

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 14

A. S. SMOGORZHEVSKI

YALNIZ CETVEL KULLANARAK
YAPILAN GEOMETRİK ÇİZİMLER

Çeviren:

Şükûfe YAMANTÜRK

İSTANBUL — 1963

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 14

A. S. SMOGORZHEVSKI

YALNIZ CETVEL KULLANARAK
YAPILAN GEOMETRİK ÇİZİMLER

Ceviren:

Şükûfe YAMANTÜRK

İSTANBUL — 1963

İSMAIL AKGÜN MATBAASI
Cağaloğlu, Servili Mescit Sokak No. 24
İSTANBUL — 1963

BU KİTAP HAKKINDA

Cetvel ve pergelin çizim yapabilme gücünün incelenmesi, yani geometrik çizimlerin bu klâsik araçları ile (her ikisi beraber veya ayrı ayrı olmak üzere) çözülebilen problemler sisteminin incelenmesi, ancak 19. yüzyılda tamamen mümkün olabilmıştır. O zamana gelinceye kadar, bazı matematikçiler, cetvel ve pergele, beraberce kullanıldıkları zaman, her çizim problemini çözecek yeterlikte genel araçlar gözü ile bakıyorlardı. Bu görüş tarzı, matematik tarihinde menfi bir rol oynamış ve her çizim problemine önceden cetvel ve pergel ile çözülebilir nazarı ile bakılarak çözmeye girişilmesi hızlandırılmış ve böylece de mevcut olmıyan çözümlerin araştırılması için boş yere muazzam bir kuvvet harcanmıştır. Örneğin bu hal bir karenin bir daireye çevrilmesi, bir açının üçe bölünmesi ve bir kübün iki katının alınması problemlerinde* vâki olmuştur.

Geniş açıklıklı bir pergelin tatbikinin teknik bakımdan imkânsız olduğu hallerde; topografik araçlar yardımıyla doğruların kolayca elde edilebildiği büyük yeryüzü alanlarında

*) Bu ifadeler ile aşağıdaki problemler söylenmek istenmiştir:

1. Bir dairenin yarıçapı verildiğine göre; alanı, verilen bu dairenin alanına eşit olan bir karenin çizimi.
2. Verilen bir açının üç eşit parçaya bölünmesi.
3. Bir kübün kenarı verildiğine göre; hacmi, verilen bu kübün hacminin iki katına eşit olan bir diğer kübün kenarının çizimle bulunması.

Birinci ve üçüncü problemlerin, yalnız pergel ve cetvel ile çözülmeyecekleri; ikinci problemin çözümünün ise ancak bazı hallerde (örneğin, verilen açının bir dik açı olması halinde) mümkün olabileceği ispat edilmiştir.

izimler yapılması mecburiyeti ve ayrıca perspektif teorisinin gelişmesi, yalnız cetvel ile yapılan çizimlerin incelenmesine yön vermiştir.

Bu kitapta, yalnız cetvel ile özöllebilen en tipik çizim problemleri göz önüne alınmıştır.

Şekil düzleminde daha önceden çizilmiş olan bazı yardımcı şekillerin (örneğin, iki paralel doğru veya kesişen iki daire), cetvel kullanmayı kolaylaştırdığı hallere dikkat edilmelidir. Bu hallerin bir okları tarafımızdan da incelenmiştir.

Biz, sentetik geometri metodlarına bağlı kalacak, aritmetik ve cebirdeki karakteristik metodların uygulanmasından kaçınacağız. Yalnız bazı kısımlarda takdimi kolaylaştırmak amacı ile bu prensipten bazı küçük sapmalar yapacağız.

Sentetik geometri metodlarının uygulanmasına dayanan problem özömleri ve teorem ispatlarının, ekseriya çok hoş ve orijinal oldukları görölecektir. Bu kitapta, okuyucuların, bu sözleri doğrulayan bir çok örnekler bulacaklarını ümid ederiz.

Okuyucunun dikkatini kısım 18 e çekeriz. Bu kısımda, ortak merkezli olmayacak ve ortak noktaları bulunmayacak tarzda verilen iki dairenin merkezlerini yalnız cetvel kullanarak yapılan bir çizimle bulmanın mümkün olamayacağı gösterilmiştir. «Mümkün olamama» ispatlarının ekseriya matematiğin güç olan problemler sınıfına gireceği ve ispatın güç bir mantık silsilesine dayanarak yapılacağı çok iyi bilinir. Okuyucunun böyle bir ispatı ihtiva eden ve yukarıda zikredilen Kısım 18 den hoşlanacağını tahmin ediyoruz.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dola-yışıyle mühendislik, askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod, gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sun'î olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak

seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Milli Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

Sayfa

No.

BÖLÜM I.

SENTETİK VE PROJEKTİF GEOMETRİNİN BAZI TEOREMLERİ

1. Bir düzlemin sonsuzdaki elemanları	3
2. Bir daireye göre inversiyon	7
3. Bir noktanın bir daireye göre kuvveti. İki dalrenin kuvvet ekseni. Üç dalrenin kuvvet merkezi	11
4. Doğru demetleri. Daire demetleri	17
5. Çifte oran	20
6. Bir doğrunun harmonik dört noktası ve bir doğru demetinin harmonik dört doğrusu	24
7. Bir tam dörtgenin harmonik özellikleri	27
8. Konikler	30
9. Koniklerin kutupsal özellikleri	32
10. Brianchon ve Pascal teoremleri	38

BÖLÜM II.

CETVEL İLE YAPILAN GEOMETRİK ÇİZİMLER

11. Bazı doğrusal şekillerin cetvel ile çizimleri	47
12. Koniklerle ilgili olan ve cetvel ile yapılan çizimler	50
13. Paralel iki doğru verildiğine göre cetvel ile yapılan çizimler	58
14. Bir paralelkenar veya bir kare verildiğine göre cetvel ile yapılan çizimler	64
15. Bir daire ve merkezi verildiğine göre cetvel ile yapılan çizimler	67
16. Bir daire yayı ve merkez verildiğine göre cetvel ile yapılan çizimler	75
17. Verilen bir daire demetine ait dairelerin cetvel ile çizimleri	79
18. Bir dalrenin merkezini cetvel ile elde etmenin imkânsız- lığına dair	84
19. Verilen iki dalrenin merkezlerini cetvel ile elde etmenin mümkün olduğu haller	87
20. Birçok dairelerin merkezlerinin cetvel ile bulunmalarına dair	93

BÖLÜM I.

SENTETİK VE PROJEKTİF
GEOMETRİNİN BAZI
TEOREMLERİ

1. BİR DÜZLEMİN SONSUZDAKİ ELEMENLARI

Her hangi bir doğrunun (aşağıda münakaşa edilecek olan sonsuzdaki doğru hariç) sonsuzda bir ve yalnız bir noktasının bulunduğunu ve aynı zamanda, bu noktanın, doğruya paralel olan bütün doğrulara ait bir nokta olduğunu; ayrıca, sonlu uzaklıkta kesişen iki doğrunun sonsuzdaki noktalarının birbirinden farklı iki nokta olduklarını birer kaide olarak kabul edeceğiz.

Bu esas kaidelere dayanarak, her hangi iki doğrunun kesiştiği ve yalnız bir noktada kesiştiğini söyleyebiliriz. Doğrular paralel ise doğruların kesim noktası sonsuzdadır.

Ayrıca, bir düzlem içinde olup da sonsuzda bulunan bütün noktaların cümlesine «sonsuzdaki doğru» diyeceğiz. Sonsuzdaki doğru tarifinin ehemmiyetini ileride göreceğiz.

Sonsuzdaki nokta ve sonsuzdaki doğru fikirlerinin ithali, bu kitapta incelenen problemlerin özellikleri bakımından akla gelmektedir. Bir takım teoremlerin ifadele-
rinde, istisnaları açıklamak için ortaya çıkan zaruri karışıklıklardan bu fikirleri kullanmak suretiyle kurtula-
biliriz. Diğer taraftan, bu fikirler, şimdi tarif edeceğimiz izdüşüm alma işi ile doğrudan doğruya ilgilidirler.

Bir α düzlemi, bu düzlem üzerinde bir A noktası ve düzlemin dışında bir P noktasının verildiğini farzedelim. PA doğrusu, P noktasından geçmiyen bir β düzlemini B noktasında kessin. Bu durumda; B ye A noktasının β düzlemi üzerindeki izdüşüm'ü, PA doğrusuna izdüşüm ışını, P noktasına izdüşüm merkezi ve β ya izdüşüm düzlemi

denir. İzdüşüm merkezi ile her hangi iki doğru aynı bir düzlem üzerinde iseler, bu doğrulardan birinin diğeri üzerindeki izdüşümü aynı tarzda alınabilir.

α düzleminde belirli bir F şeklinin verilmesi halinde F şeklinin bütün noktalarının P izdüşüm merkezine göre β düzlemi üzerindeki izdüşümlerini alırsak, F şeklinin β düzlemindeki izdüşümü denilen bir Φ şekli elde ederiz.

Özel olarak, bir doğrunun izdüşümü yine bir doğru olacaktır.

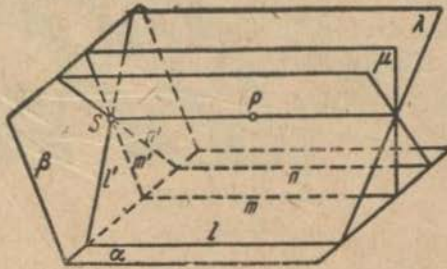
P izdüşüm merkezinin sonsuzda olması düşünülebilir. Bu halde, bütün izdüşüm ışınları birbirlerine paralel olurlar.

İzdüşüm alma işi bir kaç defa tekrarlanabilir. Örneğin Φ şeklinin, yukarıda yapılmış olduğu gibi, β düzlemi içinde bulunmayan bir Q izdüşüm merkezine göre Q den geçmiyen bir γ düzlemi üzerindeki izdüşümünü alırsak bir Ψ şekli elde ederiz. Bu Ψ şekline F şeklinin izdüşümü de denir. α ve γ düzlemleri çıkışırlarsa, F ve F in izdüşümü olan Ψ şekli aynı düzlemdedirler.

Özel bir durumu inceliyelim: Bir α düzleminde l ve m gibi paralel iki doğrunun verildiğini farzedelim (Şek. 1). l ve P izdüşüm merkezi bir λ düzlemi üzerinde ise, l doğrusu üzerindeki noktaların izdüşümlerini veren bütün ışınlar da bu düzlem üzerindedirler. λ düzleminin β düzlemi ile l' arakesit doğrusu, l doğrusunun β düzlemi üzerindeki izdüşümüdür. Benzer tarzda, m doğrusu ve P noktası bir μ düzlemi üzerinde iseler; μ düzlemi ile β düzleminin m' arakesiti, m doğrusunun β düzlemi üzerindeki izdüşümüdür.

PS doğrusu α düzlemine paralel olsun ve P noktası sonsuzda bulunmasın. Bu halde α ve β düzlemleri paralel değillerse, l' ve m' doğruları belirli bir S noktasında kesişirler. α düzleminde, l ve m doğrularına paralel bir n

doğrusu daha verilirse, o zaman n nin β düzlemi üzerindeki n' izdüşümü de S noktasından geçer. S noktasına l , m ve n doğrularının sonsuzda bulunan arakesit noktalarının izdüşümü gibi bakılması uygun olacaktır. Bunu daha kesin olarak ifade edelim: m' , l' ve n' doğruları l , m ve n doğrularının izdüşümleri olarak göz önüne alındıkları zaman; α düzleminde önceden belirli olan ve S noktasını veren bir esas model bulunamayacağı için; S noktasını l' , m' ve n' doğruları dışında bırakmak zorunda kalacaktık. Bilhassa bu sebepten sonsuzdaki noktalar fikrini ithal etmiş bulunuyoruz.

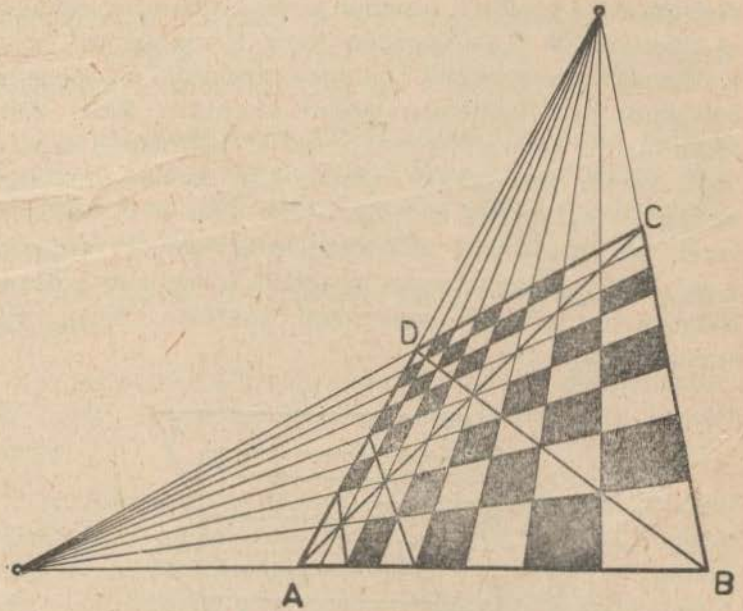


Şekil 1.

α düzleminin sonsuzdaki noktalarının cümlesinin β düzlemi üzerinde alınan izdüşümlerinin, β düzlemi içinde S den geçen ve α düzlemine paralel olan bir doğru olacağını görmek zor değildir. Buna göre, düzlemin sonsuzdaki noktalarının cümlesine sonsuzdaki doğru diyerek bu noktalar cümlesini niçin doğrular sınıfına geçirdiğimiz açıktır.

Örneğin bir dama tahtasının çevresinin izdüşümü verilirse, bu dama tahtasının izdüşümü yukarıdaki mülâhazalara dayanarak kolayca çizilebilir (Şek. 2).

Genel olarak, paralel doğruların perspektifte bir noktadan geçiyorlarmış gibi göründüklerine dikkat edelim. bu doğrular resim ve çizimlerde (örneğin, Şek. 3 de) bir noktada kesişecek tarzda çizilmelidirler.



Şekil 2.

Geometrik şekillerin izdüşümlerinde görülen değişmiyen özellikleri inceliyen matematik koluna «Projektif Geometri» denir. Projektif Geometrideki bazı teoremler bu kitapta verilecektir.



Şekil 3.

Netice olarak şunu hatırlatalım ki, bir doğruyu, yerine göre, merkezi bu doğruya dik bir doğrunun sonsuzdaki noktası olan sonsuz yarıçaplı bir daireymiş gibi göz önüne alabiliriz.

2. BİR DAİREYE GÖRE İNVERSİYON

Burada ve bundan sonra gelecek olan ilk iki kısımda, dairelerle ilgili bazı teoremleri münakaşa edeceğiz. Bu teoremler, ilerideki açıklamalarımızda yardımcı bir rol oynayacaklardır.

K merkezi ile r yarıçapı bilinen bir κ dairesi ve K dan başka bir A noktasının verildiğini farzedelim. KA ışını üzerinde öyle bir A' noktası seçelim ki, KA ve KA' doğru parçalarının çarpımı, dairenin yarıçapının karesine eşit, yani

$$KA \cdot KA' = r^2 \quad (1)$$

olsun.

O halde A ve A' noktalarına κ dairesine göre invers noktalar deriz.

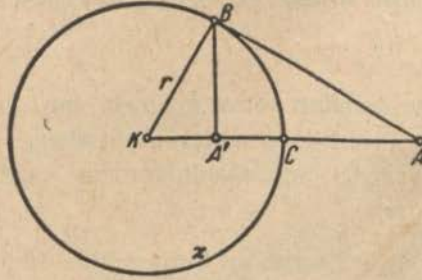
A ve A' noktalarından biri κ dairesinin dışında ise diğeri κ nın içindedir veya *tamamen aksi* söylenebilir. Öğin $KA' < r$ eşitsizliğinden ve (1) den $KA > r$ olacağı görürüz. A ve A' noktalarından biri κ dairesi üzerinde ise, A ve A' noktaları çakışır.

Ök. 4 ü inceliyelim: AB doğrusu κ dairesinin bir teğetise, BA' doğrusu KA ya diktir. KAB üçgeni bir dik üçgen olduğundan

$$KA \cdot KA' = KB^2 = r^2$$

dir ve buradan A ile A' nün κ dairesine göre invers

noktalar olacakları anlaşılır. Şu halde, A noktası verilirse A' noktasını ve A' noktası verilirse A noktasını çizimle bulmak için bir metod elde etmiş oluyoruz.



Şekil 4.

x daire, AA' doğru parçasını C noktasında kessin ve $A'C = a$, $CA = b$ olsun. O halde $KA' = r - a$ ve $KA = r + b$ dir. (1) e dayanarak

$$(r + b) \cdot (r - a) = r^2$$

elde edeceğiz. Demekki

$$b - a = \frac{a \cdot b}{r} \quad (2)$$

olur.

C ve A noktalarını sabit tutup r yarıçapını sonsuz olarak büyütecek olursak; o zaman x daire, limitte, CA ya dik bir CD doğrusu haline gelecek ve aynı zamanda (2) den

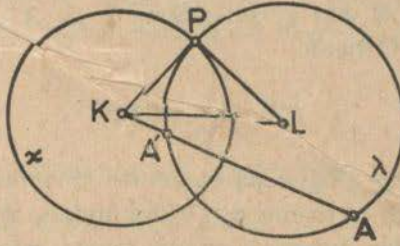
$$b = a$$

elde edilecektir. Buna göre, A ve A' noktaları, limitte, CD doğrusuna göre simetrik bir duruma gelirler. Böylece

limite geçme esnasında, bir daireye göre invers olma özeliği, bir doğruya göre simetriye gelmiş olur *.

