

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 16

IVAN NIVEN

RASYONEL VE İRRASYONEL
SAYILAR

Çeviren:

Adnan KIRAL

İSTANBUL—1964

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 16

IVAN NIVEN

**RASYONEL VE İRRASYONEL
SAYILAR**

Ceviren:

Adnan KIRAL

İSTANBUL—1964

Bu kitabın telif hakkını Türk Matematik Derneğine bağışlayan
RANDOM HOUSE ve YALE ÜNİVERSİTESİ'ne
tesekkürlerimizi sunarız.

Türk Matematik Derneği

İSMAİL AKGÜN MATBAASI
Cağaloğlu, Servili Mescit Sokak, No. 24
İSTANBUL — 1964

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dola-
yısıyla mühendislik, askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa
son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere
yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir
önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini
çözebilmek için gerek metod, gerekse fikir bakımından
gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha
fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek,
en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlan-
mak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen ted-
birlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak
gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde,
gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik
bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip mate-
matik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde
aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı
sun'î olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye
ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir
şeyler keşfetmeğe sevk etmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize
de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır.
Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı
kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak

seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Milli Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ	1
Bölüm 1. Tablî ve Tamsayılar	9
1.1 Asal sayılar	10
1.2 Yegâne şekilde çarpanlara ayırma	12
1.3 Tamsayılar	15
1.4 Çift ve tek tamsayılar	18
1.5 Kapanma özellikleri	21
1.6 İspatın mahiyeti hakkında bir düşünce	23
Bölüm 2. Rasyonel Sayılar	26
2.1 Rasyonel sayıların tarifi	26
2.2 Bitimli ve bitimsiz ondalıklar	29
2.3 Önermelerin mutelîf yoldan ifade ve ispat edilmeleri	33
2.4 Peryodik ondalıklar	40
2.5 Her bitimli ondalık peryodik bir ondalık olarak yazılabilir	45
2.6 Bir özet	48
Bölüm 3. Reel Sayılar	50
3.1 Geometrik noktaî nazar	50
3.2 Ondalık gösterilişler	52
3.3 $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliği	55
3.4 $\sqrt{3}$ ün irrasyonelliği	57
3.5 $\sqrt{6}$ ve $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonelliği	58
3.6 Kullandığımız kelimeler	60
3.7 Geometriye bir tatbik	62
3.8 Bir özet	69
Bölüm 4. İrrasyonel Sayılar	70
4.1 Kapanma özellikleri	70
4.2 Polinom denklemler	74
4.3 Polinom denklemlerin rasyonel kökleri	78
4.4 Daha başka misâller	86
4.5 Bir özet	89

Bölüm 5. Trigonometrik ve Logaritmik Sayılar	91
5.1 Trigonometrik fonksiyonların irrasyonel değerleri	91
5.2 Zincirleme bir usul	95
5.3 Adı logaritmaların irrasyonel değerleri	97
5.4 Transandant sayılar	100
5.5 Üç meshur çizim problemi	103
5.6 $\sqrt{2}$ nin daha ileri analizi	111
5.7 Bir özet	113
Bölüm 6. İrrasyonel Sayıların Rasyonel Sayılar Yardımıyla Yaklaşık İfade Edilmeleri	114
6.1 Eşitsizlikler	115
6.2 Tamsayılar ile yaklaşıklık	119
6.3 Rasyonellerle yaklaşıklık	122
6.4 Daha iyi yaklaşıklıklar	127
6.5 $1/n^2$ civarındaki yaklaşıık ifadeler	134
6.6 Yaklaşıklıkların sınırlanması	141
6.7 Özet	145
Bölüm 7. Transandant Sayıların Mevcudiyeti	147
7.1 Cebire alt bazı başlangıç bilgiler	149
7.2 α ya yaklaşık bir hesaplama	153
7.3 İspatın bir planı	155
7.4 Polinomların özellikleri	157
7.5 α nın transandantlığı	160
7.6 Özet	162
EK A Sonsuz Çok Asal Sayı Mevcudiyetinin İspatı	164
EK B Aritmetiğin Temel Teoreminin İspatı	166
EK C Transandant Sayıların Varlığı Hakkında Cantor'un İspatı	172
Seçilmiş Problemler İçin Öğütler ve Cevapları	182
İndeks	191

RASYONEL VE İRRASYONEL
SAYILAR

bilhassa irrasyonel sayıların, muhtelif özelliklerini çıkarmaktır.

Şu halde tamsayılar toplam, çıkarma ve çarpım altında kapalıdır. Bölme altında kapalı değildirler, zira meselâ 2 nin 3 e bölünme sonucu tam bir sayı değildir ve bu sebepten bizi tamsayılar sınıfının dışına sevkeder.

Tamsayıların bölünmesini tarif etmeden evvel diğer işlemleri ve bunların sonuçlarını tetkik edelim. Tamsayıların toplamını göz önüne aldığımızda, yalnız iki tamsayının toplamının tekrar bir tamsayı olduğunu görmeyip toplam olarak ancak bir tek tamsayının mevcut olduğunu görürüz. Meselâ, 3 ve -1 in toplamı, 5 veya başka bir sayı olmayıp, 2 dir. Bu keyfiyeti, iki tamsayı verildiğinde ikisinin toplamı olan tek bir üçüncü tamsayının mevcudiyeti olarak ifade edebiliriz. Çarpım için benzer şekilde: iki tamsayı verildiğinde ikisinin çarpımı olan tek bir üçüncü tamsayı vardır.

Tabii sayıların bölümünü tetkik ettiğimizde verilen her hangi b ve d iki tabii sayı için *bölüm sonucu* $b = dq$ olacak şekilde bir üçüncü tabii sayının her zaman mevcut olmadığını görürüz. Bununla beraber, ne zaman böyle bir üçüncü q tamsayısı mevcut olursa, bunun ancak tek bir tane olduğu aşikâr olup $b = dq$ olacak şekilde q nün yegâne olduğunu söylemekle rahatsız olmayız. Mamafih aynı bölüm kavramlarını tamsayılar cümlesi için tarif ettiğimizde bölüm sonucunun yegâne olduğu şartını ilâve etmeliyiz. Şimdi bunun niçin lüzumlu olduğunu tahlil edeceğiz.

Evvelâ $3 - 7$ ne kadardır? $(-2) \cdot (-3)$ ne kadardır? $8 : 4$ ne kadardır? deki her sorumuzun yalnız *bir* cevabı olmasının arzu edildiğini kabul etmeliyiz. Diğer deyimle, işlemlerimiz için tek bir sonuç elde etmek istiyoruz. Bundan sonra tamsayılar cümlesinde bölümü göz önüne alırsak ne olacağını görelim. Gene, b ve d verilen tamsayılar olsun ve q bölüm sonucunun tarifi $b = dq$ olacak

yazabilirdik ve böylece 35 (veya her hangi diğer tabii bir sayı) için asal sayıların çarpımı bir tarzdan fazla şekilde ifade edilmiş olurdu. Tabii Temel Teorem gene câri kalır fakat ifadesine «... hariç» veya «... den maada» gibi daha tavsif edici kısa cümleler eklemek icap ederdi. Böylece 1 i asal sayılar listesinden çıkararak, sonuçlarımızı daha kısa ve zarif şekilde ifade edebiliriz.

1.3 Tamsayılar

1, 2, 3, 4, ... tabii sayılar toplam ve çarpım altında kapalı olup çıkarma veya bölüm altında kapalı değildirler. Bir sayı cümlesine sıfır ve negatif sayıları 0, -1, -2, -3, -4, ... ekleyip teşmil ederek çıkarma altında kapanma elde edilebilir. Bunlar, tabii sayılarla beraber alınınca

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

tamsayıları veya tam sayıları teşkil ederler. Okur muhtemelen, *a*, *b*, *c* her hangi tamsayılar olmak üzere

$$a+b=b+a, \quad ab=ba, \quad a \cdot 0=0 \cdot a=0,$$

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc), \quad (-a)(-b)=ab,$$

$$a+0=0+a=a, \quad a \cdot 1=1 \cdot a=a,$$

$$a(b+c)=ab+ac.$$

temel özelliklerine âşinadır. Bu özellikler bu kitapta bahis konusu edilen bütün sayı sistemleri için muteberdir. Bu özelliklerin menşelerini tartışmak niyetinde değiliz. Böyle bir tartışma sayı sistemlerinin kuruluşunun tetkikine (konusu bu serinin diğer kitaplarının birinde) sevkeder ve burada göz önüne alınan konudan uzaklaştırır. Niyetimiz kuruluşlarını olduğu gibi kabul ederek sayıların,

hiç olmazsa asal sayılı çarpanlara ayırma için bir ifade beyan etmek amacı ile asal sayıları diğer sayılardan ayırt etmek lüzumunu ortadan kaldırdık.

Tabii bir sayının asal sayılı çarpanlara ayrılmasının ancak *yegâne bir tarzda yapılabileceği* matematikte temel bir sonuçtur. Meselâ 94.860 sayısı yukarıda verilenlerden farklı her hangi asal sayılı çarpanlara ayrılamaz. Tabii, çarpanların sırası farklı olabilir; meselâ

$$94.860 = 3 \times 17 \times 2 \times 5 \times 31 \times 3 \times 2$$

Fakat böyle sıra değişmelerinden sarfınazar 94.860'ın çarpanlara ayrılmasının diğer hiç bir şekli yoktur. Bu sonuç *Tek şekilde çarpanlara ayırma teoremi* veya *Aritmetiğin temel teoremi* diye bilinir, ve şeklen aşağıdaki gibi ifade edilir:

ARİTMETİĞİN TEMEL TEOREMİ. *1 den farklı her tabii sayı, çarpanların sırası bir tarafa, ancak bir tarzda asal sayılı çarpanlara ayrılabilir.*

Bu sonuç B Ekinde ispatlanmıştır. Konumuzda ilerledikçe kullanacağımız bir teoremdir. İspatı bir eke koymanın sebebi oldukça karışık olmasındandır. Mamafih kitapta, sonraları geçecek hiç bir fikir ispatta kullanılmamıştır; böylece okur arzu ederse şimdiden B Ekinde müracaat edebilir. Yahut daha kolay kavramları evvelâ, daha zor olanları daha sonra elde etmek için B Ekinin tetkikini sonraya bırakabilir.

Aritmetiğin Temel Teoreminin yukarıdaki ifadesi 1 sayısının niçin asal sayılar arasına sokulmadığı hakkında bir ip ucu verir. Eğer 1 asal bir sayı olarak alınsaydı, meselâ o zaman

$$35 = 5 \times 7 = 1 \times 5 \times 7$$

sayısını göz önüne alalım. Daha ileri giderek 9486'nın 2 ile, 3 ile, hattâ 9 ile bölünebildiği görülür. Böylece

$$\begin{aligned} 94.860 &= 10 \times 2 \times 9 \times 527 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 527 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Eğer 527 bir asal sayı olsa, yukarı ifade 9.860'nın asal çarpanlara ayrılma ifadesi olacaktı. Fakat 527 asal bir sayı değildir, zira $527 = 17 \times 31$ dir. Bu sebepten asal çarpanlara ayrılma olarak

$$94.860 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \times 31$$

yazabiliriz. 94.860 gibi muayyen bir sayı ile başlıyoruz, fakat hangi tabii n sayısından hareket edersek edelim muhakeme usulü aynen işleyecektir. İster n bir asal sayı olsun veya olmasın. Eğer asal sayı değilse, $n = ab$ olacak şekilde, a ve b gibi daha küçük iki çarpana ayrılabilir. Bu sefer a ve b sayılarından her biri ya asal bir sayıdır veya daha küçük sayılar halinde çarpanlara ayrılabilirler. Bu işleme devamla n 'i en sonunda tamamen asal sayılı çarpanlara ayırabiliriz.

Evvelki paragraftaki ilk cümle asal sayıları diğer tabii sayılardan ayırtlar. Matematikte ekseriya arzu edilen şey tariflerin bir çok hallere bölünmeleri lüzumsuz kılacak genellikte olmasıdır. Meselâ «asal sayılı çarpanlara ayırma» dan, bir sayının (meselâ 12'nin), bir kaç asal sayının bir çarpımı olarak gösterilmesini anlıyoruz; misalimizde $2 \times 2 \times 3$ dür. Şimdi «asal sayılı çarpanlara ayırma»nın, tek bir asal sayı içine alacak şekilde, anlamını genişletelim. Meselâ 23 asal sayısı, tek 23 çarpanından ibaret, bir asal sayılı çarpana ayrılma olacaktır. «Asal sayılı çarpanlara ayrılma» anlamının bu genişletilmesi ile ilk ifademiz «1 hariç her tabii sayı asal sayılı çarpanlara ayrılabilir» cümlesile değiştirilebilir. Böylece cümleyi kısalttık ve

- * (e) 2 nin pozitif kuvvetler cümlesi toplam altında kapalıdır.
2. 30 un kaç böleni vardır?
 3. 16 nın kaç böleni vardır?
 4. Ancak tam üç böleni olan en küçük tabii sayı nedir?
 5. 50 ile 100 arasındaki bütün asal sayıları bulun.
 - * 6. Eğer 3 iki sayının böleni ise toplamalarının ve farklarının da böleni olduğunu ispatlayın. Bunu genel-
leştirin ve eğer d , b_1 ve b_2 gibi iki sayının böleni ise d 'nin $b_1 + b_2$ ve $b_1 - b_2$ 'lerin bir böleni olduğunu ispatlayın.

1.2 Yegâne şekilde çarpanlara ayırma

Gittikçe büyüyen tabii sayıları göz önüne aldıkça asal sayılar nâdirleşir. Bundan ne anlaşıldığını göstermek için

1 ile 1000 arasında 168 asal sayının,
1000 ile 2000 arasında 135 asal sayının,
2000 ile 3000 arasında 127 asal sayının,
3000 ile 4000 arasında 120 asal sayının,
4000 ile 5000 arasında 119 asal sayının

mevcut olduğunu belirtelim. Bununla beraber asal sayıların listesi sonlu değildir; yani sonsuz çok asal sayı vardır. Bu keyfiyet kitabın sonundaki A Ekinde ispatlanmıştır. İspat her hangi özel bir bilgiye ihtiyaç göstermez ve dolayısıyla okur arzu ederse onu okuyabilir. Bu ispatı bir eke koyduk, zira ispatın sonucunu bu kitaptaki diğer bir önermede kullanmak ihtiyacını görmedik. İspat verilmiştir, çünkü sonuç aslında enteresandır.

1 hariç her tabii sayı ya bir asal sayıdır veya asal sayı çarpanlarına ayrılabilir. Meselâ $94.860 = 10 \times 9486$ olduğundan aşikâr olarak asal sayı olmayan 94.860 tabii

cevabın tekrar dört olduğu çıkar, yani 1, 11, 17, 187. 11 ve 17 bölenlerini bulmak için okur ufak bir gayret sarfetmiş olabilir, fakat 1 ve 187 bölenleri aşikârdır. Benzer şekilde 179 un bölenleri 1 ve 179 dur, ve bunların yegâne bölenler olduğu sonucu çıkar. Eğer, 179 halinde olduğu gibi, bir tabii sayının yalnız tam iki böleni varsa, böyle bir sayıya *asal* veya *asal sayı* denir. Bunu diğer bir deyişle *bir asal sayı bölenleri 1 ve kendisi olan tabii bir sayıdır* diye ifade edebiliriz. Büyüklük sırasına göre ilk bir kaç asal sayı

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... dır.

1 in asal sayı listesinde gösterilmemiş olmasına dikkat ediniz. 1 in asal olmayış keyfiyeti matematik bir teamül (konvansiyon) veya bir anlaşmadır, veya diğer bir yoldan ifade edersek, bir tarif konusudur. Matematikçiler 1 e asal dememekte anlaşılmışlardır. 1 i asal sayılar arasına sokmakla diğer bir yolda da karar verilebilirdi. Fakat 1 i hariç tutarak, daha sonra gösterileceği üzere, istisna ve tavsifler yapmadan asal sayılar hakkında önermeler (propozisyon) tesis etmek mümkündür.

Problem serisi 1

[Problem serilerinde yıldızla işaretlenmiş problemler en zor olanlardır]

1. Aşağıdaki ifadelerin hangileri doğru, hangileri yanlış olduğuna karar veriniz.
 - (a) 1, 0, — 1 cümlesi toplam altında kapalıdır.
 - (b) 1, 0, — 1 cümlesi çarpım altında kapalıdır.
 - (c) 1, 0, — 1 cümlesi çıkarma altında kapalıdır.
 - (d) 2 nin pozitif kuvvetler cümlesi, yani $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \dots$ cümlesi çarpım altında kapalıdır.

almak istersek, hangilerini cümlemize aldığımızı belirtiriz. Böylece tabii sayılar cümlesinin toplam altında kapandığını, fakat ancak 1, 2, 3 üç tabii sayıdan ibaret özel cümlelerin kapanmadığını gördük.

Tabii sayılar çıkarma altında kapanmazlar. Bunu görmek için, bir tabii sayıdan diğer bir tabii sayının her çıkarılmasında bir tabii sayı elde edilemeyeceğini göstermek kâfidir. Meselâ 4 den 7 çıkarılırsa sonuç -3 olur, bu ise tabii bir sayı değildir. Tabii, eğer 7 den 4 çıkarılırsa sonuç 3 olan tabii sayıdır; tarifimize uyararak, mümkün her çıkarma sonucunun bu cümle içinde bulunmadıkça, çıkarma ile bir sayılar cümlesinin kapandığını söyleyemeyiz. Aynı şekilde tabii sayılar bölüm altında kapalı değildir, çünkü meselâ 4, 7 ile bölünürse sonuç olan $4/7$ kesri tabii bir sayı değildir.

Bir çok hallerde iki tabii sayı sonuç olarak bir tabii sayı verecek şekilde bölünebilir, meselâ 35, 5 ile bölündüğünde 7 verir. Bu halde 5, 35 in bir *tam bölenidir*, veya daha kısaca, 5, 35 in bir *böleni* veya *çarpanıdır* deriz. İfadeyi çevirerek, 35, 5 in bir *katıdır* deriz. Genel olarak, b ve d her hangi iki tabii sayıyı gösterebilir; eğer $b = dq$ olacak şekilde bir üçüncü q sayısı varsa, o zaman d , b 'nin bir *böleni*, veya b , d 'nin bir *katıdır* denir. Yukarıdaki misalde $b = 35$ ve $d = 5$ dir ve dolayısıyla q 'nün değeri 7 olur.

1.1 Asal sayılar

35 sayısının kaç böleni vardır? Bütün bölenlerin listesini yaptığımızda cevabın dört olduğunu görürüz: 1, 5, 7, 35. Soru güç değildi, çünkü 35 nisbeten küçük bir tabii sayıdır. Fakat şimdi müteakip soruyu göz önüne alalım: 187 sayısının kaç böleni vardır? Bunu cevaplandırmak o kadar kolay değildir, fakat 1, 2, 3, v.s. yi denerseniz,

BÖLÜM 1

TABİİ ve TAMSAYILAR

Matematiğin sayı sistemi, saymada kullanılan

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

âdi sayılarla başlar. Bunlar, *tabii sayılar* adı verilen, pozitif tam sayılardır. En küçük tabii sayı 1 dir; fakat en büyük tabii sayı yoktur, çünkü ne kadar büyük bir sayı seçilirse seçilsin bundan daha büyüğü mevcuttur. Böylece sonsuz tabii sayının mevcut olduğunu söyleriz.

Eğer herhangi iki tabii sayı toplanırsa sonuç tabii bir sayı olacaktır, meselâ $4 + 4 = 8$ ve $4 + 7 = 11$. Benzer şekilde, eğer her hangi iki sayı çarpılırsa, çarpım tabii bir sayı olacaktır; meselâ, $4 \times 7 = 28$. Bu iki özellik, tabii sayıların *toplam işlemi altında kapandığını* ve *çarpım işlemi altında kapandığını* söyleyerek kısaca ifade edilebilir. Diğer bir deyimle, eğer bir işlem (operasyon) (meselâ toplam olsun) ve bir şey (obje) koleksiyonumuz (meselâ bütün tabii sayılar cümlesi olsun) varsa, öyle ki cümlemizin hangi üyelerine, meselâ 4 ve 7 ye, bu işlemi tatbik ettiğimizde sonuç ilk koleksiyonun gene bir üyesi olsun, bu takdirde bu işlem altında cümlemin kapandığını söyleriz. Yalnız 1, 2, 3 sayılarını göz önüne aldığımızı farzedelim. Yalnız üç sayıdan ibaret bu cümle toplam altında kapalı değildir, çünkü $1 + 3 = 4$ dür, ve 4 bu cümlemin bir üyesi değildir. Tabii sayıların cümlesinden bahsedersek *bütün* tabii sayıların teşkil ettiği cümleyi anlamalıyız. Eğer bunlardan ancak bazısını göz önüne

mamasından dolayı ilk seferde başarısızlık olabilir, fakat neticede öğrenci işin sırrını öğrenir. Matematik ispatın muamması da böyledir. Konularımızın bazıları ispat tekniğinin örneklerine ışık tutmak içindir, böylece okur ispat metod ve kavramlarına alıştırılır. Mademki bir ispatın ne vakit muteber ve ne vakit muteber sayılamayacağının kat'i reçetesini veremeyiz, konu hakkında bazı şeyler söyleriz, ve ümit ederiz ki okur bu kitabın sonuna erişmeden yalnız muteber ispatları tanımakla kalmayıp kendisi de bazılarını kurabilsin.

yakın görünür veya kendiliklerinden aşıkârdırlar.) Gayemiz konuya, oldukça entüitif çerçeveye içinde, ilk bir bakış sunmaktır. Böylece, tetkikatımıza bir temel teşkil etmesi için, ne bir aksiyom ve ne de bir postula sunuyoruz. İleride matematikçi olacağı umulan kimse eline bu kitabı aldığı anda, bir gün reel sayı sisteminin aksiyomatik gelişimini dikkatle tetkik etmeği arzu ettiğinde yolunu bulabilecektir. Bu neden böyledir? Bunun sebebi burada görüşümüzün çok tasviri olması, dolayısı ile bazı temel soruların cevapsız bırakılmasıdır. Meselâ, Bölüm 3 de reel sayılar bu yolda, şu yolda veya diğer bir yolda tarif edilebilir demekteyiz. Fakat bu muhtelif yolların aynı sistemin tarifleri olduğuna nasıl emin olabiliriz? Bir soruya daha elle tutulur bir misâl vermek için bu kitapta nasıl $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ veya $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$ olduklarını cevaplandırmıyoruz. Böyle sorulara cevap verebilmek için irrasyonel sayıların işlemlerinin tam bir tarifini vermek lâzımdır. Gözüktüğü kadar kolay olmadığından bu burada verilmeyecektir; en iyisi, öğrencinin matematik bakımından daha mahir olmasından ziyade, matematik ispatların mahiyet ve anlamalarının değerini daha iyi anlayıncaya kadar bu tip işlemleri geri bırakmaktır. Amerikan matematikçisi E. H. Moore'un dediği gibi «Her güne kendi katiyeti yetişir».

«Matematik ispatın mahiyet ve anlamı!» Burada ve şimdi bir ispatın nelerden ibaret olduğunun tam bir tarifini vermek mümkün değildir, bunun içinde matematiğe yeni başlayan öğrenci için korku veren muammalar bulunur. Eğer ispatın mahiyeti detaylı olarak tarif veya ifade edilemezse, herkes onu niçin öğrensin? Çok basitleştirilmiş bir benzetiş kullanarak tıpkı, bir çocuğun renkleri, yani başka birinin yeşil, mavi eşyalar, v.s. olarak teşhis ettiğini görerek ve sonra da gördüğünü taklit etmesi gibi öğrenilir. Sınıf (Kategori) veya örneklerin kâfi derecede anlaşıla-

çok meşhur eşitsizlikler hariç, kitabın diğer kısımlarından müstakildir.

Ek C, lâzım olan Teorem 7.2, çarpan teoremi hariç, Bölüm 7 den müstakilen okunabilir. Eğer cümleler teorisine pek âşına değilse, okur Ek C deki fikirleri çok yeni bulacaktır.

Asal sayıların sonsuzluğu hakkındaki A Eki bu kitap-taki işlenen ispatlar için zarurî değildir; esas konu ile sıkı ilgisinden ve bu zarif önermenin Öklid zamanına dayandığından dolayı dahil edilmiştir. Diğer taraftan aritmetiğin temel teoremi hakkındaki B Eki ispatlarımız için, bilhassa Bölüm 4 ve 5 ler için elzemdir. Bu teoremin ispatı bir eke terk edilmiştir, zira biraz uzun ve ilk beş bölümdeki ispatlara nazaran zordur. Matematik bakımından tecrübesiz olan okur aritmetiğin temel teoremini itimada dayanarak kabul edebilir.

Kısımların sonlarında bir çok alıştırma vardır; okur, metini anlayıp anlamadığını kontrol için, bunlardan büyük sayıda çözmeği denemelidir. (Başkalarının yaptıklarını seyrederek matematik öğrenilemez!) Daha güç olduklarını göstermek için problemlerin bazıları birer yıldızla işaretlenmiştir. Okur bunların hepsini çözemediği zaman mesut olmaması gerekmemektedir. Başarısı ekseriya matematik bakımından olgunluğuna bağlıdır, yani matematiğin diğer kısımlarının tetkikatından elde ettiği oldukça geniş matematik kaideleri tanımasına bağlıdır. Kitabın sonunda problemlere ait cevaplar ile daha zor problemler için bazı tavsiyeler verilmiştir.

Rasyonel ve irrasyonel sayılar sistemine ispatta istenilen mükemmellik seviyesile temas edilebilir. (İspattaki mükemmeliyet (= İngilizce «rigor») kelimesi matematikte teknik olarak, bir konunun dikkatli mantık bakımından işleme derecesini göstermek için kullanılmıştır; buna mukabil entüitif (hadsî) olanlarda ise ileri sürülen iddialar doğru olarak kabul edilir, zira bir dereceye kadar akla

bol olduğunu ispat etmekle bir üstünlük sağlamıştır. Mademki sonsuz cebrik sayı ve sonsuz transandant sayı vardır, böyle bir ifade sonsuz sınıfların kıyaslanmasını icap ettirmektedir. Bu kitabın tetkik edilen esas konularında bu fikirler bir dereceye kadar terkedilmiş ve Cantor'un transandant sayıların mevcudiyeti hakkındaki ispatı Ek C de verilmiştir.

Kitabın plâni tabii sayıları, tamsayıları, rasyonel sayıları ve reel sayıları ilk üç bölümde vermektir. Ondan sonra Bölüm 4 de irrasyonel sayıları teşhis etmek için standart bir metod verilmiştir. Bölüm 5 trigonometrik ve logaritmik sayılarla, yani değerleri trigonometrik ve logaritmik fonksiyonların cetvellerinde yaklaşık olarak verilmiş sayılarla meşgul olmaktadır. Bölüm 6 irrasyonel sayıların rasyonel sayıların yardımı ile ne dereceye kadar yaklaşık ifade edilebilmesi imkânından bahseder. Bu bölüm evvelki bölümlere nazaran daha zor ve daha dar bir konudur. Yeni cinsten matematik delilleri araştırma için bazı okurlara fırsat verir.

Bölüm 7 ve Ek C, Bölüm 7 Liouville metodu ile, Ek C Cantor metodu ile, transandant sayıların mevcudiyetini gösteren tamamen iki müstakil ispat sunarlar. İspat teknikleri göze çarpacak kadar farklı olup her birini takip ettiğinde okur iyice tatmin olacaktır. Bölüm 7 deki ispat kaçınılması mümkün olmayan teknik detaylarla doludur; hattâ ilk bölümlerden daha fazla olarak delilleri takip edebilmesi için okur kalem ve kâğıda ihtiyaç gösterecektir. Hattâ okurun Bölüm 1 den 5 e kadar çok fazla güç bulmayacağı, Bölüm 6 yı oldukça zor ve Bölüm 7 yi de hakikaten güç tahammül edilir bulacağı mümkündür. Böyle bir halde okura Bölüm 7 nin tetkikini, matematik tecrübesi artıncaya kadar, sonraya bırakması tavsiye edilir. Diğer taraftan, Bölüm 1 den 5 e kadar takip etmede en küçük bir zorluğa rastlayan her okur Bölüm 7 den evvel Bölüm 6 yı okumayı tercih edebilir. Hakikaten Bölüm 7, Kısım 6.1 de verilen

sonsuz sayıda çok rasyonel nokta ihtiva etmesine rağmen rasyonel sayılarla ifade edilemeyen uzunluklar ölçen çok sayıda başka ($\sqrt{2}$, π , v.s. gibi) noktaların da mevcut olduğunu buluruz. Fakat bir defa bütün reel sayılar nazarı itibara alınınca, doğru üzerindeki her noktaya tam bir reel sayı ve her reel sayıya doğru üzerinde tam bir nokta tekabül eder. *Bütün* uzunlukların reel sayılar cinsinden ifade edilebileceği keyfiyeti bu sayıların *tamamlık özelliği* olarak bilinir, ve matematik analizin bütün gelişmesi bu özelliğe dayanır.

Reel sayılar böylece iki cinstir, rasyonel ve irrasyonel sayılar. Reel sayıların daha yeni olan *cebrîk sayılar* ile *transandant sayılar* diye iki kategoriye ayrılması da vardır. Bir reel sayı eğer katsayıları tamsayılar olan bazı cebrik denklemleri sağlarsa, ona cebrik sayı denir. Meselâ

$\sqrt{2}$ cebrik bir sayıdır, çünkü $x^2 - 2 = 0$ ı sağlar. Cebrik olmayan bir sayıya transandant denir. Bu tariften, her hangi transandant sayıların, yani cebrik olmayan sayıların, mevcudiyeti aşikâr değildir. 1851 yılında Fransız matematikçisi Liouville transandant sayıların mevcudiyetini ispat etti. Liouville bunu bazı sayıların cebrik olmadıklarını göstermekle ispatlamıştır. Transandant sayıların mevcudiyetini ortaya koymak için, Bölüm 7 de Liouville'in metodunu takip edeceğiz.

