi bir köşe noktasının tek bir geçerliği haiz olması halinde, bu köşenin ait bulunduğu memleketler bile iki renkle regüler boyanamazlardı (şek. 64).

24. Kalemizin yolunu gözönüne alalım (şek. 65 de çizgi çizgi gösterilmiş yol takip ediliyor). Şimdi haritanın, yolumuzun dışında kalan kısmını atalım, fakat yolu haritaya dahil edelim. Böylece şek. 66 da çizilmiş bulunan yeni bir harita elde ederiz. Bu haritanın bütün iç noktaları, hipotez gereğince, çift geçerliği haizdir ; kalenin yolu ile eski haritaya ait sınırların kesişme noktalarından ibaret olan dış köşe noktalarının geçerlikleri ise dır. Fakat yalnız çift bir sayıda tek geçerlikli köşe noktası mevcut olabilmesi yüzünden (problem 17 ye bak) kale, kendi yolu üzerinde çift bir sayıda sınırı aşmak zorunda kalır, yani çift bir sayıda hamle yapmış olur.

25. S_0 dan çıkan kalenin her memlekete bir defadan fazla sürülmediği hal biraz önce problem 24 de bahis konusu edildi. Şimdi kale herhangi bir S_1 memleketine iki defa sürülsün, yani bu memleketde bizzat kendi yolunu kesip geçsin (şek. 67 ye bak).



Şek. 67

$S_0 a S_1$ parçasındaki hamle sayısı p ye, $S_1 b S_1$ üzerindeki q ya $S_1 c S_0$ parçası üzerindeki de r ye eşit olsun. $p + q + r$ nin çift

olduğunu göstermek gerekiyor Problem 24 e göre q çifttir ; $S_0 a S_1 c S_0$ yolu da problem 24 ün hipotezini gerçekleştirdiğinden $p + r$ de aynı şekilde çifttir. Buradan $p + q + r$ nin çift olduğu çıkar. Eğer kale bir yerine iki ilmikten geçiyorsa, bunlardan birini — meselâ $S_1 b S_1$ i — terkedersek, biraz önce gözönüne aldığımız hali elde ederiz ; yine problem 24 e göre $S_1 b S_1$ ilmiğinin geçilmesi için çift bir sayıda hamle gerekir ; o halde bütün yol için de çift bir sayıda hamleye ihtiyaç vardır. Bu suretle neticemiz herhangi bir sayıda ilmik için de isbat edilebilir.

26. İkinci yol ters yönde katedilirse, S_1 den S_0 a q hamlede varılacaktır. Eğer S_0 dan S_1 e birinci yoldan yürünür ve bundan sonra S_0 a ikinci yol ters yönde gidilerek varılırsa, böylece S_0 a $p + q$ hamlede ulaşılmış olur. Problem 25 e göre $p + q$ çift bir sayıdır ve dolayısıyla p ve q nun ya her ikisi de çift veya her ikisi de tektir.

27. Birinci metod. Kalemiz herhangi bir S_0 memleketinden çıkarak haritamız üzerindeki memleketleri birinden diğerine geçerek dolaşmaktadır. Bu esnada memleketler, kalenin sürüldüğü sıra üzere numaralanıyor. Bu arada kalenin bir memlekete veya başkasına iki veya daha fazla sürülmüş olması mümkündür. Bu takdirde bahis konusu olan memleket bir değil, iki veya daha fazla numara alır. Problem 26 ya göre bu numaraların ya hepsi çift veya hepsi tek olacaktır; buna karşılık komşu memleketlerin numaraları tek bir sayı kadar farkederler. Gerçekten S_0 dan S_1 e p hamlede varıldığına ve S_2 , S_1 ile sınırdış olduğuna göre, S_0 dan S_2 ye $p + 1$ hamlede ulaşılabilir. Buna göre eğer $p + 1$ çift ise, S_0 dan S_2 ye götüren bütün yollar için çift bir sayıda hamleye ihtiyaç vardır - ve tersi de doğrudur. O halde p tek ise bu hamle sayısı çift, p çift ise hamle sayısı tektir. Kale bütün memleketlere sürüldükten sonra harita üzerinde tek numaralı memleketlerin hepsini bir renkle, çift numaralı olanları da başka bir renkle boyarsak, hakikaten regüler bir boyama elde ederiz.

İkinci metod. Haritamızın sınırları ve köşe noktaları boyunca hareket edelim. Bu esnada bir sınırı yürüyüp herhangi bir köşe noktasına gelince, bu köşe noktasından çıkan (geçtiğimizden farklı) başka bir sınıra geçerek harekete devam edelim. Haritamızda 1 geçerlikli hiçbir nokta bulunmadığı için, ulaşılmış bulunduğumuz her köşe noktasından harekete devam edebiliriz. Böylece üzerinde daha önce bir defa bulunmuş olduğumuz, meselâ bir A , köşe noktasına tekrar gelinceye kadar gitmiş olalım. A noktasından yine bu noktaya geri dönene kadar katedil-

miş olan bu yol kendi kendini hiçbir yerde kesmiyen bir kapalı çizgi teşkil etmekte olup, bunu haritamızdan silelim. Bu esnada köşe noktalarının geçerlikleri ya hiç değişmez (nokta yukarıda belirtilen çizgi üzerinde değilse) yahut da 2 kadar azalır (bu arada geçerliği 2 olan bazı noktalar yok olabilir de). Böylece ortaya çıkan harita üzerinde yeniden, sınırlardan teşkil edilen, kendi kendini hiçbir yerde kesmiyen kapalı bir çizgi arayıp bulalım ve bunu da aynı şekilde silelim. Bu işleme mümkün olduğu müddetce devam edelim. Neticede köşe noktalarının hepsi de çift geçerliği haiz, yukarda belirtilmiş olan ve düzlemi daima iki kısma bölen çevrelerin birbiri üzerine konması ile, tıpkı şek. 5 de çemberlerin birbiri üzerine konması ile elde edilen haritaya benzer, bir harita elde edilebilir. Problem 2 ye benzer şekilde bu çeşit bir haritanın iki renkle regüler boyanabileceği isbatlanabilir.

İhtar. Benzer düşüncelerle, köşe noktalarının hepsi çift geçerlikli bir haritanın bir kalemde, yani çizim esnasında kalemin ucunu kaldırmaya ve hiçbir sınırı iki defa çizmeye lüzum kalmaksızın çizilebileceğini göstermek zor değildir. Genel olarak, bir eğri şebekesi iki halde bir kalemde çizilebilir; bunun için: ya bütün köşe noktalarının geçerlikleri çift olmalı veya tek geçerlikli tam iki tane köşe noktası bulunmalıdır (fakat bu takdirde çizgiyi bu iki noktadan birinde başlatıp diğerinde bitirmek gerekir).