Teorem 1. *Bir λ dairesi, bir α dairesine göre invers olan A ve A' gibi iki farklı noktadan geçerse, α ve λ daireleri ortogonaldirler.*

İki daire birbirini bir dik açı altında keserse, yani dairelerin kesim noktasındaki tegetleri (veya aynı şey



Şekil 5.

demek olan, bu noktadaki yarıçapları) birbirine dik iseler, bu dairelere ortogonaldir denir **.

α ve λ dairelerinin merkezleri K ve L , bu dairelerin kesim noktalarından biri P olsun (Şek. 5). KP doğru parçası, α dairesinin yarıçaplarından biri olduğuna göre; (1) denklemi, $KA \cdot KA' = KP^2$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre, bir noktadan bir daireye çizilen kesen üzerinde meydana gelen iki doğru parçasının çarpımına ait teorem göz önünde tutularak, KP nin λ dairesine teget olduğu ve dolayısıyla verilen dairelerin yarıçapları olan KP ve LP

*) Bu ise A ve A' noktalarına, Rusçada, niçin bir daireye göre simetrik noktalar denildiğini açıklar. (Bu kitabı İngilizce yayımlayan I. N. Sneddon ve M. Stark'ın notu).

**) Ortogonal dairelerden biri dejenere olur ve bir doğru haline gelirse, o zaman kolayca görüleceği gibi, bu doğru öteki dairenin merkezinden geçer.

nin birbirine dik oldukları ve o halde dairelerin ortogonal olacakları anlaşılır.

Teorem 2. κ ve λ daireleri ortogonal iseler, o zaman κ dairesinin K merkezinden geçen ve λ dairesini kesen bir doğru, λ dairesini κ ya göre invers olan noktalarda keser.

κ ve λ dairelerini ortogonal dairelermiş gibi alarak Şek. 5 i kullanacağız. O halde KP doğrusu, λ dairesinin bir tegetidir. K dan geçen doğru, λ yı, A ve A' noktalarında kessin. O halde

$$KA \cdot KA' = KP^2$$

dir. KA ve KA' doğru parçalarının çarpımı κ dairesinin KP yarıçapının karesine eşit olduğundan, A ve A' noktaları, κ ya göre invertirler ve ispatı istenen de zaten budur.

3. BİR NOKTANIN BİR DAİREYE GÖRE KUVVETİ. İKİ DAİRENİN KUVVET EKSENİ. ÜÇ DAİRENİN KUVVET MERKEZİ

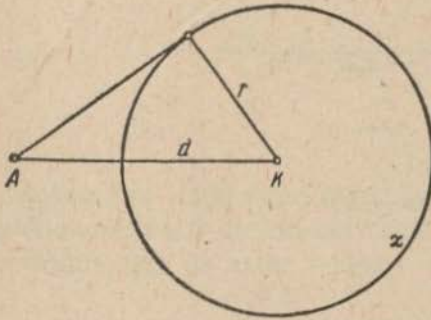
K merkezli ve r yarıçaplı bir κ dairesi ile K dan d kadar uzaklıkta bir A noktasının verildiğini farzedelim.

$$\sigma = d^2 - r^2 \quad (1)$$

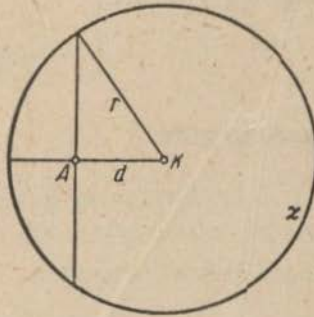
miktarına A noktasının κ dairesine göre *kuvvet*'i denir.

Aşağıdaki halleri inceliyelim:

(1) A noktası κ dairesi dışında kalsın. O halde $d > r$, $\sigma > 0$ olur.



Şekil 6.



Şekil 7.

Bu durumda σ miktarı, A dan κ ya çizilen tegetin karesine; veya aynı şey demek olan A dan geçen herhangi bir kesenin daireyi kestiği noktaların A dan olan uzaklıkları çarpımına eşittir.

(2) A noktası x üzerinde bulunsun. O halde $d = r$ ve $\sigma = 0$ olur.

(3) A noktası x nın içinde olsun. O halde $d < r$, $\sigma < 0$ olur. Bu durumda σ miktarı, x dairesinin A dan geçen en küçük kirişinin yarısının karesinin negatif işaretle alınan değerine; veya aynı şey demek olan A dan geçen herhangi bir kiriş üzerinde A nın ayırdığı parçaların çarpımının negatif işaretle alınan değerine eşittir (Şek. 7).

Yardımcı teorem. *Bir M noktasının A ve B gibi verilen iki noktaya uzaklıklarının kareleri farkı sabit bir değere eşit ise, M noktasının geometrik yeri AB doğrusuna dik bir doğrudur.*

AB doğrusu üzerinde bir N noktası ile bu doğru dışında bir M noktası alınsın. Öyle ki, her iki nokta da τ geometrik yeri üzerinde bulunsun. AB ve AN doğru parçalarını sırayla a ve x ile gösterelim. c verilen sabit bir değer olsun.

$$AM^2 - BM^2 = c \quad (2)$$

şartına göre,

$$x^2 - (a - x)^2 = c$$

olur. Son denklemden

$$x = \frac{a^2 + c}{2a}$$

buluruz. Buna göre AB doğrusu üzerinde τ geometrik yerine ait bir ve yalnız bir noktanın bulunabileceği anlaşılır.

Şimdi de AB ye ME dikmesini ineriz (Şek. 8). O halde

$$AM^2 - AE^2 = EM^2 = BM^2 - BE^2$$

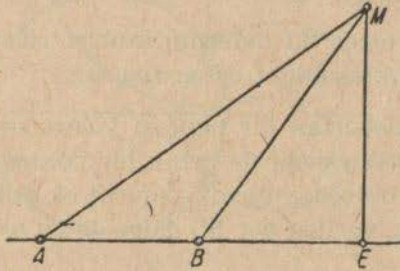
dir ve buradan

$$AM^2 - BM^2 = AE^2 - BE^2$$

bulunur. Bu denklem ile daha önce verilen (2) denklemini kullanarak

$$AE^2 - BE^2 = c$$

elde ederiz. Bu son denklem, E noktasıyla N noktasının



Şekil 8.

çakışacağını ifade eder. Buna göre, τ geometrik yeri, N noktasından AB doğrusuna çizilen dik doğrudur ve ispatı istenmiş olan da zaten budur.

Teorem 3. Verilen iki daireye göre kuvvetleri eşit olan bir noktanın geometrik yeri, bu dairelerin merkezler doğrusuna dik bir doğrudur.

Verilen dairelerin yarıçapları r_1, r_2 ve geometrik yer üzerinde bulunan bir noktanın merkezlere olan uzaklıkları d_1, d_2 olsun. O halde (1) e dayanarak

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$$

yazılabilir. Demekki

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (3)$$

dir. Yukarıda ispat edilmiş olan yardımcı teoremi, sağ tarafı sabit olan (3) denkleminde uygularsak Teorem 3 ün doğru olduğunu görürüz.

Yukarıda münakaşa edilen geometrik yere, verilen iki dairenin *kuvvet eksenini* denir.

Kesişen iki dairenin kuvvet eksenini dairelerin kesim noktalarından geçer. Zira; kesim noktalarının verilen dairelerin her birine göre kuvvetleri sıfıra eşittir.

Birbirine teget iki dairenin kuvvet eksenini, bu dairelerin değme noktasındaki ortak tegettir.

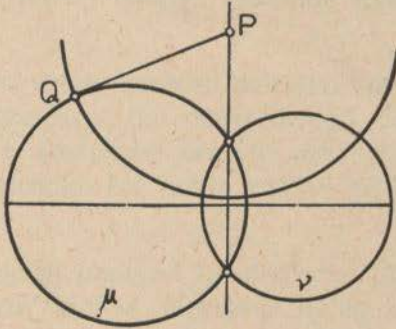
İki dairenin ortak bir noktası yoksa, dairelerden hiç birinin de kuvvet eksenini ile ortak bir noktası yoktur. Aksi olarak, dairelerden birinin kuvvet eksenini ile ortak bir noktası olsaydı, verilen her iki daire de bu ortak noktadan geçecekti.

Teorem 4. μ ve ν gibi iki dairenin kuvvet eksenini (daireler kesişirse dairelerin ortak kirişi hariç olmak üzere), μ ve ν ye ortogonal dairelerin merkezlerinin geometrik yeridir.

μ ve ν dairelerinin kuvvet eksenini üzerinde olup bu dairelerin dışında bulunan bir P noktası alalım (Şek. 9). P noktasının verilen dairelere göre kuvvetlerinin eşit olmasından dolayı, P den μ ve ν ye çizilen tegetlerin uzunlukları eşittirler. Bu tegetlerden biri PQ olsun. P merkezli ve PQ yarıçaplı dairenin μ ve ν dairelerine ortogonal olacağı açıktır. Öte taraftan, μ ve ν ye çizilen tegetler, ele alınan M merkezli dairenin yarıçapına eşittir.

Buna göre, M noktasının μ ve ν ye nazaran kuvvetlerinin eşit olacağı ve M noktasının verilen dairelerin kuvvet ekseninde bulunacağı anlaşılr.

Ortak merkezli μ ve ν gibi iki dairenin merkezi N ise; bu dairelere ortogonal olan daireler, N noktasından geçen doğrular haline gelirler. Mademki bir doğrunun «merkezi» sonsuzdandır (Kısım 1) o halde Teorem 4, sonsuzdaki doğruya, ortak merkezli iki dairenin kuvvet eksenini olarak bakılması gerektiğini ifade eder. Sonlu uzaklıkta bulunan bir noktanın ortak merkezli iki dairenin kuvvet eksenini



Şekil 9.

üzerinde olamayacağı kolayca sağlanabilir. Gerçekten, sonlu uzaklıkta bulunan böyle bir nokta için (3) denkleminin sağ tarafı sıfırdan farklı olduğu halde, sol taraf sıfıra eşittir.

Teorem 5. *Üç dairenin ikişer ikişer ele alınmasıyla elde edilen kuvvet eksenleri, ya çakışır veya bu dairelerin kuvvet merkezi denilen bir noktada kesişirler.*

Gerçekten, kuvvet eksenlerinden herhangi ikisinin kesim noktasının bu üç daireye göre kuvvetleri birbirine eşittirler. O halde, böyle bir kesim noktası, üçüncü kuvvet

ekseni üzerinde de bulunur. Demekki, özel olarak, kuvvet eksenlerinden ikisi çakışırsa üçüncü kuvvet eksenini de bu iki kuvvet ekseniniyle çakıştır. Yani; verilen üç dairenin ortak bir kuvvet ekseninin bulunacağı anlaşılır.

Üç dairenin merkezleri bir doğru üzerinde iseler dairelerin kuvvet eksenleri paralel olurlar ve bu halde kuvvet eksenleri ya sonsuzda kesişir veya çakışırlar.



4. DOĞRU DEMETLERİ. DAİRE DEMETLERİ

Düzlemde bir noktadan geçen bütün doğrular bir *doğru demeti* teşkil ederler. Noktaya *demetin tepesi* denir. Demetin tepe noktası hariç, düzlemde alınan bir noktadan demete ait bir ve yalnız bir doğrunun geçeceği açıktır.

Kuvvet eksenleri ortak olan bütün daireler bir *daire demeti* teşkil ederler. Kuvvet eksenine *demetin kuvvet ekseni* denir.

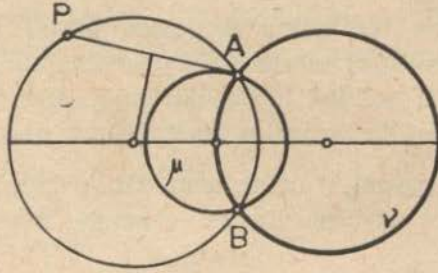
Özel olarak; ortak merkezli daireler, kuvvet eksenleri sonsuzdaki doğru olan bir daire demeti teşkil ederler. Düzlemin bir noktasından demete ait bir daire geçer (dairelerin merkezine bir nokta haline gelmiş bir daire gibi bakabiliriz).

Ortak merkezli olmıyan iki daireden birinin merkezinden dairelerin kuvvet eksenine inilen dikme, öteki dairenin merkezinden geçer (Teorem 3). Buna göre, bir daire demetinde bir merkezler doğrusunun bulunacağı sonucuna varılır.

Bir daire demetinin iki dairesine ortogonal olan bir dairenin, demetin her dairesine de ortogonal olacağı Teorem 4 den anlaşılır. μ ve ν gibi iki daire, daima, bir daire demeti belirtir.

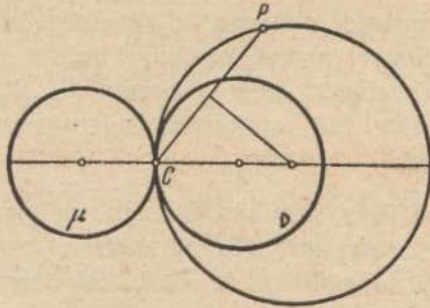
Demeti belirten daireler üzerinde olmıyan ve aynı zamanda bu dairelerin kuvvet ekseni üzerinde de bulunmıyan düzlemin keyfi bir P noktasından geçen ve verilen daire demetine ait olan bir dairenin nasıl çizileceğini göstereceğiz. Verilen daireleri merkezleri farklı iki daire gibi alarak şu halleri inceliyeceğiz:

(1) μ ve ν daireleri A ve B noktalarında kesişsinler. Aranılan daire A , B ve P noktalarından geçer ve bu dairenin merkezi μ ve ν dairelerinin merkezler doğrusu üzerinde bulunur (Merkezler doğrusu AB doğru parçasının orta dikmesidir *).



Şekil 10.

Bu halde daire demetine *eliptik* denir. Eliptik daire demetinin bütün daireleri demete ait iki dairenin kesim noktalarından geçerler (Şek. 10).



Şekil 11.

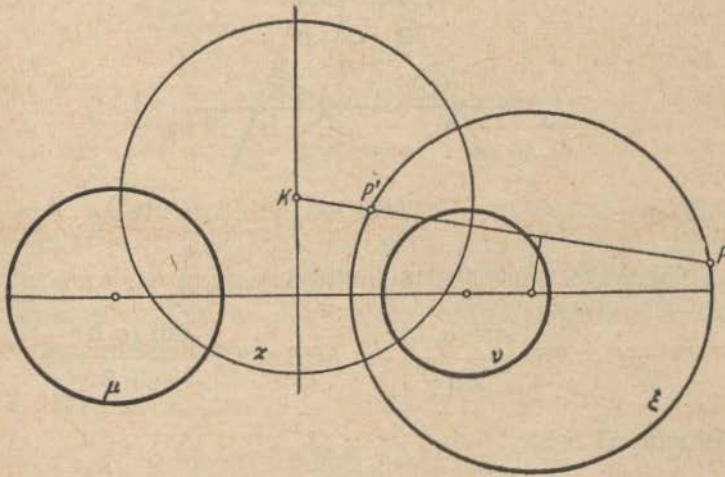
(2) μ ve ν daireleri C noktasında teğet olsunlar. Aranılan daire verilen dairelere C noktasında tegettir ve bu dairenin merkezi, CP doğru parçasının orta dikmesinin

*) Bir doğru parçasının orta dikmesi, doğru parçasına orta noktasında dik olan doğrudur.

μ ve ν dairelerinin merkezler doğrusu ile kesim noktasıdır. Böyle bir daire demetine *parabolik* denir (Şek. 11).

(3) μ ve ν dairelerinin ortak bir noktası bulunmasın. μ ve ν ye ortogonal olan bir κ dairesi çizer ve P noktasının κ ya göre inversi olan P' noktasını buluruz (Şek. 12). Aranılan ξ dairesinin merkezi, PP' doğru parçasının orta dikmesinin μ ve ν dairelerinin merkezler doğrusu ile kesim noktasıdır. Gerçekten, Teorem 1 e göre, ξ dairesi κ dairesine ortogonaldır ve o halde κ dairesinin K merkezinden μ , ν ve ξ dairelerine çizilen teget uzunlukları eşittirler.

P ve P' noktaları çıkışırlarsa, bu halde PP' doğru parçasının orta dikmesi yerine P den κ ya çizilen teget göz önüne alınır. P noktası, κ dairesinin μ ve ν dairelerinin merkezler doğrusu ile kesim noktasında ise, ξ dairesi P noktası haline gelir.

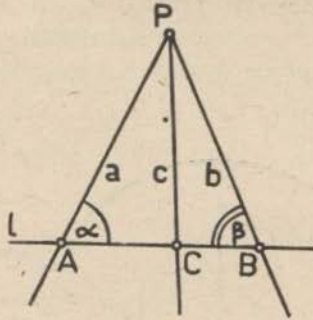


Şekil 12.

Bu halde, daire demetine *hiperbolik* denir. Hiperbolik daire demetinin herhangi iki dairesinin ortak bir noktası bulunamaz.

5. ÇİFTE ORAN

Bir l doğrusu üzerinde bir AB doğru parçası ile bir C noktası ve l doğrusu dışında da bir P noktası göz önüne alalım (Şek. 13). PA , PB ve PC doğru parçalarını sırayla a , b ve c ile; PAB ve PBA açılarını sırayla α ve β ile; APB ve APC , v.s... gibi açıları da sırayla (a, b) ve (a, c) , v.s... ile gösterelim.



Şekil 13.

Sinüs formüllerini kullanarak

$$AC = CP \frac{\sin(a, c)}{\sin \alpha}, \quad CB = CP \frac{\sin(c, b)}{\sin \beta}$$

bulunur. O halde

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (1)$$

dır. (1) formülüne göre $AC : CB$ oranını hesaplarken,

açıların ve doğru parçalarının yönleri göz önünde tutulmalıdır: İki doğru parçasının yönleri aynı ise, bu doğru parçalarının aynı işaretle; iki doğru parçasının yönleri farklı ise, doğru parçalarının farklı işaretle olduklarını farzedeceğiz.