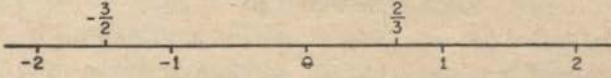
19 uncu yüzyılın sonlarında π nin transandant bir sayı olduğu ispatlanmış, ve bu netice «daireyi kareye çevirme» diye bilinen eski bir geometrik çizim problemini halletmiştir. Bu Bölüm 5 de tetkik edilmiştir. 19 uncu yüzyılda diğer bir ilerlemeyi Alman matematikçisi Cantor, tamamen farklı bir şekilde meseleyi ele alarak, transandant sayıların mevcudiyetini tesis etmiştir. Her ne kadar Cantor'un metodu Liouville'inin aksine eksplisit şekilde bir transandant sayıyı ortaya koymazsa da, bir bakımdan cebrik sayılara nazaran transandant sayıların daha

olmayışıdır. Diğer bir deyimle, bir karenin kenar ve köşegeninin, ne kadar küçük olursa olsun, katları olabilecek böyle bir birim yoktur. Yunanlılar için bu garip bir keşifti, çünkü geometrik ispatların çoğunda iki doğru parçası verildiği takdirde müşterek bir uzunluk biriminin mevcudiyeti kabul edilmekte idi. Böylece Öklit geometrisinin mantıkî yapısında bir gedik, uzunlukların oran ve orantılarının tartışılmasında bir eksiklik vardı. Kısım 3.7 de bu noksanlığın nasıl kapanabileceği ve orantı teorisinin nasıl tamamlanabileceği gösterilecektir.

Benzer şekilde, bir dairenin çemberi çapın irrasyonel bir katıdır; bu katın değeri π dir. Matematikte bazı temel fonksiyonları ifade etmeğe çalıştığımızda başka irrasyonel sayılar ortaya çıkar. Meselâ bir trigonometrik fonksiyon olan $\sin x$ in değerlerini bulmağa çalışırsak, x in değeri 60° olduğu vakıt $\sqrt{3}/2$ irrasyonel sayısını elde ederiz; benzer şekilde, eğer $\log x$ fonksiyonunu x in rasyonel değerleri için ifade etmek istersek ekseriya irrasyonel sayılar elde ederiz. Her ne kadar logaritmik ve trigonometrik fonksiyonların cetvellerindeki listelenmiş sayılar görünürde rasyonel iseler de hakikatte, bir kaçının istisnası ile irrasyonel olan hakiki değerlerin ancak rasyonel yaklaşıklarıdır. Şu halde irrasyonel sayıların elementer matematikte türlü tabii yollardan ortaya çıktığı aşikârdır.

Reel sayılar bütün rasyonel ve irrasyonel sayılardan ibaret olup matematiğin merkezsiz sayı sistemini teşkil ederler. Geometride uzunlukların, alanların veya hacimlerin her hangi bir tetkiki hemen reel sayılara götürür. Hakikaten, geometri reel sayıların yani verilen bir uzunluk birimi cinsinden mümkün bütün uzunlukları ölçmek için lâzım olan sayıların tarifi için entüitif (hadsî) basit bir usul verir. Bir doğru parçası boyunca sayıların noktalar olarak gösterilişlerini tekrar göz önüne alırsak, ne kadar küçük olursa olsun, her hangi bir doğru parçasının

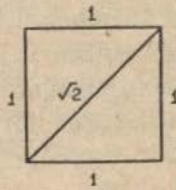
cebircileri negatif sayıları icat ettiler. Şek. 3 de gösterildiği gibi bunlar da bir doğru parçası üzerinde gösterilebilir.



Şekil: 3

Matematikçiler rasyonel sayılardan bahsettikleri zaman (oran olarak gösterilebilen, yani $2 = 2/1 = 6/3$, v.s. olan) pozitif ve negatif tam sayıları, sıfır ve âdi kesirleri kastediler. Pozitif ve negatif tam sayılar ve sıfıra *tamsayılar* da denir; bundan dolayı rasyonel sayılar sınıfı tamsayılar sınıfını ihtiva eder.

Âdi kesirlerin geometrik maksatlar için kâfi gelemeceğinin keşfi bundan 2500 yıldan daha fazla bir zaman evvel Yunanlılar tarafından yapılmıştır. Kenarları birim uzunlukta bir karenin köşegen uzunluğunun her hangi bir rasyonel sayı ile ifade edilemeyeceğini, hayret ve hayal kırıklığı ile, tesbit etmişlerdir (Şek. 4). (Bunu Bölüm 3 de ispat edeceğiz.)



Şekil: 4

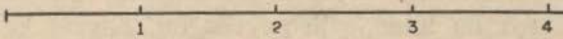
Bu keyfiyeti bugün (Pitagor teoremine göre böyle bir karenin köşegen uzunluğu olan) 2 nin kare kökünün bir *irrasyonel sayı* olduğunu söyleyerek ifade edebiliriz. Geometrik olarak bunun ifade ettiği anlam, bir karenin hem kenarına ve hem de köşegenine konulabilecek bir tam sayı misli kadar hiç bir müşterek uzunluk biriminin, ve ne kadar hassas olursa olsun hiç bir müşterek ölçğin mevcut.

GİRİŞ

En basit sayılar, sayımda kullanılan 1, 2, 3, vesaire gibi pozitif tam sayılardır. Bunlara *tabii sayılar* denir ve binlerce yıl bizimle beraber mevcut olan bu sayılar için tanınmış matematikçi Kronecker «Tanrı tabii sayıları yarattı, bütün geri kalan ise insanın eseridir» meşhur sözünü sarfetmiştir.

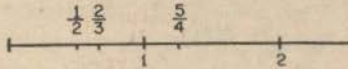
Günlük hayatın temel ihtiyaçları $1/2$, $2/3$, $5/4$, v.s. gibi âdi kesirlerin ithalini icap ettirdi. Böyle sayılara *rasyonel sayılar* denmesi bunların «akla yakın» olmalarından ziyade tam sayıların oranları olmalarından dolayıdır.

Tabii sayıların bir doğru parçası (Şek. 1) boyunca



Şekil: 1

noktalarla gösterildiğini düşünebiliriz. Meselâ her nokta tıpkı bir şerit metrodaki santim sayıları gibi bir evvelki noktadan bir uzunluk birimi uzaklığında bulunur. Rasyonel sayıları aynı doğru parçası (Şek. 2) üzerinde gösterebilir



Şekil: 2

ve bunların uzunluk kesirlerini ölçtüğünü tasavvur edebiliriz.

Daha sonraları Hintliler en mühim sayı olan 0'ı icat ettiler, ve modern zamanların başlangıcında ise İtalyan

şekilde bir tamsayı olsun. Meselâ $b = -12$ ve $d = 3$ olsun. $q = -4$ olduğu aşikârdır, çünkü $-12 = 3 \cdot (-4)$ dir. Uygun bir q mevcuttur ve yegânedir. Bundan sonra, b her hangi bir tamsayı ve d , 0 tamsayı olsun. $b = 0 \cdot q$ olacak bir q bulmalıyız. Eğer $b \neq 0$ ise, bu denklem çözülemez; yani doğru olabilecek hiç bir q mevcut değildir. Eğer $b = 0$ ise, o zaman denklem $0 = 0 \cdot q$ olarak mütalâa edilir ve her hangi bir tamsayı ile tahkik edilir. Diğer deyimle, şayet $b = 0 \cdot q$ nün bir q çözümü varsa bu çözüm yegâne değildir. Aritmetik işlemlerin madem ki yegâne olan sonuçları mühimdir, o halde iki tamsayının bölüm sonucu yalnız mevcut olmayıp bu sonucun da yegâne olacak şekilde bir sayı sistemi teşkil etmemiz gerekir. Plân sadece sıfırla bölmeyi kabul etmemektir. Eğer $b = dq$ olacak şekilde yegâne bir q tamsayısı mevcut ise, bir d tamsayısına bir b tamsayısının bir bölendir dendiğini ifade edebiliriz. (Şu halde yukarıdaki düşünüş tarzı ile $d \neq 0$ dır.) Yahut $b = dq$ olacak şekilde bir q tamsayısı mevcutsa, sıfır olmayan d tamsayısına b 'nin bölendir diyebiliriz. (Mümkün olan bölenler arasında 0 çizilirse, bölüm sonucu otomatik olarak yegâne olacaktır.)

Daha evvelki tetkikimizde, 35 sayısının kaç böleni vardır? sorusunu sorduk. O zaman, tetkikat tabii sayılara inhisar etmişti ve bu soruya cevap dört idi, yani 1, 5, 7 ve 35. Şimdi eğer, bölenlerin tamsayılar olduğunu kabul ederek, soruyu yorumlarsak, cevap sekizdir: ± 1 , ± 5 , ± 7 ve ± 35 .

Problem serisi 2

1. -5 35 in bir böleni midir?
2. 5 -35 in bir böleni midir?
3. -5 -35 in bir böleni midir?
4. 3 -35 in bir böleni midir?
5. 1 -35 in bir böleni midir?

6. 1 0 in bir böleni midir?
7. 0 1 in bir böleni midir?
8. 1 1 in bir böleni midir?
9. 0 0 in bir böleni midir?
10. 1 her tamsayının bir böleni midir?
11. 0 35 in bir katı mıdır?
12. 1 ile 100 arasında yirmi beş asal sayının ve 100 ile 200 arasında yirmi bir asal sayının mevcut olduğunu gerçekleyiniz.

1.4 Çift ve tek tamsayılar

Bir tamsayı 2 ile bölünebilirse o sayıya *çift* denir; aksi takdirde *tek* olduğu söylenir. Böylece çift tamsayılar

..., -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ... dır,

ve tek tamsayılar

..., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ... dır.

Bir çift tamsayı 2 ile bölünebildiğinden, n sembolü her hangi bir tamsayı olmak üzere, her çift tamsayıyı $2n$ şeklinde yazabiliriz. Eğer (konumuzdaki n harfi gibi) bir sembole bazı muayyen cisimler cümlesinin her hangi bir üyesini temsil etme imkânı sağlanırsa, bu sembol değerlerinin *bölgesine* muayyen cümledir deriz. Göz önüne alınan halde, her çift tamsayının $2n$ şeklinde yazılabildiğini söyleriz; burada n bölgesi tamsayılar cümlesidir. Meselâ 18, 34, 12 ve -62 çift sayıları, n sırasile 9, 17, 6 ve -31 olduğu vakıt, $2n$ şeklindedir. n harfinin kullanılmasında özel bir maksat yoktur. Çift tamsayıların $2n$ şeklinde olduğunu söylemektense, pek alâ $2m$ şeklinde, veya $2j$ şeklinde veya $2k$ şeklinde tamsayıların mevcut olduklarını söyleyebiliriz.

İki çift tamsayı toplanırsa, sonuç çift bir tamsayıdır.

Bu

12	30	46	— 10
14	22	— 14	— 46
26	52	32	— 56

misallerile gösterilir. Bununla beraber *çift tamsayıların toplam altında kapandığı* genel prensibini ispat etmek için daha çok sayıda misale ihtiyaç vardır. Böyle bir ispat sunmak için çift bir tamsayı için $2n$ ve diğer tamsayı için $2m$ notasyonunu kullanırız. O halde toplamı

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

şeklinde yazabiliriz.

$2m + 2n$ toplamı ile 2 ile bölünebildiğini göstermek için $2(m + n)$ şeklinde yazılmıştır.

$$2n + 2n = 4n$$

yazmak kâfi değildir, zira bu bir çift tamsayı ile kendisinin toplamını gösterir. Diğer bir deyimle, her hangi çift iki tamsayı toplamının çift bir sayı olduğunu ispat yerine, çift bir sayının iki katının tekrar çift (filhakika, 4 ile bölünebilir) olduğunu ispat etmiş olacağız. Bu sebepten dolayı her hangi çift bir tamsayı için $2n$ ve diğer çift bir tamsayı için bu tamsayının aynı olmasının gerekli olmadığını göstermek için, $2m$ notasyonunu kullanıyoruz.

Tek tamsayıları göstermek için hangi notasyonu kullanabiliriz? Ne zaman çift bir tamsayıya 1 ilâve edersek çift bir tamsayı elde ettiğimize dikkat etmeliyiz. Her tek tamsayının böylece $2n + 1$ şeklinde yazılabileceğini söyleyebiliriz. Bu şekil yegâne şekil değildir. Keza çift bir tam-

sayıdan ne zaman 1 çıkarırsak tek bir tamsayı elde ettiğimizi pek alâ görebiliriz. Böylece tek her tamsayının $2n - 1$ şeklinde yazılabileceğini söyleyebiliriz. Bu meselede her tek tamsayının $2n + 3$ şeklinde, $2n - 3$ şeklinde veya $2k - 5$ v.s. şeklinde yazılabileceğini söyleyebiliriz.

Her tek tamsayının $2n^2 + 1$ şeklinde yazılabileceğini söyleyebilirmiyiz? n için

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

tamsayı değerlerini yerine koyarsak $2n^2 + 1$ için

$$..., 51, 33, 19, 9, 3, 1, 3, 9, 19, 33, 51, ...$$

tamsayılar cümlesini elde ederiz. Bunların her biri tektir, fakat bütün tek tamsayıları teşkil etmezler. Meselâ, 5 tek tamsayısı bu şekilde yazılamaz. Böylece her tek tamsayının $2n^2 + 1$ şeklinde yazılabileceği yanlıştır; fakat $2n^2 + 1$ şeklindeki her hangi bir tamsayının tek olduğu doğrudur. Benzer şekilde, k bölgesi bütün tamsayılar cümlesi olmak üzere her çift tamsayının $2k^2$ şeklinde yazılabileceği de yanlıştır; meselâ, 6'nın $2k^2$ ye eşit olmasını temin edecek hiç bir k tamsayısı seçilemez. Fakat $2k^2$ şeklindeki her tamsayının çift olduğu doğrudur.

Bu ifadelerin arasındaki münasebet tıpkı «bütün kediler hayvandır» ile «bütün hayvanlar kedir» ifadeleri arasındaki münasebet gibidir. Birincisinin doğru, ikincisinin yanlış olduğu aşikârdır. Bu münasebet daha ileride «eğer», «ancak eğer», «eğer ve ancak eğer» cümleciklerini ihtiva eden ifadeler tetkik edildiğinde bahis konusu olacaktır.

Problem serisi 3

Aşağıdakilerin hangileri doğru, hangileri yanlıştır? ($n, m, j, \dots$, değerler bölgesi, bütün tamsayılar cümlesi olarak anlaşılmalıdır.)

1. Her tek tamsayı

- | | |
|--------------|---------------------|
| (a) $2j - 1$ | (d) $2n^2 + 3$ |
| (b) $2n + 7$ | (e) $2n^2 + 2n + 1$ |
| (c) $4n + 1$ | (f) $2m - 9$ |

şeklinde ifade edilebilir.

2. Yukarıda (a) şeklindeki her tamsayı tektir; benzer şekilde (b), (c), (d), (e) ve (f) için.

3. Her çift tamsayı

- | | |
|--------------|---------------|
| (a) $2n + 4$ | (d) $2 - 2m$ |
| (b) $4n + 2$ | (e) $m^2 + 2$ |
| (c) $2m - 2$ | |

şeklinde ifade edilebilir.

4. Evvelki problemde (a) şeklindeki her tamsayı çifttir; benzer şekilde (b), (c), (d) ve (e) için.

1.5 Kapanma özellikleri

Aşağıdaki iki önerme müteakip bir bölümde kullanılacaktır.

- (1) Çift tamsayılar cümlesi çarpım altında kapalıdır.
- (2) Tek tamsayılar cümlesi çarpım altında kapalıdır.

(1) iddiasını ispat için her hangi çift iki tamsayının çarpım sonucunun çift olduğunu göstermemiz lâzımdır. Her hangi çift iki tamsayıyı sembolik olarak $2m$ ve $2n$ ile gösterebiliriz. Çarpımı yaparak

$$(2m)(2n) = 4mn = 2(2mn)$$

elde ederiz. Çarpım sonucu iki ile bölünebilir ve dolayısıyla çifttir.

(2) iddiasını ispat etmek için, tek iki tamsayının çarpım sonucunun tek olduğunu göstermemiz lâzımdır. Tek iki tamsayıyı $2m + 1$ ve $2n + 1$ ile gösterip, bunları çarparsak

$$\begin{aligned} (2m + 1)(2n + 1) &= 4mn + 2m + 2n + 1 = \\ &= 2(mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadede m ve n yerine hangi tamsayıları koyarsak koyalım $2(2m + m + n)$ çifttir. Bu sebepten $2(2mn + m + n) + 1$ tektir.

(1) ve (2) iddiaları tek bir şekilde çarpanlara ayrılma sonucunun bir tatbikatı ile de ispat edilebilirdi, fakat bu iki usulden birinin seçilmesi teferruatına girmeyeceğiz. (Okur kendi kendine çalışarak bunu bulabilir. Tek bir şekilde çarpanlara ayrılmada eğer ve ancak eğer 2 bulunursa tamsayının çift bir tamsayı olduğu okura hatırlatılmalıdır.)

Çift ve tek tamsayılar, yani $2m$ şeklinde ve $2m + 1$ şeklinde tamsayılar, üzerine teksif edildik. Tamsayıların teklik ve çiftliği 2 ile bölünebilmelerine bağlıdır. Buna benzer şekilde 3 ile bölünebilir, yani

$$\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots$$

tamsayıları göz önüne alabiliriz. Bunlar 3 ün katlarıdır. $3n$ şeklindeki tamsayılar sınıfı olarak ta tarif edilebilirler. $3n + 1$ şeklindeki tamsayılar

..., -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, ...

dir, ve $3n + 2$ şeklindeki tamsayılar

..., -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, ...

dir. Tamsayıların bu üç listesi bütün tamsayıları içine alır; her hangi bir tamsayı böylece tamamen $3n$, $3n + 1$, veya $3n + 2$ şekillerinden birine aittir.

1.6 İspatın mahiyeti hakkında bir düşünce

Çift tamsayıların toplam altında kapandığını, yani her hangi çift iki tamsayı toplamı sonucunun çift olduğunu ispat maksadile $12 + 14 = 26$ gibi ancak bir kaç özel misal tetkikinin kâfi gelemeyeceğini daha evvelden söylemiştik. Madem ki sonsuz sayıda çift tamsayı vardır, çift tamsayıların çifter çifter özel toplamlarının bütün hallerini kontrol edemeyiz. Dolayisile bazı cebrik sembollere müracaat etmek icap etmektedir; meselâ, her hangi bir tamsayıyı ifade etmek için kullanılabilen $2n$ sembolü bize çarpım altında bütün tamsayılar cümlesinin kapandığını ispat etmek imkânını vermektedir.

Bununla beraber «çift tamsayılar toplam altında kapalı değildir» gibi *negatif* bir önermeyi ispat etmek için $2m + 1$ e benzer her hangi genel cebrik sembollere ihtiyacımız yoktur. Buna sebep böyle bir iddianın tek bir misalle tahakkuk edebileceğidir. Bir cümledeki bütün üyelerin muayyen bir özellikte olmamasını iddia eden her hangi bir ifadeyi ispat için, bu özelliği haiz olmayan tek

bir üyenin bulunmasının kâfi geleceği aşikârdır. Bütün erkek çocuk gözlerinin kahverengi olmadığını ispat için, ancak mavi gözlü veya elâ gözlü bir erkek çocuğun bulunması lâzımdır. Tek iki tamsayının her toplamının tek tamsayı olmadığını ispat etmek için, $3 + 5 = 8$ ettiğini göz önüne koyalım; toplam sonucu çift bir tamsayı veren tek iki tamsayının toplamının bu tek hali kâfi bir ispattır. Bununla beraber eğer *her hangi* tek iki sayının toplam sonucunun bir çift tamsayı ettiğini ispat etmek istersek, $3 + 5 = 8$ yazmak kâfi gelmez. Hattâ $7 + 11 = 18$, $5 + 53 = 58$, v.s. gibi bir çok halleri yazsak bile önermenin matematik bakımdan doğru bir ispatını yapmış olmayız.

Negatif bir önermenin diğer bir misali: «Her asal sayı tek değildir». Bunu ispat etmek için sadece 2 çift sayısının bir asal sayı olduğunu belirtmek lâzımdır.

Problem serisi 4

[İlk üç problem negatif önermeler ihtiva eder ve bundan dolayı tek bir nümerik misâl vererek çözülebilir.]

1. Tek tamsayıların çıkarma altında kapalı olmadığını ispat ediniz.
2. $3n + 1$ şeklindeki tamsayıların toplam altında kapalı olmadığını ispat ediniz.
3. $3n + 2$ şeklindeki tamsayıların çarpım altında kapalı olmadığını ispat ediniz.
4. Her hangi tek iki tamsayı toplamının çift bir tamsayı olduğunu ispat ediniz.
5. Aşağıdaki cümlelerin gösterilen işlemler altında kapalı olduğunu gösteriniz:
 - (a) Çarpım altında, $3n + 1$ şeklindeki tamsayılar;
 - (b) Toplam altında, $3n$ şeklindeki tamsayılar;
 - (c) Çarpım altında, $3n$ şeklindeki tamsayılar.

6. Gösterilen işlem altında aşağıdaki cümlelerin hangilerinin kapalı olduğuna karar veriniz, ve her hal için bir ispat veriniz:
- (a) Toplam altında, $6n + 3$ şeklindeki tamsayılar;
 - (b) Çarpım altında, $6n + 3$ şeklindeki tamsayılar;
 - (c) Toplam altında, $6n$ şeklindeki tamsayılar;
 - (d) Çıkarma altında, $6n + 1$ şeklindeki tamsayılar;
 - (e) Çarpım altında, $6n + 1$ şeklindeki tamsayılar;
 - (f) Çarpım altında, $3n$ şeklindeki tamsayılar;
 - (g) Çarpım altında, $3n$ şeklinde olmayan tamsayılar.

BÖLÜM 2

RASYONEL SAYILAR

2.1 Rasyonel sayıların tarifi

1, 2, 3, 4, 5, ... tabii sayıların toplam ve çarpım altında kapalı olduklarını, ve

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

tamsayıların da toplam, çarpım ve çıkarma altında kapalı olduklarını gördük. Mamafih bu cümlelerin hiç biri bölüm altında kapalı değildir, zira tamsayıların bölümü $4/3$, $7/6$, $-2/5$, v.s. gibi kesirler verebilir. Böyle kesirlerin koleksiyonunun tamamı rasyonel sayıları teşkil ederler. *Böylece bir rasyonel sayı (veya bir rasyonel kesir), a ve d tamsayı ve d sıfırdan farklı olmak üzere, a/d şekline konulabilir bir sayıdır.* Bu tarif hakkında bir kaç sözümüz vardır:

(1) d nin sıfırdan farklı olmasını istedik. Matematik bakımdan $d \neq 0$ olarak ifade edilen bu istek lâzımdır, çünkü d hakikatte bir bölendir:

$$(a) \text{ hali } a = 21, \quad d = 7, \quad \frac{a}{d} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1} = 3;$$

$$(b) \text{ hali } a = 25, \quad d = 7, \quad \frac{a}{d} = \frac{25}{7} = 3 \frac{4}{7}$$

misallerini göz önüne alalım. (a) halinde, d evvelki bölümdeki anlamda bir bölendir; yani 2, 21 in tam bir bölenidir.

(b) halinde d yine bir bölemdir fakat farklı bir anlamdadır, çünkü 7, 25 in *tam* bir böleni değildir. Fakat eğer 25 e *bölünen*, ve 7 ye *bölen* adlarını verirsek, 3 bir *bölüm sonucu* ve 4 bir *bölüm kalanı* elde ederiz. Böylece *bölen* kelimesini, Bölüm 1 de kullandığımızdan daha geniş halleri kapsamak üzere, daha geniş bir anlamda kullanıyoruz. Mamafih, Bölüm 1 deki bölen kavramı böyle yukarıdaki (a) halindeki misallerde kabili tatbik kalmaktadır; bu sebepten, Bölüm 1 deki gibi, $d = 0$ ı hariç tutmalıyız.

(2) *Rasyonel sayı* ve *rasyonel kesir* terimleri aynı anlamda kullanıldığı müddetçe, tek başına *kesir* kelimesi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{17}{x}, \quad \text{veya} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$$

de olduğu gibi bir pay ve bir paydası olan her hangi cebrik bir ifadeyi göstermek için kullanılır.

(3) Rasyonel sayının tarifi « a ve d tamsayılar ve $d \neq 0$ olmak üzere a/d şekline *koyulabilen* bir sayıdır» kelimelerini ihtiva eder. Niçin « a ve d tamsayılar ve $d \neq 0$ olan a/d şeklinde bir sayıdır» demek kâfi değildir? Bunun sebebi, verilen bir kesrin sonsuz yollardan ifade edilebilmesinin mümkün olması (meselâ $2/3$ için ancak bir kaç tanesini zikretmek üzere $4/6$, $6/9$, ..., veya $2\pi/3\pi$, veya $2\sqrt{3}/3\sqrt{3}$ veya $-10/-15$ yazılabilir), ve rasyonel sayı tarifinin her hangi bir kimsenin onun yazılışını özel şekilde seçmesine bağlı kalmamasını istememizden ileri gelmektedir. Bir kesir, pay ve paydasının her ikisi aynı miktar ile çarpıldığı takdirde, değeri değişmeyecek şekilde tarif edilmiştir; fakat verilen bir kesire şöyle bir bakmakla rasyonel olup olmadığını söylemek daima imkân dahilinde değildir. Meselâ

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \quad \text{ve} \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$$

sayılarını göz önüne alalım; yazılışlarına göre burada a ve d tamsayılar olmadığından hiç birisi a/d şeklinde değildir. Bununla beraber, ilk kesir üzerine bazı aritmetik işlemler tatbik ederek

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1}$$

elde edilir. Böylece verilen kesre eşit fakat $a=2$, $d=1$ olacak şekilde belirtilen bir sayıya varırız. Böylece $\sqrt{12}/\sqrt{3}$ ün rasyonel olduğunu görürüz. $\sqrt{15}/\sqrt{3}$ halinde ise

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

işlemleri $\sqrt{5}$ sayısını verir. Aşağıdaki bölümlerde $\sqrt{5}$ in tamsayıların bir oranı olarak gösterilemeyeceğini ve bu sebepten irrasyonel olduğunu öğreneceğiz.

(4) Her tamsayının bir rasyonel sayı olduğuna dikkat ediniz. 2 tamsayısı halinde bunun böyle olduğunu demin gördük. Genel olarak tamsayılar

$$\dots, \frac{-5}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots$$

şeklinde yazılabilir; burada her payda 1 olarak verilmiştir.

Problem serisi 5

1. 2 tamsayısının a/d rasyonel şeklinde (a ve d tamsayılar ile) sonsuz tarzda yazılabildiğini ispatlayınız.
2. $1/3$ rasyonel sayısının a/d rasyonel şeklinde sonsuz tarzda yazılabildiğini ispatlayınız.
3. O tamsayısının a/d rasyonel şeklinde sonsuz tarzda yazılabildiğini ispatlayınız.
4. Her rasyonel sayının rasyonel şekilde sonsuz tarzda ifade edilebileceğini ispatlayınız.
5. *Tarif.* k her hangi bir sayı olsun; bu takdirde k nın l tersiniri (resiprok) $k \cdot l = 1$ olacak şekildedir. Bu tariften çıkan sonuç, 0 hariç, bütün sayıların tersinirlerinin mevcut olduklarıdır. $k \neq 0$ verilince, tarif gereğince, l tersiniri $k \cdot l = 1$ denklemini sağlar; bundan

$$l = \frac{1}{k}$$

nın ancak $k \neq 0$ olduğu takdirde bir mânası vardır. Sıfır hariç) her hangi bir rasyonel sayının tersinirinin rasyonel olduğunu ispatlayınız.

2.2 Bitimli ve bitimsiz ondalıklar

$1/2$ rasyonel sayısının $2/4$, $3/6$, $4/8$, v.s. den farklı, 0,5 gibi ondalıklı, bir diğer gösterilme şekli daha vardır. Bazı kesirlerin ondalıkla gösterilmesi bitimli veya sonludur; meselâ

$$\frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{2}{5} = 0,4, \quad \frac{1}{80} = 0,0125.$$

Mamafih diğer kesirlerin bitimsiz veya sonsuz ondalıkla gösterilmeleri vardır; meselâ

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots, \quad \frac{1}{6} = 0,16666 \dots, \quad \frac{5}{11} = 0,454545 \dots$$

Bu sonsuz ondalıklar, kesirde payı paydaya bölerek, elde edilebilir. Meselâ $\frac{5}{11}$ halinde, 5,000 i 11 ile bölüyoruz ve 0,454545 ... sonucunu elde ediyoruz.