28. Bu problemin çözümünde, ya problem 1 deki gibi matematiksel indüksiyonu kullanabilir veya problem 2 nin çözümündeki metodu uygulayabiliriz. Burada çözümün şemasını ikinci metoda göre veriyoruz. Şekillerimizden (kirişle birlikte çember) herhangi birini alalım. Bu şekil düzlemi üç kısma ayırmaktadır. Haritamızın bu kısımlardan birindeki bütün memleketleri 0 numarasını, ikinci kısımda bulunan bütün memleketleri 1 numarasını, üçüncü kısımdaki bütün memleketleri de 2 numarasını alsınlar. Bunu bütün şekiller için yapalım. Böylece her memlekete n tane numara düşer. Bunları toplayalım ve bu toplamın 3 ile bö-

lümündeki kalanı alalım. Bu kalanın 0 olduğu memleketler beyaz renge, kalanı 1 veya 2 olanlar da kırmızı veya siyaha boyansın. Şimdi tıpkı problem 2 deki gibi, böylece elde edilen boyamanın regüler olduğu kolayca gösterilebilir.

29. Tahtanın bir kenarı m tane altıgenden teşkil edilmiş olsun. Tahtanın 6 kenarını teşkil eden $6(m-1)$ tane haneyi kaldıralım. Böylece aynı şekli haiz, fakat kenarları sadece $m-1$ altıgenden ibaret bir tahta elde ederiz. Buna göre, tahtamızın hane sayısına S_m dersek,

$$S_m = 6(m-1) + S_{m-1}$$

bağıntısı cari olur. Aynı şekilde

$$S_{m-1} = 6(m-2) + S_{m-2},$$

$$S_{m-2} = 6(m-3) + S_{m-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_2 = 6 \cdot 1 + S_1,$$

$$S_1 = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} S_m &= 6(m-1) + 6(m-2) + \dots + 6 \cdot 1 + 1 = \\ &= 1 + 6[1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1)] \end{aligned}$$

çıkar. Halbuki

$$1 + 2 + \dots + (m-2) + (m-1) = \frac{(m-1) \cdot m}{2}$$

dir ¹⁾. O halde kesin sonuç

$$S_m = 1 + 6 \frac{(m-1) \cdot m}{2} = 3m^2 - 3m + 1$$

dir.

30. Şek. 69 a bakınız.

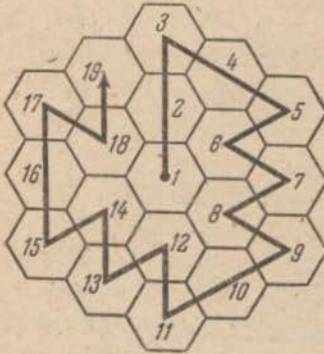
31. Kenarlarının herbiri üç altıgenden ibaret bir tahta için üç renkle regüler bir boyama elde ettik (şek. 69 ve

¹⁾ Meselâ bu yayım serisinde, B. NATANSON'un «sonsuz küçük büyüklüklerin toplamı» veya I. S. SOMINSKI'nin «matematiksel indüksiyon metodu» na bak.

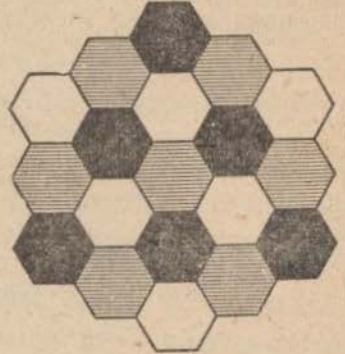
70 e bak ¹⁾). Aynı şeyi herhangi bir tahta için de elde ederiz. Gerçekten üç renkle regüler boyanmış olan bir tahtamız olduğunu kabul edelim. Bu halde deve, kırmızı haneden beyaza, beyazdan siyaha, siyahtan da tekrar kırmızı haneye v. s. gitsin (şek. 19 ve şek. 20 ile kıst.). Şimdi deve kendi yoluna merkezdeki kırmızı haneden başlar ve biz de geçilen hanelerin renk sırasını kaydedersek (k = kırmızı, b = beyaz, s = siyah)

kbs kbs kbs kbs kbs kb...

dizisini elde ederiz. O halde devenin gittiği yoldan bağımsız olarak (sadece bu yolun kırmızı bir haneden baş-



Şek. 69



Şek. 70

laması kabulü ile) numaraları 3 ile bölünebilen bütün haneler siyah, numaraları 3 ile bölümde 1 veya 2 kalanını verenler ise kırmızı veya beyaz olacaktır.

O halde gerçekten problem 31 in ifadesinde tarif edilmiş olan boyama, burada önceden regüler boyanmış olarak aldığımız tahtanın boyanışı ile çıkışacaktır (problem 6 ile kıst.).

32. Deve kendi yoluna meselâ siyah bir haneden başlıyorsa, devenin sürülmüş olduğu hanelerin renk dizisi şu görünüşte olacaktır (bir önceki probleme bak):

¹⁾ Şek. 70 de kırmızı renk yatay tarama ile işaretlenmiştir.

skb skb skb skb ...

Bu dizinin peryodu üç terimden ibarettir ; o halde deve çıkış hanesinin rengindeki bir haneye (özelikle bizzat çıkış hanesine) ancak ve ancak onlar arasında yapılan hamle sayısının üçün bir katı olması halinde varacaktır.

33. 19 haneden ibaret bir tahtayı (şek. 70 e bak) dolaşmak için deve 18 hamle yapmak zorundadır ; yani hamle sayısı üçün bir katıdır ; bu yüzden de deve en sonunda çıkış hanesi ile aynı renkte olan bir haneye varacaktır. Dolayısıyla deve, bu renkteki hanelere diğer renktekilerden daha sık sürülmüş olacaktır. Halbuki köşe hanesinin rengindeki hanelerin sayısı diğer renklerden herbirindeki hanelerin sayısından fazla değildir (şek. 70 e bak). (Siyah ve beyazdan daha fazla kırmızı hane vardır ; problem 30 bu yüzden çözümlü idi).

34. $3m^2 - 3m + 1$ haneli bir tahtayı (problem 29 a bak) dolaşmak için deve $3m^2 - 3m = 3(m^2 - m)$ hamle yapmak zorundadır ve bu hamle sayısı üçün bir katı olduğu için deve son hamlede çıkış hanesiyle aynı renkte olan bir haneye varacaktır. O halde deve bu esnada çıkış hanesine komşu bir haneye varamaz.

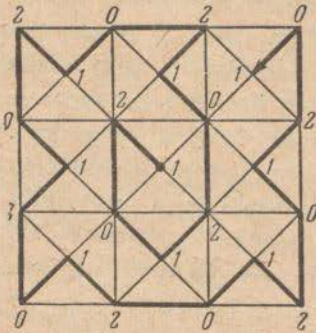
35. Devenin son hamlesi, onu çıkış hanesinin rengindeki bir haneye götürür. Dolayısıyla bu renkte olan hanelerden, geri kalan iki rengin herbirindekilerden daha fazla bulunması gerekirdi. Halbuki tahtamız üzerinde (şek. 20) 21 siyah, 21 beyaz, 19 da kırmızı hane vardır.