Açılar için benzer kabuller yapılır. Bu kabullere göre, C noktası AB doğru parçası üzerinde ise $AC : CB > 0$ ve C noktası AB doğru parçasının dışında ise $AC : CB < 0$ dir.

l doğrusu üzerinde D gibi bir nokta daha alalım ve PD doğrusunu d ile gösterelim. (1) denklemine bakarak

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, b)} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (2)$$

elde ederiz. Burada

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

$$(abcd) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} \cdot \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, b)}$$

notasyonlarını ithal edelim. $(ABCD)$ miktarına doğrunun A, B, C ve D gibi dört noktasına ait *çifte oran*, $(abcd)$ miktarına da doğru demetinin a, b, c ve d gibi dört doğrusuna ait *çifte oran* denir. Çifte orana *anharmonik oran* da denilmektedir.

(1) ve (2) den

$$(ABCD) = (abcd)$$

denklemini buluruz. P noktasından geçmiyen l den farklı bir l' doğrusu çizelim. l' doğrusunun a, b, c ve d doğrularını kestiği noktaları sırasıyla A', B', C' ve D' ile gösterelim (Şek. 14). A', B', C' ve D' noktalarına P izdüşüm

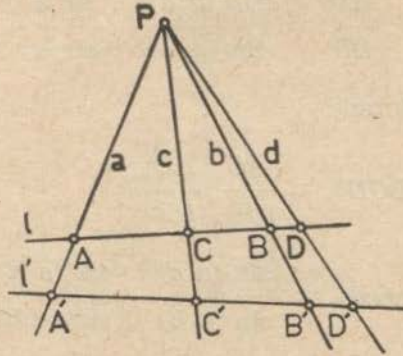
merkezinine göre A, B, C ve D noktalarının l' doğrusu üzerindeki izdüşümleri olarak bakılabileceği açıktır. (3) denkleminde göre,

$$(A'B'C'D') = (abcd)$$

buluruz. Bu denkleme ve (3) e göre

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

elde ederiz. Yukarıda verilmiş olan bağıntılardan şu teoremler çıkarılabilir:



Şekil 14.

Teorem 6. Bir doğru demetinin dört doğrusu diğer bir doğruyu keserse, verilen dört doğrunun çifte oranı, karşılıklı kesim noktalarının çifte oranına eşittir.

Teorem 7. Izdüşüm alma işi, bir doğrunun dört noktasına ait çifte oran değerini değiştirmez.

Teorem 8. $(ABCD)$ çifte oranında A, B (veya C, D) noktalarının kendi aralarında yerleri değiştirilirse, o zaman elde edilecek çifte oran değeri, $(ABCD)$ çifte oranının ters değerine eşittir.

Gerçekten

$$(BACD) = \frac{BC}{CA} : \frac{BD}{DA} = \frac{CB}{AC} : \frac{DB}{AD} = \frac{1}{(ABCD)},$$

$$(ABDC) = \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} = \frac{1}{ABCD}$$

dir.

Nihayet, birbirinden farklı dört noktanın çifte oranının 1 e eşit olamayacağını hatırlatalım.

Gerçekten

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1$$

ise,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

dir.

O halde, A ve B noktaları birbirinden farklı iki nokta ise, C ve D noktalarının çakışacakları ve dolayısıyla yukarıda ileri sürülen fikrin doğru olacağı anlaşılır.

6. BİR DOĞRUNUN HARMONİK DÖRT NOKTASI VE BİR DOĞRU DEMETİNİN HARMONİK DÖRT DOĞRUSU

Bir doğrunun A, B, C, D gibi dört noktasının $(ABCD)$ çifte oranı -1 e eşit ise, yani

$$(ABCD) = -1 \quad (1)$$

ise; C ve D nokta çifti, aynı doğru üzerinde bulunan A, B nokta çiftini *harmonik olarak* böler diyeceğiz.

Bu işe; AB doğru parçasının C ve D noktaları tarafından (biri ile içten diğeri ile dıştan olmak üzere) mutlak değerce eşit oranlarda bölünmesi demektir. Buradan derhal şu teorem elde edilir:

Teorem 9. *PQR gibi herhangi bir üçgende R tepe açısı ve bu açının bütünleri olan açının açıortaylarının PQ doğrusu ile kesişmeleriyle elde edilen nokta çifti P, Q nokta çiftini harmonik olarak böler.*

(1) deki şart sağlanırsa $A, B; C, D$ noktaları bir *harmonik bölme* teşkil ediyor denir. D noktasına $A, B; C$ noktalarını *harmonik olarak bölen dördüncü nokta* denir. Bu notasyonlardaki noktalama işaretlerinin kullanılışına dikkati çekeriz. Noktalı virgül, noktalar arasında nokta çiftlerini ayırır (veya bir nokta çiftini diğerinden ayırır).

Bir demetin a, b, c, d gibi dört doğrusu için

$$(abcd) = -1$$

ise, yukarıdakiler için verilen deyimler bu dört doğru için de kullanılabilir.

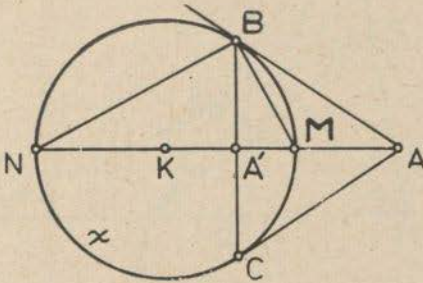
Teorem 10. Bir C, D nokta çifti A, B nokta çiftini harmonik olarak bölerse o halde A, B nokta çifti de C, D nokta çiftini harmonik olarak böler.

Gerçekten,

$$(CDAB) = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD) = -1$$

dir.

Teorem 11. A ve A' noktaları bir α dairesine göre invers iseler ve AA' doğrusu α dairesini M ve N noktalarında kesiyorsa $A, A'; M, N$ noktaları bir harmonik bölme teşkil ederler.



Şekil 15.

A noktası α dairesinin dışında olsun (Şek. 15). A dan α ya çizilen AB ve AC tegetlerini alalım ve BC, BM, BN doğrularını çizelim. AA' doğrusu, α dairesinin merkezinden geçtiğine göre; BC doğrusu, AA' yü A' noktasında keser (Şek. 4).

Bir teget - kiriş açısı, aynı kirişi gören bir çevre açıya eşit olduğuna göre; $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BNM$ dir.

$\sphericalangle BNM$ ve $\sphericalangle MBC$ açılarının her biri, $\sphericalangle NBC$ nin bir bütünler açısı olduğuna göre; $\sphericalangle BNM = \sphericalangle MBC$ dir. Böylece $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC$ olur. O halde BM doğrusu, ABA' üçgeninde B açısının açı ortayı; BM ye dik olan BN doğrusu ise B açısını 90° ye tamamlayan açının açıortasıdır. Demekki, Teorem 9 a göre $A, A'; M, N$ noktaları bir harmonik bölme teşkil ederler.

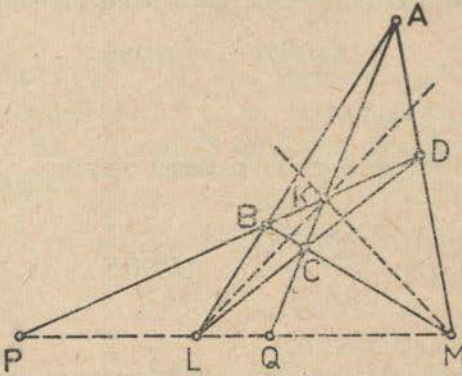
Teorem 11, bir doğru üzerinde verilen $A, B; C$ gibi üç nokta ile harmonik bir bölme teşkil eden D noktasını bulmak için basit bir çizim metodu verir: AB doğru parçasını çap olarak alarak bir λ dairesi çizer ve C nin λ ya göre inversi olan D noktasını buluruz. C noktası AB doğru parçasının ortasında ise, D noktasının sonsuzda olacağı çizimden görülür.

Harmonik bölmede dördüncü noktanın yalnız cetvel ile yapılan bir çizimle bulunabileceğini Kısım 11 de göstereceğiz.

7. BİR TAM DÖRTGENİN HARMONİK ÖZELİKLERİ

Bu kısımda ispat edilecek olan teoremler, daha ileride verilecek olan münakaşalar bakımından çok önemlidirler. Bir çok çizim problemlerinin çözümlerinde biz bu teoremlerden istifade edeceğiz.

Dört nokta ve altı doğrudan meydana gelen şekle tam dörtgen denir. Dört noktadan (Şek. 16 da A, B, C, D



Şekil 16.

noktaları) herhangi üçü bir doğru üzerinde değildir. Bu noktalara tam dörtgenin köşeleri denir. A, B, C, D noktalarını ikişer ikişer birleştirerek altı doğru elde edilir. Bu doğrulara tam dörtgenin kenarları denir.

Tam dörtgenin kenarları, tepelerden başka üç noktada daha (Şekilde K, L, M noktalarında) kesişirler. KL, LM, MK doğrularına tam dörtgenin köşegenleri denir.

Teorem 12. *Tam dörtgenin iki köşegeni ile bu köşegenlerin kesim noktasından geçen iki kenarı harmonik bir demet meydana getirirler.*

BD ve AC doğruları, $ABCD$ tam dörtgeninin LM köşegenini P ve Q noktalarında kessinler (Şek. 16). L , M , P ve Q noktaları sırayla B , D , P ve K noktalarının A izdüşüm merkezine göre BD doğrusu üzerindeki izdüşümleridir. Buna göre,

$$(LMPQ) = (BDPK) \quad (1)$$

dır (Teorem 7).

Öte taraftan L , M , P , Q noktaları sırayla D , B , P ve K noktalarının C merkezine göre izdüşümleridir. O halde

$$(LMPQ) = (DBPK) \quad (2)$$

dır.

Fakat Teorem 8 in bir neticesi olarak

$$(DBPK) = \frac{1}{(BDPK)}$$

bulunur.

Şu halde (1) ve (2) denklemlerini taraf tarafa çarparak

$$(LMPQ)^2 = 1 \quad (3)$$

elde edilir.

Bu durumda $(LMPQ) = 1$ denklemi sağlanamaz (Kısım 5 e bakınız). O halde (3) den

$$(LMPQ) = -1 \quad (4)$$

bulunur.

LM köşegenini L, M, P ve Q noktalarında kesen dört doğru ($ABCD$ tam dörtgeninin iki kenarı ile iki köşegeni) K noktasından geçerler. Teorem 6 ve (4) denklemine göre, K dan geçen bu dört doğrunun bir harmonik demet teşkil edeceği, yani

$$(KL, KM, BD, AC) = -1$$

olacağı anlaşılır.

Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Teorem 13. *Tam dörtgenin bir köşegeni üzerinde her birinden tam dörtgenin bir tek kenarının geçtiği nokta çifti, yine aynı köşegen üzerinde her birinden tam dörtgenin ikişer kenarının geçtiği nokta çiftini harmonik olarak böler.*

Demekki A, B, C, D tam dörtgeninin LM köşegeni üzerinde bir nokta çifti P ve Q diğer nokta çifti de L ve M dir (Şek. 16). Teorem 13 ün doğru olacağı (4) denkleminde anlaşılır.

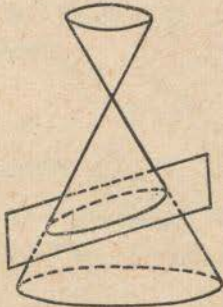
8. KONİKLER

l ve m gibi S noktasında kesişen iki doğru birbirine dik olmasın. m doğrusu sabit olan l doğrusu etrafında döndürülürse sürekli bir yüzey belirtir. Bu yüzey, S noktasında iki ayrı yüzey parçasının birleşmesiyle elde edilen dönel bir K konisidir. S noktasına *koninin tepesi* denir.

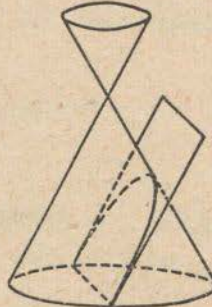
K konisini bir α düzlemi ile keserek *konik* denilen bir q eğrisi elde ederiz. α düzleminin, K konisinin S tepesinden geçmediğini farzederek aşağıdaki halleri inceleyelim:

(1) Koninin bir tarafında kalan yüzey parçasına ait bütün doğruları bir α düzlemi keserse, q eğrisi, *elips* denilen kapalı ve oval bir eğridir (Şek. 17). α düzlemi l e dik iken, elips özel olarak bir dairedir.

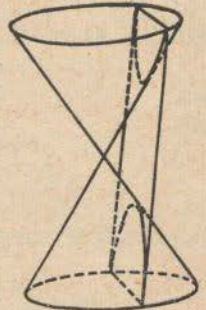
(2) α düzlemi koninin bir doğruya paralel ise, q eğrisi, *parabol* denilen sonsuza doğru açılan bir eğridir (Şek. 18).



Şekil 17.



Şekil 18.



Şekil 19.

(3) α düzlemi koninin yüzey parçalarından her ikisini birden keserse, q eğrisi, sonsuza doğru açılan iki eğriden ibarettir. Bu eğriye *hiperbol* denir (Şek. 19).

Bir nokta ile kesişen iki doğruya da, S tepe noktasından geçen bir düzlem ile koninin kesitiymiş gibi bakılabileceğini hatırlatalım. S noktası sonsuzda bulunan bir nokta ise, yani koni dairesel bir silindir ise; kesişen iki doğru, birbirine paralel olan iki doğru haline gelir. Mamafile ilerde sadece elips, parabol ve hiperbol için «konik» deyimini kullanacağız.

Koninin l eksenine dik olan bir β düzlemi (bu düzlem tabii S den geçmez) ile K konisinin arakesiti bir κ dairesi olsun. K konisinin S tepesine göre κ dairesinin bir α düzlemi üzerindeki izdüşümü alınır, o halde izdüşüm bir konik olacaktır. Böylece bir dairenin bütün projektif özelliklerinin her koniğe aktarılabileceği anlaşılır.

Koniklerin projektif özelliklerini veren teoremleri ispat ederken, dairelerdeki projektif özelliklerin herhangi bir konikte de görülebileceği fikrinden faydalanacağız. İspatları bir daire hali için göstereceğiz ve aynı teoremlerin herhangi bir konik için de doğru olacaklarını derhal anlıyacağız.

9. KONİKLERİN KUTUPSAL ÖZELİKLERİ

Bir q koniğinin düzleminde bulunan fakat konik üzerinde olmıyan bir P noktasından q yü M ve N noktalarında kesen bir l doğrusu çizelim. $M, N; P$ noktaları ile bir harmonik bölme meydana getiren dördüncü noktayı Q ile gösterelim. Eğer l doğrusu, verilen konik düzleminde kalmak üzere P noktası etrafında döndürülürse; Q noktası, P noktasının q ye göre *kutup eğrisi* denilen bir π eğrisi çizer. P noktasına π eğrisinin *kutup noktası* denir.

q koniği üzerinde bulunan bir noktadaki tegete, o noktanın kutup doğrusu diyeceğiz.

Bir noktanın kesişen veya paralel olan iki doğrudan meydana gelen bir şekle göre kutup doğrusunu yukarıdakine benzer bir tarzda tarif ederiz. Nokta verilen doğrulardan biri üzerinde ise, o halde bu doğru, o noktanın kutup doğrusudur. İki doğrunun kesim noktasının bu doğrulara göre kutup doğrusu belirsizdir.

Bir daire merkezinin bu daireye göre kutup doğrusunun sonsuzdaki doğru olacağı, kutup doğrusu tarifinden anlaşılır.

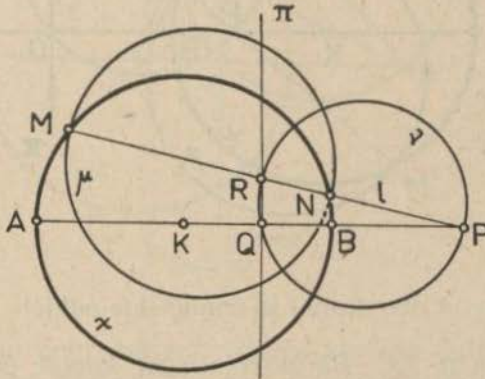
Teorem 14. *Bir noktanın bir daireye göre kutup doğrusu, noktayı dairenin merkezine birleştiren doğruya dik bir doğrudur. (Burada verilen noktayı, dairenin merkezinden başka bir nokta olarak göz önüne almıyoruz).*

Verilen P noktası verilen κ dairesi üzerinde ise, o halde teorem doğru olacağı açıktır. P nin κ dairesi üzerinde olmaması halini ayrıca münakaşa edelim:

κ dairesinin merkezine K diyelim ve PK doğrusunu çizelim. Bu doğru κ dairesini A ve B noktalarında kessin. P nin κ ya göre inversi bir Q noktası olsun. P den geçen ve M, N noktalarında κ dairesini kesen bir l doğrusu alalım. l doğrusu PK dan başka bir doğru olsun.

MN doğru parçasını çap olarak alarak bir μ dairesi çizer ve daha sonra merkezi l doğrusu üzerinde bulunan ve P, Q noktalarından geçen bir ν dairesi belirtiriz. ν dairesi, κ ya göre invers olan farklı iki noktadan geçtiğine göre, κ ya ortogondur (Teorem 1). ν nün merkezi, κ ile μ nün kuvvet ekseninde bulunduğuna göre; ν dairesi μ dairesine de ortogondur (Teorem 4). Buna göre, μ dairesinin MN çapı ve bu çapın uzantısının ν dairesini kestiği noktalar invers noktaldır (Teorem 2).