Hangi a/b rasyonel kesirlerin bitimli ondalıkla gösterilmeleri mümkündür? Bu soruya genel bir cevap vermeden evvel bir misali tetkik edelim, bu misal 0,8625 bitimli ondalığı olsun.

$$0,8625 = \frac{8625}{10000}$$

olduğunu ve her hangi bitimli bir ondalığın paydası 10, 100, 1000 veya 10 un bir üssü olan bir rasyonel kesir olarak yazılabileceğini biliriz. Eğer sağ taraftaki kesiri basitleştirirsek

$$0,8625 = \frac{8625}{10000} = \frac{69}{80}$$

elde ederiz. 80 paydası 10.000 in, 10.000 ile 8625 in müşterek en büyük böleni olan 125 ile bölünmesile elde edilmiştir. 10.000 deki gibi tamamen asal çarpanlara ayrılmada 80 tamsayısının ancak 2 ve 5 iki asal çarpanı vardır. 0,8625 yerine her hangi bir bitimli ondalıktan hareket edersek, buna tekabül edecek en basitleştirilmiş a/b rasyonel kesrinin aynı özelliğe sahip olacağı aşikârdır. Yani, b paydası 2 ve 5 asal çarpanlarına sahip olup başka asal çarpanlar da mevcut olamaz, zira b daima 10 un her hangi

bir üssünün çarpanıdır, ve $10 = 2 \cdot 5$ dir. Bu kat'î neticeyi verir. Şu genel ifadeyi ispat edeceğiz:

En basit haline irca edilmiş bir a/b rasyonel kesrinin, ancak ve ancak eğer b tamsayısının 2 ve 5 den gayri asal bölünleri yoksa, bitimli bir ondalık açılımı vardır.

b nin 2 ve 5 i asal çarpan olarak malik olmadığı anlaşılmalıdır; ancak birine malik olabilir veya hiç birine asal çarpan olarak malik olmayabilir:

$$\frac{1}{25} = 0,04, \quad \frac{1}{16} = 0,0625, \quad \frac{7}{1} = 7,0$$

burada b 25, 16 ve 1 değerlerine maliktir. Mühim olan kavram b nin 2 ve 5 den *gayri diğer* her hangi bir asal çarpana sahip olmamasıdır.

Yukarıdaki önermede *eğer ve ancak eğer* kelimelerinin bulunduğu dikkat etmeli. Şimdiye kadar bütün ispat ettiğimiz *ancak eğer* kısmıdır, çünkü b ancak eğer 2 ve 5 den gayri asal sayılarla bölünebildiğinde bitimli bir açılımın olacağını gösterdik. (Diğer deyimle, eğer b 2 ve 5 den gayri asal sayılarla bölünebilirse, o zaman en basitleştirilmiş haldeki a/b kesrinin bitimli ondalıklı açılımı olmayacaktır.)

Önermenin *eğer* kısmı, eğer b tamsayısının 2 ve 5 den gayri bir asal çarpanı yoksa, o zaman en basitleştirilmiş haldeki, a/b rasyonel kesrinin bitimli bir ondalıklı açılımının mevcut olduğunu, ifade eder. *Eğer* kısmını ispat etmek için, b nin en fazla 2 ve 5 asal çarpanlarına malik olduğunu kabul ederek her hangi en basitleştirilmiş haldeki bir a/b rasyonel kesriyle işe başlayacağız ve tekabül eden ondalık ifadenin bitimli tipte olduğunu ispat edeceğiz. Evvelâ bir misali, meselâ

$$\frac{a}{b} = \frac{9741}{3200} = \frac{9741}{2^7 \cdot 5^2}$$

yı göz önüne alalım. Bunu bir ondalığa tahvil etmek için, sadece paydası 10 un bir üssü olan bir kesire çeviriyoruz. Bu, hem payı ve hem de paydayı 5^5 ile çarpmakla elde edilebilir:

$$\frac{9741}{2^7 \cdot 5^2} = \frac{9741 \cdot 5^5}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{30440625}{10^7} = 3,0440625.$$

Bu özel halden her hangi bir misale tatbik için bu ispat şu aşağıdaki yoldan genelleştirilebilir: m ve n pozitif tamsayılar veya sıfır olmak üzere b nin $2^m \cdot 5^n$ şeklinde olduğunu kabul edelim. Şimdi, ya n , m den küçük veya m e eşittir ($n \leq m$ yazılır) veyahut n , m den büyüktür ($n > m$ yazılır). $n \leq m$ ise, kesrin hem pay ve hem de paydasını 5^{m-n} ile çarpalım:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}$$

Madem ki $m - n$ pozitif veya sıfırdır, 5^{m-n} bir tamsayıdır, ve böylece $a \cdot 5^{m-n}$ de bir c tamsayıdır. Bu sebepten

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m}$$

yazabiliriz, ve madem ki c nin 10^m ile bölünmesi sadece ondalık virgülünün doğru yerleştirilmesini istemektedir, bir bitimli ondalık elde ederiz.

Diğer taraftan, $n > m$ ise, a/b nin pay ve paydasını 2^{m-n} ile çarpmalıyız:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}$$

$a \cdot 2^{n-m}$ tamsayısı için d yazarak,

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n}$$

elde ederiz. Böylece evvelki gibi bitimli bir ondalık elde ederiz.

Problem serisi 6

1. Aşağıdaki kesirleri bitimli ondalıklar olarak ifade ediniz:

$$(a) \frac{1}{4}, \quad (b) \frac{3}{200}, \quad (c) \frac{321}{400}, \quad (d) \frac{7}{625},$$

$$(e) \frac{352}{125}, \quad (f) \frac{3149}{2500}.$$

2.3 Önergelerin muhtelif yoldan ifade ve ispat edilmeleri

Tam tarifini vermeden *eğer ve ancak eğer* cümle parçasını kullandık. Öyle ise bu noktada rasyonel sayıların tetkikine biraz mola verip matematik ifadelerde kullanılan bazı ifade tarzını ve bu ifade tarzının bellibaşlı mantık kaideleriyle olan irtibatını kısaca izah edelim. Matematikte iddia ve önergelerin iki esaslı çeşidi vardır:

Eğer A ise o zaman B (dir),

Eğer A ise o zaman B (dir), ve mütekabilen.

Bunların tetkikine girişelim.

«Eğer m ve n çift tamsayılar ise, o zaman mn çifttir» diye, Kısım 1.5 de yaptığımız gibi, ifade edersek, iddianın «eğer A ise o zaman B (dir)» çeşidine malik oluruz. Şimdi, böyle bir iddia bir çok yoldan, aşağıdaki listede gösterilmiş olduğu gibi, ifade edilebilir:

«Eğer A ise o zaman B (dir) i ifade etmek yolları

- [1] Eğer A doğru ise o zaman B de doğrudur.
- [2] Eğer A cari ise o zaman B de caridir.
- [3] A B yi icap ettirir.
- [4] B A tarafından icap ettirilmiştir.
- [5] B A dan çıkar.
- [6] A B için kâfi bir şarttır.
- [7] B A için lâzım bir şarttır.
- [8] B nin doğru olması A nın doğru olmasını verir.
- [9] A doğru ise B doğrudur.
- [10] Ancak eğer B doğru ise A doğrudur.
- [11] Aynı zamanda hem A nın doğru, hem de B nin yanlış olması mümkün değildir.
- [12] Eğer B yanlış ise o zaman A da yanlıştır.

Mümkün ifade şekillerinin sayısının bir sınırı olmadığından bu liste ancak en çok kullanılan şekilleri ihtiva edip, tamam değildir. Meselâ [6] ve [7] gibi bazı maddeler bu kitapta kullanılmamış olup ifadelerin tamam olması için listeye alınmıştır. [12] hariç hepsi «icap ettirir», «lâzım şart», «kâfi şart», ve «ancak eğer» gibi terimlerin tarifi olarak görülebilir.

Meselâ, matematikte «ancak eğer» teriminin teknik kullanılması olan [10] u göz önüne alalım. A ve B sembolleri yerine, evvelki tetkikatımızdaki m ve n hakkındaki iddiaları koyarsak, aşağıdaki önermelerin her ikisi de aynı şeyi söylediği sonucuna varırız:

«Eğer m ve n tamsayıları çift iseler, o zaman mn tamsayısı çifttir.»

«Ancak eğer mn tamsayısı çift ise m ve n tamsayıları çifttir.»

Eğer okur aynı şeyleri söylemediklerini hissederse, bu hissi «ancak» kelimesinin günlük kullanılmasına alışıklığından ileri gelmektedir. Bu takdirde, matematiğin teknik dili ile her gün kullandığı İngilizce arasında bir tefrik yapması lâzımdır. Bu dillerin müşterek kısımları olduğu gibi, tetkik konusu ettiğimiz misalde olduğu gibi farkları da vardır. (Bir kimse matematik dili kullanmakta mahir olunca, günlük konuşma şekli olarak, eğer seçerse, o'yu kullanabilir. Mamafih böyle bir seçim yaparsa, alelâde bir kimse tarafından ukalâ, yapmacıklı, veya en az eski kafalı olarak görülecektir.)

Böylece listede «eğer A ise o zaman B (dir)» i söyleme tarzlarının listesi hakkında hayli söyleyeceğimiz [1] den [11] e kadar şekillerin matematikte hangi yolda dil kullandığımızın anlaşmalara dayanmasından başka bir şey olmadığıdır. [12] şekli yalnız yeni bir sözlüğü ihtiva etmeyip mantığın temel bir aksiyomunu da istilzam etmektedir. [12] nin «eğer A ise o zaman B (dir)» ile aynı şeyi söylemesi keyfiyetinin esası mantıkta olup kelimelerin sadece farklı bir dizilişinden ileri gelmemektedir. Mantığın isnad edilen aksiyomu (*ortayn hariç tutan kanun* adı altında bilinen) ya A nın doğru veya A nın yanlış olmasını ifade eder; burada A ile analize müsait her hangi bir ifadeyi anlıyoruz. İşin esası, aksiyom A nın doğruluğu ve yanlışlığı arasındaki her hangi bir ara hali bertaraf eder. Bu aksiyomu olduğu gibi kabul edelim ve bu halde [1] ve [12] şekillerinin aynı şeyi söylediğini ispatlayalım.

Bunu yapmak için [1] in [12] yi istilzam ettiğini, ve müteakiben [12] nin [1] i istilzam ettiğini ispat etme-

liyiz. Evvelâ [1] i kabul eder ve sonra da [12] yi göz önüne alırız:

«Eğer B yanlış ise, o zaman A da yanlıştır.»

Bu sonucun yanlış olması, « A doğrudur» olması mümkün müdür? Eğer bu böyle olsaydı, o zaman [1] i kullanarak B nin doğru olduğu sonucuna varacaktık; fakat bu [12] deki ipotezi nakzeder. Bundan dolayı « A yanlıştır» sonucu doğrudur.

Karşıt olarak [12] yi kabul ederek [1] den

Eğer A doğru ise, o zaman B de doğrudur.»

sonucu çıkacağını ispatlayalım. Bu sonucun yanlış olup olmadığını soruyoruz; « B yanlıştır» olmalı mı? Eğer böyle olsaydı, o zaman [12] yi kullanarak A nın yanlış olduğu sonucunu çıkaracaktık; fakat bu [1] ipotezini yalanlar. Bundan dolayı « B doğrudur» doğru sonuçtur.

[11] ve [12] şekilleri vasıtalı (endirekt) ispatın mahiyeti için ip ucu verirler. Farzedelim ki «eğer A ise, o zaman B (dir)» iddiasının ispatını istiyoruz. Vasıtasız (direkt) bir ispat da A ifadesini doğru kabul edip sonra da B ifadesini bundan çıkarmaktır. Fakat eğer [11] şeklini tetkik edersek, hem A nın doğruluğunu ve hem de B nin yanlışlığını kabul edip bundan bizi bir çelişmezliğe götüren bir ispat verebileceğimizi görürüz. Bu, endirekt ispat metodlarından biri olan, çelişmezlik sayesinde ispattır. İspatın bu tipi, ispatta ifade edilen hipotezlere dikkat ederek tesbit edilebilir; ekseriya, yanlışlığı ispatlanacak ifadenin evvelâ doğruluğu kabul edilir. İspatın sonunda kullanılan «... ve böylece bir çelişmezliğe düşülür ve teorem böylece ispatlanmış olur» gibi ifade tarzı ile de endirekt ispatlar yapılabilir.

Her gün kullanılan diğer endirekt bir ispat tipini de [12] hatıra getirir. Böylece «eğer A ise o zaman B (dir)» i ispat etmek için B nin yanlış olduğu kabul edilir ve bun-

dan da A nın yanlışlığı çıkarılır. Tespit ettiğimiz üç ispat tipi şunlardır:

A kabul edilip B sonucu çıkarılır. (direkt ispat)

A nın doğru ve B nin yanlış olduğu kabul edilip bir çelişmezliğe düşülür. (endirekt ispatın bir şekli)

B nin yanlış olduğu kabul edilip A nın yanlış olduğu sonucuna varılır. (endirekt ispatın diğer bir şekli)

(Elimizdeki bu kitap dahil) matematik kitaplarının yazılma tarzı hakkında meraklı bir şey de, ekseriya hangi tipin hangi özel zamanda kullanılacağını açıkça belirtmeden, bu üç ispat tipinin gelişigüzel kullanılmasıdır. Hakikatte kendi düşünüş usullerine uygun olarak ve kullanılacak ispatın tipini seçerek okurdan ufak bir problemin çözümü beklenir. Mamafih problem zor olmayıp ekseriya okur ispatın baş kısmında yazar tarafından yapılan hipotezleri izleyebilir.

Bundan sonra, matematik önermenin ikinci nev'ini, bu bölümün başlangıcında bahis konusu olan

«Eğer A ise o zaman B (dir), ve mütekabilen»

'i göz önüne alacağız. *Ve mütekabilen* kelimesi «eğer B ise o zaman A (dir)» anlamına olup bu ise «eğer A ise o zaman B (dir)»'in mütekabilidir. Bir ifade ile mütekabilinin (karşıtının) iki farklı şey olduğunu okur muhtemelen farkındadır. Vaziyete göre biri doğru ve diğeri yanlış, her ikisi doğru, veya her ikisi de yanlış olabilir. Meselâ «eğer m ve n çift iseler, o zaman mn çifttir» ifadesi doğrudur, halbuki bunun mütekabili olan «eğer mn çift ise, o zaman m ve n çifttirler» yanlıştır.

Şimdi daha evvelki listemizi mukayese ederek «eğer A ise o zaman B (dir), ve mütekabilen»'i ifade etmenin değişik yollarını gösterelim:

Eğer B ise o zaman A dır, ve mütekabilen.
 Eğer ve ancak eğer B doğru ise A da doğrudur.
 Eğer ve ancak eğer A doğru ise B de doğrudur.
 Eğer ve ancak eğer B yanlış ise A da yanlıştır.
 Eğer ve ancak eğer A yanlış ise B de yanlıştır.
 A B yi tazammun eder, ve mütekabilen.
 B A yı tazammun eder, ve mütekabilen.
 A B için lâzım ve kâfi bir şarttır.
 B A için lâzım ve kâfi bir şarttır.
 A ve B eşdeğer ifadelerdir.

Bütün bu ifadeler aynı şeyi ifade ederler.

Şimdi «eğer A ise o zaman B (dir), ve mütekabilen» 'i tesis için bol çeşitte mevcut ispat metodlarını tespit edelim. Daha evvel gördüğümüz gibi «eğer A ise o zaman B (dir)» in ispatı için üç esashı yol vardır. Benzer şekilde «eğer B ise o zaman A (dir)» in ispatı için de mümkün üç metod vardır. İlk üçünün her hangi biri ile ikinci üçün her hangi biri tertip edilebildiğinden «eğer A ise o zaman B (dir), ve mütekabilen» in 9 tertip ispat imkânı vardır. Belki en malûm örnek her tarzın direkt ispatıdır, yani:

- (1) A yı kabul ederek B sonucunu çıkarmak.
- (2) B yi kabul ederek A sonucunu çıkarmak.

Diğer malûm bir örnek de şudur:

- (1) A yı kabul ederek B sonucunu çıkarmak.
- (2) A nın yanlışlığını kabul ederek B nin yanlış olduğunu sonucunu çıkarmak.

Biraz karışık ispatlarda bu örnekler ekseriya birbirleri ile tertiplenir. «Eğer A ise o zaman F (dir)» in bir ispatı «eğer A ise o zaman B (dir), «eğer B ise o zaman C (dir)», «eğer C ise o zaman D (dir)», «eğer D ise o zaman E (dir)», «eğer E ise o zaman F (dir)» ifadeler zinciri ile kurulur.

bilir. Bu halde her ifade daha sonrakini tazammun eder. Eğer her ifade ve karşıtı yukarıdaki örneklerden birinin yardımı ile kurulabilirse, o zaman «eğer F ise o zaman E (dir)», «eğer E ise o zaman D (dir)», «eğer D ise o zaman C (dir)», «eğer C ise o zaman B (dir)», «eğer B ise o zaman A (dir)» câri olurlar ve ilk ifadenin karşıtı olan «eğer F ise o zaman A (dır)» de câridir. «İspat kademelerinin sırasını tersine çevirerek karşıtı ispatlanabilir» diyen bir müellif bunu kasteder.

Bütün bu örnekler matematik kitaplarında rastlanır, ve daha evvel söylediğimiz gibi, ekseriya bir ispata giriştiğinde yazar takip ettiği ispat örneğini açık olarak belirtmez. Yazar okurun ispat tekniğinin bünyesini kendi kendine bulabileceğini umar.

Problem serisi 7

1. «Eğer mn çift ise, o zaman m ve n de çifttirler» ifadesinin yanlış olduğunu ispatlayın.
2. Aşağıdaki ifadelerin hangileri doğru, hangileri yanlıştır? En basitleştirilmiş a/b rasyonel kesrinin
 - (a) eğer ve ancak eğer b 2 den gayri hiç bir asal sayı ile bölünmezse;
 - (b) eğer b 2 den gayri hiç bir asal sayı ile bölünmezse;
 - (c) ancak eğer b 2 den gayri hiç bir sayı ile bölünmezse;
 - (d) eğer ve ancak eğer b 3 ile bölünmezse;
 - (e) eğer b 3 ile bölünmezse;
 - (f) ancak eğer b 3 ile bölünmezse
 bitimli ondalık gösterilişi vardır.
3. Aşağıdaki ifadelerin hangileri doğru, hangileri yanlıştır? a/b rasyonel kesrinin :

- (a) eğer ve ancak eğer b nin 2 ve 5 den gayri bir asal çarpanı yoksa;
- (b) eğer b nin 2 ve 5 den gayri bir asal çarpanı yoksa;
- (c) ancak eğer b nin 2 ve 5 den gayri bir asal çarpanı yoksa
bitimli bir ondalık açılımı vardır.

Not: a/b nin en basitleştirilmiş kesir olduğuna dair bir kaydın mevcut olmadığına dikkat ediniz.

4. Son zamanlarda cebire ait çıkan bir kitap aşağıdaki ifadeyi bir aksiyum olarak kullanmaktadır:
«ancak eğer $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu takdirde $ab = 0$ dir». Bunu «eğer A ise o zaman B (dir)» şeklinde yeniden ifade ediniz.
5. (a) Eğer β (beta) rasyonel bir sayı ise, o zaman β^2 nin de rasyonel olduğunu ispatlayın.
(b) Bu β^2 nin irrasyonel olmasını ispat etmek β nin da irrasyonel olmasını icap ettirmekte midir?

2.4 Peryodik ondalıklar

Şimdi rasyonel sayılar konusuna dönelim. Rasyonel kesirleri bitimli ondalıklı ve sonsuz ondalıklı olmak üzere iki sınıfa ayırdık. Her böyle sonsuz ondalığı

$$\frac{5}{11} = 0,454545 \dots \quad \text{ve} \quad \frac{3097}{9900} = 0,31282828 \dots$$

gibi tekrarlanan basamaklı olarak kurabiliriz. Kolaylık olması için periyodik ondalıkları, tekrarlanan kısmı üzerine bir çizgi koyarak, standard notasyon ile kullanacağız:

$$\frac{5}{11} = 0,4\overline{5}, \quad \frac{3097}{9900} = 0,31\overline{28}, \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3},$$

$$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}, \quad \text{v.s.}$$

Tekrarlanan basamaklar kısmının sebebi bir kesri, meselâ $2/7$ yi, ondalıklı şekle tahvilini göz önüne aldığımızda görülebilir:

$$\begin{array}{r|l} 2,000000 & 7 \\ \hline 14 & 0,285714 \\ \hline 60 & \\ 56 & \\ \hline 40 & \\ 35 & \\ \hline 50 & \\ 49 & \\ \hline 10 & \\ 7 & \\ \hline 30 & \\ 28 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

Bölme işleminde kalanlar sırası ile 6, 4, 5, 1, 3, 2 dir. Kalan 2 ye eriştiğinde sıkl (devir) tamamlanır ve bundan sonra 20 nin 7 ile bölümünü yeniden elde ederiz. Kalanların hepsi 7 böleninden daha küçüktür, öyle ki ancak altı mümkün kalan kalıncaya kadar bir tekrarlama olmalıdır. (0 kalanı konu harici tutulmuştur, zira bitimli ondalıkları tetkik etmiyoruz.)

Yukarıdaki misalde, 20 nin 7 ye bölünmesi ikinci bir defa vukua gelirse tekrarlama olur. 20 de 7 bütün bölüm

işleminin ilk adımıdır. İlk adımın tekrarlanan biri olması icap etmez. Meselâ $209/700$ ün ondalık şekle çevrilmesini göz önüne alalım:

$$\begin{array}{r}
 209,00000000 \\
 \underline{140\ 0} \\
 69\ 00 \\
 \underline{63\ 00} \\
 6\ 000 \\
 \underline{5\ 600} \\
 4000 \\
 \underline{3500} \\
 5000 \\
 \underline{4900} \\
 1000 \\
 \underline{700} \\
 3000 \\
 \underline{2800} \\
 2000 \\
 \underline{1400} \\
 600
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 700 \\
 \hline
 0,29857142
 \end{array}$$

$$\frac{209}{700} = 0,29857142$$

Tekrarlama burada kalanın, bir kaç adım evvel ortaya çıkan, 600 e eriştiği zaman vukua gelir. 700 böleni halinde, mümkün olan kalanların 1, 2, 3, ..., 699 sayıları olduğunu biliyoruz. Böylece tekrarlamaya erişebilmek için bir kaç adım daha atmağa mecbur olabilmemize rağmen kalanın tekrarından emin oluruz.

a/b genel hali benzer tarzda münakaşa edilebilir. a tamsayısı b tamsayısına bölünürse yegâne mümkün olan kalanlar 1, 2, 3, ..., $b-2$, $b-1$ dir, ve böylece bölüm işleminin tekrarı kat'idir. Bölme işlemi tekrarlanırsa bir sıklıkla ortaya çıkar ve sonuç peryodik bir ondalıktır.

İspat edebildiğimiz kadarı aşağıdaki önermenin yarısıdır:

Her hangi bir rasyonel a/b kesri bir bitimli ondalık veya bir sonsuz periyodik ondalıkla ifade edilebilir; karşıt olarak ister bitimli ister sonsuz periyodik olsun her hangi bir ondalık açılım bazı rasyonel sayıya eşit olacaktır.

Karşıtı, bitimli ve sonsuz periyodik olmak üzere, iki cins ondalıktan bahseder. Bitimli ondalıklar zaten tetkik edilmiş ve bunların rasyonel sayıları gösterdiklerini görmüştük. Şimdi sonsuz periyodik ondalıkların tetkikine dönelim. Evvelâ, bütün halleri kapsayacak bir şekilde genelleştirilebilen bir metod kullanarak, muayyen sonsuz periyodik bir ondalığın rasyonel olduğunu gösterelim. Özel bir hali tetkik ettikten sonra aynı metodu her hangi bir periyodik ondalığa tatbik edeceğiz.

Sonsuz periyodik

$$x = 28,123\overline{456} \quad \text{veya} \quad x = 28,123456456 \dots$$

ondalığını göz önüne alalım. Evvelâ bunu bir sayı ve sonra da diğer bir sayı ile çarpalım; bu sayılar öyle seçileceklerdir ki, iki çarpımın farkını aldığımızda, sonsuz periyodik kısım ortadan kalksın. Misalde, 10^6 ve 10^3 sayıları bu gayeye hizmet ederler, zira

$$10^6 \cdot x = 28123456, \overline{456}$$

ve

$$10^3 \cdot x = 28123, \overline{456}$$

olduğundan $10^6 \cdot x - 10^3 \cdot x$ farkı

$$999000x = 28095333$$

dir.

Bundan dolayı

$$x = \frac{28095333}{999000}$$

x in rasyonel bir sayı olduğunu ortaya koyar.

Bu metodu genelleştirmede 10^s ve 10^t sayılarını «kafamızdan atmadığımızı» sistematik olarak seçildiklerini göstereceğiz. Ondalığın tamsayı kısmını ihmal edip terke-deceğiz (yani yukarıdaki misalde 28 e tekabül eden kısmı) zira işlemde kat'î sonuç verecek bir rol oynamamaktadır. Böylece her hangi (tamsayılı kısmı olmadan) tekrarlanan ondalığı

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_s \overline{b_1 b_2 \dots b_t}$$

şeklinde yazabiliriz; burada $a_1, a_2, \dots, a_s$ tekrarlanmayan kısmın müteakkip s adet rakkamını ve $b_1, b_2, \dots, b_t$ tekrarlanan t adet rakkamını gösteren kısımlardır. (Yukarıdaki misalde, $s=3$, $t=3$; $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $b_1=4$, $b_2=5$, $b_3=6$ dır.) Eğer x 'i 10^{s+t} ile sonra da 10^s ile çarpar ve birbirinden çıkarırsak

$$10^{s+t} \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t + 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_t}$$

$$10^s \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s + 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_t}$$

ve

$$(10^{s+t} - 10^s) \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t - a_1 a_2 \dots a_s$$

bundan da tamsayı-bölü-tamsayı şeklinde olan

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t - a_1 a_2 \dots a_s}{10^{s+t} - 10^s}$$

yi elde ederiz. Binaenaleyh bu, ispatını yapmak istediğimiz gibi, rasyoneldir.

Problem serisi 8

1. Aşağıdaki ondalıklara eşit rasyonel sayıları bulunuz:

- (a) $0,111 \dots$ (b) $5,6666 \dots$ (c) $0,37\overline{43}$
 (d) $0,998\overline{7}$ (e) $0,000\overline{1}$ (f) $0,\overline{9}$

2.5 Her bitimli ondalık periyodik bir ondalık olarak yazılabilir

Bu bölümde bazı rasyonel sayıların bitimli ondalıkla diğer rasyonel sayıların ise sonsuz veya bitimsiz ondalıkla ifade edilebileceklerini ispat ettik. İşin garibi, (sıfır hariç) her bitimli ondalık bitimsiz şekilde ifade edilebilir. Tabii bu gayet aşikâr olarak 6,8 yerine 6,8000 ... yazarak, yani sonsuz sıfırlar silsilesi ile, yapılabilir. Bu bitimli bir ondalığı bitimsiz ondalığa bir yığın sıfır dizisi ekleyerek değiştirme işleminden gayri diğer bir yol daha vardır ki biraz şaşırtıcıdır. $1/3$ ün meşhur ondalık açılımı ile başlayalım:

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$$

Bu eşitliğin her iki tarafını 3 ile çarparsak

$$(1) \quad 1 = 0,99999 \dots$$

acaip sonucunu elde ederiz. Böylece bitimli 1 veya 1,0 ondalığı ile bitimsiz $0,99999 \dots$ ondalığı arasında bir eşitliğe sahip oluruz.

(1) eşitliğini başka bir bakımdan gözden geçirelim.

0,99999 ... sonsuz ondalığını x ile gösterdiğimizi farzedelim, yani

$$(2) \quad x = 0,99999 \dots \quad \text{dir.}$$

10 ile çarparsak

$$10x = 9,99999 \dots = 9 + 0,99999 \dots$$

elde ederiz.

(2) eşitliğini bundan çıkartırsak

$$9x = 9 \quad \text{veya} \quad x = 1$$

elde ederiz. Böylece (1) eşitliğini ilk kullanış tarzından farklı bir şekilde ispat etmiş olduk.

Şimdi (1) eşitliği 10, 100, 1000, 10000 v.s. ile bölmekle

$$0,1 = 0,099999 \dots$$

$$0,01 = 0,0099999 \dots$$

$$(3) \quad 0,001 = 0,00099999 \dots$$

$$0,0001 = 0,00009999 \dots \quad \text{v.s.}$$

sonuçlar silsilesini verir. Her hangi bir bitimli ondalığı bir bitimsiz ondalık şekle çevirmek için bu sonuçlar kullanılabilir. Meselâ,

$$6,8 = 6,7 + 0,1 = 6,7 + 0,099999 \dots = 6,799999 \dots$$

yazabiliriz.

Bazı başka misaller:

$$\begin{aligned} 0,43 &= 0,42 + 0,01 = 0,42 + 0,009999 \dots = \\ &= 0,4299999 \dots ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,758 &= 0,757 + 0,001 = 0,757 + 0,00099999 \dots = \\
&= 0,75799999 \dots ; \\
0,102 &= 0,101 + 0,001 = 0,101 + 0,00099999 \dots = \\
&= 0,10199999 \dots ; \\
6,81 &= 6,8 + 0,01 = 6,8 + 0,00999999 \dots = \\
&= 6,80999999 \dots
\end{aligned}$$

Bu hesap hilesi bize her hangi bitimli bir ondalığın bitimsiz şekilde yazılması imkânını vermektedir. Buna mukabil (1) ve (3) eşitlikleri bize her hangi sonsuz sayıda dokuzlarla devam eden bir ondalığı bitimli bir ondalığa çevirmek imkânını verirler:

$$\begin{aligned}
0,4699999 \dots &= 0,46 + 0,0099999 \dots = \\
&= 0,46 + 0,01 = 0,47, \\
18,099999 \dots &= 18, + 0,099999 = 18, + 0,1 = 18,1.
\end{aligned}$$

Verilen bir sayının ne kadar ondalıkla gösterilme imkân sayısı sorusu bir tefsir konusudur. Çünkü 0,43 ün 0,42999 ... gibi yazılmasına ilâveten bu sayının

$$0,430, \quad 0,4300, \quad 0,43000, \quad 0,430000, \quad \dots$$

şekillerini de yazabiliriz. Mamafih bunlar 0,43 ün o kadar herkesçe malûm şekilleridir ki bunları farklı göstermeler olarak hesaba katmıyoruz. Biz 0,43 gibi böyle bir sayının sonsuz ondalıklı şeklini zikretmek istersek, 0,42999 ... u kasedip, 0,43000 ... ı murad etmeyiz.