36. Şek. 71 ve 72 ye bak ¹⁾. Regüler bir boyama elde ederiz.

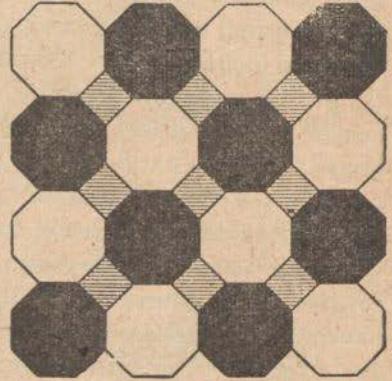
37. Tahtamız 25 haneden ibarettir. Üzerinde, söylendiği şekilde dolaşmak için 24 hamle gereklidir. Deve her üçüncü hamlede çıkış hanesi renginde olan bir haneye ulaşır (şek. 72). Deve son hamle ile hakikatan çıkış hanesinin renginde bir haneye varırsa, bu renkteki hanelerin diğer renkteki hanelerden daha fazla bulunması gerekir. Se-

¹⁾ Şek. 72 de kırmızı renk yatay tarama ile işaretlenmiştir.

kizgen hanelerimiz siyah ve beyaza boyanmışlardır ; kırmızı dörtgen hanelerden 9 tane, fakat diğer iki renkte olanlardan yalnız 8'er tane vardır.

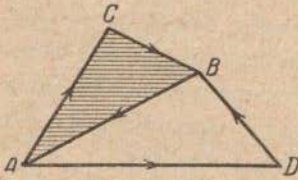


Şek. 71



Şek. 72

38. Eğer okların yönüne dikkat etmezsek, üçgenlerin kenarları üzerinden, her keyfi köşe noktasından diğer herhangi bir köşe noktasına varabiliriz. Şimdi yolumuzu, bu hareket daima okların yönüne uyacak surette değiştirelim.



Şek. 73

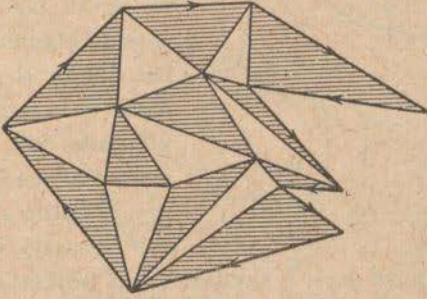
Yolun bu şekildeki düzeltilmesi şöyle yapılır : Bir kenar boyunca ok yönünde gidiyorsa, yolu olduğu gibi bırakırız. Fakat bir kenarı ok yönüne karşı geçmiş olmamız halinde, bu kenarda komşu iki üçgen-den birinin diğer iki kenarı

üzerinden geçen yolu seçeriz (şek. 73) ; A dan B ye giden yol ok yönüne karşıdır ; bu yüzden ya ACB veya ADB yolunu kullanırız.

39. Evvelâ, burada bu teoremi, devenin kendi yolunu hiçbir yerde kesmemesi hali için isbatlamanın yeteceği açıktır ; zira yolun ilmiklenme hali hakkında problem 25 in çözümünden bilgi edinilebilir. O halde deve her nok-

taya yalnız bir defa uğradıktan sonra kendi çıkış noktasına dönmüş olsun. Şimdi devenin yolu ile çevrelenen bölgenin dış tarafında bulunanların hepsini silelim (şek. 74). Böylece iki renkle regüler boyanabilen bir harita meydana gelir; zira devenin yoluna, bu yolun sağında sınırlanan bütün üçgenler siyaha, solunda sınırlananlar beyaza boyanmışlardır. O halde yolla sınırlanan bölgenin iç tarafında bulunup yola sınırı olan bütün üçgenler aynı renkli olurlar ve eğer bölgenin iç tarafı için bundan farklı bir renk daha kullanırsak, regüler bir boyama elde ederiz.

Böylece meydana gelen harita içindeki bütün memleketler hep üçgen olduklarından, problem 4 uyarınca, böl-



Şek. 74

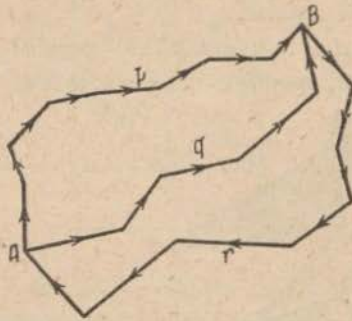
genin dış kısmındaki memleketin sınır sayısı, yani devenin yolu ile çakışan kenarların sayısı, isbat edilmek istendiği gibi, 3 ile bölünebilir.

40. B den A ya giden yardımcı bir yol arayalım (böyle bir yol problem 38 e göre bulunabilir). Devenin bu yolu geçmesi için r hamleye ihtiyaç bulunsun (şek. 75). O halde problem 39 a göre $p+r$, 3 ile bölünebildiği gibi $q+r$ de 3 ile bölünebilir. Buradan

$$(p+r) - (q+r) = p-q$$

nun 3 ile bölünebildiği çıkar.

41. Herhangi bir köşe noktasını A ile gösterelim. B herhangi başka bir köşe noktası olsun. Deve A dan B ye genel olarak birbirinden farklı birçok yollar üzerinden varabilir ve herbir yola belirli bir hamle sayısı düşer. Fakat problem 40 a göre bütün bu sayılar 3 ile bölümde aynı kalanı verirler. Bu kalanı B köşe noktasının numarası olarak alalım. Diğer bütün köşe noktaları için aynı şeyi yaparsak, köşe noktaları 0, 1, 2 rakamları ile numaralanmış olurlar. Şimdi komşu köşe noktalarının farklı nu-



Şek. 75

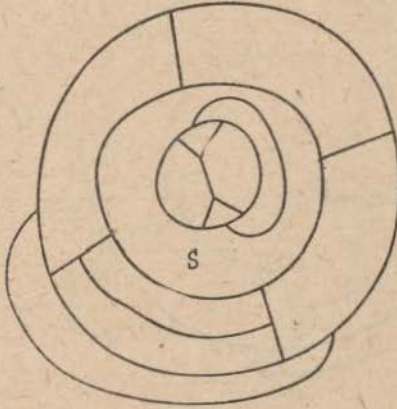
maraları haiz olduğunu gösterelim. B_1, B_2 böyle iki nokta olsun ve bunlar meselâ B_1 den B_2 ye doğru yönlü bir okla birbirine bağlanmış bulunsunlar. Deve A dan B_1 e p hamlede varıp $B_1 B_2$ oku yönünde bir hamle yap-sın ; böylece B_2 ye ulaşılır. O halde A dan B_2 ye $p + 1$ hamle ile varılabilir.

Halbuki p ve $p + 1$ sayıları 3 ile bölümde farklı kalanlar verirler.