ν dairesinde, çevrenin yarısını gören PQR açısı bir dik açıdır. O halde R noktası, Q den PK ya inilen dikme üzerinde bulunur.



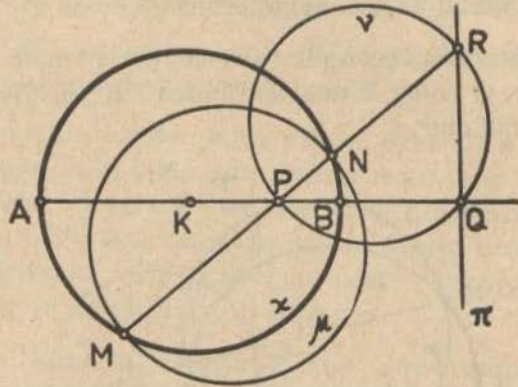
Şekil 20.

Q ve R noktalarının, P nin κ dairesine göre kutup doğrusu üzerinde bulunacaklarını, Teorem 11 i κ ve μ dairelerine uygulamak suretiyle anlıyabiliriz. Buna göre, π doğrusu, Q noktasında PK doğrusuna diktir ve bu iste-

nen sonuçtur. P noktasının α dairesinin içinde olması veya olmaması hallerinde de yine yukarıdaki mülâhazalar uygulanabilir. Bu iki hali, anlaşılması kolay olsun diye, farklı iki çizimle göstereceğiz (Şek. 20 ve 21).

Kutup doğrusu tarifini kelimesi kelimesine muhafaza edersek, o halde α nın bir kirişi olan Q den PK ya indirilen dikmeyi, P noktasının kutup doğrusu olarak alabiliriz. Kirişin uç noktaları, P den α ya çizilen tegetin α ya değme noktalarıdır (Şek. 4 ile karşılaştırınız).

Mamafih aşağıda münakaşa edilecek olan bazı düşünceler, P nin kutup doğrusu olarak, kirişin belirttiği doğrunun tamamını almıya bizi sevkedecektir.



Şekil 21.

Teorem 14 den derhal şu sonuç elde edilir:

Teorem 15. *Bir noktanın bir koniğe göre kutup eğrisi bir doğrudur.*

Daha önce verilmiş olan sonuçlardan şu neticeleri çıkarmak kolaydır:

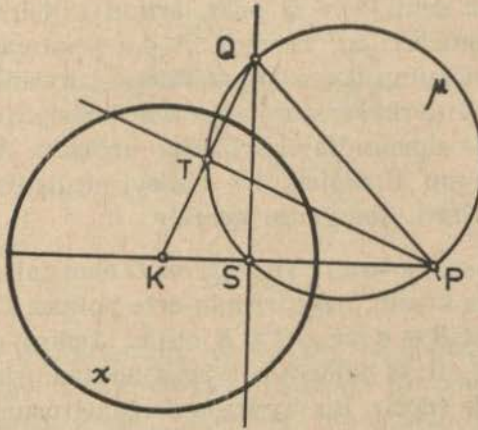
P noktası bir q koniğinin dışında ise, yani P den geçen ve q ile kesim noktası olmayan bir doğru çizmek mümkün

ise; o halde P nin kutup doğrusu, P den q ye çizilen tegetlerin q ye değdiği noktalarda q yü kesecektir.

P noktası q koniğinin içinde ise, o halde P nin kutup doğrusunun q ile ortak bir noktası yoktur.

Bir q koniğinin A ve B noktalarındaki tegetleri çizilirse, bu tegetler, AB doğrusunun kutup noktasında kesişirler.

Teorem 16. Q noktası, bir P noktasının verilen bir koniğe göre kutup doğrusu üzerinde ise; P noktası da Q nün kutup doğrusu üzerindedir.



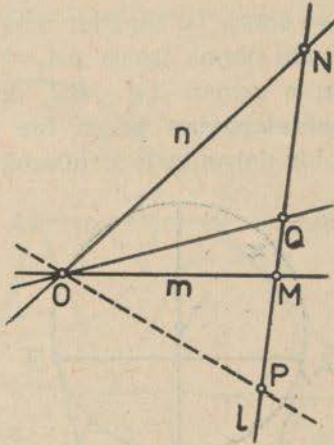
Şekil 22.

Teoremin doğruluğunu verilen koniğin daire olması halinde görmek kâfidir. Daireyi x ve dairenin merkezini K ile gösterelim (Şek. 22).

P nin x dairesine göre inversi olan S noktası, P noktasının kutup doğrusu üzerinde bulunur (Teorem 11) ve PSQ açısı bir dik açı olur. PQ doğru parçasını çap olarak çizilen μ dairesi S noktasından geçer ve o halde μ

doğrudur (eğer verilen doğrular paralel ise, kutup eğrisi, bu doğrulara paralel bir doğru olur).

m ve n gibi iki doğru bir O noktasında kesişsinler (Şek. 23). m ve n doğrularını M ve N gibi farklı iki noktada kesen ve P den geçen bir l doğrusu çizelim. Sonra M , N ; P noktalarıyla harmonik bölme teşkil eden dördüncü

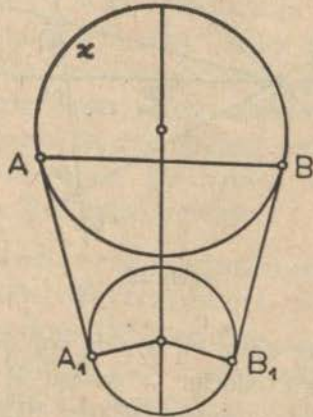


Şekil 23.

noktayı Q ile gösterelim. m, n ; OP, OQ doğruları bir harmonik demet teşkil ederler (Teorem 6). Bundan ötürü, bu doğruların P den geçen OP den başka herhangi bir doğru ile kesim noktaları bir harmonik bölme meydana getirirler. Buradan, OQ doğrusunun, P noktasının kutup doğrusu olacağı anlaşılır. Eğer O noktası sonsuzda ise o halde m, n ve OQ doğruları paraleldirler.

10. BRIANCHON VE PASCAL TEOREMLERİ

İlk önce şu aşağıdaki mütaleanın doğru olacağını görelim: Bir α dairesine üzerindeki A ve B noktalarından tegetler çizilirse ve sonra bu tegetler üzerinde AB doğrusunun aynı tarafında olmak üzere $AA_1 = BB_1$ gibi doğru parçaları alınır; o zaman AA_1 , BB_1 doğrularına teget olan ve A_1 , B_1 noktalarından geçen bir daire çizilebilir (Şek. 24). Böyle bir dairenin çizilebileceği; verilen şeklin



Şekil 24.

α dairesinin AB kirişine dik çapa göre simetrik olmasından anlaşılabılır.

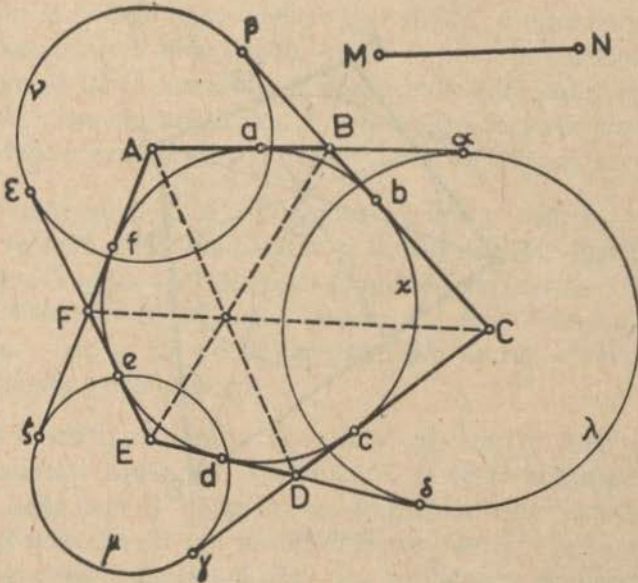
Teorem 18. (Brianchon). *Bir koniğin dışına çizilen bir altıgende karşı köşeleri birleştiren köşegenler bir noktadan geçerler.*

Teoremin bir daire için ispatı, teoremi ispat etmek için kâfidir.

a, b, c, d, e ve f noktalarında x dairesine teget olan bir altıgenin kenarları sırasıyla AB, BC, CD, DE, EF ve FA olsun (Şek. 25). Keyfi bir MN doğru parçası alalım ve aB, bB, cD, dD, eF ve fF yarıdoğruları üzerinde sırayla

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon = f\zeta = MN \quad (1)$$

doğru parçalarını işaretliyelim. α ve δ noktalarında $A\alpha$ ve $E\delta$ doğrularına teget olan λ daresi; γ ve ζ noktalarında



Şekil 25.

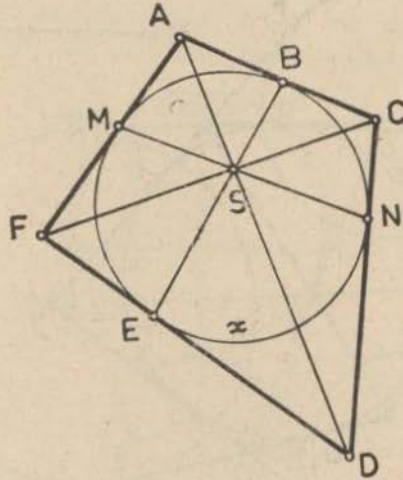
$C\gamma$ ve $A\zeta$ doğrularına teget olan μ daresi; ε ve β noktalarında $E\varepsilon$ ve $C\beta$ doğrularına teget olan ν daresini çizelim. (1) denklemlerine göre λ, μ ve ν dairelerinin çizilebileceği görülür.

λ ile μ, λ ile ν ve μ ile ν daire çiftlerinin kuvvet eksenlerinin sırayla AD, BE ve CF doğruları olacaklarını anlamak zor değildir. Örneğin $B\alpha = B\beta$ ve $E\delta = E\varepsilon$

olduğuna göre (zira $B\alpha = MN - \alpha B$, $B\beta = MN - bB$; $E\delta = MN + Ed$, $E\epsilon = MN + Ee$ dir), B ve E noktaları λ ve ν dairelerinin kuvvet eksenini üzerinde bulunurlar.

Buna göre AD , BE ve CF doğrularının hepsi bir noktadan (λ , μ ve ν dairelerinin kuvvet merkezinden) geçerler (Teorem 5). Teorem böylece ispat edilmiş olur.

Brianchon teoremi, bir altıgenin iki komşu kenarının bir doğru üzerinde bulunması halinde de doğrudur. Bu



Şekil 26.

durumda, aynı doğru üzerinde bulunan kenarların ortak köşesi olarak bu doğrunun daireye değme noktası alınacaktır.

Örneğin bir dairenin dışına çizilen $ACDF$ dörtgenine bir $ABCDEF$ altıgeniymiş gibi bakalım ve bu dörtgeni inceliyelim. Buradaki B ve E noktaları, AC ve DF doğrularının x daireğine değme noktalarıdır (Şek. 26). Brianchon teoremine göre, BE doğrusu, verilen dörtgenin AD ve CF köşegenlerinin S kesim noktasından geçer. Aynı

tarzda, AF ve CD kenarlarının x dairesine değme noktalarını birleştiren MN doğrusunun da S noktasından geçeceği anlaşılır. O halde bir daire dışına çizilen bir dörtgen-de karşı kenarların daireye değdiği noktaları birleştiren doğrular ve dörtgenin köşegenleri bir noktadan geçerler.

Teorem 19. (Pascal). *Bir koniğin içine çizilen bir altıgenin karşı kenarlarının kesim noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar*.*

Bir q koniği içine çizilen bir $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ altıgeninin $\alpha\beta$ ile $\delta\epsilon$ kenarları P noktasında, $\beta\gamma$ ile $\epsilon\zeta$ kenarları Q noktasında ve $\gamma\delta$ ile $\zeta\alpha$ kenarları R noktasında kesişsinler (Şek. 27). Bu altıgenin köşelerinden q koniğine tegetler çizelim ve böylece meydana gelen altıgeni $ABCDEF$ ile gösterelim.

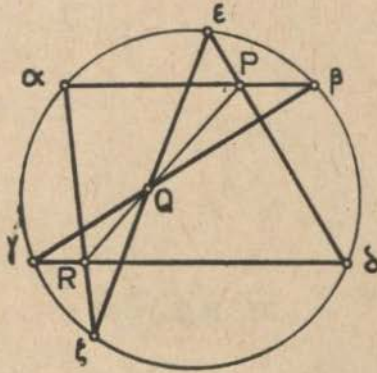
P noktası, hem A noktasının $\alpha\beta$ kutup doğrusu üzerinde ve hem de D noktasının $\delta\epsilon$ kutup doğrusu üzerinde bulunur. O halde AD doğrusu P noktasının kutup doğrusudur (Teorem 16). Benzer tarzda; BE ve CF doğrularının da, sırayla, Q ve R noktalarının kutup doğruları olacaklarını gösterebiliriz.

Brianchon teoremine göre AD , BE ve CF doğruları S noktasında kesişirler. Mademki P , Q ve R noktalarının kutup doğruları S noktasından geçmektedirler o halde P , Q ve R noktaları S nin kutup doğrusu üzerinde yani aynı bir doğru üzerinde bulunurlar. Bu ise istenen sonuçtur.

Pascal teoremi bir konik içine çizilen altıgenin iki komşu köşesinin çakışması halinde de doğrudur. Bu durumda; her iki köşenin çakıştığı noktadaki konik

*) Bu projektif geometrinin temel teoremlerinden biridir. Teoremi, ilk defa, küçük yaşında parlak matematik buluşları olan Blaise Pascal (1623-1662) 16 yaşında iken ifade etti ve ispatladı. Brianchon teoremi ise, daha sonraları (Pascal'ın teoremini ispat etmesinden tahminen 150 yıl kadar sonra) ispat edildi.

tegetini, altıgenin bu köşeleri ile tarif edilen kenarımış gibi göz önüne almamız gerekecektir (Şek. 28).



Şekil 28.

Pascal ve Brianchon teoremlerinin ispatlarından anlaşılacağı gibi; bu teoremler, yıldız biçimindeki altıgenler için de doğrudur.

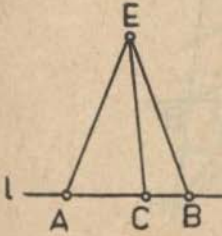
BÖLÜM II.

CETVEL İLE YAPILAN
GEOMETRİK ÇİZİMLER

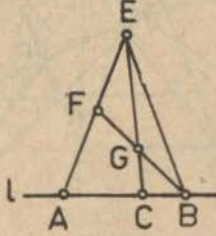
11. BAZI DOĞRUSAL ŞEKİLLERİN CETVEL İLE ÇİZİMLERİ

Problem 1. Bir l doğrusu üzerinde A, B ve C gibi farklı üç nokta veriliyor. Öyle bir D noktası bulunuz ki D, C noktaları A, B nokta çiftini harmonik olarak bölsün.

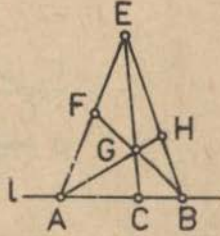
Bir tam dörtgenin harmonik özelliklerine göre, çizime ait düşünce tarzı açıktır. Bununla beraber, problemin ehemmiyetinden ötürü, çizimin yapıışındaki bütün adımları teferruatıyla göz önüne alacağız.



Şekil 29.



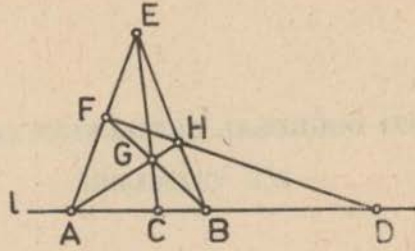
Şekil 30.



Şekil 31.

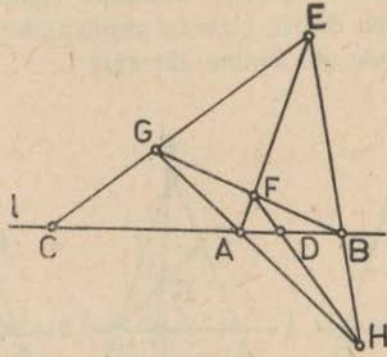
l doğrusu dışında bir E noktası alırız ve AE, BE, CE doğrularını çizeriz (Şek. 29). AE üzerinde A ve E den başka bir F noktası alır ve CE yi G noktasında kesen BF doğrusunu belirtiriz (Şek. 30). Sonra, BE yi H noktasında kesen AG doğrusunu çizeriz (Şek. 31). FH doğrusu, l doğrusunu aranan D noktasında keser (Şek. 32).

Gerçekten AB doğrusu, $EFGH$ tam dörtgeninin bir köşegenidir. Buna ve Teorem 13 e göre $(ABCD) = -1$



Şekil 32.

olur. Şek. 33 de, C noktasının AB doğru parçasının dışında olması halinde yapılan çizim öncekinin aynıdır.



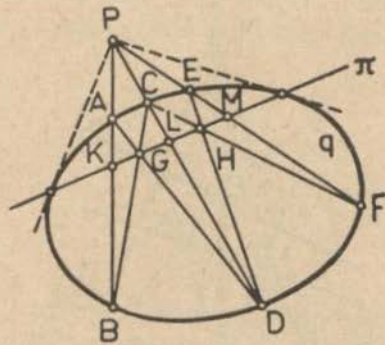
Şekil 33.

Problem 2. Bir doğru demetinin a , b ve c gibi farklı üç doğrusu veriliyor. a , b doğru çifti ve c ile harmonik demet teşkil eden d doğrusunu çiziniz.

Demetin merkezinden (yani verilen doğruların kesim noktasından) geçmiyen bir l doğrusu çizeriz. l doğrusu a , b ve c doğrularını sırayla A , B ve C noktalarında keser. A , B ye göre C nin harmonik eşleniği olan noktayı bulur (Problem 1) ve bu noktayı demetin merkezine birleştiren doğruyu çizeriz.