Problem serisi 9

1. Aşağıdakilerin her birini bitimli ondalıkla yazınız:

- | | |
|------------------|-----------------|
| (a) 0,11999 ... | (c) 4,79999 ... |
| (b) 0,299999 ... | (d) 9,999 ... |

2. Aşağıdakilerin her birini bitimsiz ondalıkla yazınız:

(a) 0,73 (b) 0,0099 (c) 13

3. Hanbi a/b rasyonel sayının tamamen iki farklı ondalıkla gösterilmesi mümkündür?
4. Hangi a/b rasyonel sayısının tamamen üç farklı ondalıkla gösterilmesi mümkündür?

2.6 Bir özet

İki tip a/b rasyonel sayısı tefrik ederiz, 2 ve 5 den gayri bölenleri olmayan b tamsayısı ile diğer bütün geri kalanlar (a/b kesri en basitleşmiş şekilde olduğu kabul edilir). Birinci tipte olanlar hem sonlu ve hem de sonsuz ondalıkla yazılabilir; meselâ

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,499999 \dots$$

İkinci tip sayılar ancak sonsuz ondalık şeklinde yazılabilir; meselâ

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$$

$1/2$ ve $1/3$ nin bu ifade edilme tarzları dışında, tabii $0,500$ gibi herkesçe malûm gösterişlerden gayri, her hangi bir ondalıkla gösterilemezler. Gelecek bölümde bunun nede böyle olduğunu izah edeceğiz.

Üzerinde ehemmiyetle durulan rasyonel sayılar ve onların ondalıkla gösterilişleridir. Meseleyi tersine çevirerek, bir an için ondalıklı gösterişleri düşünelim. Bu bölümdeki bütün sonsuz ondalık açılımlar periyodik idi.

$$q = 0,1010010001000010000010000001 \dots$$

gibi peryodik olmayan ondalıklar hakkında ne söyleyebiliriz? Bu q sayısı, birincisinde bir sıfır, daha sonra iki sıfır, daha sonra üç sıfır ve ilânihaye, sıfırlarla ayrılmış birlerden mürekkep bir seriden müteşekkildir.

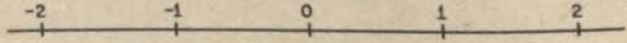
Eğer q bir sayı ise ne cins bir sayıdır? Bu bölümdeki tetkikatımızdan q nün bir sayı olmadığını biliyoruz. Gelecek bölümdeki tetkikatımıza böyle q gibi sayıları ithal edeceğiz.

BÖLÜM 3

REEL SAYILAR

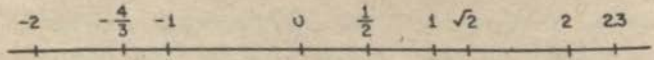
3.1 Geometrik noktai nazar

Geometriye koordinatlar sokulduğunda, bir doğru x eksenini olarak gösterilip bu eksenin her noktası bir sayıya tekabül etmek üzere taksimatlı olur. Bu doğru üzerinde, iki nokta arasındaki mesafe *uzunluk birimi* veya *birim uzunluk* olmak üzere, 0 ve 1 gibi iki keyfi (fakat farklı) nokta alınabilir. Teamül gereğince (Şekil: 5) 1 noktası 0



Şekil: 5

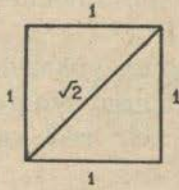
noktasının sağında alınır, böylece 0 ın solundaki noktalar negatif sayılara tekabül eder. 0 noktasına *başlangıç* noktası denir. Meselâ 7 sayısına ait olan nokta başlangıç noktasından yedi uzunluk birimi uzaklığındadır. — 7 ye ait nokta başlangıç noktasının yedi birim solundadır. Bu yolda noktalar başlangıç noktasının solunda iseler negatif işaretle, sağında iseler pozitif işaretle, ve sayılar noktanın başlangıç noktasına olan uzaklıkları göstermek üzere, her noktaya bir sayı bağlanır. Şekil 6 da gösterildiği gibi



Şekil: 6

— $4/3$, $1/2$ ve $2/3$ gibi rasyonel sayıların birim uzunluğa olan nispetlerine göre tamamen yerleri belli olur.

$\sqrt{2}$ senbolü kendisini kendisiyle çarptığımızda 2'yi veren bir sayıyı gösterir; yani $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ dir. $\sqrt{2}$ nin geometrik anlamını görmek için Şekil 7 de gösterildiği



Şekil: 7

Kenar uzunlukları 1 olan
bir kare

gibi bir birim kareyi göz önüne alır ve Pitagor teoremin-den bir birim kare köşegen uzunluğunun 2 olduğunu buluruz. Bundan dolayı köşegen uzunluğunu $\sqrt{2}$ ile gösterip $\sqrt{2}$ sayısını doğru üzerinde başlangıç noktasından itibaren birim karemizin köşegen uzunluğuna eşit bir uzaklıktaki noktaya tekabül ettiriyoruz.

Madem ki eksen üzerindeki her nokta başlangıç noktasından bir miktar uzaklıkta bulunuyor, böyle her noktaya bir sayının tekabül etmesi entüitif (hadsî) olarak aşikârdır. *Reel sayılar* olarak bütün noktalara tekabül eden bütün sayılar koleksiyonunu alıyoruz. Buna her rasyonel sayı dahildir, zira her rasyonel sayıya başlangıç noktasından itibaren muayyen bir uzaklık tekabül eder. Böylece rasyonel sayıların reel sayıların bir alt sınıfını teşkil ettiğini söyleyebiliriz.

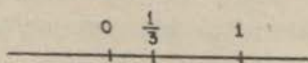
Mamafih rasyonel olmayan reel sayılar da vardır. İleride bu bölümde ispat edeceğimiz gibi $\sqrt{2}$ sayısı

rasyonel değildir. Rasyonel olmayan $\sqrt{2}$ gibi her hangi bir reel sayıya *irrasyonel* denir. Yapılan tarif tarzlarından dolayı her hangi reel bir sayı ya rasyonel veya irrasyoneldir. Yukarıda tarif edildiği şekilde her noktasına bir sayı tekabül ettirilen doğru veya eksene *reel doğru* denir. Bu doğru noktalarına tekabül eden sayıların rasyonel veya irrasyonel olmalarına göre noktalar ya rasyonel veya irrasyoneldir.

İrrasyonel bir sayının yukarıdaki tarifi şuna geldiğine dikkat ediniz: İki tamsayının a/b oranı şeklinde ifade edilemeyen her hangi bir reel sayıya irrasyonel sayı denir.

3.2 Ondalık gösterilişler

$1/3$ sayısını reel doğru üzerinde, sıfır ile birim noktaları arasını üçe bölen mesafeye kolayca yerleştirmek mümkündür (Şekil: 8).



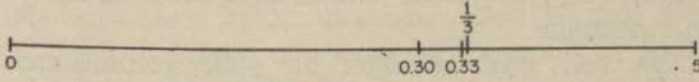
Şekil: 8

Şimdi $1/3$ ün ondalıkla gösterilmesini göz önüne alalım:

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Bu eşitlik $1/3$ ü sonsuz terimli bir toplam olarak ifade eder. Terim sayısının sonu olmamasına rağmen toplamın belirli, yani $1/3$, bir değeri vardır. Eğer 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333, ... lere tekabül eden noktaları reel doğru üzerine

yerleştirirsek $1/3$ noktasına yakınsayan bir noktalar silsilesi elde ederiz. Bu şekil 9 da gösterilmiştir; burada



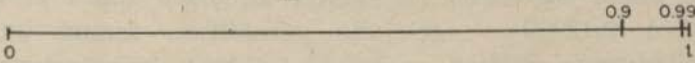
Şekil: 9

uzunluk birimi büyütülmüştür. Her hangi bir sonsuz ondalık aynı şekilde reel doğrunun belirli bir noktasına ait olacaktır. $0,99999 \dots$ sonsuz ondalığı halinde bunu gösteren nokta

0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, 0,99999, v.s.

noktalarına tekabül eden noktalara yakınsar.

Şekil 10 da gösterildiği gibi bu noktalar evvelki bölümdeki $1 = 0,99999 \dots$ eşitliğine uygun olarak 1 noktasına yakınsarlar.



Şekil: 10

Şimdi evvelce misal olarak verilen

$$q = 0,1010010001000010000010000001 \dots$$

sayısının tetkikine girişelim; bu sayının da reel doğrunun belirli bir noktasına ait olduğunu buluruz. Bu noktaya şu aşağıdaki

0,1,
0,101,
0,101001,
0,1010010001,
0,101001000100001, v.s.

noktalar zinciri boyunca yaklaşıldığını düşünebiliriz. Madem ki q periyodik bir ondalık değildir, o halde bir irrasyonel sayı olup buna tekabül eden nokta da bir irrasyonel noktadır.

Bu, reel sayıların diğer bir yolla yorumlanmasını hatıra getirir. Reel sayılar, sonlu veya sonsuz

$$17,34, 2,176, -6,03722222\ldots, q = 0,1010010001\ldots$$

gibi ondalık açılım koleksiyonudur. Evvelki bölümdeki tetkikatımıza göre bu ondalık açılımları rasyonel ve irrasyonel sayılara ayırabiliriz. Rasyonel sayılar ya sonlu veya periyodik ondalık olanlardır; irrasyonel sayılar ise yukarıdaki q sayısı gibi periyodik olmayanlardır. Bundan başka mademki her sonlu ondalığın (veya $0,43000\ldots$ gibi sonsuz sıfırı olan her ondalık) sonsuz periyodik ondalıkla da yazılabileceğini gördük, o halde bu kısımda bütün rasyonel sayıların sonsuz periyodik ondalıklarla yazılmasını kabul edebiliriz. (Böyle bir kabulden sonra meselâ $0,43$ ü $0,42999\ldots$ şeklinde yazabiliriz; bunun garip gözükmeseine rağmen aşağıdaki tetkikatı kolaylaştırır.)

Şimdi *reel sayıların sonsuz ondalıkla yegâne bir gösterilişi olduğunu* göstereceğiz. Yani *ancak eğer rakkam be rakkam birbirine özdeş ise iki sonsuz ondalık eşittir* demektir.

Niçin sonsuz ondalık gösteriliş yegânedir? Bu sual şöyle cevaplandırırız: farklı sonsuz ondalık gösterilişi olan iki sayıyı göz önüne alalım. Madem ki gösterilişler farklıdır, en az bir rakkamda bu fark hakikaten görülebilir; meselâ

$$a = 17,923416\ldots,$$

$$b = 17,923415\ldots$$

a sayısında 6 yı takip eden rakkamların sonsuz şekild

tevalisi, sonsuz sıfırın tevalisi hariç, okurun seçmeyi tasavvur ettiği her hangi bir koleksiyon olabilir. Aynı mülâhaza b sayısına da kabili tatbiktir. Sıfırın sonsuz şekilde tevalisinin hariç tutulması keyfiyeti bize a nın kat'i olarak 17,923416 dan daha büyük olduğunu söyler, bu senbollerle şöyle ifade edilir

$$a > 17,923416.$$

Diğer taraftan, b en fazla 17,923416 dır, zira ancak b de «5» i takip eden rakkamlar silsilesinin hepsi dokuz olursa, yani eğer $b = 17,923415\bar{9}$ olursa, $b = 17,923416$ elde edilebilir, b nin en fazla 17,923416 olduğu senbolik olarak

$$b \leq 17,923416 \quad \text{veya} \quad 17,923416 \geq b$$

şeklinde yazılır. a ve b için bu eşitsizlikler

$$a > 17,923416 \geq b$$

yi ifade eder ve bundan da $a > b$ çıkar. Şu halde a nın b den daha büyük olduğu sonucuna varırız; ve tabii bu eşitlik imkânını bertaraf eder. İspatımız belirli iki a ve b sayılarının bir özel haline tatbik edilmiştir, fakat muhakkem farklı sonsuz ondalık gösterişli her hangi sayı çiftlerine hemen teşmil edilebilir.

3.3 $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliği

Şimdi $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliğini gösteren an'anevi endirekt ispatı vereceğiz, ve gelecek bölümde ise daha genel yolların yardımı ile diğer bir ispat vereceğiz.

Bölüm 1 de çift tamsayıların ve aynı şekilde tek tamsayıların çarpım altında kapalı olduğunu göstermiştik. Özel bir hal olarak çift bir tamsayının karesi çift, tek bir tamsayının karesi tektir.

Şimdi $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olduğunu farzedelim a ve b tamsayılar olmak üzere

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

olsun. a/b rasyonel kesrin en basitleştirilmiş şekilde olması ispat için elzemdir, biz de bunun böyle olduğunu kabul edeceğiz. Bilhassa a ve b nin her ikisinin de çift olmadığı keyfiyetini kullanacağız, zira eğer çift olsalardı kesir en basitleştirilmiş halde olmayacaktı. Yukarıdaki eşitliğin karesini alıp, basitleştirirsek

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 2b^2$$

elde ederiz.

$2b^2$ terimi bir çift tamsayı gösterir, öyleyse a^2 bir çift tamsayıdır, ve bundan dolayı a bir çift tamsayıdır. $a = 2c$ demektir, burada c de bir tamsayıdır. $a^2 = 2b^2$ denkleminde a yerine $2c$ koyarak

$$(2c)^2 = 2b^2, \quad 4c^2 = 2b^2, \quad 2c^2 = b^2$$

elde ederiz. $2c^2$ terimi bir çift tamsayı gösterir, öyleyse b^2 bir çift tamsayıdır, ve bundan dolayı b bir çift tamsayıdır. Fakat şimdi a ve b nin her ikisinin de çift olduğu sonucuna varıyoruz, halbuki a/b en basitleştirilmiş halde olduğu kabul edilmişti. Bu çelişmezlik $\sqrt{2}$ nin rasyonel

a/b şeklinde ifade edilemeyeceği sonucuna götürür, ve bundan dolayı $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

3.4 $\sqrt{3}$ ün irrasyonelliği

$\sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğu hakkındaki ispatlardan biri henüz verilen $\sqrt{2}$ nin irrasyonelliği ispatına benzer, şu farkla ki burada 2 ile bölünebilme yerine 3 ile bölünebilme bahis konusudur. İspata bir giriş olmak üzere *bir tamsayı karesinin, eğer ve ancak eğer tamsayının kendisi 3 ile bölünebilirse, 3 ile bölünebildiğini* tesis edeceğiz. Bunu görmek için, 3 ile bölünebilen bir tamsayının $3n$ şeklinde olduğunu, halbuki 3 ile bölünemeyen bir tamsayının $3n + 1$ şeklinde veya $3n + 2$ şeklinde olduğunu müşahade ederiz. Şu halde

$$(3n)^2 = 9n^2 = 3(3n^2),$$

$$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1,$$

$$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$$

eşitlikleri yukarıdaki iddiayı teyit ederler.

Bundan sonra $\sqrt{3}$ ün rasyonel bir sayı olduğunu farzederiz; yani

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

dir; burada a ve b tamsayılardır. Tekrar, $\sqrt{2}$ halinde olduğu gibi, a ve b nin her ikisinin de 3 ile bölünemediğini, a/b nin en en basitleştirilmiş halde olduğunu farzedelim. Eşitliğin karesini alır ve basitleştirirsek

$$3 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 3b^2$$

elde ederiz. $3b^2$ tamsayısı 3 ile bölünebilir, yani a^2 3 ile bölünebilir. Öyleyse a nın kendisi 3 ile bölünebilir, $a = 3c$ demektir, burada c bir tamsayıdır. $a^2 = 3b^2$ denkleminde a yerine $3c$ koyarak

$$(3c)^2 = 3b^2, \quad 9c^2 = 3b^2, \quad 3c^2 = b^2$$

elde ederiz. Bu b^2 nin 3 ile bölünebildiğini ve bundan dolayı b nin 3 ile bölünebildiğini gösterir. Fakat a ve b nin her ikisinin 3 ile bölünebildiğini tesis ettik, ve bu ise a/b nin en basitleştirilmiş halde olması faraziyesine aykırıdır. Bundan dolayı $\sqrt{3}$ irrasyoneldir.

3.5 $\sqrt{6}$ ve $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonelliği

$\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ ün irrasyonelliği hakkındaki ispatlar tamsayıların sırasile 2 ve 3 ile bölünemelerine bağlı idi, fakat $\sqrt{6}$ ya tekabül eden ispat hem 2 ve hem de 3 ile bölünebilmesine bağlı yapılabilir. Meselâ, $\sqrt{2}$ nin ispatına paralel olarak,

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

olduğunu kabul edeceğiz; burada a ve b nin her ikisi de çift tamsayılar değildirler. Karesini alarak

$$6 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 6b^2$$

elde ederiz. Şimdi, $6b^2$ çifttir, öyleyse a^2 de çifttir, öyleyse a çifttir, $a = 2c$ olsun. O halde

$$a^2 = 6b^2, \quad (2c)^2 = 6b^2, \quad 4c^2 = 6b^2, \quad 2c^2 = 3b^2$$

yazabiliriz. Bu bize $3b^2$ nin çift olduğunu söyler, öyleyse b^2 çifttir ve böylece b çifttir. Fakat a ve b nin her ikisinin çift olmadığı kabul edilmişti; böylece $\sqrt{6}$ irrasyoneldir.

Okur bir alıştırmaya olmak üzere, $\sqrt{3}$ ün ispatına benzer bir ispat yardımıyla, aynı sonucu çıkartabilir.

Bu bölümde irrasyonelliğin son bir misali olmak üzere $\sqrt{6}$ haline bağlı olarak $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ halini tetkik ediyoruz. Farzedelim ki $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasyonel olsun,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$$

densin. Karesini alır ve basitleştirirsek

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2, \quad 2\sqrt{6} = r^2 - 5,$$

$$\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$$

elde ederiz. Rasyonel sayılar dört işlem olan toplam, çıkarma, çarpma ve bölme (sıfır hariç) altında kapalıdır, ve böylece $1/2(r^2 - 5)$ rasyonel bir sayıdır. Fakat $\sqrt{6}$ irrasyoneldir, ve böylece bir çelişmezliğe düşeriz. Bundan dolayı $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğu sonucuna varırız.

$n = a \cdot b$ tamsayısı verildiğinde $\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b}$ nin irrasyonel olduğunu bilirsek, yukarıdaki ispatı taklit ederek $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ifadesinin irrasyonelliğini çıkarabiliriz.

Problem serisi 10

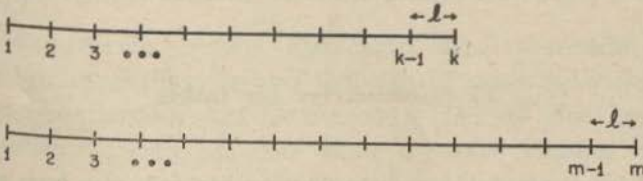
1. Bir tamsayı karesinin, eğer ve ancak eğer tamsayının kendisi 5 ile bölünebilirse, 5 ile bölünebileceğine dair iki ispat veriniz.
 - (a) Evvelâ, metindeki 3 ile bölünebilme halindeki analize paralel bir ispat veriniz. Her tamsayının $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$, veya $5n + 4$ beş şekilden biri olduğundan hareket ediniz.
 - (b) Sonra, Aritmetiğin Temel Teoremini kullanarak bir ispat veriniz.
2. $\sqrt{5}$ in irrasyonelliğini ispat ediniz.
3. $\sqrt{15}$ in irrasyonelliğini ispat ediniz.
4. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ün irrasyonelliğini ispat ediniz.
5. $\sqrt[3]{2}$ nin irrasyonelliğini ispat ediniz.
6. İrrasyonel bir α (alfa) sayısı verildiği takdirde $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ nın da irrasyonel olduğunu ispat ediniz.
7. 0 rasyonel mi, irrasyonel midir?

3.6 Kullandığımız kelimeler

Sayıların muhtelif sınıflarını tarif etmek için kullandığımız dil tarihten bize kalan mirasın bir kısmıdır; kelimelerin bazıları bize azıcık acaip gelirse de bunları değiştirmek münasip olmaz. Meselâ günlük konuşmalarımızda bir şeyi «irrasyonel» olarak tarif edersek, ekseriyetle iyi anlamdan ayrıldığı ve bundan dolayı makul olmadığı anlamına alırız. Fakat tabii, irrasyonel sayıları makul olmayan sayılar olarak görmeyiz. Görünüşe göre Yunan

hlar irrasyonel sayıları keşfettikleri vakit şaşırmışlardır, zira bir karenin kenar ve köşegeni olarak herhangi iki doğru parçası verildiğinde, doğru parça uzunluklarının oranı a/b olacak bazı a ve b tamsayıların mevcut olabileceğini zannetmişlerdi. Böylece «rasyonel» kelimesi matematikteki anlamında bu tam sayıların oranına aittir, ve «irrasyonel» kelimesi böyle bir oranın mevcut olmasını gösterir.

«Ölçülebilir (commensurable)» kelimesi oranları rasyonel bir sayı olan iki uzunluğu tavsif etmek için de kullanılmaktadır. İki ölçülebilir uzunluktan biri diğerinin yardımıyla aşağıdaki anlamda ölçülebilir: İlk doğru parçası her bir kısmı l uzunluğunda olmak üzere eşit k parçaya



Şekil: 11

bölünürse, ikinci doğru parçası da böyle l uzunluğunda bir m tam sayısı kadar ölçülebilirse, o zaman iki doğru parçası uzunluklarının oranı

$$\frac{kl}{ml} = \frac{k}{m}$$

dir, yani rasyoneldir. (Şekil 11 e bakınız). Mamafih, eğer doğru parçaları uzunluklarının oranı irrasyonel olacak şekilde ise (meselâ bir karenin kenar ve köşegeni), o zaman yukarıdaki çizim, k ne kadar büyük alınırsa alınsın (ve l ne kadar küçük alınırsa alınsın), hiç bir zaman yapılamaz! Bu halde, verilen doğru parçalarına *ölçülebilinmeyen* denir.

Genel olarak $\sqrt[n]{a}$ şeklindeki $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24}$ gibi sayılara *kökler* denir; burada a rasyonel ve n bir tamsayıdır.

«Reel sayılar» terimi geçmişten bize intikal eden diğer bir mirastır. Eğer bugün onları yeniden adlandırsaydık, onlara «tek-boyutlu sayılar» derdik. Her hangi bir olayda sayıları, reel sayılar bölgesinin haricinde «reel olmayan» olarak görmeyeceğiz. Okur muhtemelen, reel sayılar bir alt sınıfını teşkil ettiği, karmaşık sayılara âşinadır. Karmaşık bir sayı $a + bi$ şeklindedir; burada a ve b reel olup $i^2 = -1$ kuadratik formülü gerçekler. Bu tarif daha ziyade sayı sınıflarının tetkikini tamamlamak için ithal edilmiştir. Bu kitabın konusu reel sayılar hakkında olup karmaşık sayıların geniş sınıfı ile meşgul olmayacağız.

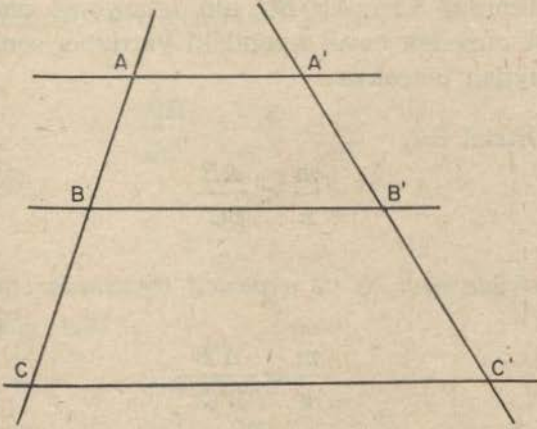
3.7 Geometriye bir tatbik

Lise geometri ders kitaplarının bir çoğunun bazı ispat veya ispatlarında irrasyonel sayılar ortaya çıktığından bir gedik kalmaktadır. Bir sonuç yalnız rasyonel halde ispatlanır ve irrasyonel hal tamamlanmazsa gedik ortaya çıkar. Bu ekseriya aşağıdaki sonuçla vukua gelir.

TEOREM 3.1. *Üç paralel doğru, şekil 12 de görüldüğü gibi, iki kesenle kesilirse, A, B, C, A', B', C' kesit noktaları olmak üzere, o zaman*

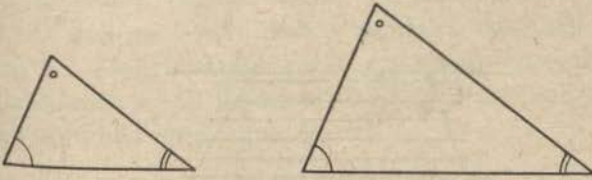
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

dir; burada meselâ AB A dan B ye kadar olan doğru parçasının uzunluğudur.



Şekil: 12

Bu teorem, benzer üçgenlerin temel teoremini ispat için kullanılabilir: *eğer bir üçgenin üç açısı diğer üçgenin üç açısına sırasile eşit ise o zaman tekabül eden kenarlar orantılıdır* (Şekil 13). Bu sonuç ekseriya Pitagor Teore-



Şekil: 13

mini ispat etmek için kullanılır ve nitekim trigonometri ve analitik geometri bu teoremlerin temelleri üzerine inşa edilmişlerdir.

Şimdi Teorem 3.1 i AB/BC nin irrasyonel olması hali için ispat edeceğiz. Teorem 3.1 i AB/BC nin rasyonel olması halini ispatsız kabul edeceğiz, çünkü teoremin bu kısmı elementer geometri kitaplarında ekseriya ispatlan-

mıştır. Teorem 3.1 i AB/BC nin irrasyonel olması hali için ispat etmeden evvel aşağıdaki yardımcı sonucu tesis etmek faydalı olacaktır.

TEOREM 3.2.

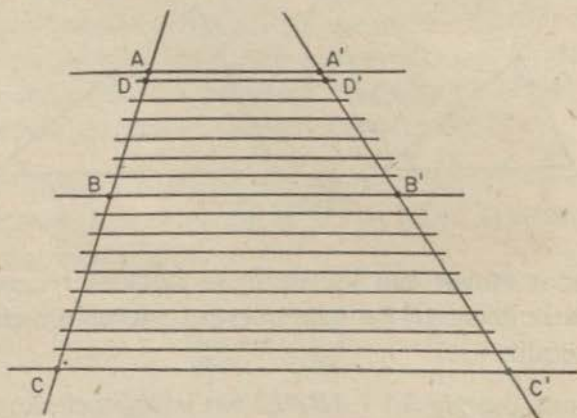
$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}$$

olacak şekilde eğer m ve n pozitif tamsayıları mevcutsa, o zaman

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

dir.

İSPAT. Bir çizimle başlayalım. $BC = n\alpha$ olacak şekilde BC doğru parçasını, her parçası α uzunluğunda, n eşit parçaya bölelim. Ondan sonra BA doğru parçası boyunca bu α uzunluğundaki parçalardan m tanesini işaretleyelim, D noktasında son bulacaktır.



Şekil: 14

Evvelâ, Şekil 14 deki gibi, D nin B ile A arasında

olduğunu ispat edeceğiz. Mademki $BC = n\alpha$ ve $DB = m\alpha$ dır,

$$\frac{DB}{BC} = \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n}$$

yazabiliriz;

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}$$

yi kabul ederek

$$\frac{DB}{BC} < \frac{AB}{BC}$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlik $DB < AB$ yi tazammun eder, zira her iki kesrin paydası aynı BC dir. Şu halde mademki BD AB den daha kısadır, bundan D nin AB doğru parçası içinde olduğu sonucu çıkar.

Bundan sonra bütün bu bölme noktalarından AA' ye paralel doğrular çizeriz; Şekil 14 deki gibi D ye sağ tarafta D' noktası tekabül eder. Şu halde rasyonel hal için Teorem 3.1 (doğruluğunu kabul etmiştik) gereğince $B'C'$ aynı uzunlukta n eşit kısma ve $D'B'$ aynı uzunlukta m eşit kısma bölünmüş olur, şöyle ki

$$\frac{D'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$$

olsun. Mamafih Şekil 14 den $D'B' < A'B'$ olduğunu görür ve

$$\frac{D'B'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

sonucuna varırız.

TEOREM 3.2 NİN SONUCU (KOROLER).

$$\frac{m}{n} > \frac{AB}{BC} \text{ olursa, o zaman } \frac{m}{n} > \frac{A'B'}{B'C'} \text{ olur.}$$

Bu sonuç Teorem 3.2 ye benzer, ve böylece benzer bir ispat câridir.

Böylece Teorem 3.2 ile bir koroler ispat etmiş olduk; şimdi bunları kullanarak irrasyonel hal için Teorem 3.1 i ispatlayacağız. AB/BC oranını gösteren irrasyonel sayıyı β ile gösterelim. Bölüm 3.2 deki gibi β nın ondalık gösterilişini kullanacağız.