42. K normal haritasına düal K^* haritasını inşa edelim. Düal haritalar arasındaki 4. bağıntısına göre K^* üçköşelerden meydana gelir. s. 22 de verilen teoreme göre K haritası ancak ve ancak K^* in köşe noktalarının üç rakamla regüler numaralanabilmesi halinde üç renkle regüler boyanabilir. Fakat üç köşelerden ibaret K^* haritasının köşe noktaları da ancak ve yalnız bizzat üçköşeler iki renkle regüler boyanabilirse (s. 18 e bak) veya, aynı şey demek olan, K^* haritasının bütün köşe noktaları çift geçerlikli ise, üç rakamla regüler numaralanabilir. Halbuki bu şartlardan sonuncusu K haritasının her memleketinin çift sayıda sınırı (düal haritalar arasındaki 4. bağıntısı) haiz olması şartına denktir.

Böylece iddiamız isbatlanmış olur.

Aslında bu isbat yalnız bağımlı haritalar için caridir. Gerçekten yalnız bu halde zorluklarla karşılaşmadan düal haritaya geçebiliriz. Bununla beraber teorem bağımlı olmayan haritalar için de caridir. Bunu, haritanın tamamen ayrı iki kısma bölünmüş olduğu hal için isbatlıyalım. Memleketlerinin hepsi de çift bir sayıda köşe noktasını haiz olan ve bağımlı olmayan K normal haritasında ayırıcı memleket S olsun (şek. 76). K haritasının bölündüğü K' ile K'' haritalarını ayrı ayrı (şek. 77 a ve b) gözönüne alalım. Bu haritalardan herbiri bağımlıdır. K' ve K'' harita-

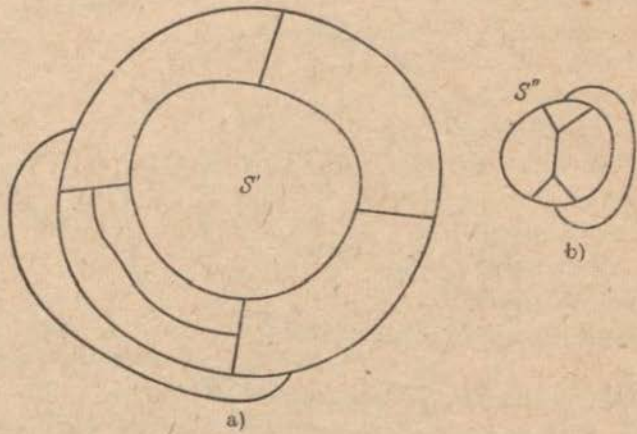


Şek. 76

larının bütün memleketleri — belki de S' ve S'' nün istisnası ile — hipoteze göre çift sayıda köşeyi haizdirler. K' haritasında (tıpkı K'' haritasındaki gibi) tek sayıda sınırı haiz yalnız bir tane memleket mevcut olamayacağından (problem 20) S' ile S'' de çift sayıda köşe noktasını haizdirler. Henüz isbatlanmış olan teoreme göre K' ve K'' haritaları üç renkle regüler boyanabilir. Bu esnada sadece S' ve S'' nün aynı renge boyanmasına dikkat etmek gerekir. Bu takdirde ise K haritasının da üç renkle regüler

boyanabileceği açıktır. Haritanın üç, dört ve daha fazla kısımlara bölünmüş olması halleri için teoremler benzer şekilde isbatlanır.

43. Her sınıra, ayırmakta olduğu iki memleketin numaraları toplamını numara olarak tekabül ettirelim. Bu esnada üç tane $(0, 1)$, $(1, 0)$ veya $(1, 1)$ numaralarından biri elde edilecektir; zira iki numaranın toplamı ancak her ikisinin aynı olması halinde $(0, 0)$ a eşittir. Bu numaralama regülerdir, çünkü: a, b ve c herhangi bir köşe noktasında birbirine dokunan memleketlerin numaraları oldu-

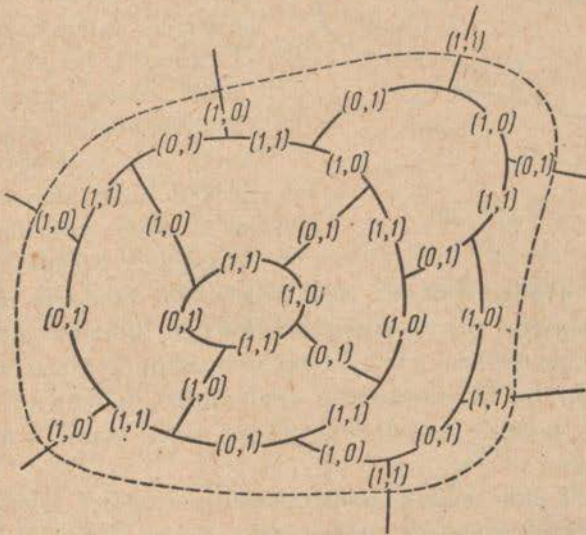


Şek. 77

ğuna göre, bu köşe noktasından çıkan sınırlar $a+b$, $a+c$ ve $b+c$ numaralarını haizdir. Fakat $b \neq c$ olduğu için $a+b \neq a+c$ dir. Aynı şekilde $a+b \neq b+c$ ve $a+c \neq b+c$ dir. (a, b, c harfleri ile $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ ve $(1, 1)$ çiftlerinden geliş güzel alınan üç tanesini gösterdik).

44. Kalenin her haneye bir defadan fazla sürülmemiş olduğu hali gözönüne almak kâfidir. Genel hal için tıpkı problem 25 deki gibi hareket edilir (eğer kale ilmikler yapıyorsa ve her ilmik üzerinde numaralar $(0,0)$ a eşit ise, bu yol üzerindeki bütün numaraların toplamı da $(0,0)$ a eşittir).

Kalenin yolu tarafından çevrelenen (şek. 78 de yol kesikli çizgi ile çizilmiştir) bölgenin iç kısmında $A_1, A_2, \dots, A_n$ köşe noktaları bulunsun. Her köşe noktasında kavuşan sınırların numaraları toplanacak olursa, $(0, 0)$ elde edilir. Bu denklemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ köşe noktalarından herbiri için yazıp bunları taraf tarafa toplayalım. Sağ tarafta $(0, 0)$, sol tarafta ise uçlarından biri veya her ikisi kale hamleleri ile çevrilmiş bölge içinde bulunan bütün sınırların top-

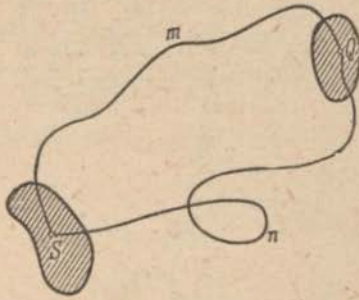


Şek. 78

lamı elde edilir. Bu esnada uçlarından her ikisi de bölgenin iç tarafında bulunan sınırlar iki defa, yalnız bir ucu bölgenin iç tarafında bulunan sınırlar ise bir defa sayılmışlardır. Birincilerin numaraları toplamı x e sonuncularınki de y ye eşit olduğuna göre $2x + y = (0, 0)$ dir. Halbuki her numara için $2x = (0, 0)$ idi; buradan isbatı istenen $y = (0, 0)$ çıkar.