12. KONİKLERLE İLGİLİ OLAN VE CETVEL İLE YAPILAN ÇİZİMLER

Problem 4. Bir q koniği ve q üzerinde bulunmayan bir P noktası veriliyor. P noktasının π kutup doğrusunu bulunuz.



Şekil 35.

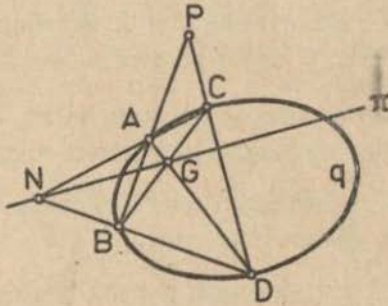
Tam dörtgenin harmonik özelliklerine göre çizime ait farklı durumlar Şek. 35, 36 ve 37 de gösterilmiştir.

Şek. 35 e ait çizimi inceliyelim: PA , PC ve PE kesenleri üzerinde K , L ve M gibi öyle noktalar alırız ki

$$(ABPK) = (CDPL) = (EFPM) = -1 \quad (1)$$

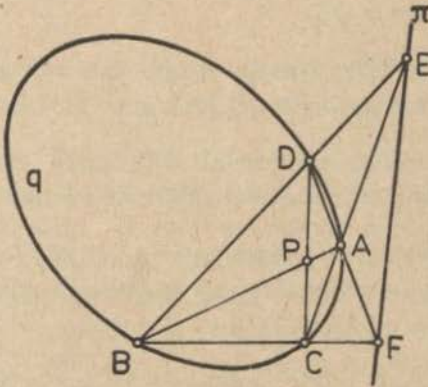
denklemleri sağlanır. $ABCD$ ve $CDFE$ tam dörtgenlerinin özelliklerine göre, bu tam dörtgenlerde KL ve LM doğrularının karşılıklı köşegenler oldukları ve bu köşegenlerden KL nin G noktasından ve diğer LM nin de H noktasından geçeceği anlaşılır. Fakat (1) denklemlerinden K , L ve M

noktalarının P noktasının π kutup doğrusu üzerinde bulundukları ve o halde π doğrusunun G ve H noktalarından geçeceği görülür. Esasen çizimi yaparken K , L ve M noktalarını nazarı itibara almayız. Zira bu noktaları, ele alınan çözümde sadece bir basamak teşkil etmeleri bakımından göz önüne almaktayız.



Şekil 36.

Yukardaki çizim, PE keseninin çizilmesinden vazgeçilerek daha da basitleştirilebilir. Zira $ABCD$ tam dörtgeninin KL köşegeninin, AC ile BD nin kesim noktasından ve G noktasından geçmesi gerekir (Şek. 36).



Şekil 37.

Şek. 37 de yapılmış olan çizim şu esasa dayanmaktadır:

PE ve PF doğrularının (bunlar şekilde gösterilmemişlerdir) sırayla F ve E noktalarının kutup doğruları oldukları görülür. Buna ve Teorem 16 ya göre, P noktasının π kutup doğrusu E ve F noktalarından geçer.

Problem 5. Bir q koniği ve q üzerinde olmayan bir P noktası veriliyor. P den q ye çizilen tegetleri bulunuz.

P noktasının π kutup doğrusunu sonra da P noktasını π ile q nün kesim noktasına birleştiren doğruyu çizeriz.

Şek. 35 de P den geçen tegetler, nokta nokta çizilmiş olan doğrularla gösterilmişlerdir.

q ile π birbirini kesmezse, o halde tegetler bulmak mümkün değildir.

Problem 6. Bir konik ve bir π doğrusu veriliyor. Doğrunun P kutup noktasını bulunuz.

π üzerinde A ve B gibi herhangi iki nokta alırız. A noktasının a kutup doğrusu ile B noktasının b kutup doğrusunu çizeriz. a ve b doğruları aranan P noktasında kesişirler (Teorem 16).

Problem 7. Verilen bir konik üzerinde alınan bir P noktasından koniğe bir teget çiziniz.

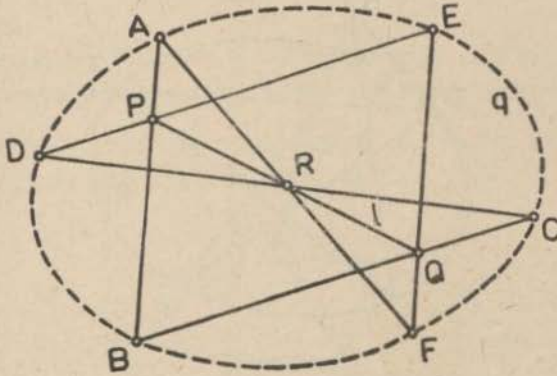
P den geçen keyfi bir kesen çizeriz. Bu kesenin Q kutup noktasını buluruz. PQ doğrusu aranan tegettir.

Problem 8. Bir q koniğinin A, B, C, D, E gibi beş noktası veriliyor. q koniğine ait bir altıncı noktayı çizimle bulunuz.

A, B, C, D, E noktalarını q eğrisi içine çizilen Pascal altıgeninin müteakip beş noktasıymış gibi alırız (Şek. 38).

AB ve DE doğrularını belirtir ve bu doğruların P kesim noktasından geçen keyfi bir l doğrusunu çizeriz. BC ve CD doğruları, l doğrusunu sırayla Q ve R noktalarında kessinler. EQ ve AR doğrularını da çizeriz. Bu iki doğrunun F kesim noktası q koniği üzerinde bulunur.

Gerçekten; $ABCDEF$ altıgeninin karşılıklı kenarlarının (yani AB ve DE , BC ve EF , CD ve FA kenarlarının) kesim noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar. Eğer AR doğrusu q yü F den başka bir F' noktasında da keserse,



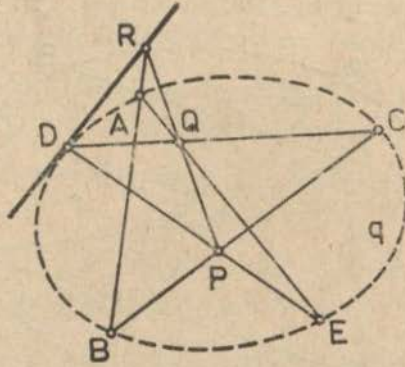
Şekil 38.

EF' doğrusu Q noktasından geçmez. EF' doğrusu Q den geçseydi Pascal teoremi ile bir çelişme gösterirdi.

İhtar. Beş noktasiyle tarif edilen bir koniğin verilen bir doğru ile kesim noktalarından biri bilinirse, o zaman yukarıdaki metodu uygulayarak ve cetvel kullanarak ikinci kesim noktasını bulmak mümkündür. Lâkin, eğer beş noktasiyle verilen bir koniğin verilen doğru ile kesim noktalarından biri verilmezse, kesim noktalarını yalnız cetvel ile yapılan bir çizimle bulmak mümkün değildir.

Problem 9. Bir q koniğinin A, B, C, D ve E gibi beş noktası veriliyor. Bu noktaların birinden q ye bir teget çiziniz.

D noktasından q ye bir teget çizelim (Şek. 39). AB, BC, CD, DE , ve AE doğru parçaları ile q nün D deki tegetini konik içine çizilen altıgenin kenarlarıymış gibi alarak BC ve DE doğrularının P kesim noktası ile CD ve EA doğrularının Q kesim noktasını buluruz. AB ve PQ

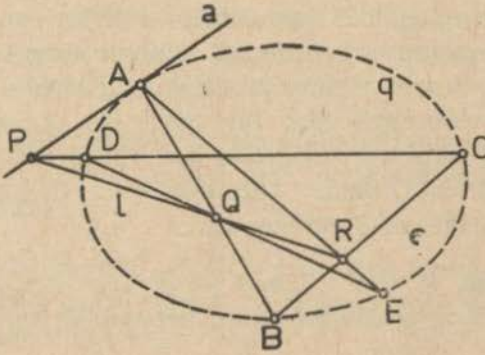


Şekil 39.

doğrularının kesim noktası R ile gösterilsin. DR doğrusu aranan tegettir.

Problem 10. Bir q koniğinin A, B, C ve D gibi dört noktasıyla q nün A daki a tegeti veriliyor. q eğrisine ait beşinci bir noktayı bulunuz.

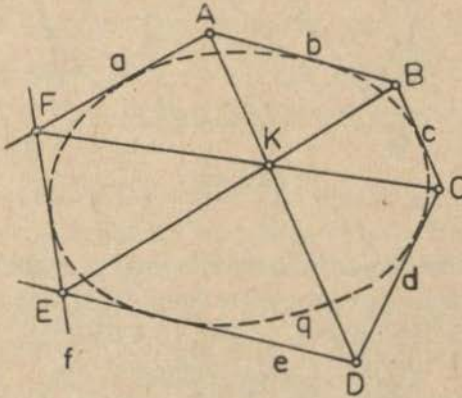
a, AB, BC, CD, DE, EA doğrularını q nün içine çizilen altıgenin kenarlarıymış gibi alarak a ve CD doğrularının P kesim noktasını buluruz. P den geçen herhangi bir l doğrusu çizeriz. l doğrusu AB yi q noktasında ve BC yi de R noktasında kessin (Şek. 40). AR ve DQ doğrularının E kesim noktası q eğrisi üzerinde bulunur.



Şekil 40.

Problem 11. Bir q koniğinin a, b, c, d ve e gibi beş tegeti veriliyor. q ye ait altıncı bir teget çiziniz.

a, b, c, d ve e ye q nün dışına çizilen bir altıgenin beş kenarıymış gibi bakarız (Şek. 41).

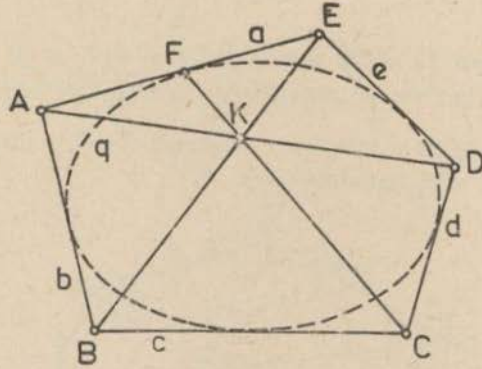


Şekil 41.

a ve b doğruları A noktasında, d ve e doğruları D noktasında kesişirler. AD doğrusunu çizer ve bu doğru üzerinde keyfî bir K noktası alırız. Sonra BK ve CK doğrularını belirtiriz. CK doğrusu e yi E noktasında kessin. EF doğrusu aranan tegettir.

Gerçekten, eğer F noktasından q ye bir f tegeti çizersek, q nün dışına çizilen $abcdef$ gibi bir altıgen belirtmiş oluruz. Bu altıgenin karşı köşelerini birleştiren doğrular, Brianchon teoremine göre bir noktadan geçerler. Karşı köşeleri birleştiren bu doğrulardan AD ile CF , K noktasında kesişirler. O halde f tegetinin, e ile BK nın E kesim noktasından geçmesi gerekecektir.

Problem 12. Bir q koniğinin a, b, c, d ve e gibi beş tegeti veriliyor. a doğrusunun q eğrisine değme noktasını bulunuz.



Şekil 42.

Brianchon teoreminin, konik dışına çizilen altıgenin iki komşu kenarının çakışması halinde de doğru olacağını daha evvel hatırlatmıştık (Kısım 10 a bakınız). Bu durumda; doğrunun verilen koniğe değme noktası, çakışan iki kenarın kesim noktasıymış yani altıgenin bir köşesiymiş gibi alınır.

Çizimi aşağıdaki gibi yaparız (Şek. 42): a, b, c, d, e doğrularına (a kenarı iki defa sayılır) q nün dışına çizilen altıgenin kenarlarıymış gibi bakarak altıgenin A, B, C, D, E gibi beş köşesini elde eder ve AD ile BE doğrularını çizeriz. Bu doğruların kesim noktası K olsun. CK yı çizer

ve CK nın a doğrusu ile F kesim noktasını buluruz. F noktası altıgenin altıncı köşesidir ve a doğrusunun q koniğine F noktasında değdiği görülür.

Pascal ve Brianchon teoremlerini uygulayarak ve yalnız cetvel kullanarak okuyucu aşağıdaki yedi problemi kolayca çözebilir:

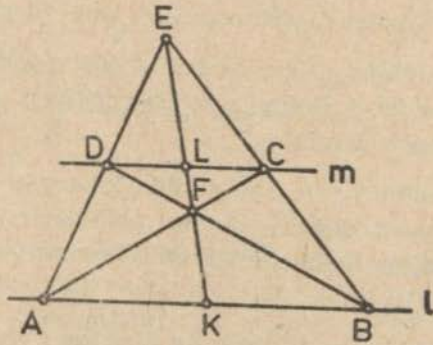
1. Bir q koniğinin A, B, C, D gibi dört noktası ve q nün A noktasındaki a tegeti veriliyor. q nün B noktasındaki tegetini çiziniz.
2. Bir q koniğinin A, B, C gibi üç noktası; q nün A noktasındaki a tegeti ve q nün B noktasındaki b tegeti veriliyor. q eğrisi üzerindeki bir dördüncü noktayı çizimle bulunuz.
3. Bir q koniğinin A, B, C gibi üç noktası; q nün A noktasındaki a tegeti ve q nün B noktasındaki b tegeti veriliyor. q nün C noktasındaki tegetini çiziniz.
4. Bir q koniğinin a, b, c ve d gibi dört tegeti ile a doğrusunun q ye A değme noktası veriliyor. q ye ait bir beşinci teget çiziniz.
5. Bir q koniğinin a, b, c ve d gibi dört tegeti ile a doğrusunun q ye A değme noktası veriliyor. b doğrusunun q ye B değme noktasını çizimle bulunuz.
6. Bir q koniğinin a, b, c gibi üç tegeti; a nın q ye A değme noktası ve b nin q ye B değme noktası veriliyor. q ye ait bir dördüncü teget çiziniz.
7. q koniğinin a, b, c gibi üç tegeti; a doğrusunun q ye A değme noktası ve b doğrusunun q ye B değme noktası veriliyor. c doğrusunun q ye değme noktasını bir çizimle bulunuz.

13. PARALEL İKİ DOĞRU VERİLDİĞİNE GÖRE CETVEL İLE YAPILAN ÇİZİMLER

Aşağıda münakaşa edilecek olan çizimlerde çok defa şu teoremi kullanacağız:

Teorem 20. *Bir yamuğun köşegenlerinin kesim noktası ile paralel olmıyan kenarlarının kesim noktasından geçen doğru, yamuğun paralel kenarlarını ortalar.*

Bu teorem, (Şek. 43) deki $CDEF$ tam dörtgeninin harmonik özelliklerine dayanarak ispat edilebilir: A, B, K



Şekil 43.

noktalarıyla harmonik bölme teşkil eden dördüncü nokta sonsuzdadır ve o halde $AK = KB$ olur.

Tamamen daha basit düşüncelere dayanarak diğer bir ispat tarzı vermek de mümkündür: İkişer ikişer birbirine benzer olan AKE ile DLE , KBE ile LCE , AKF ile CLF ,

KBF ile DLF üçgen çiftleri elde edilir. O halde bu üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{AK}{DL} = \frac{KE}{LE}, \quad \frac{KB}{LC} = \frac{KE}{LE}$$

ve

$$\frac{AK}{LC} = \frac{KF}{FL}, \quad \frac{KB}{DL} = \frac{KF}{FL}$$

oldukları görülür.

Bu bağıntılardan

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}, \quad \frac{AK}{KB} = \frac{LC}{DL}$$

orantıları bulunur. Son iki denklemin taraf tarafa çarpılarak

$$\left(\frac{AK}{KB} \right)^2 = 1$$

elde ederiz. O halde $AK = KB$ dir.

Problem 13. Bir AB doğru parçası ve bu doğru parçasının K orta noktası veriliyor. Verilen bir D noktasından AB doğrusuna paralel bir doğru çiziniz.

E noktası, AD yarı doğrusu üzerinde bulunan herhangi bir nokta olduğuna göre (Şek. 43 e bakınız) BE , KE , AD ve BD doğrularını çizeriz. BD ve KE doğrularının kesim noktasına F diyelim ve AF doğrusunu da çizelim. AF doğrusu BE yi C noktasında kessin. CD doğrusunu çizersek, bu doğru AB ye paraleldir.

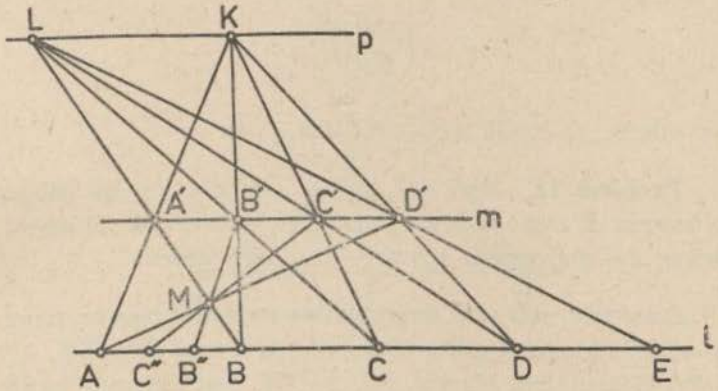
Problem 14. l ve m gibi iki doğru birbirine paraleldir. l üzerinde alınan bir AB doğru parçasını ortalayınız.

l ve m üzerinde bulunmayan keyfi bir E noktası alır (Şek. 43), AE ve BE doğrularını çizeriz. AE ve BE doğruları, m doğrusunu sırayla D ve C noktalarında keserler. AC ve BD doğrularını çizer ve bu doğruların kesim noktasını F ile gösteririz. EF doğrusu, AB doğru parçasının orta noktasından geçer.