Yapmak istediğimizi izah etmek için meselâ $\pi = 3,14159 \dots$ değerine β diyelim. Şu halde

$$\frac{3}{1} < \beta < \frac{4}{1},$$

$$\frac{31}{10} < \beta < \frac{32}{10},$$

(1)

$$\frac{314}{100} < \beta < \frac{315}{100},$$

$$\frac{3141}{1000} < \beta < \frac{3142}{1000}, \dots, \text{v.s.}$$

yazabiliriz. Soldaki kesirler ondalık açılımda 3, 3,1, 3,14, 3,141 v.s. alarak elde edilmiştir. Sağdaki kesirler, bu aynı sayıları 1, 0,1, 0,01, 0,001 v.s. artırarak, elde edilmiştir.

(1) eşitsizlikler zinciri sayısı sonsuzdur; biz ise ancak ilk dördünü yazdık. Bu eşitsizlikler tetkik ettiğimiz β nın, yani π nin, özel değerini *karakterize* ederler. Yani eğer β (1) eşitsizliklerinin hepsini gerçeklerse bu sayı π ye eşittir demektir.

(1) eşitsizlikleri bir misal vermek için yazılmıştır; burada β π değerindeydi. Şimdi bu misali bırakacağız, fakat her hangi bir irrasyonel β değerini göz önüne alacağız, bunun ondalık gösterilişi bize β yi tek şekilde karakterize eden ve her eşitsizlikte β iki rasyonel sayı arasında bulunan

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{a_1}{1} &< \beta < \frac{1+a_1}{1}, \\ \frac{a_2}{10} &< \beta < \frac{1+a_2}{10}, \\ \frac{a_3}{100} &< \beta < \frac{1+a_3}{100}, \\ \frac{a_4}{1000} &< \beta < \frac{1+a_4}{1000}, \dots, \text{v.s.} \end{aligned}$$

bir eşitsizlikler zinciri verecektir. $a_1, a_2, a_3, \dots$ sembolleri tamsayıları göstermektedir.

Plânımız $A'B'/B'C'$ oranını β' ile göstermek ve β' nın, tıpkı β da olduğu gibi, (2) eşitsizliklerini de gerçeklediğini ispat etmektir. Fakat bu eşitsizlikler β sayısını karakterize ederler ve bundan dolayı β' nın

$$\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \beta'$$

olacak şekilde β ile bir olduğu çıkar. Bütün geri kalan ise β' nın bütün (2) eşitsizliklerini gerçeklediğini göstermektedir. Bunu yapmak için Teorem 3.2 yi kullanacağız. Evvelâ $a_1/1, a_2/10, a_3/100, \text{v.s.}$ kesirlerinden her hangi birini, meselâ $a_3/100$ yı alalım ve bunu Teorem 3.2 deki

m/n rasyonel sayısı olarak kabul edelim. O halde Teorem 3.2 deki

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}$$

ipotezi

$$\frac{a_3}{100} < \beta$$

olur, ve bu ise (2) eşitsizliklerinden dolayı câridir. Şu halde Teorem 3.2 bize

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

olduğunu söyler; bu ise

$$\frac{a_3}{100} < \beta'$$

dir. Böylece β' nın

$$\frac{a_1}{1} < \beta', \quad \frac{a_2}{10} < \beta', \quad \frac{a_3}{100} < \beta', \quad \frac{a_4}{1000} < \beta',$$

v.s. leri gerçekteğini görürüz.

Benzer şekilde Teorem 3.2 nin korollerini kullanarak

$$\beta' < \frac{1 + a_1}{1}, \quad \beta' < \frac{1 + a_2}{10}, \quad \beta' < \frac{1 + a_3}{100}, \quad \beta' < \frac{1 + a_4}{1000},$$

v.s. eşitsizliklerini elde ederiz. Bundan dolayı β', β da olduğu gibi, (2) eşitsizliklerini gerçeker. Böylece $\beta = \beta'$ dır ve Teorem 3.1 in ispatı tamamdır.

3.8 Bir özet

Bu bölümde her reel sayıya «reel doğru» üzerinde tam bir nokta tekabül ettirilebileceğini gösterdik. Her reel sayının sonsuz bir ondalık (sonsuz sıfırların tevalisini yani, göstermelerimizde bitimli ondalıkları hariç tutmağı şart koşarak) olarak tam bir gösterilişi olduğunu gördük. Sonsuz ondalıklarla bu gösteriliş 3.7 kısmında elementer geometrinin mühim bir teoremine tatbik edilmiştir. İlâve

olarak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, v.s. gibi bazı sayıların irrasyonelliğini ispat ettik. Mamafih metodlarımız oldukça bölük pürçük olup verilen bir sayının rasyonel olup olmadığını tayin edecek çok genel her hangi bir usul vermedik.

Gelecek bölümde irrasyonel sayıları çok daha sistematik yoldan tetkik edeceğiz. Geniş bir sayılar sınıfını irrasyonel olarak sınıflandırılabilcek bir metod çıkara-cağız.

BÖLÜM 4

İRRASYONEL SAYILAR

Bu ve sonraki bölümde reel sayıların yalnız rasyonel ve irrasyonel sayılar olarak sınıflandırılmayıp diğer başka iki kategoriye de ayrılabilceğini öğreneceğiz. Bir kategori *cebrîk sayılar* denilenleri yani katsayıları tam olan cebrîk denklemlerin çözümleri olanları, diğeri de bütün geri kalan ve *transandant sayılar* denilenleri ihtiva eder. Bu tefrik ileride daha mâna kazanacaktır. Mamafih, cebrîk sayıların bazılarının rasyonel ve bazılarının irrasyonel ve fakat bütün transandant sayıların irrasyonel olduklarını hemen zikrederim.

Bu bölümün tam gayesi verilen cebrîk bir sayının rasyonel olup olmadığını tayin eden sistematik bir metodun verilmesidir. (Hakikatte biz cebrîk sayılar sınıfını en genel şekliyle tetkik etmeyeceğiz, fakat metodumuzu bir çok misale tatbik edeceğiz.) Fakat bu metodu çıkarmadan evvel, irrasyonel sayıların bazı basit özelliklerini tetkik edeceğiz.

4.1 Kapanma özellikleri

Rasyonel sayıların, gösterildiği gibi, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme (sıfır ile hariç) altında kapanmasına mukabil irrasyonel sayılar bu özelliklerin hiç birine sahip değildir. Bunu göstermeden evvel, verilen irrasyonel bir sayıdan sonsuz miktarda çok irrasyonel sayı teşkiline imkân veren bir teorem ispatlayacağız.

TEOREM 4.1. α herhangi irrasyonel bir sayı ve r sıfır hariç her hangi rasyonel bir sayı olsun. Bu takdirde, r ve α nın toplam, çıkarma, çarpma ve bölümü irrasyonel sayıları verir. — α ve α^{-1} de irrasyoneldirler.

İSPAT. Bu sonuçlar endirekt ispatlar yardımıyla kolayca tesis edilecektir. Başlamak üzere — α nın rasyonel yani r' nin rasyonel olduğu tahmin edilen sayıyı göstermek üzere — $\alpha = r'$ olduğunu kabul edelim; şu halde $\alpha = -r'$ olacak ve — r' gene bir rasyonel sayıdır. Böylece, α irrasyonel olduğundan, bir çelişmezliğe düşülür.

Teorem — α , $\alpha^{-1} = 1/\alpha$, $\alpha + r$, $\alpha - r$, $r - \alpha$, $r\alpha$, α/r ve r/α ların irrasyonel olduğunu iddia eder. Daha şimdi — α yı tetkik ettik. α^{-1} in irrasyonelliğinin ispatında $r = 1$ ile r/α nın bir özel hali olduğunu görürüz. Böylece ayrı olarak bu hali tetkik etmeğe lüzum yoktur.

Geri kalan altı halin hepsini birlikte, en genel şekliyle, ispat edelim. Eğer bu ifadelerden bir veya daha fazlası rasyonel olsaydı, o vakit aşağıdaki

$$\alpha + r = r_1, \quad \alpha - r = r_2, \quad r - \alpha = r_3,$$

$$r\alpha = r_4, \quad \frac{\alpha}{r} = r_5, \quad \frac{r}{\alpha} = r_6$$

denklemlerin bir veya daha fazlası câri olacaktı; burada $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ bazı rasyonel sayıları gösterir. α ya göre bu denklemleri çözürek

$$\alpha = r_1 - r, \quad \alpha = r_2 + r, \quad \alpha = r - r_3,$$

$$\alpha = \frac{r_4}{r}, \quad \alpha = rr_5, \quad \alpha = \frac{r}{r_6},$$

elde ederiz. Bu denklemlerin sağ tarafları, rasyonel sayıların kapanma özelliklerinden dolayı, rasyonel sayılardır.

Bu denklemlerin hiç biri câri olmaz, çünkü α irrasyoneldir. Bu sebepten $\alpha + r$, $\alpha - r$, v.s. sayılarından her hangi birinin rasyonel olması mümkün değildir. Böylece teoremin ispatı tamamdır.

Teorem 4.1 yardımıyla tek bir irrasyonel sayıdan büyük bir irrasyonel sayılar sınıfını teşkil edebiliriz, meselâ $\sqrt{2}$ den. Teoremin her ifadesini tatbik ederek meselâ

$$-\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2} + 5, \quad 3 - \sqrt{2},$$

$$-2\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{4}{\sqrt{2}}$$

lerin hepsinin irrasyonel olduklarını söyleyebiliriz. Mademki teoremin her iddiası için kullanabildiğimiz sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır, o halde böyle sonsuz sayıda çok irrasyonel sayının teşkil edilebileceği aşikârdır.

Bundan başka, böyle teşkil edilen her hangi sayılardan biri, meselâ $\sqrt{2} + 5$, teoremde yeni bir irrasyonel α sayısı olarak kullanılabilir. Bundan dolayı, meselâ

$$-\sqrt{2} - 5, \quad \frac{1}{\sqrt{2} + 5}, \quad \sqrt{2} + 8$$

$$5\sqrt{2} + 25, \quad \frac{\sqrt{2} + 5}{7}$$

v.s. gibi sonsuz çok irrasyonel sayı böyle tek bir sayıdan üretilebilir.

İrrasyonel sayılar toplam altında kapalı mıdır?

Hayır, değildirler. Bunu ispat için toplamı rasyonel olan iki irrasyonel sayı vermemiz kâfidir. Evvelki bölümde $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğu gösterilmişti, bundan dolayı Teorem 4.1 e göre $-\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Fakat $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$ nin toplamı 0 olur, ki o da rasyoneldir; meselâ $+3\sqrt{2}$ ile $5-\sqrt{2}$ nin toplamı da öyledir. Daha genel olarak $r_1 + \alpha$ ile $r_2 - \alpha$ nın (burada r_1 ve r_2 rasyonel ve α irrasyoneldir) toplamı rasyoneldir.

İrrasyonel sayıların toplam altında kapalı olmadıkları önermesi, *her hangi iki* irrasyonel sayıyı topladığımızda toplamın irrasyonel olacağı anlamına gelmemelidir. Hiç olmazsa yalnız bir halde toplam rasyoneldir anlamınadır. İki irrasyonel sayıyı topladığımızda elde edilen sonucun ya rasyonel veya irrasyonel olması hareket ettiğimiz iki sayıya bağlıdır. $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$ nin toplamı bir rasyonel sayı olmasına rağmen, evvelki bölümde tesis ettiğimiz gibi $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{3}$ ün toplamı irrasyonel bir sayıdır.

İrrasyonel sayılar çıkarma altında kapalı mıdır?

Hayır, çünkü meselâ $\sqrt{2}$ den kendini çıkarırsak 0 rasyonel sayısını elde ederiz.

Benzer şekilde, irrasyonel sayılar çarpım veya bölüm altında kapalı değildirler. Bu sonuçlar evvelkilere o kadar benzer ki ispatlarını gelecek problemler serisinde okura bırakacağız.

Problem serisi 11

(Bu problemlerin bazılarında evvelki bölümde çıkarılan bazı sonuçları, yani $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ve $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olmalarını, kullanmak kolaylık temin edebilir.)

1. Farkı irrasyonel olan iki irrasyonel sayı veriniz.

2. Çarpımı rasyonel olan iki irrasyonel sayı veriniz ve irrasyonel sayıların çarpma altında kapalı olmadıklarının ispatını da yapınız.
3. Çarpımı irrasyonel olan iki irrasyonel sayı veriniz.
4. Bölüm sonucu rasyonel olan iki irrasyonel sayı veriniz ve irrasyonel sayıların bölme altında kapalı olmadıklarının ispatını da yapınız.
5. Bölüm sonucu irrasyonel olan iki irrasyonel sayı veriniz.
- * 6. $\sqrt{3}(\sqrt{6} - 3)$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.
7. α irrasyonel pozitif bir sayı olsun. $\sqrt{\alpha}$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.
8. α ve β irrasyonel, fakat $\alpha + \beta$ rasyonel olarak verildiğine göre $\alpha - \beta$ ve $\alpha + 2\beta$ lerin irrasyonel olduklarını ispatlayın.

4.2 Polinom denklemler

Evvelki bölümde $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ve $\sqrt{6}$ nin irrasyonel oldukları ispatlanmıştı. Umulduğu gibi (veya belki de okurlarca zaten bilindiği gibi) $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, ve $\sqrt[5]{91}$ gibi sayılar da irrasyoneldir. Bundan sonra yapmak istediğimiz şey bütün böyle sayıların irrasyonelliğini teker teker tetkik etmektense bunları müşterek bir şema ile tesis etmektir. Bunu yapmak için dikkati sayıların kendilerinden kökleri bu sayılar olan basit cebrik denklemlere kaydırmalıyız. Meselâ, $\sqrt{2} x^2 - 2 = 0$ denkleminin bir köküdür; diğer deyimlerle: « $\sqrt{2} x^2 - 2 = 0$ in bir çözümüdür» veya « $\sqrt{2} x^2 - 2 = 0$ denklemini gerçekler». Benzer şekilde, göz önüne alınan diğer sayılar aşağıdaki

$$\sqrt{3}, \quad x^2 - 3 = 0$$

$$\sqrt{6}, \quad x^2 - 6 = 0$$

$$\sqrt{7}, \quad x^2 - 7 = 0$$

$$\sqrt[3]{5}, \quad x^3 - 5 = 0$$

$$\sqrt[5]{91}, \quad x^5 - 91 = 0$$

denklemleri gerçektir.

Yapacağımız şey bu denklemlerin, ve daha genel olarak bazı şartları gerçekleyen bütün denklemlerin hiç rasyonel kökünün mevcut olmadığını tesbittir. Başlamak için denklemlerin tarifinde kullanılan bir kaç terimi tarif etmemiz lâzımdır.

x li *kuadratik polinom* olarak $ax^2 + bx + c$ şeklinde bir ifadeyi anlarız; burada a, b ve c ye sabitler denir. Bir *kübik polinom*, veya *3 üncü derece bir polinom* $ax^3 + bx^2 + cx + d$ şeklindedir. Derece arttıkça yeni harflerin kullanılmasını önlemek için

$$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

yazmak elverişlidir. Şimdi, her hangi n inci derecede bir polinom, c_n sıfırdan farklı olmak üzere

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$$

şeklindedir. Bir *polinom denklem*

$$(1) \quad c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0$$

şeklinde bir eşitliğin ifadesidir; $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ lere *katsayılar* denir.

MİSAL. $3x^6 + 2x^5 - x^4 + 10x^3 + 4x - 7 = 0$ denkleminin yukarıdaki (1) şeklinde olduğu düşünülürse n, c_n , v.s. değerlerini tayin ediniz.

ÇÖZÜM. Direkt kıyaslama ile görürüz ki

$$n = 6, \quad c_6 = 3, \quad c_5 = 2, \quad c_4 = -1, \quad c_3 = 10, \\ c_2 = 0, \quad c_1 = 4, \quad c_0 = -7 \quad \text{dir.}$$

(1) denkleminin katsayılarının tamsayı olmalarının istenilmesi, katsayılarının rasyonel olmaları kadar kat'i olmadığına dikkat ediniz; çünkü eğer katsayılar rasyonel iseler $c_0 = a_0/b_0, \quad c_1 = a_1/b_1, \quad c_2 = a_2/b_2, \quad \dots$, olur; burada a lar ve b ler tamsayılardır. Bütün bu kesirler müşterek bir paydası olacak şekilde yazılabilir, meselâ denklemin her iki tarafını $b_0 b_1 b_2 \dots b_n$ çarpımı ile çarpabilir ve böylece katsayıları tamsayılar olan ve kökleri de ilk denklemin kökleri ile aynı olan yeni bir denklem elde ederiz.

x cinsinden bir denklemin bir *kökü*, x in yerine konulduğunda, denklemi gerçekleyen bir değer olduğunu hatırlatırız. Meselâ, daha evvel belirttiğimiz gibi $\sqrt{7}$ $x^2 - 7 = 0$ in bir köküdür.

MİSAL. $2/5 \quad 10x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$ in bir kökü müdür?

ÇÖZÜM. x yerine $2/5$ koyarak

$$10 \left(\frac{2}{5} \right)^3 + 6 \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \frac{2}{5} - 2 = 0$$

elde ederiz ve bu da aritmetikte doğru bir ifadedir. Bundan dolayı $2/5$ denklemin bir köküdür.

Şimdi esas noktaya dönmeğe hazırız. Verilen bir

sayının irrasyonel olup olmadığını tayin etmek için geliştirmek üzere olduğumuz metodu ancak ve ancak göz önüne alınan sayıları bir kök olarak kabul eden bir polinom denklem yazabilirsek tatbik edilebildiğini tekrarlarız. Metod yalnız evvelki bölümde irrasyonelliğini tesis ettiğimiz sayılar için kullanılmayıp, $+$, $-$, $\times$, $:$ senbollerinin sonlu bir kombinezonu olarak yazılabilenler ile rasyonel sayıların $\sqrt[n]{r}$ kökleri için de kullanılabilir. Meselâ

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt[10]{7} - \sqrt[11]{7}}}{\sqrt[156]{25}}$$

bahsettiğimiz sayı çeşidinin karışık bir halidir.

Böyle bütün sayıların katsayıları tamsayılar olan polinom denklemlerin kökleri olduklarını bu kitapta ispatlamayacağız, fakat böyle bir çok sayıların polinom denklemleri gerçeklediğini yazacağız.

Problem serisi 12

1. Aşağıdaki denklemlerin yukarıdaki (1) denklemi şeklinde olduğu düşünülürse n , c , v.s. değerlerini tayin ediniz:

- (a) $15x^3 - 23x^2 + 9x - 1 = 0$
- (b) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$
- (c) $2x^3 + 7x^2 - 3x - 18 = 0$
- (d) $2x^4 - x^2 - 3x + 5 = 0$
- (e) $3x^5 - 5x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$
- (f) $x^4 - 3x^2 - 5x + 9 = 0$

2. (a) $1/3$ yukarıdaki (a) nın bir kökü müdür?
 (b) $-2/3$ yukarıdaki (b) nin bir kökü müdür?
 (c) $3/2$ yukarıdaki (c) nın bir kökü müdür?
 (d) 2 yukarıdaki (d) nın bir kökü müdür?
 (e) -2 yukarıdaki (e) nin bir kökü müdür?
 (f) $1/2$ yukarıdaki (f) nin bir kökü müdür?
3. $\sqrt{7}$ nin $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3} = 0$ in bir kökü olduğunu bulun.

4. Bir sayı eğer a_3/b_3 v.s. ler rasyonel katsayılı

$$\frac{a_3}{b_3}x^3 + \frac{a_2}{b_2}x^2 + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0} = 0$$

gibi bir polinom denklemin bir kökü olursa, o zaman bu sayının katsayıları tamsayılar olan bir polinom denkleminin bir kökü olduğunu ispat edin.

5. Evvelki problemin sonucunu 3 üncü derece denklemlerden n inci derece denklemler için genelleştirin.

4.3 Polinom denklemlerin rasyonel kökleri

Şimdi gayemiz katsayıları tamsayı olarak verilmiş her hangi bir polinom denklemin bütün rasyonel köklerini bulmak için bize imkân veren, aşağıdaki Teorem 4.3 de verildiği gibi, basit bir kural çıkarmaktır. Böylece bir denklemin rasyonel kökleri ile irrasyonel köklerini ayırmağa, ve keza geniş bir sayılar sınıfının irrasyonelliğinin tesisine muktedir olabiliriz.

Fakat evvelâ aşağıdaki yardımcı sonuca ihtiyacımız vardır.

TEOREM 4.2. u vw nin bir böleni olacak ve u ile v nin asal müşterek çarpanı bulunmamak üzere u , v , w

tamsayılar olsun. u şu halde w nin bir bölenidir. Daha genel olarak, u ve eğer $v^n w$ nin bir böleni ise, n her hangi bir pozitif tamsayı ve u ile v nin asal müşterek çarpanı yoksa, u o zaman w nin bir bölenidir.

İspata geçmeden evvel bu önermeyi bir kaç misâlle gösterelim.

(1) $u = 2, v = 3$ ve $vw = 12$ olsun. Şimdi, 2 ve 3 ün asal müşterek çarpanı yoktur. 2 de 12 nin bir bölenidir, böylece Teorem 4.2 nin ipotezleri gerçekleşir. 2 nin $w = 12/v = 4$ ün bir böleni olduğuna dair çıkan sonuç câridir.

(2) $u = 4, v = 5, v^3 w = 500$ olsun. 4 ve 5 sayılarının asal müşterek çarpanı yoktur, ve 4 500 ü böler. Daha genel ifadenin sonucu, yani 4 ün $w = 500/125 = 4$ ü böldüğü, gene câridir.

İSPAT. Bu ispatın terkibine giren esas madde Aritmetiğin Temel Teoremi olup kitabın sonunda B Ekinde ispatlanmış ve bize u, v ve w nin ancak tek bir tarzda asal çarpanlara ayrılabileceğini temin eder. $u vw$ yi böldüğünden, u nun bütün asal çarpanları vw içinde bulunur; bundan başka, eğer her hangi bir p asal sayısı u da α mertebesinde bulunursa, o zaman en az aynı mertebeden vw de bulunur, yani $\beta \geq \alpha$ olmak üzere vw de β mertebesinde bulunur. Şimdi mademki u ve v nin müşterek asal çarpanı yoktur, bundan w nin çarpanlara ayrılmasında bütün asal çarpanların en az aynı mertebeden u da bulunduğu sonucu çıkar. Bu sebepten $u w$ nin bir bölenidir.

Teoremdaki son ifade benzer bir tarzda münakaşa edilebilir. u ve v nin müşterek asal çarpanı bulunmayış ipotezi bize u ve v^n nin müşterek asal çarpanı bulunmadığını temin eder. u nun $v^n w$ nin bir böleni olmasından bir kere daha v^n in hiç bir surette hissesi olmadığı ve böylece $u w$ nin bir böleni olması icap ettiği sonucu çıkar.

Aşağıdaki önermeyi ifade ve ispat için şimdi kâfi materyele sahibiz.

TEOREM 4.3 *Katsayıları tamsayı olan her hangi bir*

$$(1) \quad c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots \\ + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

polinom denklemi göz önüne alalım. Eğer bu denklemin bir rasyonel a/b kökü varsa, o zaman a c_0 'ın bir böleni ve b c_n 'in bir bölenidir. Burada a/b en basit şekline irca edilmiş kabul edilmektedir.

İspatını sunmadan evvel bu ifadeyi bir misâl vererek göstereceğiz.

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Teoreme göre, eğer en basitleştirilmiş a/b şekli bir kök ise, o zaman a -3 'ün bir böleni ve b 2 'nin bir bölenidir. Bu sebepten a 'nın mümkün değerleri $+1, -1, +3, -3$ ve b ninki ise $+1, -1, +2, -2$ dir. Bu imkânları terkip ederek bütün mümkün kökleri ihtiva eden aşağıdaki cümleyi buluruz:

$$\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2}, \\ \frac{+3}{+1}, \frac{+3}{-1}, \frac{+3}{+2}, \frac{+3}{-2}, \frac{-3}{+1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{+2}, \frac{-3}{-2}.$$

Bu liste ancak sekiz farklı sayı ihtiva eder, yani $1, -1, 1/2, -1/2, 3, -3, 3/2, -3/2$ leri ihtiva eder. Bunlardan ancak $1, 1/2$ ve 3 sayıları yerine koyarak okurun gerçekleyebileceği gibi, denklemin hakiki kökleridir.

İSPAT. a/b (1) denkleminin bir kökü olsun. Bu, x yerine a/b konulursa

$$c_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

in doğru olacağı anlamına gelir. $n=3$ özel hal için ispatı vermekle başlayalım, çünkü okurun takip edebilmesi daha kolay olur. Ondan sonra daha genel hal için benzer bir ispat vereceğiz.

$n=3$ halinde (2) denklemi sadece

$$c_3 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

dir. b^3 ile çarparak

$$c_3 a^3 + c_2 a^2 b + c_1 a b^2 + c_0 b^3 = 0$$

elde ederiz. Evvelâ (3) denklemini

$$c_3 a^3 = -c_2 a^2 b - c_1 a b^2 - c_0 b^3$$

veya

$$c_3 a^3 = b (-c_2 a^2 - c_1 a b - c_0 b^2)$$

şeklinde yazarız. Bu b nin $c_3 a^3$ ün bir böleni olduğunu gösterir. u , v ve w lerin yerine sırasıyla b , a ve c_3 koyarak bu noktaya Teorem 4.2 yi tatbik ederiz. u ve v nin müşterek asal çarpanı olmaması hakkındaki Teorem 4.2 nin hipotezi gerçekleşir, zira a ve b nin müşterek asal çarpanı bulunmamak üzere a/b en basitleştirilmiş haldedir. Bu sebepten Teorem 4.2 den dolayı b nin c_3 ün bir böleni olduğu sonucuna varılır. Teorem 4.3 deki arzu edilen sonucun bir parçasıdır, zira bu halde c_n c_3 olmak üzere, $n=3$ dür.

Bundan sonra (3) denklemini

$$c_0 b^3 = -c_1 a b^2 - c_2 a^2 b - c_3 a^3$$

veya

$$c_0 b^3 = a (-c_1 b^2 - c_2 a b - c_3 a^2)$$

şeklinde yazarız. Bu a nın $c_0 b^3$ ün bir böleni olduğunu gösterir. Daha öncekine denk zımnî bir muhakeme ile, yani tekrar Teorem 4.2 yi tatbik ile, a nın c_0 in bir böleni olduğu neticesine varırız. Böylece $n=3$ hali için ispat tamamdır.

Teoremi her hangi bir n için ispat etmek için (2) denklemine döner ve

$$(4) \quad c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \dots \\ + c_2 a^2 b^{n-2} + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n = 0$$

elde etmek için bu denklemi b^n ile çarparız. (4) gene

$$c_n a^n = -c_{n-1} a^{n-1} b - \dots \\ - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a b^{n-1} - c_0 b^n$$

veya

$$c_n a^n = (-c_{n-1} a^{n-1} - \dots \\ - c_2 a^2 b^{n-3} - c_1 a b^{n-2} - c_0 b^{n-1})$$

olarak yazılabilir. Bu b nin $c_n a^n$ in bir böleni olduğunu gösterir. u , v ve w lerin yerine sırasile b , a ve c_n koyarak Teorem 4.2 yi tatbik eder ve b nin c_n in bir böleni olduğu sonucuna varırız.

Bundan sonra (4) denklemini

$$c_0 b^n = a (-c_n a^{n-1} - \dots - c_2 a b^{n-2} - c_1 b^{n-1})$$

olarak tekrar yazarız. Bu a nın $c_0 b^n$ in bir böleni olduğunu gösterir. u , v ve w lerin yerine sırasile a , b , c_0 koyarak tek-

rar Teorem 4.2 yi tatbik ederek, a nın c_0 in bir böleni olduğu sonucuna varırız. Bu Teorem 4.3 ün ispatını tamamlar.

(4) denklemindeki bir simetrisinin mevcut olmasına, denklemde b c_n e nazaran ne durumda ise a c_0 ye nazaran tamamen aynı durumda bulunduğuna, dikkat ederek son paragrafın muhakemesinden sarfınazar edebilirdik.

Daha sonra, $c_n = 1$ olduğu zaman, durumun ne olacağını tetkik ediyoruz.

KOROLER 1 (Teoremin sonucu). *Katsayıları tamsayı olan*

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

şeklinde bir denklemi göz önüne alalım. Eğer böyle bir denklemin rasyonel bir kökü var ise bu bir tamsayıdır; bundan başka bu tamsayı kök c_0 in bir bölenidir.

İSPAT. Her hangi bir a/b rasyonel kökünü göz önüne alalım. b nin bir pozitif tamsayı olduğunu kabul edebiliriz, zira b negatif olsaydı eksi işaretini a ya aktarabilirdik. Teorem 4.3 gereğince b c_n in bir böleni olmalıdır; yani b 1 in bir böleni olmalıdır. Fakat $+1$ ile -1 1 in yegâne bölenleridir, ve böylece b için her hangi negatif bir değer bertaraf edildiğinden $b = +1$ olmalıdır. Bundan ötürü her hangi rasyonel bir kök $a/1$ şeklinde olur ve böylece a bir tamsayıdır. Teorem 4.3 ün yardımı ile a nın c_0 nin bir böleni olduğunu biliyoruz ve böylece korollerin ispatı tamam olur.

MİSAL. $\sqrt{7}$ nin irrasyonel olduğunu ispat ediniz.

ÇÖZÜM. $\sqrt{7}$ $x^2 - 7 = 0$ in bir köküdür. Burada, notasyonumuza uygun olarak $c_2 = 1$ ve $c_0 = -7$ dir.