45. Birinci metod. Herhangi bir S memleketi seçip buna $(0, 0)$ numarasını tekabül ettirelim. Kaleyi, bu haneden çıkarak her memlekete bir defa olmak üzere

haritanın bütün memleketlerine sürelim. Kalenin S den çıkan ve verilmiş diğer bir Q hanesine giden yolu üzerinde kestiği bütün sınırların numaralarını toplıyalım; bu toplam a olsun. a yı Q hanesinin numarası olarak kaydedelim.



Şek. 79

Evvelâ hanelerin bu numaralanışının, haritanın dolaşılma tarzından bağımsız olduğuna kanaat getirelim. S den keyfi bir Q hanesine iki yol üzerinden varmış olduğumuzu kabul edelim (şek. 79). SmQ yolu üzerindeki sınırların numaraları toplamı a , SnQ yolu üzerindeki

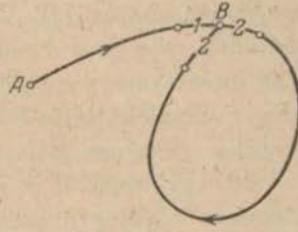
dekilerin de b olsun. Problem 44 e göre $SmQnS$ yolu üzerindeki sınırların numaraları toplamı $(0, 0)$ a eşit olduğu için, buradan $a+b = (0, 0)$ elde edilir. Halbuki iki numaranın toplamı ancak ve ancak bu iki numaranın aynı olması halinde $(0, 0)$ a eşittir; o halde $a=b$ olup, Q tek türlü olarak a numarasını alır.

Şimdi elde edilen numaralamanın regüler olduğunu gösterelim. P ile Q , aralarındaki sınırın herhangi bir c numarasını haiz olduğu iki komşu hane olsun ve S den P ye giden yol üzerindeki sınırların numaraları toplamı da a ya eşit bulunsun; dolayısıyla P , a numarasını haizdir. P den Q ya c numaralı sınırı aşarak varırız. O halde Q $a+c$ numarasını haiz olup, $a+c$ de daima a dan farklıdır.

İkinci metod. Sınırları 1, 2, 3 rakamları ile numaralıyalım. Herhangi bir A noktasından çıkarak 1 numaralı sınır boyunca gidelim ve hareketimize haritanın köşe noktaları ve sınırları üzerinde devam edelim; bu esnada her defasında 1 numaralı bir sınırı yürüdükten sonra 2 numaralı bir sınır boyunca gidelim ve eğer 2 numaralı bir

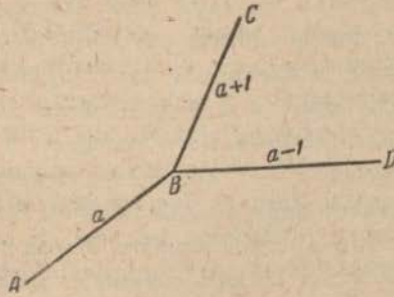
sınırdan geliyorsak harekete 1 numaralı bir sınır üzerinde devam edelim. Bu hareket, daha önce üzerinde bir defa bulunmuş olduğumuz bir B köşe noktasına ulaştığımız anda sona ersin.

Üzerinde B ye vardığımız sınır ya 1 veya 2 numaralıdır. Numaralamanın regüler olması sebebiyle B köşe noktası A ile çakışacaktır (B köşe noktası A ile çakışmasaydı, B de kavuşan sınırların numaralanışı regüler olmazdı (şek. 80)). Böylece 1 ve 2 numaralı sınırlardan meydana gelen yolumuzun, kapalı ve hiç bir yerde kendi kendisini kesmiyen bir eğri olduğu görülmüş olur.



Şek. 80

Şimdi 1 veya 2 numaralarından birini haiz olan ve yukarki çevreye ait bulunmayan herhangi bir sınır alalım ve bunun üzerinde aynı şekilde dolanmaya başlayalım; böylece yeni bir eğri elde ederiz. Bu işleme, daha yürünmemiş 1 ve 2 numaralı sınır kalmayıncaya kadar devam edelim.



Şek. 81

Böylece 1 ve 2 numaralı sınırlar, kapalı ve kendi kendisini hiç bir yerde kesmiyen eğrilerden ibaret bir eğriler sistemi teşkil ederler. Bu eğriler haritayı herbiri birtakım haneleri ihtiva eden $M_1, M_2, \dots, M_p$ bölgelerine ayırır. Eğer 3 numaralı bütün sınırlar silinirse, sınırları eğrilerimiz ve haneleri de $M_1, M_2, \dots, M_p$ bölgeleri olan bir harita ortaya çıkar. $M_1, M_2, \dots, M_p$ nin a ve b gibi iki renkle regüler

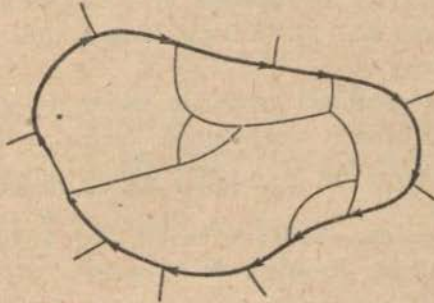
boyanabileceğine dair olan isbat problem 2 den kelime be kelime nakledilebilir. Şimdi 1 ve 3 numaralı sınırlardan meydana gelen benzer bir eğriler sistemini gözönüne alalım. Bunlar da düzlemi, c ve d renkleri ile regüler boyayabileceğimiz $N_1, N_2, \dots, N_r$ bölgelerine ayırmış olsunlar. Esas haritanın her S memleketi $M_1, M_2, \dots, M_p$ bölgelerinden biri içinde olup, ya a veya b renklerinden birini ve bundan başka $N_1, N_2, \dots, N_r$ bölgelerinden biri içinde bulunup, ya c veya d renklerinden birini haizdir. Buna göre her memlekete $(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)$ çiftlerinden biri düşer. Memleketlerin bu şekildeki çiftlerle numaralanışının regüler olduğuna kolayca kanaat getirilebilir.

46. Problem 45 e göre, bu haritanın sınırlarının üç rakamla regüler numaralanabileceğini göstermek kâfidir. Deve, haritanın sınırları üzerinde her sınırdan komşu her sınıra geçebilecek şekilde dolaşsın. 1 numarasını tekabül ettireceğimiz herhangi bir sınırdan çıkarak numaralamaya devam edelim. a numaralı herhangi bir AB sınırını yürüdükten sonra (şek. 81) B köşe noktasına ulaşmış olaalım. Buradan ya sağa (BD üzerine) veya sola (BC üzerine) yürümeye devam edebiliriz. Sola ilerliyelim; bu takdirde sınır numaramız 1 kadar değişecek, meselâ artacak, yani BC sınırına $a + 1$ numarası verilecektir. Sağa döndüğümüz takdirde ise a numarası 1 kadar azalır yani BD sınırına $a - 1$ numarasını tekabül ettirmemiz gerekir. Bu esnada genel olarak her sınır bir değil, birçok numara alacaktır (burada numara olarak negatif sayıların da gelebileceğine dikkati çekelim). Şimdi aynı bir sınıra ait olan bütün numaraların 3 ile bölümde aynı kalanı vereceğini gösterelim. (Bunu başarırız, her sınıra bu kalanı tekabül ettirerek regüler bir numaralama elde ederiz). İsbat şu yardımcı teoreme dayanır:

Deve a numaralı bir sınırdan çıkarak tekrar buna döner ve dönüşte bu sınır b numarasını alıyorsa, $b - a$ farkı 3 ile bölünebilir.