Problem 15. Verilen l ve m doğruları üzerinde bulunmayan bir A noktasından bu doğrulardan birine paralel bir doğru çizeriz.

Önce l doğrusu üzerinde alınan herhangi bir doğru parçasını ortalarız (Problem 14). Sonra A dan geçen ve l e paralel olan bir doğru çizeriz (Problem 13).

Problem 16. l ve m gibi paralel iki doğru ve l üzerinde bir AB doğru parçası veriliyor. AB doğru parçasının n katı olan doğru parçasını çizeriz (n bir tam sayıdır).



Şekil 44.

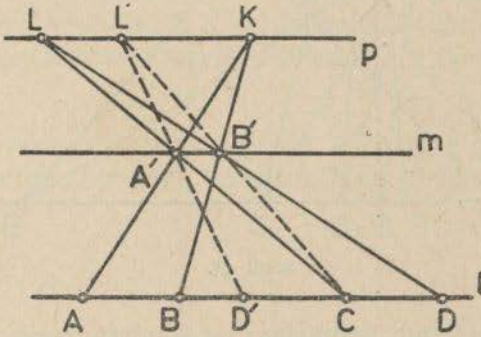
l ve m doğruları dışında alınan keyfi bir K noktasından (Şek. 44) verilen doğrulardan birine paralel bir p doğrusu çizeriz (Problem 15). AK ve BK doğrularını belirtiriz. AK ve BK doğruları, m doğrusunu sırayla A' ve

B' noktalarında kessinler. p yi L noktasında kesen BA' doğrusu ile l yi C noktasında kesen LB' doğrusunu çizeriz. O halde $AB = BC$ dir. Çizime devam ederek herbiri AB doğru parçasına eşit olan CD , DE , v.s... doğru parçalarını da elde edebiliriz.

Problem 17. l ve m gibi paralel iki doğru, l üzerinde bir AB doğru parçası ile yine l üzerinde bir C noktası veriliyor. l üzerinde AB doğru parçasına eşit bir CD doğru parçası alınız.

l ve m doğrularının dışında alınan keyfi bir K noktadan verilen doğrulara paralel bir doğru çizeriz. Çizimin geri kalan yapılışı Şek. 45 e göre açıktır. CD ve CD' doğruları olmak üzere problemin iki çözümü vardır.

Problem 18. l ve m gibi paralel iki doğru ve l üzerinde bir AB doğru parçası veriliyor. AB doğru parçasını n eşit parçaya bölünüz.



Şekil 45.

Doğru parçasının üç eşit parçaya bölüneceği farzedilsin. Ayrıca Problem 16 da verilen çizim yolu ile AB doğru parçasını üç defa uzatırsak, m doğrusu üzerinde birbirine eşit $A'B'$, $B'C'$ ve $C'D'$ doğru parçalarını elde ederiz (Şek. 44). Daha sonra AD' ve BA' doğrularını çizer ve bu

$\alpha C; D$ noktasında l doğrusunu kesen $K\delta$ doğrularını çizeriz. $AD = 1/3 \cdot AB$ olduğunu ispat edelim: $\alpha\delta\gamma K$ tam dörtgenine dikkatlice bakarsak $A, C; D, B$ noktalarının harmonik bir bölme teşkil ettiklerini görürüz. O halde

$$AD : DC = AB : CB$$

dir.

Lâkin $AB = 2CB$ dir (Problem 14 e bakınız). Bu ve bundan bir önceki denkleme göre $AB = 2DC$ buluruz. Demekki $AD = 1/3 \cdot AB$ dir.

Ayrıca, ξ noktasında $A\beta$ doğrusunu kesen αD doğrusu ile E noktasında l doğrusunu kesen $K\xi$ doğrusunu çizer ve $AE = 1/4 \cdot AB$ doğru parçasını elde ederiz.

Daha sonra, ζ noktasında $A\beta$ doğrusunu kesen αE doğrusu ile Γ noktasında $A\beta$ doğrusunu kesen $K\zeta$ doğrusunu çizerek $AF = 1/5 \cdot AB$ doğru parçasını elde ederiz.

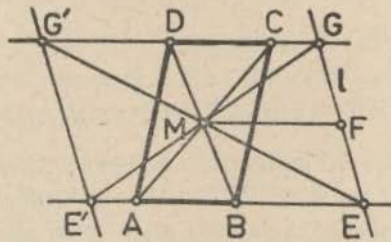
Son yazılan iki denklemin doğru olduğunu ispat etmek için $A, D; E, B$ ve $A, E; F, B$ nokta takımlarının her ikisinin de harmonik bölme teşkil ettiklerini göz önüne almak kâfidir.

Çizime böylece devam eder ve AB doğru parçasının altıda bir, yedide bir, v.s... parçasını bulabiliriz.

**14. BİR PARALELKENAR VEYA BİR KARE
VERİLDİĞİNE GÖRE CETVEL İLE
YAPILAN ÇİZİMLER**

Bir paralelkenar kullanarak aşağıdaki problemi çözmek mümkündür:

Problem 20. *Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir l doğrusuna paralel olan bir doğru çiziniz.*



Şekil 47.

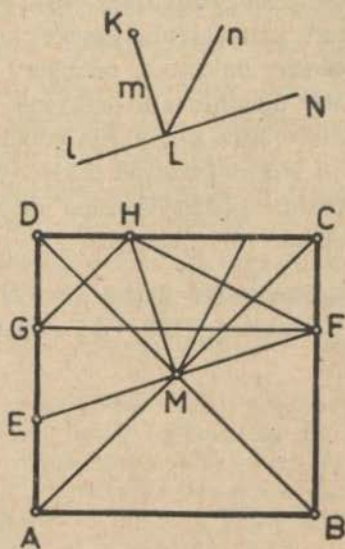
Paralelkenarın köşegenlerinin kesim noktasından geçen ve paralelkenarın kenarlarından birine paralel olan bir doğru çizelim. O halde verilen l doğrusu üzerinde EF ve FG gibi eşit iki doğru parçası meydana gelir (Şek. 47).

Böylece Problem 13 e gelmiş oluruz. l doğrusunun BC veya AB ye paralel olması hali ise bizi Problem 15 e götürür. Çizime ait bir ikinci metod, CD ve EM doğrularının G' kesim noktası ile AB ve GM doğrularının E' kesim noktasını elde etmekten ibarettir. $E'G'$ doğrusu l doğrusuna paraleldir. O halde biz yine Problem 15 e gelmiş bulunuyoruz.

14 den 20 ye kadar olan problemler ile aşağıdaki iki problemi bir kare kullanarak çözmek mümkündür:

Problem 21. Verilen bir K noktasından verilen bir l doğrusuna bir dikme indiriniz.

$ABCD$ karesi verilmiş olsun (Şek. 48). Karenin köşegenlerini çizeriz. Köşegenlerin M kesim noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan EF doğrusunu belirtiriz (Problem 20). Sonra AB ye paralel FG ve AC ye paralel GH doğrularını da çizeriz.



Şekil 48.

HM nin EF ye dik olduğunu ispat etmek kolaydır. Gerçekten; çizime göre $CF = GD = DH$ olduğu ve ayrıca $MD = MC$, $\angle MDH = \angle MCF = 45^\circ$ oldukları görülür. O halde MDH ve MCF üçgenleri benzerdir. Buradan

$$\sphericalangle HMF = \sphericalangle HMC + \sphericalangle CMF =$$

$$\sphericalangle HMC + \sphericalangle HMD = \sphericalangle DMC = 90^\circ$$

olduğu çıkar.

Bu sonuç, problemi çözmek için K noktasından HM ye paralel bir m doğrusunun çizilmesi gerekeceğini ifade eder. m doğrusu aranan dikmedir.

Problem 22. Verilen bir dik açının eşit iki açıya bölünmesi.

Eşit iki açıya bölünmesi istenen açı, daha önce verilmiş olan KLN dik açısı olsun (Şek. 48). Bu açının kenarları FHM açısının kenarlarına paralel olduklarına göre (bir önceki probleme bakınız), problemi çözmek için L den geçen ve FMH açısının açı ortayına paralel olan bir doğru çizmek kâfidir. Zira kolaylıkla görüleceği gibi, FHM açısının açı ortayı FH doğrusuna diktir. Gerçekten MDH ve MCF üçgenlerinin benzerliğinden $MF = MH$ olur ve FMH üçgeni ikizkenar bir üçgendir.

O halde L noktasından geçen ve FH doğrusuna dik olan n doğrusu (Problem 21), KLN açısının aranan açı ortayıdır.

15. BİR DAİRE VE MERKEZİ VERİLDİĞİNE GÖRE CETVEL İLE YAPILAN ÇİZİMLER

Bir çizim problemi cetvel ve pergeli ile çözülebilirse, o zaman böyle bir problemin cebirsel metod ile çözümü, çok iyi bilineceği gibi, bir veya bir kaç lineer denklem ile ikinci dereceden denklemlerin köklerinin çizimle bulunmasına getirilebilir. Buna dayanarak böyle problemlere «ikinci dereceden problemler» denir.

Şu husus dikkate değer: Eğer şekil düzleminde bir daire çizilmiş ve bu dairenin merkezi verilmiş ise, ikinci dereceden her çizim problemi yalnız cetvel ile çözülebilir *.

Bu hususu ispat etmek için; bir daire ve bu dairenin merkezi önceden verilmiş iken, merkez ve yarıçapıyla verilen bir daire ile bir doğrunun ve yine aynı tarzda merkez ve yarıçaplarıyla verilen iki dairenin kesim noktalarının yalnız cetvel ile yapılan çizimlerle elde edilebileceklerini görmek kâfidir. Gerçekten çizim problemlerinde sadece bu iki işi yapmak için pergeli kullanılır **.

Bu ikisine tekâbül eden çizimler, Problem 30 ve 31 de

*) Bu keyfiyet, Fransız matematikçisi Poncelet ve Poncelet'den tamamiyle müstakil olarak Alman matematikçisi Steiner tarafından ortaya konmuştur. Jean-Victor Poncelet (1789-1867) gençliğinde Napoleon ordusunda bir subay idi, 1812 de yapılan Rusya seferine katıldı, esir edildi, iki yıl kadar Saratov'da yaşadı ve orada projektif geometrideki buluşları ile meşgul oldu.

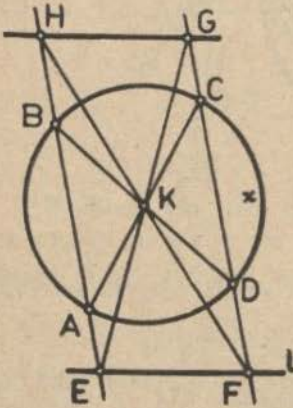
Jacob Steiner (1796-1867) İsviçreli bir köylünün oğlu idi. 19 yaşında, hemen hemen hiç okuyup yazma bilmezken, meşhur pedagog Pestalozzi'nin okuluna kaydoldu. 39 yaşında, Berlin İlimler Akademisinin bir aslı üyesi seçildi.

**) Bir daireyi cetvelle çizmek imkânsızdır. Fakat daire üzerinde beş nokta biliniyorsa, dairenin istenildiği kadar çok sayıda noktasını cetvel yardımıyla yapılan bir çizim ile bulmak mümkündür (Problem 8 e ve aynı zamanda ilerideki Problem 29 a bakınız).

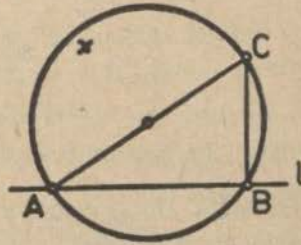
Problem 24. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir l doğrusuna paralel olan doğruyu çiziniz.

Eğer l doğrusu K dan geçerse Problem 13 elde edilir. Aksi halde l doğrusuna paralel herhangi bir doğrunun çizilmesi gerekir ki, bu sonuç bizi Problem 15 e götürür.

Çizim yolu Şek. 50 ye göre açıktı. GH doğrusu l doğrusuna paraleldir.



Şekil 50.



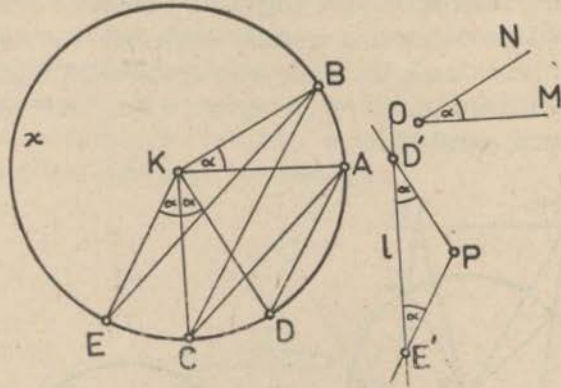
Şekil 51.

Problem 25. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir l doğrusuna dik olan doğruyu çiziniz.

Merkezden geçmeyen bir l doğrusu α daresini A ve B noktalarında keserse, α daresinin AC çapını çizeriz. CB doğrusu l doğrusuna diktir (Şekil 51). Sonra verilen noktadan geçen ve CB doğrusuna paralel olan doğruyu çizeriz. Diğer hallerde de aynı metodu uyguluyoruz. Fakat, bu haller için önce l doğrusuna paralel olup merkezden geçmeyen ve α daresini kesen bir doğru çizeriz.

Problem 26. Verilen bir P noktasından geçen ve verilen bir l doğrusu ile verilen bir $MON = \alpha$ açısı yapan doğruyu çiziniz.

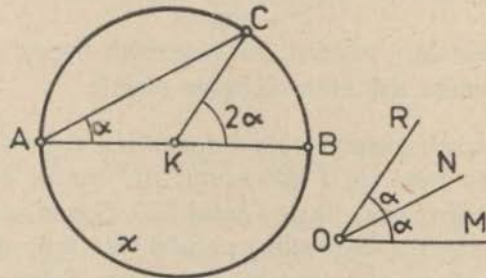
Problemnin çözümünü Şek. 52 de verilmiştir ve bu şekilde $KA \parallel OM$, $KB \parallel ON$, $KC \parallel l$, $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$, $PD' \parallel KD$ ve $PE' \parallel KE$ dir.



Şekil 52.

α nın bir dar açı veya bir geniş açı olması halinde problemin iki çözümü vardır.

Problem 27. Verilen bir $MON = \alpha$ açısının iki katına eşit olan açığı çizin.



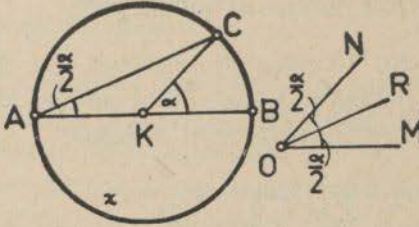
Şekil 53.

x dairesinin OM ye paralel çapı ve ON ye paralel kirişini çizeriz (Şek. 53). O halde $\angle BKC = 2\alpha$ dir.

Çizimi istenen MOR açısının OR kenarı KC doğru-
suna paraleldir.

Problem 28. Verilen bir $MON = \alpha$ açısının açıortayını çiziniz.

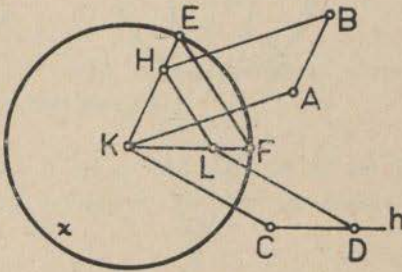
Çizim Şek. 54 de yapılmıştır ve bu şekilde $AB \parallel OM$, $KC \parallel ON$ ve $OR \parallel AC$ dir.



Şekil 54.

Problem 29. Bir AB doğru parçası ile bir C noktasından geçen bir h yarıdoğrusu veriliyor. h üzerinde AB ye eşit bir CD doğru parçası alınız.

KABH paralelkenarını ve h ya paralel KF yarıdoğrusunu çizeriz (Şek. 55). KH ve KF yarıdoğruları x dairesini E ve F noktalarında kessinler.



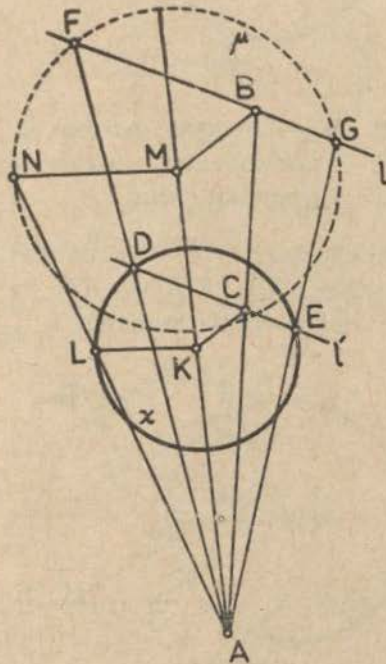
Şekil 55.

EF doğrusunu çizer ve EF ye paralel olan HL doğrusunu KF yi L noktasında kesinceye kadar uzatır ve CKLD paralelkenarını çizeriz. Çizimi istenen doğru parçası CD dir.

Eğer K, A, B noktaları veya K noktası ile h yarı-doğrusu bir doğru üzerinde iseler, çizimin yapılışı daha da kolaylaşır.

Verilen bu çizimi uygulayarak, merkezi ve yarıçapı ile verilen bir dairenin merkezinden geçen bir doğru ile kesim noktalarını bulmamız mümkündür.

Problem 30. Yalnız M merkezi ve MN yarıçapı verilen fakat çizilmemiş olan bir μ dairesi ile verilen bir l doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.



Şekil 56.

x dairesinde MN doğrusuna paralel olan KL yarıçapını çizeriz (Şek. 56). KM ve LN doğrularını belirtir ve bu doğruların A kesim noktasını buluruz (A noktası x ve

μ dairelerinin benzerlik merkezidir. Şekilde alınan A noktası ise dış benzerlik merkezidir).