Şimdi yürüyebilmek için iki yol vardır. Bir yol Koroler 1 i kullanarak: Eğer $x^2 - 7 = 0$ in rasyonel bir a/b kökü varsa, o zaman bu kök bir tamsayı olacaktır, demektir. $\sqrt{7}$ nin bir tamsayı olmadığını ve bundan dolayı $x^2 - 7 = 0$ in rasyonel bir kökü olmadığını gösterebiliriz. Bundan ötürü irrasyonel bir kök olmalıdır. $\sqrt{7}$ nin bir tamsayı olmadığı aşikârdır, zira müteakip 2 ve 3 tamsayıları arasında bulunur; bu, sıra ile, aşağıdaki eşitsizliklerden çıkar

$$\begin{aligned} 4 &< 7 < 9, \\ \sqrt{4} &< \sqrt{7} < \sqrt{9}, \\ 2 &< \sqrt{7} < 3. \end{aligned}$$

Diğer bir yol da tam şekli ile Koroler 1 in kullanılmasıdır; buna göre $x^2 - 7 = 0$ in her hangi rasyonel bir kökü -7 nin tam bir böleni olan bir tamsayıdır. -7 nin yegâne bölenleri 1, -1 , 7 ve -7 dir. Fakat bunlardan hiç biri, basit bir sağlama ile görülebileceği üzere, kök değildir;

$$\begin{aligned} 1^2 - 7 &= 0, & (-1)^2 - 7 &= 0, & 7^2 - 7 &= 0, \\ (-7)^2 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinin hepsi yanlıştır. Bundan dolayı $x^2 - 7 = 0$ in hiç tamsayı kökü, dolayısıyla hiç rasyonel kökü yoktur, ve $\sqrt{7}$ irrasyonel bir sayıdır.

MİSAL. $\sqrt[3]{5}$ in irrasyonel olduğunu ispat edin.

ÇÖZÜM. $\sqrt[3]{5}$ $x^3 - 5 = 0$ in bir köküdür. Koroler 1 e göre bu denklemin rasyonel bir kökü olsaydı, 5 in bir böleni olan bir tamsayı olurdu. 5 in bölenleri $+1$, -1 , $+5$ ve -5 dir. Fakat bunlardan hiç biri kök değildir, zira

$$1^3 - 5 = 0, \quad (-1)^3 - 5 = 0, \quad 5^3 - 5 = 0, \\ (-5)^3 - 5 = 0$$

denklemlerinin hepsi yanlıştır. Bundan dolayı $x^3 - 5 = 0$ in rasyonel kökleri yoktur, ve böylece $\sqrt[3]{5}$ in irrasyonel olduğu ispatlanır.

Bu iki misal aşağıdaki daha genel sonucun özel halleridir:

KOROLER 2. *a ve n pozitif tamsayılar olan $\sqrt[n]{a}$ şeklindeki bir sayı ya irrasyonel veya bir tamsayıdır; sonuncu halde a bir tamsayının n inci kuvvetidir.*

İSPAT. Bu Koroler 1 den çıkar, zira $\sqrt[n]{a} x^n - a = 0$ in bir köküdür, ve bu denklem rasyonel bir köke sahip ise, bu kök bir tamsayı olmalıdır. Bundan başka, eğer $\sqrt[n]{a}$ bir k tamsayısı ise, o zaman $a = k^n$ dir.

Problem serisi 13

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ ve $\sqrt[3]{91}$ lerin irrasyonel olduklarını ispat edin.
2. $(4\sqrt{13} - 3)/6$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
3. $\sqrt{15}$ in irrasyonel olduğunu ispat edin.
4. $4/(16 - 3\sqrt{15})$ in irrasyonel olduğunu ispat edin.
5. $\sqrt[3]{6}$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
6. $(1/3)(2\sqrt[3]{6} + 7)$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
7. « a/b en basit şekline irca edildiği kabul olunmuş» kelimeleri kaldırılırsa Teorem 4.3 ün yanlış bir ifadeye varacağını ispat edin.

4.4 Daha başka misâller

Bölüm 3 de oldukça geniş bir sayılar sınıfına bir metodun tatbiki ile $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğu ispatlanmıştı. Mamafih, daha geniş bir sayılar sınıfı bile Koroler 1 yardımı ile tetkik edilebilir.

Yeniden $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ü mütalâa edelim. Eğer $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ yazarsak,

$$x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

elde ederiz. Her iki tarafın karesini alırsak

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3$$

elde ederiz, ve terimleri yeniden düzenlersek

$$x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}$$

elde ederiz. Bunun tekrar karesini alırsak

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2$$

veya

$$(5) \quad x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

elde ederiz. (5) denkleminin kurulduğu tarzdan dolayı $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün bir kök olduğunu biliyoruz. Bundan sonra (5) denkleminin rasyonel kökleri olmadığını göstermek için Koroler 1 i tatbik edeceğiz ve bundan $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğu sonucuna varacağız.

Koroler 1 in (5) denklemine tatbiki bu denklemin her hangi rasyonel kökleri mevcut olduğu takdirde bunların 1 i bölen tamsayılar olmasının icap ettiğini bize söyleyecektir. Fakat 1 in yegâne bölenleri $+1$ ve -1 dir, ve bunlardan hiç biri $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ ın bir kökü değildir.

Böylece vardığımız sonuç (5) denkleminin rasyonel köklerinin mevcut olmadığı ve $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğudur.

Aynı sonuca varmak için diğer bir yol şudur:

$+1$ ve -1 (5) denkleminin kökleri olup olmadığını denemektense, şu aşağıdaki muhakemeyi yapabiliriz. Eğer $+1$ veya -1 , veya her ikisi birden (5) denkleminin kökleri olsalar bile, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ kökünün $+1$ ve -1 den farklı olduğuna dikkat edebiliriz; meselâ $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ ün her ikisi 1 e nazaran daha büyük oldukları, dolayısıyla toplamları $+1$ veya -1 e eşit olabilmesi için oldukça büyük oldukları muhakemesini yapabiliriz. Bu sebepten, $+1$ veya -1 in hakiki kökler olup olmamasına bakılmayarak, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün (5) denkleminin mümkün kökleri arasında bulunmayacağı görülür. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğu neticesi çıkar.

MİSAL. $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğunu ispat edin.

ÇÖZÜM. $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ yazarak,

$$x + \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$$

olduğunu görürüz. Şimdi, her iki tarafın kübünü alarak

$$x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3} = 2$$

elde ederiz. Terimler yeniden düzenlenirse

$$x^3 + 9x - 2 = -3\sqrt{3}(x^2 + 1)$$

olur. Kare alarak

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 36x + 4 = 27(x^4 + 2x^2 + 1)$$

lerinden hiç birine eşit değildir. Mademki mümkün bütün rasyonel köklerden farklıdır, bundan $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ kökünün irrasyonel olduğu sonucu çıkar.

Problem serisi 14

1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
2. $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
3. $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğunu ispat edin.

4.5 Bir özet

Bu bölümde «cebrîk irrasyoneller» denilen irrasyonellerle meşgul olduk. Sonsuz çok irrasyonel sayının mevcut olduğunu gördük ve bazılarını, verilen irrasyonel bir sayıdan itibaren kurma yollarını tetkik ettik.

Verilen bir k sayısının irrasyonel olup olmadığını denetleyen aşağıdaki metodu da bulduk:

Evvelâ $x = k$ değeri için gerçekleşen

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

bir polinom denklem ararız. (Böyle bir denklemi bulamazsak, bu metodu tatbik edemeyiz.)

Daha sonra Teorem 4.3 ü veya $c_n = 1$ ise Koroller 1 i tatbik ederiz. Denklemin rasyonel hiç bir köke sahip olmadığı ekseriya aşîkârdır. O zaman k aşîkâr olarak bir irrasyonel köktür. Bazan bir bakışta k nin denklemin mümkün bütün rasyonel kök namzetlerinden farklı oldu-

ğunu görür ve böylece k nın irrasyonelliğini çıkartabiliriz; veya, doğrudan doğruya yerine koyarak, denklemin hakikî kökleri olan bütün namzetlerden rasyonel sayıları seçeriz. Bundan sonra k nın irrasyonel olduğunu ispat için, k nın bütün rasyonel köklerden farklı olduğunu göstermemiz lâzımdır.

BÖLÜM 5

TRİGONOMETRİK VE LOGARİTMİK SAYILAR

Okur $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ gibi trigonometrik fonksiyonlara şüphesiz âşinadır *, ve bu fonksiyonların her birine, her θ açısı için, reel bir sayının tekabül ettiğini bilir. Her pozitif reel x sayısına bir reel sayı tekabül ettiren logaritmik $\log x$ fonksiyonuna da tesadüf etmiş olması muhtemeldir. Trigonometrik fonksiyonların değerleri, θ açısının bazı özel değerleri için hariç, irrasyoneldir **; benzer şekilde hemen hemen bütün x reel sayıları için $\log x$ değerleri irrasyoneldir.

Bu iddiaları en genel şekilleri ile burada ispat edemeyeceğiz, dikkatimizi ancak bazı basit misallere inhisar ettireceğiz.

5.1 Trigonometrik fonksiyonların irrasyonel değerleri

Evvelki bölümdeki metodları ve bazı temel trigonometrik özdeşlikleri kullanarak, bir çok θ açısına tekabül

*) Eğer okur trigonometri veya logaritmaların tetkikini yapmamış ise, o zaman bu konulara bir giriş olmak üzere A.L. Nelson ve K.W. Folley'in 1956 da Harper'de basılan «Plane Trigonometry» sine müracaat edebilir.

**) Bir cetvelde ondalıkla gösterilmiş iseler, sonsuz ondalık açılımları olan irrasyonel sayılar muayyen noktalarda kesilmişlerdir. Diğer bir deyimle, böyle bir cetvel sayılara yaklaşık değerler verir.

eden trigonometrik fonksiyon değerlerinin irrasyonel olduklarını göstereceğiz.

Bu gaye için evvelâ şu temel trigonometrik formülleri hatırlayalım:

$$(1) \quad \cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

$$(2) \quad \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

A ve B yerine tek bir değer, meselâ θ yı, koyarsak

$$(3) \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$$

$$(4) \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

elde ederiz. Bundan sonra (1) de A yerine 2θ ve B yerine θ koyarsak

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

elde ederiz. (3) ve (4) ü ve meşhur $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta, \\ &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta, \\ &= \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

veya

$$(5) \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

elde ederiz.

Şimdi $\cos 20^\circ$ sayısını göz önüne alalım. (5) de $\theta = 20^\circ$ koyarak

$$\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$$

elde ederiz. Eğer $\cos 20^\circ$ yerine x yazar ve $\cos 60^\circ = 1/2$ keyfiyetini kullanırsak

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

veya

$$(6) \quad 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

elde ederiz. (6) denkleminin kurulma tarzından dolayı $\cos 20^\circ$ nin bir kök olduğunu biliriz. (6) denkleminin Teorem 4.3 ü tatbik ettiğimizde bu denklemin yegâne mümkün rasyonel köklerinin ± 1 , $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$ olduklarını görürüz. Fakat, (6) denkleminde yerine konulduğunda görüleceği üzere, bu sekiz imkândan hiç biri hakiki bir kök değildir. Bu sebepten (6) denkleminin hiç rasyonel kökü olmadığı ve böylece $\cos 20^\circ$ nin irrasyonel bir sayı olduğu sonucuna varırız.

± 1 , $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$ mümkün rasyonel köklerinin (6) denkleminin hakiki kökleri olup olmadığını denemeden de bu sonuca varılabilirdi. $\cos 20^\circ$ nin bütün bu sekiz değerden farklı olduğunu göstermek kâfidir. Bunun için bir trigonometrik cetvele, verilen $\cos 20^\circ$ nin değeri için, bakmak kâfidir. (Tabii, böyle bir cetvel ancak yaklaşık değer verir). Veya, cosinus bu açılar için azalan bir fonksiyon olduğundan, $\cos 20^\circ$ nin $\cos 0^\circ$ ile $\cos 30^\circ$ arasında bulunduğuna dikkat ederiz. Böylece $\cos 20^\circ$ nin 1 ve $\sqrt{3}/2$ arasında bulunduğunu görürüz; yani 1 ve 0,8 arasındadır. Bundan $\cos 20^\circ$ nin (6) denkleminin her hangi mümkün rasyonel köklerine eşit olamayacağı, ve bundan dolayı $\cos 20^\circ$ nin irrasyonel bir sayı olduğu sonucu çıkar.

MİSAL. $\sin 10^\circ$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.

BİRİNCİ ÇÖZÜM. Bu problemi çözmek için bir yol 30 için trigonometrik özdeşlikten, yani

$$(7) \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

den başlamaktır; (5) (1) den nasıl elde edildiyse bu da (2) den aynı yolda elde edilmiştir. (7) de θ yerine 10° koyarak ve $\sin 30^\circ = 1/2$ keyfiyetini kullanarak

$$\frac{1}{2} = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ$$

elde ederiz.

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3, \quad 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

elde etmek için $\sin 10^\circ$ yerine x yazın. (6) denkleminde olduğu gibi $8x^3 - 6x + 1 = 0$ denkleminin rasyonel köklerinin olmadığını (Teorem 4.3 vasıtasile) göstermek güç değildir.

İKİNCİ ÇÖZÜM. (3) denkleminin iki şekli vardır

$$(8) \quad \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \quad \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta;$$

her ikisi, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ özdeşliğini kullanarak, (3) den çıkarılabilir. Eğer, (8) in ikinci şıkında θ yerine 10° koyarsak,

$$(9) \quad \cos 20^\circ = 1 - 2 \sin^2 10^\circ$$

elde ederiz. Şimdi $\sin 10^\circ$ nin rasyonel olduğunu farzedelim. Bundan dolayı $\sin^2 10^\circ$ ile $1 - 2 \sin^2 10^\circ$ nin her ikisi de rasyonel olacaktır. Fakat, henüz ispatladığımız gibi, $\cos 20^\circ$ irrasyoneldir. Bundan dolayı bir çelişmezliğe düşeriz, öyleyse 10° irrasyoneldir.

Problem serisi 15

Bu problemleri çözerken, gerek metinden ve gerek problemlerden, daha evvel bulunan sonuçları (nerede faydalı ise) kullanınız.

1. Aşağıdaki sayıların irrasyonel olduğunu ispatlayın:
 (a) $\cos 40^\circ$ (b) $\sin 20^\circ$ (c) $\cos 10^\circ$ (d) $\sin 50^\circ$
2. (7) özdeşliğini kurun.
3. (a) $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$ özdeşliğini kurun.
 (b) $\cos 12^\circ$ nin irrasyonel olduğunu ispat edin.
4. Aşağıdakilerin hangileri rasyoneldir?
 (a) $\sin 0^\circ$ (d) $\sin 30^\circ$ (g) $\sin 45^\circ$ (j) $\sin 60^\circ$
 (b) $\cos 0^\circ$ (e) $\cos 30^\circ$ (h) $\cos 45^\circ$ (k) $\cos 60^\circ$
 (c) $\operatorname{tg} 0^\circ$ (f) $\operatorname{tg} 30^\circ$ (i) $\operatorname{tg} 45^\circ$ (l) $\operatorname{tg} 60^\circ$

5.2 Zincirleme bir usul

5.1 kısmında kullanılan metodlar derecelerin, dakikaların ve saniyelerin tam sayıları olan her hangi bir açının trigonometrik fonksiyonlarının irrasyonelliğini, bariz bir kaç istisna hariç, ispat için genişletilebilir. Böylece $14^\circ 41' 33''$ gibi açılardan bahsederiz. 0° , 30° , 45° , 60° li açılar. ve bu dört açıya 90° nin tamsayı katları ilâve ve çıkarmaları ile elde edilen her sayı, için istisna yapılmalıdır. Bu, meselâ 30° nin bütün trigonometrik fonksiyonlarının rasyonel olduğunu söylemek değildir, fakat en az 30° nin trigonometrik bir fonksiyonu rasyoneldir.

Bu iddialar en geniş genellikte kurulmıyacaktır, zira $\cos 14^\circ 41' 33''$ gibi böyle sayılardan ileri gelen denklemler,

bahis konusu yapmamız için, oldukça karışıktır. Bununla beraber basit tek bir prensip bizi oldukça uzaklara götürür, o da şudur:

θ , $\cos 2\theta$ irrasyonel olacak şekilde her hangi bir açı ise, o zaman $\cos \theta$, $\sin \theta$ ve $\operatorname{tg} \theta$ da irrasyoneldirler.

Bunu ispat için evvelâ (8) denklemini kullanalım. $\cos \theta$ nin rasyonel olduğunu kabul edelim. O zaman $\cos^2 \theta$ ile $2 \cos^2 \theta - 1$ de rasyonel olacaktır. Fakat $2 \cos^2 \theta - 1$ irrasyonel olan $\cos 2\theta$ dir.

Benzer şekilde $\sin \theta$ nin rasyonel olduğunu kabul edelim. O zaman $\sin^2 \theta$ rasyonel olacak ve keza $1 - 2 \sin^2 \theta$ de rasyonel olacaktır. Fakat bu gene $\cos 2\theta$ dir.

Nihayet $\operatorname{tg} \theta$ nin rasyonel olduğunu kabul edelim. O zaman $\operatorname{tg}^2 \theta$ rasyonel olacak ve bunun için $\cos^2 \theta$ nin rasyonel olduğunu görmek için meşhur

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

trigonometrik özdeşliği kullanırız. Fakat gene (8) denkleminde $\cos 2\theta$ nin rasyonel olacağı çıkar, ve böylece bir çelişmezliğe düşeriz. Bu sebepten $\operatorname{tg} \theta$ irrasyonel olmalıdır.

Henüz şimdi ispatladığımız prensibin tekrar tekrar tatbikile sonsuz çok trigonometrik sayının irrasyonelliğini kurabiliriz. Meselâ $\cos 20^\circ$ nin irrasyonelliğinden

$\cos 10^\circ$	$\sin 10^\circ$	$\operatorname{tg} 10^\circ$
$\cos 5^\circ$	$\sin 5^\circ$	$\operatorname{tg} 5^\circ$
$\cos 2^\circ 30'$	$\sin 2^\circ 30'$	$\operatorname{tg} 2^\circ 30'$
$\cos 1^\circ 15'$	$\sin 1^\circ 15'$	$\operatorname{tg} 1^\circ 15'$
$\cos 37' 30''$	$\sin 37' 30''$	$\operatorname{tg} 37' 30''$

.
.
.
.

lerin irrasyonel oldukları sonucunu çıkartırız.

Problem serisi 16

1. Aşağıdaki sayıların irrasyonel olduklarını ispatlayın

(a)	$\cos 15^\circ$	$\sin 15^\circ$	$\operatorname{tg} 15^\circ$
(b)	$\cos 7^\circ 30'$	$\sin 7^\circ 30'$	$\operatorname{tg} 7^\circ 30'$
(c)	$\cos 22^\circ 30'$	$\sin 22^\circ 30'$	$\operatorname{tg} 22^\circ 30'$
(d)	$\cos 35^\circ$	$\sin 35^\circ$	$\operatorname{tg} 35^\circ$
(e)	$\cos 25^\circ$	$\sin 25^\circ$	$\operatorname{tg} 25^\circ$
2. $14^\circ 41' 13''$ nin bazı rasyonel sayı ile 90° nin çarpımına, yani $14^\circ 41' 13''$ nin 90° nin rasyonel bir katı olduğunu ispatlayın.
3. (a) $\cos \theta$ rasyonel olursa bu takdirde $\cos 3\theta$ nin de rasyonel olacağını ispat ediniz.
 (b) Bu, $\cos 3\theta$ irrasyonel olduğunu ispat etmek $\cos \theta$ nin irrasyonel olduğunu ispat etmek midir?
4. $\sin 3\theta$ irrasyonel olursa $\sin \theta$ nin da irrasyonel olduğunu ispat edin.

5.3 Âdi logaritmaların irrasyonel değerleri

Bu kitapta tetkiki yapılan bütün logaritmalar 10 tabanına göre alınmıştır, böylece bu durumu her sefer belirtmeğe lüzum yoktur. Verilen pozitif bir y sayısının 10 tabanına göre logaritması $10^k = y$ olacak şekilde bir k sayısı olarak tarif edildiğini hatırlayalım. Böylece her hangi bir $y > 0$ için

$$\log y = k$$

ve

$$10^k = y$$

eşdeğer ifadelerdir. Bütün ispatlar, her hangi bir tamsa-

yının yalnız bir şekilde asal sayılar çarpanlarına ayrılacağına dair olan, B Ekinde ispat edilmiş bulunan Aritmetiğin Temel Teoremine dayanır.

MİSAL 1. $\log 2$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.

ÇÖZÜM. a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere, bilâkis $\log 2 = a/b$ olduğunu kabul edelim. $\log 2$ pozitif olduğundan a ve b yi pozitif almak akla yakındır. Bu denklem

$$2 = 10^{a/b}$$

anlamına gelir. Her iki tarafın b kuvvetini alırsak

$$2^b = 10^a = 2^a 5^a$$

elde ederiz. Bu, pozitif tamsayılar arasında bir eşitliktir, şu halde Aritmetiğin Temel Teoremi tatbik edilebilir. Hakkaten Temel Teorem bu denklemin câri olamayacağını zira 2^b nin bir tamsayı olup, b ne değerde olursa olsun, 5 ile bölünemeyeceğini gösterir, halbuki $2^a 5^a$ a pozitif bir sayı olduğca 5 ile bölünebilir. Bundan dolayı $\log 2$ irrasyoneldir.

MİSAL 2. $\log 21$ in irrasyonel olduğunu ispatlayın.

ÇÖZÜM. Bilâkis

$$\log 21 = \frac{a}{b} \quad \text{veya} \quad 21 = 10^{a/b}$$

olmak üzere a ve b tamsayılarının mevcut olduğunu kabul edelim. Gene her iki tarafın b kuvvetini alarak

$$21^b = 10^a$$

elde ederiz. Fakat bu eşitlik ifadesi, 10^a nın asal çarpanları 2 ve 5, 21^b nin asal çarpanları 3 ve 7 olduğundan, câri olamaz.

MİSAL 3. c ve d negatif olmayan iki farklı tamsayı olsunlar. $\log (2^c 5^d)$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.

ÇÖZÜM. Gene endirekt bir muhakeme kullanıyoruz. c ve d nin tâbi tutuldukları şartlardan dolayı, $\log (2^c 5^d)$ pozitif olmak üzere, $2^c 5^d$ nin 1 i geçtiğini biliyoruz. a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\log (2^c 5^d) = \frac{a}{b}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$2^c 5^d = 10^{a/b}$$

olduğunu biliriz. Her iki tarafın b kuvvetini alırsak

$$2^{bc} 5^{bd} = 10^a = 2^a 5^a$$

elde ederiz. Aritmetiğin Temel Teoremine göre bu denklem $bc = a$ ve $bd = a$, yani $bc = bd$, olduğu takdirde câridir. Fakat mademki c ve d farklı tamsayılardır, şu halde bc ve bd de farklıdır. Şu halde $\log (2^c 5^d)$ irrasyoneldir.

Problem serisi 17

1. $\log 3/2$ nin irrasyonel olduğunu ispatlayın.
2. $\log 15$ in irrasyonel olduğunu ispatlayın.
3. $\log 5 + \log 3$ ün irrasyonel olduğunu ispatlayın.
4. 1, 2, 3, ..., 1000 tamsayılarının birbirini örtmeyen üç farklı sınıfa ayrılabilceğini ispatlayın.
 A sınıfı: 1, 10, 100, 1000 tamsayıları,
 B sınıfı: c ve d eşit olmamak üzere $2^c 5^d$ şeklindeki tamsayılar,
 C sınıfı: Hiç olmazsa 5 e eşit olmayan tek bir p asal sayısına bölünebilen tamsayılar;

n eğer ve ancak eğer A sınıfında olduğu takdirde $\log n$ rasyoneldir.

5.4 Transandant sayılar

Reel sayıları rasyonel ve irrasyonel olarak sınıflandırılmasından başka cebrik ve transandant diye diğer bir ayrılması daha vardır. Eğer reel bir sayı

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

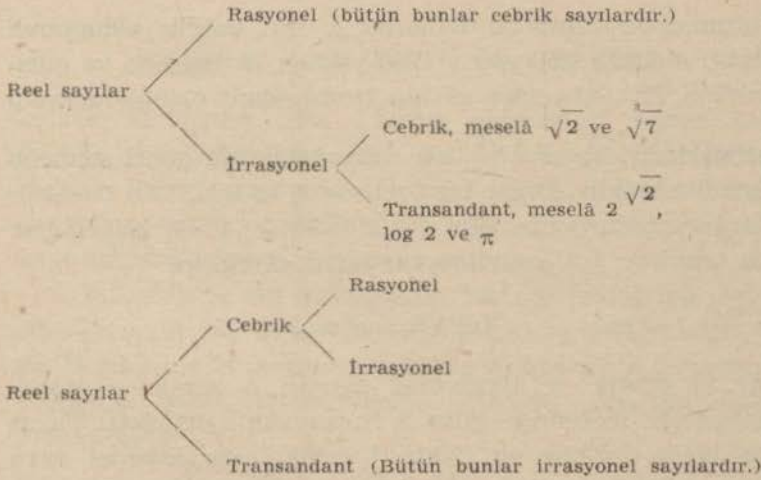
şeklinde katsayıları tamsayı olan bazı denklemi gerçeklerse, bunun bir *cebrik sayı* olduğunu söyleriz. Eğer reel bir sayı böyle hiç bir denklemi gerçeklemezse, ona bir *transandant sayı*dır denir. (Karmaşık sayılar aynı şekilde cebrik ve transandant sayılara ayrılır, fakat biz konumuzu reel sayılara inhisar ettireceğiz.)

Her rasyonel sayının cebrik bir sayı olduğunu görmek kolaydır. Meselâ $5/7$ $7x - 5 = 0$ denklemini gerçekler ve bu denklem zikredilen tiptendir. Daha genel olarak, her hangi a/b rasyonel sayısı $bx - a = 0$ denklemini sağlar ve dolayısıyla cebrik bir sayıdır.

Her rasyonel sayı mademki cebriktir, bundan her cebrik olmayan sayıların rasyonel olmadıkları sonucu çıkar (sahife 34 deki «Eğer A ise o zaman B (dir)» i ifade etmenin 12 tarzı için [12] ye bakın), veya daha basmakalıp ifadeyle, *her transandant sayı irrasyoneldir*. Bunu, Şekil 15 deki gibi, şematik olarak gösterebiliriz.

Şekilde cebrik sayılara misal olarak $\sqrt{2}$ ve $\sqrt[3]{7}$ verilmiştir. Bunlar cebriktir, zira sırasile

$$x^2 - 2 = 0 \quad \text{ve} \quad x^3 - 7 = 0$$



Şekil: 15

denklemlerini sağlarlar. Diğer taraftan $\log 2$ ve π sayıları transandant sayılar olarak verilmiştir (π sayısı 3,14159... değeri ile her hangi bir dairede çevre uzunluğunun çapa olan oranıdır.) Bunların transandant olduklarını burada ispatlayamayız, zira böyle ispatlar için kullanmakta olduklarımızdan daha derin metodlara ihtiyacımız vardır. π sayısının transandant olduğu 1882 den beri biliniyordu,

fakat $2^{\sqrt{2}}$ ve $\log 2$ nin transandantlıkları daha yeni sonuçlar olup ancak 1934 yılından beri bilinmektedirler. 1900 yılında büyük matematikçi David Hilbert tarafından askıda kalan çözülmemiş matematik soruları teşkil eden

23 problem ihtiva eden meşhur listesi verildiğinde, $2^{\sqrt{2}}$ özel bir misal olarak kullanılmıştır. Özellikle, Hilbertin yedinci problemi, α ve β verilen cebrik sayılar olmak üzere, α^β nin cebrik veya transandant olup olmadıklarını tayindir. ($\alpha = 0$, $\beta = 1$ ve β rasyonel olma halleri hariç

tutulmuştur, zira bu hallerde α^β nin cebrik olduğunun ispatı oldukça kolaydır.) 1934 yılında A. Gelfond ve müstakilen Th. Schneider α^β nin transandant olduğunu kesip

atmışlardır. Tabii $2^{\sqrt{2}}$ nin transandantlığı genel sonucun özel bir halidir. Diğer bir özel sonuç ta $\log 2$ nin transandant oluşudur; zira eğer $\log 2$ β ve 10^α ile gösterilirse bu takdirde âdi logaritmanın tarifi gereğince

$$10^{\log 2} = \alpha^\beta = 2$$

dir. β cebrik ve irrasyonel olsaydı o zaman Gelfond-Schneider teoremine göre 2 transandant olacaktı. Fakat hal böyle değildir, şu halde $\beta = \log 2$ ya rasyonel veya transandanttır. Rasyonel olmadığını gördük. Bundan dolayı $\log 2$ transandanttır.

Daha genel olarak, r in rasyonel ve $\log r$ in irrasyonel olmasını şart koşarak, Gelfond-Schneider teoremi $\log r$ in transandantlığını tesis eder. 5.3 kısmında henüz ispatladığımızdan dolayı aşağıdaki

$$\dots, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1},$$

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \dots$$

ler hariç, r her hangi pozitif rasyonel bir sayı olduğunda, bu $\log r$ in transandant olduğunu söyler. Bu kitapta zikredilen bütün logaritmaların âdi logaritmalar olduğunu yani 10 tabanına göre olduklarını akılda tutmalıdır.