Devenin yolu g' tane sınır üzerinden gitsin ve bu es-

nada g_1 defa sol yana, g_2 defa da sağ yana dönmeğe karar verilmiş olsun ($g' = g_1 + g_2$). $b = a + g_1 - g_2$ olduğu açıktır; o halde $g_1 - g_2$ nin 3 ile bölünebildiğini göstermek icabeder. Bilindiği üzere isbatı, devenin hiçbir sınırı bir defadan fazla yürümediği hal için yapmak kâfidir. Devenin yolu şek. 82 de gösterilmiştir ($g' = 13$). Bu yol üzerindeki köşe noktalarından çıkan, fakat yolun kendisine ait olmayan bütün sınırlar iki tipe ayrılır: Devenin hareket



Şek. 82

yönünün sağında kalanlar (sayıları g_1 e eşittir ¹⁾) ve solunda bulunanlar (sayıları g_2 ye eşittir ¹⁾). Devenin, yolunu saat ibreleri yönünde yürümesi halinde (şek. 82) birinci tipteki sınırlar G bölgesinin iç tarafında, ikinci tiptekilerin hepsi de bu bölgenin dış kısmında bulunur (şek. 82 de $g_1 = 5$ ve $g_2 = 8$ dir). O halde devenin yoluna göre iç tarafta bulunan sınırların sayısı ile yine bu yola göre dış yanda bulunan sınırların sayıları farkının 3 ile bölünebildiğini göstermek icabeder.

G bölgesinin içindekilerle birlikte devenin yolunun kendisi üzerindeki köşe noktalarının sayısı v , aynı bölgenin (hakikaten) iç tarafında bulunan sınırların sayısı g_1 , ve G içindeki memleketlerin sınır sayıları da $n_1, n_2, \dots, n_s$ olduğuna göre

¹⁾ Bu esnada her iki uç noktası da devenin yolu üzerinde bulunan bir sınır iki defa sayılır.

$$3v = 2(g_i + g') + g_2, \quad (1)$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_s = 2g_i + g' \quad (2)$$

bağıntıları caridir. (2) yi (1) den çıkarırsak

$$g' + g_2 = 3v - (n_1 + n_2 + \dots + n_s)$$

elde edilir. Hipoteze göre $n_1, n_2, \dots, n_s$ sayılarının her biri 3 ile bölünebildiği için $g' + g_2$ de 3 ile bölünebilir. Fakat $g' = g_1 + g_2$ olduğundan $g_1 + 2g_2$ ve aynı şekilde $g_1 + 2g_2 - 3g_2 = g_1 - g_2$ de 3 ile bölünebilir; isbatı istenen de budur.

Burada bu yardımcı teoremin isbatı ile yetiniyor ve problemin çözümünü okuyucunun kendisine bırakıyoruz (isbatın şeması 39 dan 41 e kadar olan problemlerdekinin aynıdır).

47. Elde edilen harita üzerinde her köşe noktası 4 geçerliğini haizdir. Problem 16 ya göre

$$4 \cdot 6 = k_1 + k_2 + \dots + k_6 = 2g$$

olup, buradan $g = 12$ çıkar.

Harita bağımlıdır. Bağımlı olmasaydı, bütün köşe noktalarının sayısı 6 ya eşit olduğundan, bölünmüş olduğu parçalardan en az birinin köşe noktaları 4 den az olurdu. Öte yandan bu parça tamamen ayrı olduğundan, kendisinin her köşe noktası aynı parçanın yalnız bir noktasına bağlı olabilirdi. Bu ise, her köşe noktasının tam dört tane diğer köşe noktasına bağlı olması gerekçesi ile çelişme halindedir.

Harita bağımlı olduğundan EULER teoremini tatbik edebiliriz :

$$s = g + 2 - v = 8$$

Problem 19 a göre

$$n_1 + n_2 + \dots + n_8 = 2g = 24$$

tür. Harita üzerinde birköşeler ve ikiköşeler yoktur (kendi kendisi ile birleştirilmiş hiçbir köşe noktası ve farklı iki sınır ile birleştirilmiş hiçbir nokta çifti yoktur). O halde

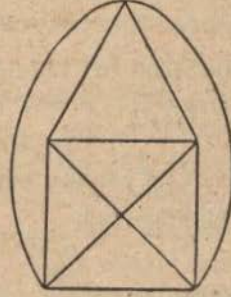
$n_1, n_2, \dots, n_8$ sayılarından hiçbirisi 3 den küçük değildir. Bunlardan biri bile 3 den büyük olsaydı toplam $3 \cdot 8 = 24$ den büyük olurdu, bu ise yanlıştır. Dolayısıyla $n_1 = n_2 = \dots = n_8 = 3$ dür (mütekabil harita şek. 83 de çizilmiştir).

48. Tersini kabul ederek istenen çizgileri çizdiğimizizi farzedelim; böylece bütün köşe noktaları 4 geçerliliğini haiz olan bir harita elde ederiz. Problem 16 sebeбіle

$$g = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$$

dür. EULER teoremine göre $s = g + 2 - v = 9$ dur (bağımlılık aynen bir önceki problemdeki gibi isbatlanabilir). Problem 19 a göre

$$n_1 + n_2 + \dots + n_9 = 28 \quad (1)$$



Şek 83

dir. Her memleketin sınır sayısı 3 den küçük olmadığından (bir önceki problemin çözümüne bakınız), (1) formülünden haritada sekiz üçköşe ve bir'de dörtköşe bulunduğu sonucu çıkar. O halde problem 4 e göre haritamız iki renkle regüler boyanamaz. Öte yandan her köşe noktasının geçerliği 4, yani çifttir; bu ise problem 27 ile çelişme halindedir.

49. Bu yolların çizilmiş olduklarını kabul edelim. Bu suretle: köşe noktaları evler ve çeşmeler, sınırları da yollar olan bir harita elde ederiz. Köşe noktalarının sayısı altı, herbirinin geçerliği ise 3 dür. Sınırların sayısı $g = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (problem 16), sınırlanan memleketlerin sayısı

ise $s = g + 2 - v = 5$ tir. Hiçbir yol bir evi bir eve veya bir çeşmeyi bir çeşmeye birleştirmedığınden, eğer evlere 0, çeşmelere de 1 numarasını tekabül ettirirsek, haritamızın regüler bir numaralanışını elde ederiz. Buradan her memleketin tek sayıda sınırı haiz olduğu (problem 23 e

düal) çıkar. İkiköşe mevcut olmadığından, hiçbir memleketin sınırı 4 den daha az değildir. Problem 19 a göre

$$18 = 2g = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \geq 4 \cdot 5 = 20$$

olup, bu da bir çelişmedir.