Daha sonra, şekildeki μ dairesini A benzerlik merkezine göre ν ye dönüştüren bir benzerlik dönüştürümü* yapıldığında, l doğrusunun dönüştürülmesiyle elde edilecek olan l' doğrusunu buluruz.

Çizimi yapmak için l üzerinde herhangi bir B noktası alır ve BA , BM doğru parçalarını işaretleriz. K dan BM ye paralel olarak çizilen KC doğrusunu AB yi C noktasında kesinceye kadar uzatırız. C den l doğrusuna paralel l' doğrusunu çizeriz. l' doğrusu κ dairesini D ve E noktalarında kessin. AD ve AE doğruları l doğrusunu aranan F ve G noktalarında keserler.

D ve E noktaları çakışırsa, o zaman l doğrusu μ dairesine teğettir. Eğer l' doğrusunun κ dairesiyle ortak bir noktası yoksa, o zaman l doğrusunun μ dairesiyle ortak bir noktası da olamaz.

Eğer A noktası sonsuzda ise, o zaman κ ve μ dairelerinin dış benzerlik merkezi yerine iç benzerlik merkezinin alınması gerekir.

κ ve μ dairelerinin ortak merkezli olmaları halinde çizim ne şekilde değişecektir?

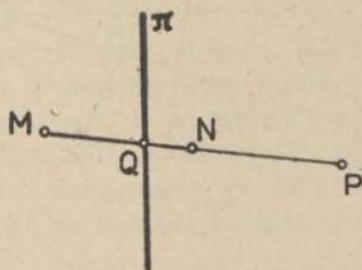
Problem 31. μ ve ν dairelerinin M ve N merkezleriyle yarıçapları veriliyor. Dairelerin kesim noktalarını bulunuz.

Verilen dairelerin kuvvet eksenini çizerek işe başlayacağız. A noktasının μ dairesi üzerinde ve B noktasının da ν dairesi üzerinde herhangi iki nokta olduğunu farze-

*) Yani verilen bir şekli düzlemde biraz daha öteye atmak suretiyle A benzerlik merkezine göre bu şeklin benzeri olan şeklin çizilmesi.

16. BİR DAİRE YAYI VE MERKEZ VERİLDİĞİNE GÖRE
CETVEL İLE YAPILAN ÇİZİMLER

α düzleminde *temel doğru* diyeceğimiz bir π doğrusu ile aynı düzlemde olup da π doğrusu üzerinde bulunmayan *temel nokta* diyeceğimiz bir P noktasının verildiğini farzedelim ve α düzleminde şu dönüştürümü inceliyelim: P noktası ve π doğrusu üzerinde bulunan her nokta kendisine dönüştürülsün. α düzleminde diğer herhangi bir M noktası ise bir N noktasına dönüştürülsün öyle ki; π ve



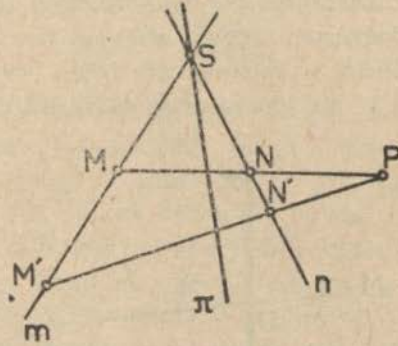
Sekil 58.

PM doğrularının kesim noktası Q olduğuna göre; N noktası $P, Q; M$ noktaları ile harmonik bölme teşkil eden dördüncü nokta olsun (Şek. 58). Buna göre N noktasının doğrudan doğruya M noktasına dönüşeceği yani gerçekten M ve N noktalarının aralarında harmonik eşlenik noktalar olacakları $(PQMN) = -1$ denkleminden anlaşılır. Teorem 8'e göre $(PQNM) = -1$ dir ve o halde M noktası $P, Q; N$ noktalarıyla harmonik bölme teşkil eden dördüncü noktadır.

Yukarıda tarif edilen dönüştürüme bir düzlemin *harmonik dönüştürüm*'ü diyeceğiz. Şimdi de bu dönüştürüme ait bazı özellikler kaydedelim:

P noktasından geçen bir doğrunun kendisine dönüştürüleceği kolayca görülür.

Ayrıca, P den geçmiyen bir m doğrusu şu tarzda çizilebilen bir n doğrusuna dönüşecektir: m ve π doğruları S noktasında kesişirlerse, m üzerinde bulunan S den farklı bir M noktası bir N noktasına dönüştürülür ve sonra S ve



Şekil 59.

N noktalarından geçen n doğrusu çizilir (Şek. 59). Gerçekten; m doğrusuna ait herhangi bir M noktası, Teorem 6 ya göre, PM' ve SN doğrularının kesim noktasına dönüşecektir.

S noktası sonsuzda ise n , m ve π doğruları paraleldirler. m doğrusu sonsuzda ise, o zaman n doğrusu, P noktasını π doğrusu üzerinde bulunan noktalara birleştirerek elde edilen doğru parçalarını ortalar.

π doğrusunun q koniğine göre kutup noktası P ise, o zaman q koniği kendisine dönüşür ve P den geçen bir doğru ile q eğrisinin kesim noktaları harmonik eşlenik

noktalardır. Bu husus, koniklerdeki kutup zeliklerinin (Kısım 9) tabii bir sonucudur.

Problem 32. *Bir α dairesinin bir AB yay ı ile K merkezi veriliyor. Verilen bir m doğrusu ile α dairesinin kesim noktalarını bulunuz.*

nce α dairesi üzerinde verilen belirli bir H noktasından (H noktas ı AB yay ı üzerinde veya bu yay ın d ışında olabilir) α ya çizilen teget doğrunun yalnız cetvel kullanarak çizilebileceğini hatırlatalım (Problem 7). H dan geçen keyfi bir doğru çizilirse, o zaman bu doğrunun α dairesini kestiği diğer noktayı çizimle bulmak mümkündür (Problem 8). Gerçekten; α dairesi bir konikmiş gibi düşünülebilir ve dairenin AB yay ı üzerinde, ele alınan problemin çözümü için gerekeceği kadar çok sayıda nokta bulmak mümkün olur.

Bu problemi zmiye çalışalım: AB doğrusunu çizer ve bu doğrunun α dairesine göre kutbu olan P noktas ını buluruz. P noktas ı, A ve B den çizilen tegetlerin kesim noktasındadır (şek. 60). m doğrusunun AB yay ı ile ortak bir noktas ının bulunmad ığını ve fakat elde edilen AB doğrusu ile S gibi bir noktada keşiştiğini farzedelim.

m doğrusu üzerinde S den başka herhangi bir M noktas ı alır ve PM doğrusunu çizeriz. AB doğrusu PM yi Q noktas ında kessin. $P, Q; M$ noktaları ile harmonik bölme teşkil eden N noktas ını bulur ve SN doğrusunu çizeriz. SN doğrusu, verilen AB yay ını C ve D noktalarında kessin. PC ve PD doğrularının m yi kestiği E ve F noktaları, α dairesiyle m doğrusunun aranan kesim noktalarıdır.

Gerçekten; P yi bir temel nokta ve AB yi bir temel doğru gibi alarak çizilen şekle bir harmonik dönüştürüm tatbik edilirse, α dairesinin kendisine dönüşeceğini ve m ile SN doğrularının harmonik eşlenik olacaklarını gr-

17. VERİLEN BİR DAİRE DEMETİNE AİT DAİRELERİN CETVEL İLE ÇİZİMLERİ

Önce iki yardımcı teorem inceliyelim:

Teorem 21. *Bir α dairesinin merkezi K alsun. Eğer PK doğrusu, P noktasının α ya göre kutup doğrularını P' noktasında keserse; o zaman P ve P' noktaları, α dairesine göre invers noktaldır.*

PK doğrusunun α yı kestiği noktaları M ve N ile gösterelim ve P nin α ya göre inversi olan Q noktasını çizimle bulalım. Teorem 11 den $P, Q; M, N$ noktalarının harmonik bir bölme teşkil edecekleri ve dolayısıyla P' ve Q noktalarının çakışacakları anlaşılır. Bu ise aranan sonuçtur.

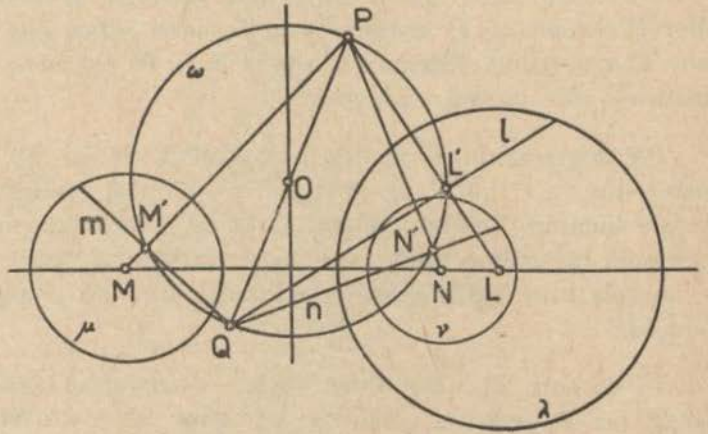
Teorem 22. *Bir daire demeti ve demetin düzleminde bir P noktası verilirse, o zaman P noktasının demetin bütün dairelerine göre kutup doğruları bir Q noktasından geçerler ve PQ doğru parçasının orta noktası demetin kuvvet ekseninde bulunur.*

Verilen bir daire demetinde merkezleri L, M ve N olan λ, μ ve ν gibi üç daire ile LM doğrusu üzerinde bulunan bir P noktası göz önüne alalım (Şek. 61).

P noktasının λ ve μ ye göre l ve m kutup doğruları Q noktasında kesişsinler. PQ doğru parçasını bir çap gibi alarak bir ω dairesi çizelim. ω dairesi, birbirine dik olan l ve PL doğrularının L' kesim noktası ile yine birbirine dik olan m ve PM doğrularının M' kesim noktasından geçecektir.

P ve L' noktaları μ ye göre invers noktalardır (Teorem 21). O halde Teorem 1 e göre, ω dairesi, λ ve μ dairelerine ortogondur. Dolayısıyla ω dairesi, ν dairesine de ortogonal olur ve ω nın O merkezi, daire demetinin kuvvet eksenini üzerinde bulunur.

PN doğrusunu çizelim ve bu doğrunun ω dairesiyle diğer kesim noktasını N' ile gösterelim. P noktasının ν dairesine göre n kutup doğrusu N' noktasından geçer



Şekil 61.

(zira ν ve ω daireleri ortogondurlar) ve PN doğrusuna dik olur. Halbuki ω dairesinin yarı yayını gören $\angle PN'Q = 90^\circ$ dir ve böylece, $N'Q$ doğrusu, P noktasının ν dairesine göre kutup doğrusu olur. Demekki teorem doğrudur.

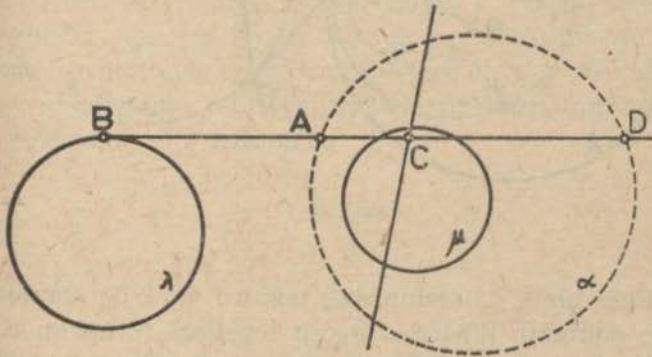
P noktası, daire demetinin merkezler doğrusu üzerinde ise; o halde P noktasının λ , μ ve ν dairelerine göre kutup doğruları paraleldirler. Bu durumda Q noktası sonsuzdadır ve P, Q noktaları bir doğru parçası belirtmez.

Teorem 16 dan; Q noktasının verilen demetin dairelerine göre kutup doğrularının P noktasından geçeceği

anlaşılır. P ve Q noktalarına *kutupsal eşlenik* noktalar denir. Daire demetinin P den geçen dairesini göz önüne alalım. P noktasının göz önüne alınan bu daireye göre kutup doğrusu P noktasında daireye teğettir ve bu doğru Teorem 22 ye göre Q den geçer. Aynı tarzda, PQ doğrusunun da demetin Q den geçen dairesine teget kalacağını görürüz. Böylece PQ doğrusu bahsedilen iki dairenin ortak tegeti olur.

Problem 33. Verilen bir A noktasından geçen ve verilen λ, μ gibi iki dairenin belirttiği bir daire demetine ait olan α dairesinin beş noktasını çizimle bulunuz.

A noktası, verilen dairelerden hiç değilse birinin (örneğin λ dairesinin) dışında bulunsun (Şek. 62).



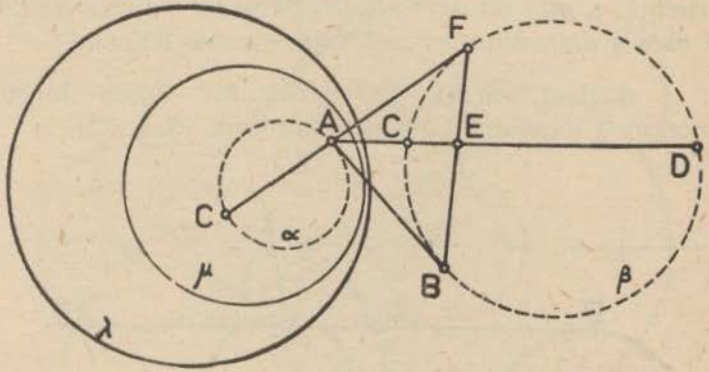
Şekil 62.

A noktasından, λ dairesine B de değen bir AB tegeti çizelim (Problem 5 e bakınız). B nin harmonik eşleniği olan C noktasını (C noktası AB doğrusu üzerindedir) ve $B, C; A$ noktaları ile harmonik bölme teşkil eden D noktasını da buluruz.

D noktası α dairesi üzerindedir. D nin α üzerinde olması; kutup doğrusu tarifinden ve B noktasının α daire-

sine nazaran kutup doğrusunun, Teorem 22 ye göre C noktasından geçmesinden anlaşılır.

D yi bir hareket noktası olarak alarak çizime devam edebiliriz. Gerçekten, D noktası, λ dairesinin tegeti üzerinde bulunur ve o halde λ dairesinin dışındadır. Eğer D noktası A ile çakışırsa, o zaman α dairesine ait A dan farklı bir noktayı bulmak için, A dan λ ya çizilmiş olan ikinci teget doğruyu kullanmak gerekir.



Şekil 63.

Eğer bir α dairesinin beş noktası veya üç noktasıyla bu üç noktanın ikisinden geçen tegetleri (örneğin, A ve D noktalarına nazaran harmonik eşlenik noktalar sırasıyla E ve F olduğuna göre, AE ve DF doğruları) verilmiş ise; o zaman α dairesine ait yeni noktaların bulunması işi, λ ve μ dairelerini kullanmadan yapılabilir (Kısım 12 ye bakınız).

Şimdi; A noktasının, λ ve μ dairelerinin her ikisinin de içinde bulunması halini inceliyelim (Şek. 63):

A nın harmonik eşleniği olan B noktasını çizimle elde ederiz. B noktası λ ve μ dairelerinin dışında kalır. Sonra,

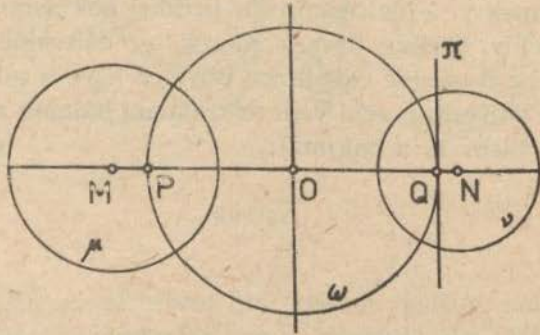
B den geçen ve verilen daire demetine ait olan β dairesinin istenildiği kadar çok sayıda noktasını çizimle bulmak mümkündür. AB doğrusu, α ve β dairelerinin bir ortak tegeti olacaktır.

β dairesinin B den başka bir C noktasından geçen AC doğrusunu çizeriz. Sonra, AC nin β dairesiyle diğer D kesim noktasını bulur ve $C, D; A$ ile harmonik bölme teşkil eden dördüncü E noktasını elde ederiz. BE doğrusu, A noktasının β ya göre kutup doğrusudur. BE doğrusunun β dairesiyle diğer F kesim noktasını çizimle buluruz. O halde, yukarıda gösterildiği gibi, β dairesine teget olan AF doğrusu üzerinde, α dairesinin A dan başka bir G noktasını elde etmek mümkündür.

Benzer tarzda, G noktasından β ya GF den başka bir teget çizmek ve α dairesinin bir üçüncü noktasını bulmak mümkündür. Çizime devam ederek α dairesine ait bir dördüncü nokta elde edebiliriz. Böylece λ ve μ yü kullanmadan α dairesinin yeni yeni noktalarını bulmak mümkün olur (Problem 10 a bakınız).