Böylece $n=1$, $n=10$, $n=100$, ve $n=1000$ hariç, 1 ile 1000 arasında n her hangi bir tamsayı olduğunda, $\log n$ sayısı transandanttır. Diğer taraftan bu bölümün evvelki kısmında irrasyonelliği ispat edilen $\cos 20^\circ$ gibi trigonometrik sayılar cebrik sayılardır. Genel sonuç şudur: r her hangi bir rasyonel sayı olsun ve $(90r)^\circ$ 90° nin r ile çarpımını gösteren açı olsun. O halde

$$\sin (90r)^\circ, \quad \cos (90r)^\circ \quad \text{ve} \quad \operatorname{tg} (90r)^\circ$$

cebrîk sayılardır. (Bu ifadeye eklenecek yegâne şart $\operatorname{tg} (90r)^\circ$ hali içindir; burada r rasyonel sayısı bu trigonometrik fonksiyonun reel bir sayı olarak mevcut olduğu değerlere inhisar ettirilmelidir. Meselâ $\operatorname{tg} 90^\circ$ reel bir sayı olmadığından $r=1$ kabul edilmez.)

Yukarıda π nin transandant bir sayı olduğunu söyledik. Bu π nin bir irrasyonel sayı olduğuna delâlet eder, ve hattâ bu kitap konusunun dışında olsa bile π nin irrasyonel olduğunu ispat transandant olduğunu ispattan daha kolaydır.

Problem serisi 18

1. Aşağıdaki sayıların cebrîk olduğunu ispatlayın:

$$(a) \sqrt{3}, \quad (b) \sqrt[3]{5}, \quad (c) \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$(d) \cos 20^\circ, \quad (e) \sin 10^\circ$$

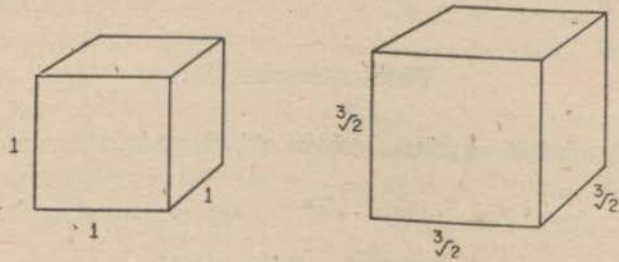
*2. π nin transandant bir sayı olduğunu kabul ederek 2π nin transandant bir sayı olduğunu ispatlayın.

5.5 Üç meşhur çizim problemi

Cebrîk ve transandant sayılar teorisi matematikçilere, ta antikiteden zamanımıza gelen, üç meşhur geometri problemini halletmeği mümkün kılmıştır. Bu üç problem «Kübün iki katına eşit bir kübü bulma», «bir açının üçe bölünmesi» ve «daireye eşit bir kare çizimi» gibi öklid geometrisinin cetvel ve pergel metodlarıyla aşağıdaki çizimlerin yapılmasından ibarettir.

(1) «Kübün iki katını almak» = «kübün düplikasyonu» verilen bir kübün hacminin iki katına eşit bir kübün çizimi anlamına gelmektedir. Her ne kadar bir küb uzay geometride bir şekil ise de, hakikatte bir düzlem geometri problemidir. Verilen kübün bir kenarını uzunluk birimi olarak alırsak, problem $\sqrt[3]{2}$ uzunluğunda bir doğrunun çiziminden ibarettir, zira bu, verilen kübün iki kat hacminde bir kübün kenar uzunluğu olacaktır (Şekil: 16).

(2) «Bir açının üçe bölünmesi» yukarıda verildiği kabul edilen âletleri kullanarak *her hangi bir açının üçe bölünmesini* veren bir metod anlaşılır. Meselâ 45° ve 90°



Şekil: 16

gibi muayyen bazı açılar vardır ki cetvel ve pergelle üçe bölünebilir; fakat genel bir açı yukarıda verildiği kabul edilen âletlerle üç eşit açıya bölünemez.

(3) «Daireye eşit bir karenin çizimi» alan bakımından verilen bir daireye eşit bir karenin çizimi, veya buna eşdeğer olan verilmiş bir kareye eşit bir dairenin çizilmesi anlaşılır.

Şimdi bu üç çizimin imkânsız olduğu bilinir, yani Öklid geometrisi gereğince verildiği kabul edilen cetvel ve pergelle çizilemezler. Bir çok amatör, gayretlerinin beyhude olduğunu bilmeden, bu problemler üzerine çalışmaya devam etmektedirler. Bununla beraber hiç bir matematikçinin

henüz bu çizimleri başarmağa muktedir olmadıklarını bu amatörler bilirler, fakat her halde çizimin imkânsız oluşunun ispat edilmiş olmasından habersizdirler. Arada sırada bir amatör matematikçinin başardığı şey bu problemlerin *yaklaşık* bir çözümü olup hiç bir vakit tam bir çözümü değildir. Burada fark barizdir: Meselâ kübün düplikasyonu probleminde mesele teorik bakımdan mükemmel âletler yardımı ile $\sqrt[3]{2}$ uzunluğunu yaklaşık olarak değil de, tam olarak $\sqrt[3]{2}$ uzunluğunda bir doğruyu verebilecek bir çizim bulmaktır. Meselâ $10(8 - \sqrt{62})$ ile $\sqrt[3]{2}$ sayıları altı ondalık haneye kadar uygun olmalarına rağmen, $10(8 - \sqrt{62})$ uzunluğunda bir doğru parçasının bir çizimi ile problem çözülmüş sayılmaz.

Özel bir anlaşmazlık kaynağı da açının üç bölünme probleminde ortaya çıkar. Eğer cetvel kenarı rakkamla işaretlenmiş ise her hangi bir açıyı üçe bölmek mümkündür. Böylece, genel bir açıyı üçe bölme imkânsızlığı iddiası ancak kabul edilebilen çizim metodlarının pergel ve işaretlenmemiş cetvel yardımı ile olması şartı ile yapılabilir.

Bu üç klâsik problemi çevreleyen büyük karışıklıktan dolayı şimdi çizimlerin imkânsız olduklarının nasıl tesis edilebileceği hakkında kaba bir fikir vereceğiz. Detaylar oldukça teknik olacağından, ispatların tamamını veremeyeceğiz. Bununla beraber konuyu anlaşılır bir hale sokmağı ümit ederiz. Her hangi bir okur bunlarla uğraşmak isterse, açıyı üçe bölme ve kübün düplikasyonu hakkında R. Courant ve H. Robbins'in *What Is Mathematics?* (Yani, *Matematik nedir?*) adlı esere müracaat ederek bu konuların tam bir tetkikini bulabilir. Dairenin bir kareye eşit olması imkânsızlığının ispatı diğer iki ispattan çok daha zordur.

Bu çizimlerin imkânsız olduklarının ispatı nasıl mümkündür? İlk adım, bir birim uzunluk verildiği takdirde cetvel ve pergelle ne cins uzunlukların çizimi yapılabildiği hakkında bazı fikir elde etmektir. Çizimleri yapılabilen uzunluklar arasında rasyonel sayılara tatbik edilen meselâ,

$$(10) \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{1+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \\ \sqrt{1+\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$$

gibi, kare kökler silsilesinin olduğunu ispatsız ifade ederiz. (Geometrik çizimlere âşina biri ifadenin doğruluğunu anlar.)

Bu sayıların hepsi cebriktir. (10) da misal olarak verilen dördü sırasile

$$(11) \quad x^2 - 2 = 0,$$

$$(12) \quad x^4 - 2x^2 - 1 = 0,$$

$$(13) \quad x^8 - 20x^6 + 132x^4 - 320x^2 + 94 = 0,$$

$$(14) \quad x^{16} - 8x^{14} + 8x^{12} + 64x^{10} - 98x^8 \\ - 184x^6 + 200x^4 + 224x^2 - 113 = 0$$

denklemlerinin kökleridir. Bunlardan bir tanesini, meselâ (13) ü seçelim ve tahkikini yapalım.

$$x = \sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

ile başlayalım. Karesini alarak

$$x^2 = 5 - 3\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

elde ederiz. Bir terimin yerini değiştirip yeniden karesini alarak

$$x^2 - 5 = -3\sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 9 + 9\sqrt{2},$$

$$x^4 - 10x^2 + 16 = 9\sqrt{2}$$

elde ederiz. Sonuncu bir defa her iki tarafın karesini almak bizi (13) e götürür.

Şimdi yalnız (10) sayıları (11) den (14) e kadar denklemlerin kökleri olmayıp bu sayılardan hiç biri katsayıları tamsayı daha alçak dereceden bir denklemin bir kökü de değildir. Meselâ $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ sayısını alalım. 4 üncü derecedeki (12) denklemini gerçekleyip katsayıları tamsayı 3, 2 veya 1 inci dereceden hiç bir denklemi gerçeklemez. (Bu iddiayı ispatlamıyacağız.) Her ne zaman cebrik bir sayı katsayıları tamsayı olan n dereceli bir denklemin bir kökü olursa, fakat katsayıları tamsayı olan daha alçak dereceli hiç bir denklemin bir kökü olmazsa, o zaman n ci dereceden cebrik bir sayıdır deriz. Böylece (10) sayıları sırasile 2, 4, 8 ve 16 ncı dereceden cebrik sayılardır. Öklid geometrisinin metodlarile çizilebilen uzunluklar hakkında aşağıdaki temel hakikat akla gelir:

GEOMETRİK ÇİZİMLER HAKKINDA TEOREM.

Birim uzunlukta bir doğru parçası ile başlayarak, cetvel ve pergel metodlarile çizilebilen, her hangi bir uzunluk 1, veya 2, veya 4, veya 8, ... v.s. inci dereceden, yani genel olarak derecesi 2 nin bir kuvveti olan cebrik bir sayıdır.

Eğer okur bu sonucun doğruluğunu kabul ederse, meşhur üç çizimin imkânsızlığını gösterebiliriz *.

*) Bu teoremin, m 2 nin bir kuvveti olmamak üzere, m dereceli cebrik sayıların pergel ve cetvelle çizilemeyeceği; transadant sayıların da böyle çizilemeyeceği ifadesini tazammun ettiğini hatırlayacaktır. (Bakınız sahife 34, [12]).

Kübün düplikasyonu, veya iki katını alma ile başlayalım. Problemi ortaya koyduğumuz zaman gördüğümüz gibi mesele verilen bir birim uzunluktan $\sqrt[3]{2}$ uzunluğunda bir doğrunun çizimine müncer olur. Fakat $\sqrt[3]{2}$ çizilebilir bir uzunlukta mıdır?

$$(15) \quad x^3 - 2 = 0$$

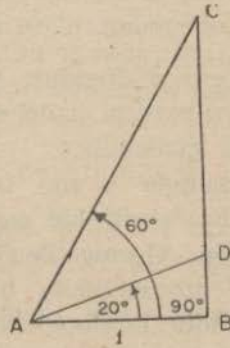
denklemini gerçekler ve bu $\sqrt[3]{2}$ nin 3 üncü derece cebrik sayı olduğunu hatıra getirir. Hakikaten de bu böyledir; bunun ispatını yapmak için yalnız $\sqrt[3]{2}$ nin katsayıları tamsayı ve derecesi 1 veya 2 olan hiç bir denklemi gerçeklemediğini tesbit etmeliyiz. Her ne kadar bu güç değil ise de biraz maharet ister; bu ispatı daha sonraki bölüme tehir edeceğiz.

Mademki $\sqrt[3]{2}$ nin derecesi 3 olan cebrik bir sayıdır, yukarıda ifade edilen Geometrik Çizimler Teoremine göre çizimi yapılamaz. Bu sebepten kübü düplike etmek imkânsızlığına varırız.

Bundan sonra açıyı üçe bölme problemini göz önüne alalım. Bunun imkânsız olduğunu tesbit etmek için, verilen metodla özel bir açının üçe bölünemiyeceğini göstermek kâfidir. Alacağımız açı 60° dir. 60° lik bir açıyı üçe bölme 20° lik bir açının çizimini yapmak demektir. Bu, verilen 1 uzunluğunda bir doğru parçasından, uzunluğu $\cos 20^\circ$ olan bir doğru parçasını çizmeğe müncer olur. Bunu görmek için, Şekil: 17 de görüldüğü üzere, taban açıları 60° ve 90° olan 1 taban uzunluğunda bir üçgeni göz önüne alalım. Böylece tabanı $AB=1$, BAC açısı $= 60^\circ$, ABC açısı $= 90^\circ$ olan bir üçgen olur. BC doğrusu üzerinde, BAD açısı $= 20^\circ$ olacak tarzda, D noktası olsun. Elementer trigonometriden

$$AD = \frac{AD}{1} = \frac{AD}{AB} = \sec 20^\circ$$

olduğunu biliriz. Böylece 60° lik açının üçe bölünmesi $\sec 20^\circ$ uzunluğunda bir doğru parçasının çizimine müncer olur. Fakat bu, bu sefer $\cos 20^\circ$ uzunluğunda bir doğru parçasının çizimine müncer olur, zira $\cos 20^\circ$ ye $\sec 20^\circ$ birbirlerinin tersidir; muayyen bir doğru parçasının çizimi



Şekil: 17

yapılabilirse, o zaman tersinin de çizimi yapılabildiği malumdur.

Şu halde mesele şudur: Verilen 1 uzunluğunda bir doğru parçasından $\cos 20^\circ$ uzunluğunda bir doğru parçasının çizimi yapılabilir mi? (6) denkleminde $\cos 20^\circ$ nin kübik bir denklemin, yani derecesi 3 olan bir denklemin, kökü olduğunu biliyoruz. Bundan başka $\cos 20^\circ$ nin, katsayıları tamsayı ve derecesi 1 veya 2 olan, hiç bir denklemi gerçekleştirmediğini (biraz güç olduğundan ispatsız

olarak) ifade ettik. Böylece $\cos 20^\circ$, $\sqrt[3]{2}$ gibi, 3 üncü dereceden cebrik bir sayıdır, ve şu halde $\cos 20^\circ$ nin Geometrik Çizimler Teoremine göre çizimi yapılamaz. Böylece 60° lık açıyı cetvel ve pergeli metodlarıyla üçe bölmek imkânsızdır.

En nihayet, dairenin bir kareye eşitlenmesi problemini göz önüne alalım. Her hangi bir daire verildiğinde, dairenin yarıçapını uzunluk birimi olarak alabiliriz. Dairenin alanı, bu birim ile, π kare birimine eşittir. Aynı boyutta bir kare $\sqrt{\pi}$ uzunluğunda bir kenara malik olacaktır. Böylece daireye eşit bir karenin bulunması verilen bir birim uzunluktan $\sqrt{\pi}$ uzunluğunda bir doğrunun çizimine baliğ olur. Geometrik çizim teorisinde 1 ve a uzunluklarındaki doğru parçalarından, a^2 uzunluğunda bir doğru parçasının çizilebileceği malumdur. Şu halde eğer $\sqrt{\pi}$ uzunluğunda bir doğru parçası çizilebilirse, π uzunluğunda bir doğru parçası da çizilebilir.

Fakat evvelki kısımda π nin transandant bir sayı olduğunu, yani π nin cebrik bir sayı olmadığını ifade etmiştik. Bu sebepten, Geometrik Çizimler hakkındaki teorem gereğince π uzunluğunda bir doğru parçasını çizmek mümkün değildir. Böylece «daireye eşit karenin» çizilmesi imkânsızdır.

Promlem serisi 19

(2 ve 3 problemleri geometrik çizimler hakkında bilgisi olan öğrenciler içindir.)

1. (10) numaralı birinci, ikinci ve dördüncü sayıların sırasile (11), (12) ve (14) denklemlerinin kökleri olduklarını ispatlayın.
2. 1 ve $\sin 20^\circ$ uzunluğunda doğru parçaları verildiği takdirde $\cos 20^\circ$ uzunluğunda bir doğru parçasının cetvel ve pergel metodlarile çizilebileceğini ispatlayın.
3. 1 ve $\tan 20^\circ$ uzunluğunda doğru parçaları verildiği takdirde $\cos 20^\circ$ uzunluğunda bir doğru parçasının cetvel ve pergel metodlarile çizilebileceğini ispatlayın.

5.6 $\sqrt[3]{2}$ nin daha ileri analizi

$\sqrt[3]{2}$ ün evvelki bölümde derecesi 3 olan cebrik bir sayı olduğunu ifade etmiştik. Yani $\sqrt[3]{2} \quad x^3 - 2 = 0$ denkleminin bir kökü olup, katsayıları tamsayı olan 1 veya 2 dereceli hiç bir denklemin kökü değildir. Şimdi bu iddiayı ispat edeceğiz.

$\sqrt[3]{2}$ nün katsayıları tamsayı ve derecesi 1 olan hiç bir denklemin bir kökü olmadığını tesbit etmek için,

$$a \sqrt[3]{2} + b = 0$$

olmak üzere, a sıfırdan farklı hiç bir a ile b sayılarının mevcut olmadığını ispat etmeliyiz. Eğer böyle tamsayılar mevcut olsaydı, o zaman $\sqrt[3]{2}$ bir rasyonel sayı olacak şekilde $\sqrt[3]{2} = -b/a$ olacaktı. Fakat 4.3 kısımdaki Koroler 2 ye göre $\sqrt[3]{2}$ nin irrasyonel olduğunu biliyoruz.

$\sqrt[3]{2}$ nin

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gibi katsayıları tamsayı olan her hangi kuadratik bir denklemin kökü olmadığını ispat etmek daha zordur.

$\sqrt[3]{2}$ yi böyle bir denklemin kökü farzederiz ve böylece bir çelişmezliğe düşeriz. Böylece

$$a(\sqrt[3]{2})^2 + b\sqrt[3]{2} + c = 0$$

yani

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -c$$

farzederiz. Her iki tarafın karesini alır ve basitleştirirsek

$$b^2\sqrt[3]{4} + 2a^2\sqrt[3]{2} = c^2 - 4ab$$

elde ederiz. Son iki denklem $\sqrt[3]{4}$ ve $\sqrt[3]{2}$ miktarlarının lineer iki simültane denklemi olarak düşünülebilir. a , b katsayı çiftinin ve b^2 , $2a^2$ lerin orantılı olup olmadığına bağlı olarak ya çözülebilir veya çözülemezler.

Eğer çözülebilirlerse, meselâ $\sqrt[3]{4}$ ü elimine ederek

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4a^2b - ac^2 - b^2c}{b^3 - 2a^3}$$

elde ederiz. Fakat $\sqrt[3]{2}$ irrasyonel olduğundan bir çelişmezliğe düşeriz.

Diğer imkân ise katsayı çiftinin orantılı olmasıdır. Bu

$$\frac{a}{b} = \frac{b^2}{2a^2}, \quad 2 = \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3, \quad \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a}$$

anlamına gelir. Gene bir çelişmezliğe düşeriz ve böylece $\sqrt[3]{2}$ nin 3. dereceli cebrik bir sayı olduğu sonucuna varırız.

Problem serisi 20

1. $\sqrt{2}$ nin 2 dereceli bir cebrik sayı olduğunu ispatlayın.
2. $\sqrt[3]{3}$ nin 3 dereceli bir cebrik sayı olduğunu ispatlayın.

5.7 Bir özet

Trigonometrik fonksiyonlar ile âdi logaritmaların elementer cetvellerde listelenmiş olan ekseri değerlerinin irrasyonel olduğunu göstermek için evvelce geliştirilen metodları bu bölümde tatbik ettik. Bundan sonra reel sayıları, cebrik ve transandant olmak üzere, iki yeni sınıfa ayırdık ve evvelce reel sayıların rasyonel ve irrasyonel sayılar olarak ayırtılma ile bu sınıfların akrabalıklarını gördük. Eğer bir uzunluk pergel ve cetvel yardımıyla verilen bir birim uzunluktan itibaren çizilebilirse, o zaman k negatif olmayan münasip bir tamsayı olmak üzere, bu uzunluğun 2^k dereceli cebrik bir sayı olduğunu, ispatsız öğrendik. (Analitik geometriye oldukça âşina bir okur, cetvel ve pergel ile yapılabilen işlemlerin cebrik anlamının analizini yaparak, bu teoremin geometrik çizimler bakımından doğruluğu için bir dereceye kadar kendini tatmin edebilir. Üç hal, bir doğrunun bir doğruyu kesmesi, bir doğrunun bir daireyi kesmesi, ve bir dairenin bir daireyi kesmesidir.) Böylece uzunluğu 3 dereceli cebrik bir sayı-nınki kadar olan bir doğrunun çizim imkânını elimine ederek, verilen metodlarla bir kübün iki katının alınamı-yacağını ve genel bir açının üçe bölünemeyeceğini gördük. Uzunluğu bir transandant sayı olan her hangi bir doğru parçasının çiziminin imkânsızlığından dolayı, daireye eşit karenin bulunması probleminin nasıl halledildiğini gördük: bu çizim lüzumundan fazla imkânsızdır.

BÖLÜM 6

İRRASYONEL SAYILARIN RASYONEL SAYILAR YARDIMİLE YAKLAŞIK İFADE EDİLMELERİ

Bu bölüm, bir irrasyonel sayının rasyonel sayılarla yaklaşık ifade edilmesinin yaklaşıklık derecesine aittir.

Şimdi, göreceğimiz gibi, meselâ $\sqrt{2}$ ye, arzu ettiğimiz kadar yakın rasyonel sayılar elde edebiliriz. $\sqrt{2}$ ye 10^{-10} veya 10^{-20} farkla veya istediğimiz her hangi bir fark dahilinde a/b rasyonel sayıları mevcuttur. Ve bu yalnız $\sqrt{2}$ için doğru olmayıp her hangi irrasyonel bir sayı için de doğrudur.

Fakat irrasyonel bir sayıdan 10^{-20} daha az bir farkla fark eden bir a/b rasyonel sayısı bulmak için, çok büyük bir b paydalı a/b aramalıyız. Eğer b nin 10^{20} kadar büyük olmasına müsaade edersek, şartlara uygun bir a/b kesri bulabiliriz. Eğer b nin 10^{15} veya 10^{10} dan daha büyük olmaması şartını koşarsak ne olur? Problem daha derin ve daha belâlı olur. Bu cins meselelere bakarken, $\sqrt{2}$ ve

$\sqrt{3}$ gibi tamamen bazı özel halleri değil de, irrasyonel her sayı için ne söylenebildiği ile meşgul olacağız.

Bir sayının bir diğeri ile yaklaşık ifade edilmesi hakkında konuşmak için eşitsizlikler dili ve notasyonundan istifade etmeğe mecburuz. Bu sebepten bu konu ile başlayacağız.

6.1 Eşitsizlikler *

Ne zaman u v den büyük olursa $u > v$ yazarız, ve bu $u - v$ nin pozitif olduğu anlamına gelir. Tabii, ne zaman u v den büyükse, v nin u dan küçük olduğu sonucu çıkar (Matematik notasyonla $v < u$ olarak yazılır). Dolayısıyla dört

$$u > v, \quad u - v > 0, \quad v < u, \quad v - u < 0$$

eşitsizliği u ve v arasındaki aynı temel münasebeti ifade eden basit dört tarzdır. Benzer şekilde $u \geq v$ u nun v den daha büyük veya eşit olduğunu, ve bu da $u - v$ nin pozitif veya sıfır (fakat negatif olmayan) olduğu anlamına gelir.

TEOREM 6.1.

- (a) Eğer $u > v$, ve w her hangi bir sayı ise, o zaman $u + w > v + w$ dir.
- (b) Eğer $u > v$, ve w her hangi bir sayı ise, o zaman $u - w > v - w$ dir.
- (c) Eğer $u > v$ ve w her hangi pozitif bir sayı ise, o zaman $uw > vw$ dir.
- (d) Eğer $u > v$, ve w her hangi pozitif bir sayı ise, o zaman $u/w > v/w$ dir.
- (e) Eğer $u > v$, ve u ve v pozitif iseler, o zaman $u^2 > v^2$ ve fakat $1/u < 1/v$ dir.
- (f) Eğer $u > v$, ve $v > w$ ise, o zaman $u > w$ dir.
- (g) $>$ ve $<$ eşitsizlik işaretleri yerine $\geq$ ve $\leq$ konduğunda bütün bu sonuçlar cari kahr.

*) Eşitsizlikler için bu serinin E. Beckenbach ve R. Bellman, An Introduction to Inequalities'e müracaat ediniz. (Bu seride 10 sayılı nesriyat: «Eşitsizliklere Giriş» Çeviren Halil Yüksel).

İSPAT. İki pozitif sayının toplam ve çarpımlarının pozitif olması hakkındaki iki prensipin gerçekliğini kabul edeceğiz.

(a) $u + v$ yu pozitif olarak verdik, ve $(u + w) - (v + w)$ nin pozitif olduğunu ispatlayacağız. Bu aşikârdır, zira

$$u - v = (u + w) - (v + w)$$

dir.

(b) Gene $u - v$ yi pozitif olarak verdik, ve $(u - w) - (v - w)$ nin pozitif olduğunu ispatlayacağız. Evvelki gibi bu

$$u - v = (u - w) - (v - w)$$

den çıkar.

(c) $u - v$ ve w yi pozitif olarak verdik, ve $uw - vw$ nin pozitif olduğunu ispatlayacağız. Bu $uw = vw = w(u - w)$ keyfiyetinden, ve iki pozitif sayı çarpımının pozitif olduğundan çıkar.

(d) Hakikatte bu (c) kısmında bulunur, çünkü eğer w pozitif olsa, o zaman $1/w$ olur. Dolayısıyla (c) kısmında w yerine $1/w$ çarpan olarak kullanılabilir; böylece eğer $u > v$ ise, o zaman $u(1/w) > v(1/w)$ dir.

(e) Mademki u ve v pozitifler, öyleyse $u + v$ de pozitifdir. Fakat $u > v$ $u - v$ nin pozitif olduğuna delâlet eder ve bundan dolayı $(u + v) (u - v)$ çarpımı pozitifdir. Böylece

$$(u + v) (u - v) > 0, \quad u^2 - v^2 > 0, \quad u^2 > v^2$$

dir. Diğer taraftan $u > v$ nin her iki tarafını $1/uw$ ile çarpmaya hakkımız olması için (c) kısmını kullanırsak

$$u \cdot \frac{1}{uv} > v \cdot \frac{1}{uv}$$

olur ve bundan dolayı

$$\frac{1}{v} > \frac{1}{u} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{u} < \frac{1}{v}$$

elde ederiz.

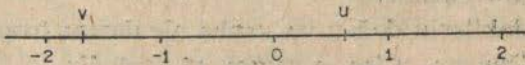
(f) $u - v$ ve $v - w$ pozitif olarak verildiği takdirde, $u - w$ nin pozitif olduğunu ispat etmek isteriz.

$$u - w = (u - v) + (v - w)$$

ise de, gene tekrar yalnız iki pozitif sayı toplamının pozitif olması prensibini kullandık.

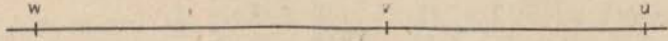
(g) (g) kısmını ispatlamanın bir yolu da (a), (b), ..., (f) kısımlarını, her hal için taze bir tahlilini yaparak gözden geçirmektir. Mamafih daha kolay bir yol vardır. (a) dan (f) ye kadar kısımların ispatları iki pozitif sayı toplamının ve çarpımının kendileri de pozitif olma prensiplerine dayanır. Halbuki $u > v$ $u - v$ nin pozitif olduğu anlamına geliyor, $u \geq v$ $u - v$ nin pozitif veya sıfır olduğu anlamına gelir, yani bu $u - v$ nin negatif olmaması demektir. Bundan başka, negatif olmayan her hangi sayının toplam ve çarpımlarının kendileri de negatif değildir, ve bu esas üzerine (a) dan (f) e kadar olan bütün ispatların $>$ halinden, otomatik olarak, $\geq$ haline teşmil edilmesi lâzımdır.

Eğer u ve v sayıları, Bölüm 3 te izah edildiği gibi, reel doğru üzerine yerleştirilirse $v < u$ eşitsizliği v nin u nun solunda, veya u nun v nin sağında olduğu anlamına gelir (Şekil: 18).



Şekil: 18. $v < u$ nin gösterilmesi.

$w < v < u$ eşitsizlikleri w ve u nun arasında olmak üzere $w < v$ ve $v < u$ anlamında alınmıştır (Şekil: 19). «Arası» kelimesinin kullanılışını izah etmemiz lâzımdır.



Şekil: 19. $w < v < u$ nun gösterilişi.

Eğer $w < v < u$ yazarsak, v nin «tamamen arasında» olduğunu ve ne w ve ne de u ile intibak etmediğini anlarız; fakat eğer «arasında» dersek veya $w \leq v \leq u$ yazarsak, v nin w ye veya u ya eşit olma imkânlarını da dahil ederiz. Bu imkânlardan ancak birinin kabulünü isteyebiliriz, meselâ $w < v \leq u$ veya $w \leq v < u$. Semboller anlamı tamamen aşikâr kılmaktadır.

Problem serisi 21

1. u ve v pozitif olmak üzere $u^2 > v^2$ verildiği takdirde, $u > v$ yi ispatlayın.
2. $r > s$ verildiği takdirde, $-r < -s$ i ispatlayın.
3. Eşitsizliklerdeki terimlerin bir taraftan diğer tarafa işaretlerinin değiştirilmesini göz önüne almak şartile geçirebileceğini ispatlayın. Bilhassa, eğer $a + b - c > d + e - f$ olursa, o zaman $a - e + f > d - b + c$ olacağını ispatlayın.
4. $n \leq k$ olacak şekilde n ve k pozitif tamsayılar verildiğinde

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{k} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{kn}$$

olacağını ispatlayın.