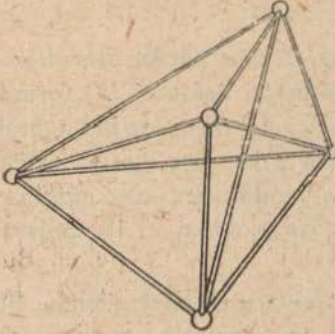
50. Tersini kabul edelim. Bu suretle 5 köşe noktasını haiz, sınırları da çizilmiş çizgiler olan bir harita ortaya çıkar. Her köşe noktasının geçerliği 4 dür. $g = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (problem 16) bulunduğu göre, EULER teoremi uyarınca $s = g + 2 - v = 7$ olur. Problem 19 a göre

$$n_1 + n_2 + \dots + n_7 = 2g = 20$$

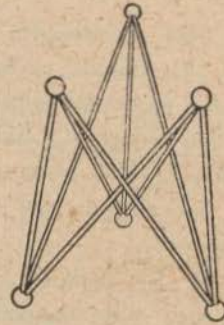
dir. Öte yandan bütün $n_1, n_2, \dots, n_7$ ler 3 den küçük olmadıkları için

$$n_1 + n_2 + \dots + n_7 \geq 3 \cdot 7 = 21$$

eşitsizliği caridir. Bu ise bir çelişmedir.



Şek. 84



Şek. 85

N o t . Düzlemde beş noktayı ikiye ikiye, birbirlerini kesmeyen eğrilerle birleştirmek imkânsız ise de, bu problem uzayda kolayca çözülebilir (şek. 84). Buna benzer olarak, uzayda, problem 49 (şek. 85) ve problem 48 için de bir şekil inşa edilebilir. Genel olarak, birbirleriyle birleştirilmiş n tane noktanın düzlemde kesişmeler gösteren şeması uzayda kesişmesiz olarak kurulabilir (tıpkı, iplikleri

kesişmiyen, düğümleri de n tane noktadan ibaret olan bir ağda olduğu gibi). Güçlükler şu karşı sorunun teşkil ettiği problemin çözümünde ortaya çıkar : Hangi uzay eğri ağları kesişmeden düzlem üzerine tasvir olunabilir ? Şek. 84 ve 85 kesişmeksizin düzlem üzerine tasviri imkânsız olan uzay ağlarına ait misâlleri göstermektedir. Şek. 84 veya 85 de gösterilen şekilde aslî kısımlar ihtiva eden (burada «aslî kısım», eğrilerden ve köşe noktalarından bir kısmının terkedilmesine, problem 50 de istendiği gibi herbiri herbirile birleştirilmiş 5 noktadan veya problem 49 da istendiği gibi birleştirilmiş 6 noktadan ibaret şekillerini ifade etmektedir) uzay ağlarının kesişmeksizin düzleme tasvir edilemeyecekleri açıktır. Gösterilebilir ki: kesişmeksizin düzleme tasvir edilemiyen bütün genel ağlar bunlardan ibarettir, yani böyle her ağ aslî kısım olarak mutlaka ya problem 49 daki gibi bir şekli veya problem 50 deki gibi bir şekli ihtiva eder.

51. Bu türlü memleketler mevcut olsaydı, bu takdirde bunların herbirinden başşehri seçer ve komşu memleketlerin başşehirlerini tren yolları ile birleştirirdik (diğer bir deyimle düal haritaya geçerdik). Böylece imkânsızlığı bir önceki problemde zaten gösterilmiş olan bir şekil elde etmiş olurduk. Bununla beraber bu problem bir öncekine benzer şekilde doğrudan doğruya hesapla da çözülebilir.

52. Tersini kabul edelim. O halde bütün $n_1, n_2, \dots, n_s$ sayılarından hiçbiri 6 dan küçük değildir, dolayısıyla

$$6s \leq n_1 + n_2 + \dots + n_s = 2g, \quad 3s \leq g \quad (1)$$

dir. Öte yandan bütün köşe noktalarının geçerlikleri 3 den küçük değildir ; o halde

$$3v \leq 2g \quad (2)$$

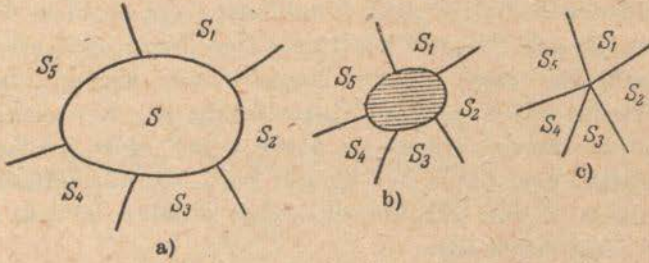
eşitsizliği caridir (problem 16). (1), (2) eşitsizliklerinin toplanmasına

$$3(v + s) \leq 3g, \quad v + s \leq g$$

elde edilir. Fakat bu, $v + s = g + 2$ olması yüzünden imkânsızdır.

53. İsbat indüksiyon ile yapılır. En fazla altı memleketli bir harita için teoremin cari olduğu aşikârdır. Teorem n memleketli bir harita için gösterilmiş olsun. Buna göre teoremin $n + 1$ memleketli bir harita için de cari olacağını isbat edeceğiz.

Bir önceki problem uyarınca haritada altıdan daha az sınırlı bir S memleketi mevcuttur (şek. 86 a). Şimdi haritamızın çizilmiş bulunduğu düzlemi lâstik bir deriden ibaret kabul ederek şu işlemi tatbik edelim: Bir makasla

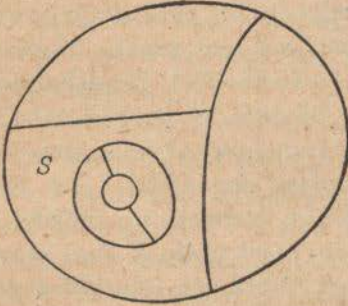


Şek. 86

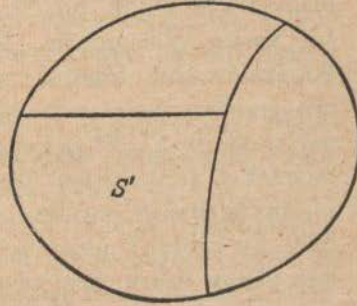
S memleketini sınırları ile birlikte kesip çıkaralım; böylece bir delik elde ederiz (şek. 86 b). Bundan sonra komşu memleketleri bağlayan sınırları birbirine doğru çekerek, deliği kapanıncaya kadar büzelim (şek. 86 c). Bu suretle n memlekettten ibaret bir harita elde ederiz; bu ise hipoteze göre altı renkle regüler boyanabilir. Şimdi S memleketini tekrar katalım; bu takdirde, bu memleket beş memlekettenden daha fazlası ile doğrudan doğruya sınırdaş olmadıkça, kendisini bu komşu memleketlerden birinin rengi ile aynı olmıyan başka bir renkle boyayabiliriz. Böylece teorem isbatlanmış olur.