18. BİR DAİRENİN MERKEZİNİ ÇETVEL İLE ELDE ETMENİN İMKÂNSIZLIĞINA DAİR

Merkezi bilinen bir dairenin şekil düzleminde verilmesi şartıyla cetvel ile yapılabilen çizimleri Kısım 15 te inceledik. Bununla ilgili olarak şöyle bir soru kendiliğinden ortaya çıkmaktadır: Merkezi bilinmiyen bir daire verilirse, dairenin merkezini yalnız cetvel ile yapılan bir çizimle bulmak mümkün müdür? Eğer şekil düzleminde, örneğin bir paralelkenar veya merkezi bilinen bir diğer daire



Şekil 64.

verilmişse, aranan merkez kolayca bulunabilir. Fakat; aşağıda ispat edilecek olan Teorem 23 den de anlaşılacağı gibi; bir paralelkenar, bir daire veya herhangi bir yardımcı şekil kullanmadan verilen bu problemi çözmek imkânsızdır. Biribirini kesmiyen μ ve ν gibi iki daire göz önüne alalım. Dairelerin merkezleri M ve N olsun (Şek. 64) ve bu iki dairenin kuvvet eksenini, O noktasında MN doğru-sunu kessin. Verilen dairelere ortogonal olan O merkezli

ω dairesini çizelim. ω dairesi, P ve Q noktalarında MN doğrusunu kessin. MN doğrusuna Q noktasında dik olan doğruyu çizelim. P ve Q noktaları, μ ve ν dairelerinin her ikisine göre simetrik noktalardır. (Teorem 2). Buna dayanarak Teorem 11 ve 14 den; P noktasının, μ ve ν dairelerinin her birine göre π doğrusunun kutup noktası olacağı anlaşılır.

P yi temel nokta ve π yi de temel doğru olarak alıp, elde edilen şekle harmonik dönüştürüm tatbik edelim (Kısım 16 ya bakınız). Bu durumda; μ ve ν daireleri yine kendilerine dönüşürler, fakat; μ ve ν dairelerinin PQ doğru parçası üzerinde bulunmayan merkezleri, bu doğru parçası üzerinde bulunan noktalara dönüşeceklerdir. Bu husus, Teorem 23 ün ispatında kullanılacaktır.

Teorem 23. *Eğer verilen iki μ ve ν dairesi ortak merkezli değillerse ve bunların ortak bir noktaları da yoksa, bu dairelerin M ve N merkezlerini yalnız cetvel kullanarak bulmaya imkân yoktur.*

Eğer bu çizimin yapılması mümkün olsaydı şöyle yapılabilirdi: μ ve ν dairelerinin bulundukları düzlemde bir çok keyfi nokta ve bir çok da keyfi doğru seçer sonra bu keyfi noktalar ile bu keyfi doğruların birbirleriyle ve verilen dairelerle kesim noktalarından geçen doğruları çizer ve nihayet çizilen doğrulardan belirli iki tanesinin kesim noktası olarak verilen dairelerden birinin merkezini bulurduk.

Eğer yapılan bu çizim sonunda elde edilen şekle daha önce bahsedilen harmonik dönüştürümü uygularsak, verilen dairelerden birinin merkezini bulmak için düşünülen çizim tarzını aynen tekrarlayarak yeni bir şekil elde ederiz. Yeni ve eski şekiller arasındaki yegâne fark, her iki halde keyfi seçilen nokta ve doğruların başka başka olacaklarıdır. Buna göre, yeni elde edilen çizim, evvelkine

tamamiyle muadildir. Zira; her iki çizime sadece keyfi noktalar seçip ve keyfi doğrular çizerek başlanabilmektedir.

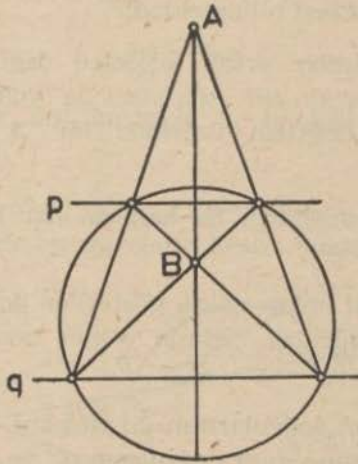
Eğer dairelerin merkezlerinin yalnız cetvel kullanılarak bulunabileceği hakkındaki farzımız doğru olsaydı, yukarıda mülâhaza edilen her iki çizimin, bize, aynı tarzda aynı dairenin merkezini vermesi icabederdi. Halbuki bu imkânsızdır. Zira; harmonik dönüştürümün bir sonucu olarak, μ ve ν dairelerinin M ve N merkezleri M ve N den başka noktalara dönüşeceklerdir ki, birinci çizimde μ (veya ν) nün merkezinde kesişen doğrular, ikinci çizimde bu dairelerin merkezinde kesişmiyen doğrulara dönüşeceklerdir. Böylece, μ veya ν dairesinin merkezinin yalnız cetvel ile yapılan bir çizimle bulunabileceği hakkındaki farzımız doğru olmayacaktır.

Yukarıda gösterilmiş olan ispatın tabii bir sonucu olarak denilebilir ki, sadece bir dairenin çizilmiş olarak verilmesi halinde de verilen bir diğer dairenin merkezini bir cetvel ile bulmaya imkân yoktur.

Yukarıda gösterilen bu ispat, bir hiperbolik daire demetine ait ortak merkezli olmıyan bir çok dairelerin verilmeleri halinde de doğrudur. Örneğin böyle bir demet μ ve ν daireleri ile verilirse, aynı harmonik dönüştürümü uyguluyarak bu iddiamızı ispat edebiliriz.

19. VERİLEN İKİ DAİRENİN MERKEZLERİNİ CETVEL İLE ELDE ETMENİN MÜMKÜN OLDUĞU HALLER

Verilen bir dairenin düzleminde p ve q gibi paralel iki doğru verilse, dairenin bir çapının cetvel ile yapılan bir çizim ile bulunabileceğini hatırlatmak, aşağıdakileri anlamak için önemlidir. Verilen doğrular verilen daireyi keserlerse, Şek. 65 de gösterilen çizimi yaparız. Diğer hallerde ise; verilen daire üzerinde alınan herhangi bir noktadan



Şekil 65.

p ve q doğrularına paralel bir doğrunun çizilebileceği hususundan faydalanarak (Problem 15 e bakınız), yine de Şekil 65 deki çizime gelebiliriz. O halde daire düzleminde bir paralelkenar verilirse, dairenin iki çapının cetvel ile yapılan bir çizim ile bulunabileceği, yani dairenin merkezinin elde edilebileceği anlaşılır.

Problem 34. *Aşağıdaki hallerin her biri için, λ ve μ gibi verilen iki dairenin merkezlerini cetvelle yapılan bir çizim ile bulunuz.*

1. Verilen dairelerden başka bu dairelerin düzleminde p ve q gibi bir çift paralel doğru verilmektedir.
2. Verilen daireler kesişirler.
3. Verilen daireler tegettir.
4. Verilen daireler ortak merkezlidir, fakat dairelerin bu ortak merkezi bilinmemektedir.
5. Verilen daireler ortak merkezli değildirler ve aynı zamanda kesişmezler. Dairelerin kuvvet eksenini üzerinde bir A noktası bilinmektedir.
6. Verilen daireler ortak merkezli değildirler ve aynı zamanda ortak bir noktaları da yoktur. Dairelerin merkezler doğrusu üzerinde bir A noktası bilinmektedir.

Yukarıda sıralanan bu hallerin her birini ayrı ayrı münakaşa edeceğiz.

Şekillerdeki nokta nokta gösterilen doğrular çizilmezler. Bu çeşit doğrular, çizimin yapılış tarzını ispat için gereklidirler.

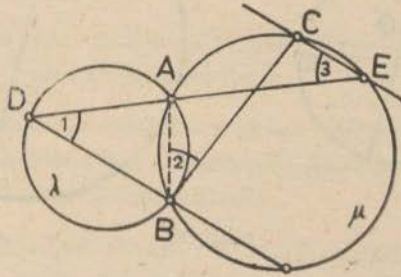
1. p ve q doğrularının λ ya göre P ve Q kutup noktalarını ve yine aynı doğruların ν ye göre P' ve Q' kutup noktalarını buluruz (Şek. 66).

PQ ve $P'Q'$ doğruları p doğrusuna dik olduklarına göre p , q , PQ ve $P'Q'$ doğruları bir dikdörtgen teşkil ederler.

$P'Q'$ doğrusu PQ doğrusu ile çakışırsa; bu doğru, verilen dairelerin merkezler doğrusu olacaktır. Bu halde yukarıda açıklanmış olan çizim metodu bir işe yaramıya-

benzer tarzda iki paralel doğru daha çizer ve bir paralel-kenar elde ederiz.

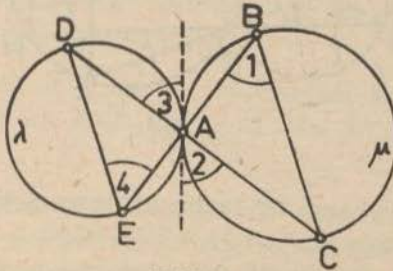
Çözüm için ikinci yol. Verilen dairelerin B kesim noktasından λ dairesine BC tegetini çizeriz. λ dairesi üzerinde herhangi bir D noktası alır ve DA , DB , CE doğrularını çizeriz (Şek. 68). O halde, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ olduğuna göre, CE doğrusu DB ye paraleldir.



Şekil 68.

Dairelerden birinin tam olarak çizilmiş olmaması halinde, problemin yine de yukarıdaki metodlar yardımı ile çözülebileceğini kaydedelim. Verilen daireler üzerinde beş nokta almak problemi çözmek için kâfidir. Yalnız, bu beş noktanın ikisi, dairelerin kesim noktalarında olmalıdır.

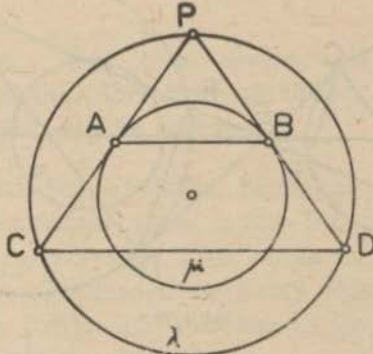
3. Şek. 69 da, birbirine paralel olan BC ve DE



Şekil 69.

doğrularının nasıl çizildikleri gösterilmiştir ve bu çizimde $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ olur.

4. Şek. 70 de gösterilen çizimi yapar ve AB , CD gibi birbirine paralel iki doğru elde ederiz.



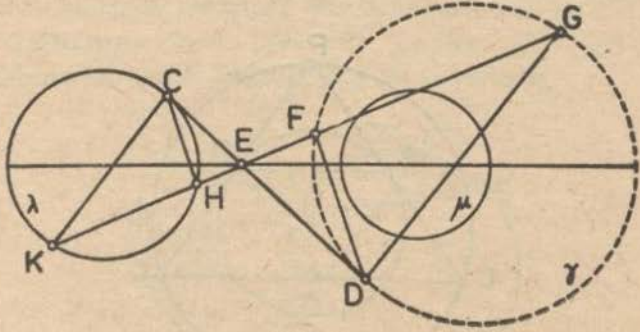
Şekil 70.

5. Kuvvet ekseninde verilen A noktasının B kutupsal eşlenik noktasını buluruz. AB doğrusu, verilen dairelerin kuvvet eksenidir. AB doğrusu dışında bir C noktası alır ve C nin kutupsal eşleniği olan D noktasını da buluruz. AB doğrusu, CD doğru parçasını iki eşit kısma böler (Teorem 22). O halde CD ye paralel bir doğru çizebilir (Problem 13) ve 1. haldeki çizimden faydalanabiliriz. Eğer A noktası, hem kuvvet eksenini ve hem de λ , μ dairelerinin merkezler doğrusu üzerinde ise; o halde kuvvet eksenini, A noktasının λ ve μ dairelerine göre kutup doğrularına paralel olur.

6. Önce A noktasının λ ve μ dairelerine göre kutup doğrularını bulur ve sonra verilen dairelerin AB merkezler doğrusunu çizeriz (Şek. 65 i uygulayınız).

AB doğrusu ile λ dairesinin kesim noktalarında cımbak üzere, λ dairesi üzerinde herhangi bir C noktası alır

(Şek. 71) ve C nin kutupsal eşleniği olan D noktasını buluruz. Ayrıca, D noktasından geçen ve λ ile μ dairelerinin belirttiği daire demetine ait γ dairesinin beş noktasını elde ederiz (Problem 33).



Şekil 71.

CD doğrusu, λ ile γ dairelerinin ortak tegetidir. O halde CD ve AB doğrularının E kesim noktası, λ ve γ dairelerinin benzerlik merkezidir. γ üzerinde herhangi bir F noktası alır ve EF doğrusunu çizeriz. EF doğrusu, H ve K noktalarında λ dairesini ve ikinci bir G noktasında da γ dairesini kessin. O halde DF doğrusu CH ya ve DG doğrusu da CK ya paraleldir.

20. BİRÇOK DAİRELERİN MERKEZLERİNİN CETVEL İLE BULUNMALARINA DAİR

Problem 35. Üçü aynı demete ait olmayan λ , μ ve ν gibi herhangi dört daire veriliyor. Bu dairelerden birinin merkezini cetvelle bulunuz.

Verilen daireler arasında herhangi ikisinin ortak merkezli olmadıklarını veya ortak bir noktalarının da bulunmadığını farzedeceğiz. Zira, ortak merkezli iki daire verilseydi veya dairelerden herhangi ikisinin ortak bir noktası olsaydı, çözüm için Problem 34 ün 2, 3 ve 4 üncü çizimlerinden istifade edilebilirdi.

Çözümün esası, verilen dairelerden birini kesen yardımcı bir daire çizmek ve her iki kesim noktasını elde etmekten ibarettir. Böyle bir dairenin çizilmesinden sonra, Problem 34 deki 2 nci çizim kullanılır.

λ dairesi üzerinde herhangi bir A noktası alırsak. A dan geçen ve $(\lambda, \mu)^*$ demetine ait olan α dairesinin dört noktasını ve ayrıca A dan geçen ve (μ, ν) demetine ait olan β dairesinin de dört noktasını buluruz (Şek. 72).

λ ile α (veya λ ile β) dairelerinin ikinci kesim noktasının belirli olmaması halinde, bir yardımcı dairenin daha çizilmesi gerekir. Yalnız bu yardımcı daire öyle olmalıdır ki, bunun λ dairesiyle her iki kesim noktası da kolayca bulunabilmelidir. Böyle bir dairenin çizilebilmesi için, λ

*) (λ, μ) sembolü, λ ile μ dairelerinin belirttiği daire demetini gösterir.

C noktasından geçen ve (α, β) demetine ait olan daireyi γ ile gösterelim.

B ve C noktalarının (α, β) demetine ait dairelere göre harmonik eşlenikleri olan F ve D noktalarını buluruz. Sonra $B, F; C$ noktalarıyla harmonik bölme teşkil eden G noktasını elde eder ve AG doğrusunu çizeriz.

G noktası γ dairesi üzerindedir ve CD doğrusu C noktasında γ ya teğettir (Kısım 17 ye bakınız). γ dairesi α ve β dairelerinin kesim noktalarından geçeceğine göre, A noktası da γ dairesi üzerindedir. O halde α ve γ dairelerinin A ve C kesim noktaları belirlidir.

CD ve AG doğruları γ dairesini ikinci defa olarak E ve H noktalarında kessinler. O halde EH doğrusu BC ye paraleldir (Problem 34 deki 2 nci çözüm tarzına bakınız). Bundan sonra Problem 34 deki 1 inci çizimden faydalanırız.

Yukarıdaki çözüm λ, μ veya ν dairelerinden birinin beş noktasiyle verilmesi halinde de kullanılabilir.

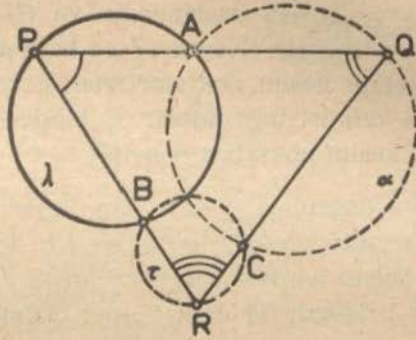
Problem 36. *Aynı bir demete ait olmıyan λ, μ ve ν gibi verilen dairelerden birinin merkezini cetvel ile bulunuz.*

Verilen dairelerden herhangi ikisinin ortak merkezli olmadıklarını veya ortak bir noktalarının da bulunmadığını farzedeceğiz.

λ üzerinde bir A noktası alarak, A dan geçen ve (μ, ν) demetine ait olan bir α dairesinin noktalarını çizimle buluruz.

Ayrıca, A dan geçen değişen bir doğru çizeriz. Bu doğrunun λ dairesiyle kesim noktasını P ve α dairesiyle kesim noktasını da Q ile gösteririz (Şek. 73). Eğer λ ve α daireleri üzerinde A hariç olmak üzere sırayla B ve C

noktaları alınır, PQ doğrusunun A noktası etrafında döndürülmesi halinde, BP ve CQ doğrularının R kesim noktası τ daresini belirtir. PQR üçgenindeki açılarının büyüklüklerini göz önüne alarak, R noktalarının τ dairesi üzerinde olacaklarını göstermek ve o halde τ dairesi üzerinde beş nokta elde etmek kolaydır.



Şekil 73.

λ , μ , ν ve τ dairelerinden herhangi üçü aynı bir demete ait değildir *.

O halde çözümü tamamlamak için Problem 35 deki çizimden istifade edilebilir.

*) τ dairesi α dairesini kestiğine göre, τ dairesi, (μ, ν) hiperbolik daire demetinin bir dairesi olamaz. μ (veya ν) dairesi λ dairesini kestiğine göre, μ (veya aynı tarzda ν) dairesi, (λ, τ) eliptik daire demetinin bir dairesi olamaz.

Yayınlanmış olan eserler:

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Bazı Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanığın Matematiğe Bazı Tatbıkları (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergel Kullanarak Yapılan
Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi
(Diophant Denklemleri) (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — Matematiksel İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvel Kullanarak Yapılan
Geometrik Çizimler (250 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler:

- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş
- 16 — Sayı Sistemi
- 17 — Gayri Euklid Geometriler

Matematik Derneğinin adresi:

Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü

Vezneciler - İstanbul

Fiatı 250 Krş.