İsbat, sadece bağımlı haritalar için yürütülmüş olmakla beraber (problem 52'yi kullandık) derhal bağımsız haritalara da aktarılabilir. Bunun nasıl yapıldığını bir mîsâlde gösterelim. Şek. 87 de ayırıcı memleketi S olan bir harita çizilmiştir. Bu haritanın sınırları, şek. 88 ve 89 da

ayrı ayrı gösterilmiş olan bağımlı iki parçaya ayrılmıştır. Şek. 88 ve 89 daki haritalar bağımlı olup, bunların altı renk-
le regüler boyanabildikleri de isbatlanmış bulunmaktadır.



Şek. 87



Şek. 88

Bunları S' ve S'' aynı rengi haiz olacak surette regüler boyadıktan sonra eski hale dönelim. Böylece şek. 87 deki harita için de regüler bir boyama elde edilmiş olacağı açıktır.

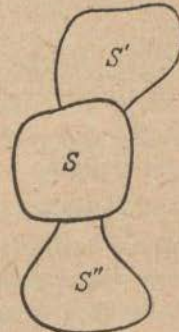
54. Yine matematiksel indüksiyonu kullanalım. En fazla beş memleketli bir harita için iddianın doğru olduğu açıktır. Teoremin en fazla n memleketli bir harita için cari olduğunu kabul edip, $n + 1$ memleketli bir harita için de cari olacağını isbat edeceğiz.

Problem 52 ye göre altıdan az sınırlı, yani kendisine beşten fazla başka memleketin sınırdış olmadığı bir

S memleketi mevcuttur. S ye komşu olan memleketlerin sayısının dördü aşmaması halinde, bir evvelki problemdeki düşünceleri aynen tatbik edebiliriz. O halde geriye artık S nin tam beş komşusu olması halinin gözönüne alınması kalıyor. S ye sınırı olan bu beş memleket arasında, me-



Şek. 89



Şek. 90

selâ S' ve S'' gibi, birbiri ile doğrudan doğruya sınırı olmayan (problem 51) iki memleket mevcuttur (şek. 90). Şimdi S ile S' ve S ile S'' arasındaki sınırları atalım. Bu suretle $n-1$ memleketden ibaret ve S, S', S'' memleketleri yerinde büyük bir S^* memleketinin bulunduğu yeni bir harita elde ederiz. Bu haritayı beş renkle regüler boyayalım (bu, hipoteze göre mümkündür). Şimdi kaldırılmış sınırları yeniden koyalım; böylece ilk haritamıza döneriz. S' ile S', S^* ın rengini muhafaza etsinler (bu iki memleket artık birbiri ile sınırdış olmadıkları için bu, bütün haritanın regüler boyanışını bozmaksızın mümkündür). Şu halde S memleketi, ikisi yani S' ile S'' aynı rengi haiz olmak üzere, beş memleket tarafından kuşatılmıştır; demek ki S sadece dört farklı renkteki memleketlere sınırlıdır ve bu yüzden kendisini, komşularınıninkinden farklı beşinci renkle boyayabiliriz.

55. Köşe noktalarının mümkün olan en küçük geçerliği 3 tür. O halde problem 16 dan

$$3v \leq 2g$$

çıkar. EULER teoremine göre $v = g + 2 - s$ tir; buradan isbatı istenen

$$3(g+2-s) \leq 2g, \quad 3g+6-3s \leq 2g, \quad g \leq 3s-6$$

eşitsizliğine varılır.

56. Göstereceğiz ki, onikiden az memleketli bir bağımlı haritada beşten az sınırı haiz bir memleket mevcuttur. Bu maksatla tersini kabul edelim. Bu takdirde problem 19 a göre

$$5s \leq 2g \quad (1)$$

olur. Hipoteze göre hiçbir köşe noktasının geçerliği 3 den küçük olmadığı için, problem 16 uyarınca

$$3v \leq 2g \quad (2)$$

dir. (1) i 3 ile (2) yi de 5 ile çarpıp toplarsak

$$15(v+s) \leq 16g$$

elde edilir. Şimdi $v+s$ yerine $g+2$ koyalım; bu takdirde

$$15(g+2) \leq 16g, \quad 15g+30 \leq 16g, \quad g \geq 30$$

buluruz. Öte yandan $s < 12$ için, problem 55 den $g < 3 \cdot 12 - 6 = 30$ eşitsizliğinin sağlandığı çıkar ki, bu da bir çelişmedir. Netice olarak, haritamızın memleketleri arasında beşden az sınırı haiz bir memleketin mevcut olması zorunludur.

Bundan sonra çözümü indüksiyon ile elde ederiz. Memleket sayısı dördü geçmiyorsa, boyama mümkündür. Teorem n memleket için doğru olsun. Şimdi teoremi $n+1$ memleket ($n+1 < 12$) hali için isbatlıyalım. İsbatlanılana göre $n+1$ memleketten meydana gelen harita beşten az sınırlı bir memleket ihtiva eder. Eğer bu memleketin komşularının sayısı 1, 2 veya 3 e eşit ise, bu memleketi bertaraf ederek problem 53 deki düşüncelerin aynini tatbik ederiz. Komşu memleketlerin sayısı dörde eşit olduğu takdirde ise şu şekilde hareket ederiz: S nin kendisi ve dört komşusu olmak üzere beş tane memleketimiz mevcuttur. Bunların hepsinin çiftler çiftler sınırdaş olmaları imkânsızdır (problem 51). Öte yandan bu beş memleketten S den başka herbiri S ye sınırdaştır. Dolayısıyla S ye komşu memleketlerden birbirile sınırları olmiyan iki tane mevcuttur. Bu gerçeği tesbit ettikten sonra geri kalan isbat tıpkı problem 54 deki gibi yürür.

Bu isbatın bağımsız haritalar için de yapılmasını okuyucuya bırakıyoruz.

Not: Bu problemde memleketler sayısının 11 i aşmaması özel hali için dörtrenk problemi çözülmüş oluyor. Bu gün, en ileri netice olarak, dörtrenk problemi en fazla 38 memleketli haritalar için çözülmüştür.

1962 yılının sonuna kadar yayınlanacak eserlerin listesi

- 1) Eşitsizlikler
- 2) Mekanğin matematiğe tatbiki
- 3) Çokrenk problemleri
- 4) İhtimalî hesaba giriş
- 5) Sayılar teorisine giriş
- 6) Gruplar teorisine giriş
- 7) Geometrik ispatlarda hatalar
- 8) İndüksiyon metodu
- 9) Sayılar teorisinden bazı problemler
- 10) Diophant denklemleri
- 11) Gayri Euklid geometriler
- 12) Tesadüfî hareketler

Matematik Derneğinin adresi :
Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü
Vezneciler-İstanbul

Fiatı 180 Krş.