5. Aşağıdakilerin doğru ve yanlış olanlarını tespit edin:
(a) Eğer $r > s$ ise, o zaman $r^2 > s^2$ dir.

- (b) Eğer $r > s$ ve c her hangi bir sayı ise, $cr > cs$ dir.
- (c) Eğer $-1/2 < \lambda < 1/2$ cari ise, o zaman $-1 < \lambda < 1$ de caridir.
- (d) Eğer $-1/2 < \lambda < 1/2$ cari ise, o zaman $-3/2 < \lambda < 3/2$ de caridir.
- (e) Eğer $0 < \lambda < 1/2$ cari ise, o zaman $-1/2 < \lambda < 1/2$ de caridir.
- (f) Eğer $-1/2 < \lambda < 1/2$ cari ise, o zaman $-1/3 < \lambda < 1/3$ de caridir.
- (g) Eğer $-1/2n < \lambda < 1/2n$ cari ise, o zaman $-1/n < \lambda < 1/n$ de caridir.
6. Belirli bir irrasyonel λ sayısı tamamen -10 ile 10 arasındadır. Bunu matematik notasyonla yazınız.
7. Eğer w negatif ve $u > v$ ise, $uw < vw$ yı ispatlayın.
8. (a) u ve v 1, 2, 3, ..., 10 dan seçilmiş her hangi iki sayı olsun.

$$-9 \leq u - v \leq 9$$

olduğunu ispatlayın.

- (b) Eğer (a) da u ve v nin farklı olması şartını koymazsak, gene

$$-9 \leq u - v \leq 9$$

doğru olur mu?

6.2 Tamsayılar ile yaklaşıklık

Her hangi reel bir sayı yerine ona en yakın tamsayıyı koyarak yuvarlarsak, yapılan hata en fazla $1/2$ olacaktır. Meselâ 6,3 yerine 6, veya 9,7 yerine 10, veya 7,5 yerine 7 veya 8 den birini koyarsak, her halde hata $1/2$ den büyük olmaz. Eğer irrasyonel bir sayı yerine en yakın bir tamsayı koyarsak, hata $1/2$ den küçüktür, ve yaklaşıklık teorisine bu basit hal ile başlarız.

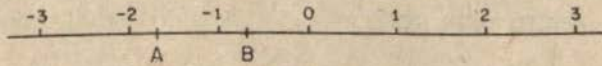
TEOREM 6.2. *Her hangi α irrasyonel sayısına yegâne bir m tamsayısı*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde, tekabül eder.

İSPAT. m i α ya en yakın tamsayı olarak seçiyoruz.

Meselâ, eğer $\alpha = \sqrt{3} = 1,73 \dots$ ise, $m = 2$ seçeriz, veya eğer $\alpha = 2\sqrt{3} = 3,46 \dots$ ise, $m = 3$ seçeriz. Böylece m , hangisi daha yakınsa, α dan hemen daha büyük, veya α dan hemen daha küçük tamsayı olabilir. (Birinin α ya diğerinden daha yakın olacağı aşikârdır, aksi takdirde α birbirini takip eden iki n ve $n + 1$ tamsayılarının arasında yarı yolda bulunacaktır. Fakat o zaman rasyonel bir sayı olan $n + 1/2$ e eşit olacaktır, bu ise ipotezimize aykırıdır.) Biz bunu diğer bir tarzda ifade edebiliriz. Reel bir doğru üzerine uzunluk biriminde (yani bir birim uzunluğunda), Şekil 20 deki gibi, her hangi bir AB doğru parçası işaretlendiğinde, A ve B tamsayı noktaları olmadıkça, tıpatıp bir tamsayı ihtiva edecektir.



Şekil: 20

Şimdi A yı $\alpha - 1/2$ ye tekabül eden nokta ve B yi $\alpha + 1/2$ ye tekabül eden nokta olarak alalım. $\alpha - 1/2$ ve $\alpha + 1/2$ tamsayı olmadıklarından (rasyonel bile değildirler — Bakınız Bölüm 4, Teorem 4.1), A ve B tamsayı noktaları olamayacağını biliriz. AB doğru parçası üzerindeki yegâne tamsayıyı m ile göstererek m in tamamen $\alpha - 1/2$ ile $\alpha + 1/2$ arasında bulunduğunu görürüz. Böylece

$$\alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2}$$

dir. α yı çıkararak

$$\frac{1}{2} < m - \alpha < \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Şimdi eğer bir $m - \alpha$ sayısı $-1/2$ ile $1/2$ arasında bulunursa, işareti değiştirerek elde edilen sayı, bundan dolayı $\alpha - m - 1/2$ ile $1/2$ arasında bulunur. Böylece Teorem 6.2 nin eşitsizliklerini elde ederiz.

m tamsayısı yegânedir, zira

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}$$

yı sağlayan diğer bir n tamsayısı olsaydı, o zaman n

$$-\frac{1}{2} < n - \alpha < \frac{1}{2}$$

yı gerçekleyecekti. Bu eşitsizliklere α yı ilâve edersek, n in

$$\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}$$

yı sağladığını görürüz. Fakat AB doğru parçası ancak bir tamsayı ihtiva eder, öyleyse n m in aynıdır.

Problem serisi 22

(Bu ve daha sonra gelen problem serilerinde okur

$\sqrt{2} = 1,41421 \dots$, $\sqrt{3} = 1,73205 \dots$, $\pi = 3,14159 \dots$ değerlerini kullanabilir).

1. (a) $\sqrt{2}$, (b) $2\sqrt{2}$, (c) $3\sqrt{2}$, (d) $4\sqrt{2}$, (e) $3\sqrt{3}$
 (f) $4\sqrt{3}$, (g) π , (h) 10π , (i) $-\sqrt{3}$, (j) -7π
 lere en yakın tamsayıları bulun.
2. Her hangi bir α irrasyonel sayı verildiğinde

$$0 < \alpha - q < 1$$

olacak şekilde yegâne bir q tamsayısının mevcut olduğunu ispatlayın.

6.3 Rasyonellerle yaklaşıklık

$\sqrt{2}$ gibi, irrasyonel bir sayının yaklaşık ifade edilmesinin bir yolu da

$$\sqrt{2} = 1,41421 \dots$$

ondalık şekli kullanmaktadır. 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, ... sayıları $\sqrt{2}$ nin gittikçe daha yakın yaklaşık bir cümlesini teşkil etmektedir. Bu yaklaşıkların hepsi rasyonel sayılardır; böylece $\sqrt{2}$ nin sonsuz bir rasyonel yaklaşıklar silsilesine, sahip oluruz:

$$(1) \quad \frac{1}{1}, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \dots$$

Bu sayılar, cümle boyunca ilerlendikçe, gittikçe $\sqrt{2}$ ye daha yaklaşırlar. Bundan sonra

$$\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1},$$

$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$

$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100},$$

$$\frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000},$$

$$\frac{14142}{10000} < \sqrt{2} < \frac{14143}{10000},$$

$$\frac{141421}{100000} < \sqrt{2} < \frac{141422}{100000}, \quad \text{v.s.}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu eşitsizlikler (1) in sonsuz terimlerinin $\sqrt{2}$ ye istediğimiz yakınlıkta olduğunu gösterir. Meselâ, $\sqrt{2}$ ye 0,0001 yakınlıkta sonsuz çok rasyonel sayının mevcut olduğunu bilmek istediğimizi farzedelim. (1) silsilesinin, ilk dördü hariç, terimlerin hepsini alarak bunu temin edebiliriz.

Mamafih, (1) rasyonel sayılarının paydaları, 10 un katı olmak gibi, göze çarpan özelliğe sahiptirler. Genel olarak, rasyonel sayılar içinde, paydaları hakkında her hangi bir şart koşmadan, $\sqrt{2}$ ye daha iyi yaklaşıklar mevcut olabilir.

Tetkikatımızı izah edecek meşhur bir misal olan π irrasyonel sayısına dönelim. π 3,14159... değerinde olduğundan, π için (1) e benzer

$$(2) \quad \frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots$$

dir. Mamafih $22/7$ nin $31/10$ a nazaran π ye daha yakın bir yaklaşığı olduğunu biliriz. Her ne kadar (2) silsilesinin daha sonraki terimlerinden daha yakın değilse de $22/7$ $314/100$ den daha yakındır.

$10, 10^2, 10^3$, v.s. paydalarına bağlılığımızdan kurtulmak gayesiyle evvelâ her irrasyonel sayının her hangi verilen bir paydası olan bir rasyonel sayı ile yaklaşık ifade edilebileceğini göstereceğiz.

TEOREM. 6.3. λ her hangi irrasyonel sayı ve n her her hangi bir pozitif tamsayı olsunlar. Bu halde

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$$

olacak şekilde, n rasyonel payda, m/n olan bir sayı mevcuttur.

Bu teoremin ispatının izahını bir misalle verelim.

λ nın $\sqrt{2}$ ve n in 23 olduğunu farzedelim. $\sqrt{2}$ için 1,41421 ... ondalık açılımı kullanarak

$$23\sqrt{2} = 32,52 \dots$$

yaklaşık değerini haiz $23\sqrt{2}$ irrasyonel sayısını göz önüne alalım. Böylece $23\sqrt{2}$ ye en yakın tamsayı 33 olup, $\alpha = 23\sqrt{2}$ için

$$-\frac{1}{2} < 23\sqrt{2} - 33 < \frac{1}{2}$$

ifade eden bu Teorem 6.2 nin « m » idir. Fakat 33 aynı zamanda Teorem 6.3 ün « m » idir: çünkü, Teorem 6.1 e göre

$$-\frac{1}{46} < \sqrt{2} - \frac{33}{23} < \frac{1}{46}$$

elde etmek için bu eşitsizlikleri 23 ile bölebiliriz.

İSPAT. Genel olarak, her hangi irrasyonel bir λ ve her hangi pozitif bir n tamsayısı ile başlar, Bölüm 4 deki Teorem 4.1 gereğince, $n\lambda$ nın irrasyonel olduğuna dikkat ederiz. Bundan sonra m i $n\lambda$ ya en yakın olan tamsayı olarak tarif ederiz; bu sebepten Teorem 6.2 gereğince

$$-\frac{1}{2} < n\lambda - m < \frac{1}{2}$$

dır. Bu eşitsizlikler Teorem 6.1 dolayısıyla

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$$

verecek şekilde, n pozitif tamsayı ile bölünebilir. Binaenaleyh Teorem 6.3 ispatlanmıştır.

MİSAL. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ için Teorem 6.3 deki gibi, $\lambda = \sqrt{2}$ hali için, m/n rasyonel sayıları bulunuz.

ÇÖZÜM. Basit hesapla

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{2}, & 2\sqrt{2}, & 3\sqrt{2}, & 4\sqrt{2}, & 5\sqrt{2}, \\ 6\sqrt{2} & 7\sqrt{2}, & 8\sqrt{2}, & 9\sqrt{2}, & 10\sqrt{2} \end{array}$$

lere en yakın tamsayılar

1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14 dır. Bu sebepten tayini istenen rasyonel sayılar

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}, \frac{10}{7}, \frac{11}{8}, \frac{13}{9}, \frac{14}{10}$$

dır; bu yaklaşıklıkların herbirinin hatası, n paydadaki tamsayı olmak üzere, $1/2n$ den küçüktür.

Bu misal Teorem 6.3 deki m/n kesrinin en basitleştirilmiş bir kesir olmasını icap ettirmediğini gösterir.

Problem serisi 23

1. $\lambda = \sqrt{3}$ ve $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ olan hal için Teorem 6.3 deki m/n rasyonel sayıları bulunuz.
2. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ için, $\lambda = \pi = 3,14159 \dots$ halinde Teorem 6.3 deki m/n rasyonel sayılarını bulunuz.
3. Her hangi irrasyonel bir λ sayısı ve her hangi pozitif bir n tamsayısı verildiğinde

$$-\frac{1}{n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

olacak bir m tamsayısının mevcut olduğunu ispatlayın.

- *4. Muayyen bir irrasyonel λ sayısı ve muayyen pozitif bir n tamsayısı için, Teorem 6.3 deki eşitsizlikleri gerçekleyen yegâne bir m tamsayısının mevcut olduğunu ispat edin.
- *5. m/n i kasederek «En basitleştirilmiş» kelimeleri eklenirse, şöyle ki «Bu halde n paydali, en basitleştirilmiş şekliyle m/n olan bir rasyonel sayı mevcuttur...», Teorem 6.3 in yanlış olacağını ispatlayın.

6.4 Daha iyi yaklaşıklıklar

Her hangi bir irrasyonel λ sayısının « $1/2n$ içinde», yani $1/2n$ den daha küçük bir hata ile, bir rasyonel m/n sayısı ile yaklaşık ifade edilebileceğini Teorem 6.3 söyler. Bu $1/3n$, veya $1/4n$, veya daha yakın olarak yapılabilir mi? Cevap evettir. Önümüzdeki teoremden λ nın, arzu ettiğimiz her hangi bir k için ($k=3$, $k=4$, $k=1000$ v.s.), $1/kn$ içinde, m/n ile yaklaşık ifade edilebileceğini göstereceğiz. Halbuki Teorem 6.3 de yaklaşıklık $1/2n$ içinde her pozitif n tamsayısı için yapılabiliyorsa da, Teorem 6.4 de arzu edilen k için, $1/kn$ içinde yaklaşıklık her n için elde edilemez.

Her hangi irrasyonel bir λ sayısını $1/n^2$, veya $1/n^3$, veya hattâ daha yakın civarında m/n ile yaklaşık ifade edebilir miyiz? $1/n^2$ civarında evet; $1/n^3$ civarında ise cevap hayırdır. Fakat bunlar daha sonraki kısımların konusudur. λ nın $1/kn$ civarında m/n ile yaklaşık ifade edilmesile işe başlayalım.

TEOREM 6.4. *Her hangi irrasyonel bir λ sayısı ve her hangi bir k tamsayısı verildiğinde*

$$-\frac{1}{nk} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}$$

olacak şekilde n paydası k yı aşmayan bir m/n sayısı vardır.

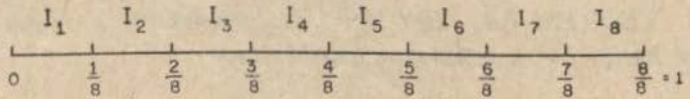
Her hangi bir λ ve k için cari olan Teorem 6.4 ün bir ispatını takdim etmeden evvel, teoremi özel bir misal, $\lambda = \sqrt{3}$ ve $k=8$, için ispatlayacağız. λ nın evvelâ $1 \cdot \lambda$ dan $k \cdot \lambda$ ya kadar katlarını sayalım. $\sqrt{3}$ ün katlarının,

her katı iki pozitif sayının, bir tamsayının ve birden küçük bir sayının toplamı olarak yazarak, listesini yapalım:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{3} = 1 + 0,732 \dots, & \sqrt{3} - 1 = 0,732 \dots, \\
 2\sqrt{3} = 3 + 0,464 \dots, & 2\sqrt{3} - 3 = 0,464 \dots, \\
 3\sqrt{3} = 5 + 0,196 \dots, & 3\sqrt{3} - 5 = 0,196 \dots, \\
 4\sqrt{3} = 6 + 0,928 \dots, & 4\sqrt{3} - 6 = 0,928 \dots, \\
 5\sqrt{3} = 8 + 0,660 \dots, & 5\sqrt{3} - 8 = 0,660 \dots, \\
 6\sqrt{3} = 10 + 0,392 \dots, & 6\sqrt{3} - 10 = 0,392 \dots, \\
 7\sqrt{3} = 12 + 0,124 \dots, & 7\sqrt{3} - 12 = 0,124 \dots, \\
 8\sqrt{3} = 13 + 0,856 \dots, & 8\sqrt{3} - 13 = 0,856 \dots
 \end{array}$$

Sağ sütundaki ifadeler, sol sütundakilerden tamsayı kısmını çıkararak elde edilmiştir.

Daha sonra, Şekil: 21 de gösterildiği gibi, birim aralığı $I_1, I_2, \dots, I_8$ sekiz kısma ayırıyoruz.



Şekil: 21

Böylece I_1 0 ile $1/8$ arasındaki sayıları, I_2 $1/8$ ile $2/8$ arasındaki sayıları, I_3 $2/8$ ile $3/8$ arasındaki sayıları,

teşkil ederler *. Şu halde $\sqrt{3}$ ün katlarının sekiz ondalık

*) Mademki tam mânasıyla eşitsizlikler elde etmek arzu ediyoruz, o halde «arasında» yı «tamamen arasında» anlamına yorumlamamız daha uygundur; böylece I_j aralıkları

$$(j-1)/8 < u < j/8$$

olacak şekilde bütün u noktalarını ihtiva edecektir.

kısımlarını, aşağıdaki gibi, $I_1, I_2, \dots, I_8$ kategorilere ayırıp sınıflandırıyoruz:

0,732 ... I_6 dadır (çünkü 0,732 ... $5/8$ ile $6/8$ arasındadır)

0,464 ... I_4 dedir,

0,196 ... I_2 dedir,

0,928 ... I_8 dedir,

0,660 ... I_6 dadır,

0,392 ... I_4 dedir,

0,124 ... I_1 dedir,

0,856 ... I_7 dedir.

Yukarıdaki listede I_1 içinde bulunan sayıyı kullanıyoruz:

0,124 ... I_1 dedir; yani $7\sqrt{3} - 12$ I_1 dedir.

Fakat I_1 deki sayılar 0 ile $1/8$ arasındadır, şu halde

$$0 < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}$$

dır. Şimdi, mademki $7\sqrt{3} - 12$ 0 ile $1/8$ arasındadır, muhakkak $-1/8$ ile $1/8$ arasında bulunur, öyleyse

$$-\frac{1}{8} < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}$$

dır. Bu eşitsizliği 7 ile bölerek

$$-\frac{1}{7.8} < \sqrt{3} - \frac{12}{7} < \frac{1}{7.8}$$

elde ederiz. Bu $k=8$, $n=7$ ve $m=12$ ile Teorem 6.4 de ifade edilen şekilde bir sonuçtur.

İspatımız $7\sqrt{3}-12$ nin I_1 de olması keyfiyetine dayanır. I_1 aralığında hiç bir sayı olmasaydı ne yapacaktık? Eğer I_1 de hiç bir sayı olmasaydı, cevap olarak o zaman $I_2, I_3, \dots, I_7$ aralıklarından birinin iki veya daha fazla sayı ihtiva edeceğidir. Şimdiki misalde, I_1 de yalnız bir sayı olmayıp, I_4 de de iki ve I_6 da da iki sayı vardır. I_6 daki çifti göz önüne alalım:

$$0,732 \dots I_6 \text{ dadır; yani } \sqrt{3}-1 I_6 \text{ dadır;}$$

ve

$$0,660 \dots I_6 \text{ dadır; yani } 5\sqrt{3}-8 I_6 \text{ dadır.}$$

Şimdi ne zaman I_6 da (veya aralıkların her hangi birinde) iki sayı varsa, farkları $-1/8$ ile $1/8$ arasında bulunmak üzere, birbirlerinden $1/8$ civarında bulunurlar. Bilhassa, I_6 daki iki sayı için

$$-\frac{1}{8} < (5\sqrt{3}-8) - (\sqrt{3}-1) < \frac{1}{8},$$

$$-\frac{1}{8} < 4\sqrt{3}-7 < \frac{1}{8}$$

olur. 4 ile bölerek

$$-\frac{1}{4.8} < \sqrt{3}-\frac{7}{4} < \frac{1}{4.8}$$

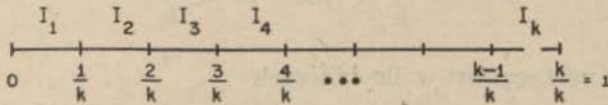
elde ederiz, bu $\lambda = \sqrt{3}$ ve $k=8$ için, Teorem 6.4 ün ifade ettiği, fakat bu sefer $n=4$ ve $m=7$ ile, diğer bir sonuçtur.

TEOREM 6.4 ÜN İSPATI. Şimdi tartışmasını yaptığımız özel misaller Teorem 6.4 ün ispatı için örnek vazi-

fesini görebilir. İrrasyonel bir λ ve pozitif bir k tamsayısı verildiğinde λ , 2λ , 3λ , 4λ , $\dots$, $k\lambda$ k sayısını alır ve bu sayıların her birini bir tamsayı artı bir kesir veya ondalık kısım olarak yazabiliriz:

$$\begin{array}{ll} \lambda = a_1 + \beta_1, & \lambda - a_1 = \beta_1, \\ 2\lambda = a_2 + \beta_2, & 2\lambda - a_2 = \beta_2, \\ 3\lambda = a_3 + \beta_3, & 3\lambda - a_3 = \beta_3, \\ 4\lambda = a_4 + \beta_4, & 4\lambda - a_4 = \beta_4, \\ \vdots & \vdots \\ k\lambda = a_k + \beta_k, & k\lambda - a_k = \beta_k. \end{array}$$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ senbollerini tamsayıları, halbuki $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ senbollerini 0 ile 1 arasındaki sayıları temsil etmektedir. Bundan sonra her birinin uzunluğu $1/k$ olmak üzere, birim aralığı, k parçaya bölüyoruz: $I_1, I_2, \dots, I_k$ (Şekil: 22).



Şekil: 22

Böylece I_1 aralığı 0 ile $1/k$ arasındaki sayılardan, I_2 $1/k$ ile $2/k$ arasındaki sayılardan, I_3 $2/k$ ile $3/k$ arasındaki sayılardan, v.s. ibarettir. «Arasında» kelimesi burada kelimenin tam anlamında kullanılmıştır, öyle ki, meselâ $2/k$ ve $3/k$ sayılarının kendileri I_3 aralığının üyeleri değildir. Bölüm 4 ün Teorem 4.1 i gereğince, her $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ sayılarının irrasyonel olmasına dikkat etmeli. Hiç bir β

$$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k}$$

rasyonel sayılarının hiç birine eşit olamayacağı sonucu çıkar. Böylece her β $I_1, I_2, I_3, \dots, I_k$ aralıklarının tamamen birinin içinde bulunur.

I_1 bakımından iki imkân vardır: ya I_1 β lardan bir veya bir kaçını ihtiva eder, veya I_1 β lardan hiç birini ihtiva etmez. Bu iki imkânı ayrı ayrı tetkik edeceğiz.

Hal 1. I_1 aralığı β lardan bir veya bir kaçını ihtiva eder. Böylece bir β , bu meselâ β_n olsun, I_1 aralığında bulunur. n senbolü 1, 2, 3, $\dots$, k arasından bazı tamsayıyı gösterir. β_n sayısı $n\lambda - a_n$ nin aynıdır, dolayısıyla

$$0 < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}$$

olduğunu biliriz, zira I_1 0 dan $1/k$ ya kadar olan aralıktır. Bundan

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}$$

çıkar, ve tarafları n ile bölersek

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{a_n}{n} < \frac{1}{kn}$$

elde ederiz. Böylece 6.4 Teoremi bu hal için ispatlanmış olur, zira a_n tamsayısı olarak m i tarif edebiliriz.

Hal 2. I_1 aralığı β lardan hiç birini ihtiva etmez. Bu halde k sayıları

$$I_2, I_3, \dots, I_{k-1}$$

$k-1$ aralıklarında bulunur. Bu noktada, eğer $k-1$ delikte k güvercin varsa, bir güvercin deliğinde hiç olmazsa iki veya daha fazla güvercinin bulunmasının

lâzım olduğunu söyleyen *Dirichlet'in güvercin - delik prensibini* tatbik ederiz. Böylece β lardan iki veya daha fazlasını ihtiva eden en az bir aralığın bulunması lâzımdır. r ve j 1, 2, 3, ..., k arasından iki farklı sayı olmak üzere β_r ve β_j nin aynı aralıkta olduğunu söyleyelim. j nin r den daha büyük olduğunu farz edersek, $j - r$ in k dan küçük pozitif bir tamsayı olduğunu biliriz.

Mademki β_r ve β_j $1/k$ uzunluğundaki aynı aralık içinde bulunurlar, farkları da $-1/k$ ile $1/k$ arasında bulunur. Böylece

$$-\frac{1}{k} < \beta_j - \beta_r < \frac{1}{k}$$

dır. Fakat

$$-\frac{1}{k} < (j\lambda - a_j) - (r\lambda - a_r) < \frac{1}{k}$$

veya

$$-\frac{1}{k} < (j-r)\lambda - (a_j - a_r) < \frac{1}{k}$$

olacak şekilde $\beta_r = j - a_j$ ve $\beta_j = r - a_r$ dır. n i $j - r$ gibi, ve m i $a_j - a_r$ gibi tarif edersek, bu halde

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - m < \frac{1}{k}$$

olur. Tarif gereğince n in pozitif bir tamsayı olduğunu görürüz, ve böylece Teorem 6.1 (d) gereğince n ile bölerek

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}$$

elde ederiz. Buna ilâveten, n $j-r$ e eşit olduğundan, k dan daha küçük olduğunu biliriz.

m/n sayısının muhakkak en basitleştirilmiş kesir halinde olmadığına dikkat etmeli. Eğer $j-r$ ile a_1-a nin müşterek çarpanları yoksa m/n en basitleştirilmiş kesir halindedir; aksi halde değildir.

Problem serisi 24

1. Teorem 6.4 ifadesine uyarak $\lambda = \sqrt{3}$ ve $k=8$ için verilmiş bir misal vardır. Eğer I_4 deki iki 0,464 ... ve 0,392 ... sayılarını I_6 daki iki sayı yerine seçip alırsak m ve n değerleri ne olacaktır?
2. Aşağıdaki hallerin her birine Teorem 6.4 ün ispatında verilen metodu tatbik edin, ve böylece Teorem 6.4 deki eşitsizlikleri gerçekleyen m ve n değerlerini bulunuz:

(a) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 2$; (h) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 8$;

(b) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 4$; (i) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 10$;

(c) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 6$; (j) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 14$;

(d) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 10$; (k) $\lambda = \pi$, $k = 2$;

(e) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 2$; (l) $\lambda = \pi$, $k = 4$;

(f) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 4$; (m) $\lambda = \pi$, $k = 6$;

(g) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 6$; (n) $\lambda = \pi$, $k = 8$.

6.5 $1/n^2$ civarındaki yaklaşık ifadeler

6.4 kısmının başlangıcında tetkikatımızın yönünü bildirmiştik, bu ise irrasyonel her hangi bir λ sayısı için

daha iyi yaklaşıklıkları seçmektir. Teorem 6.3 de her hangi bir n için $1/2n$ civarı içinde λ nın m/n ile yaklaşık olarak ifade edilmesinden, bazı $n \leq k$ için $1/kn$ civarı içindeki Teorem 6.4 deki yaklaşık değerlere geçtik. Şimdi de $1/n^2$ civarındaki yaklaşıklıkları elde ediyoruz.

TEOREM 6.5. *İrrasyonel her hangi bir λ sayısı verildiğinde*

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

olacak şekilde sonsuz çok, en basitleştirilmiş şekliyle, rasyonel m/n sayıları vardır.

İSPAT. Evvelâ, Teorem 6.4 ün eşitsizliğini gerçekleyen rasyonel her hangi bir m/n sayısının otomatik olarak Teorem 6.5 inki de gerçeklediğini görürüz. Buna sebep n in k yı geçmemesidir, $k \geq n$ den dolayı Teorem 6.1 deki (d), (e) ve (g) kısımlarını kullanarak

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{kn} \leq \frac{1}{n^2}$$

olacağı sonucunu çıkarırız. Bu sebepten $-1/kn$ ile $1/kn$ arasında bulunan her hangi bir sayı şüphesiz $-1/n^2$ ile $1/n^2$ arasındaki bölgede bulunmalıdır.

Bundan sonra, en basitleştirilmiş halde bulunmayan rasyonel her hangi bir m/n sayısının teoremin eşitsizliklerini gerçeklediğini ve sonra da en basitleştirilmiş haldeki aynı rasyonel sayının münasip eşitsizlikleri de gerçeklemesinin icap ettiğini göstereceğiz. m/n in en basitleştirilmiş halini M/N ile gösterelim. n ve N in her ikisini de pozitif kabul edebiliriz, zira her hangi bir negatif işaret varsa bu işaret paya verilebilir. Bundan dolayı

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N}, \quad 0 < N < n$$

dır, zira en basit terimlerine irca ediliş kesrin değerine tesir etmez, fakat paydanın büyüklüğünü küçültür. Teorem 6.1 den

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2}$$

sonucu çıkar ve böylece eğer λ

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

yi gerçeklerse, o zaman otomatik olarak

$$-\frac{1}{N^2} < \lambda - \frac{M}{N} < \frac{1}{N^2}$$

yi de gerçekler.

Teorem 6.5 i tamamlamak için ispatı gereken şey eşitsizlikleri gerçekleyen en basitleştirilmiş terimi *sonsuz çok* m/n rasyonel sayıların mevcut oluşudur. Bilâkis, farzedelim ki, bu kesirlerden yalnız sonlu sayıda mevcut olsun:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \dots, \frac{m_i}{n_i}$$

Bundan sonra i adet

$$\lambda - \frac{m_1}{n_1}, \lambda - \frac{m_2}{n_2}, \lambda - \frac{m_3}{n_3}, \dots, \lambda - \frac{m_i}{n_i}$$

sayıları göz önüne alınır. Bölüm 4 ün Teorem 4.1 i gereğince bunların hepsi irrasyonel sayılardır, ve dolayısıyla bunların hiç biri sıfır değildir. Bazıları pozitif ve bazıları negatif olabilirler; biz $1/k$ nın 0 ile bütün pozitif sayılar

arasında bulunacak şekilde ve gene $-1/k$ nın 0 ile bütün negatif sayılar arasında bulunacak şekilde, kâfi büyüklükte bir k tamsayısını seçeriz. Bunu yapabiliriz zira k yı ne kadar büyük seçersek $1/k$ ve $-1/k$ 0 a o kadar yaklaşırlar. Böylece, bütün aşağıdaki eşitsizlikler yanlış olacak şekilde k yı böyle büyük seçtik:

$$(3) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{k}, \\ -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_2}{n_2} < \frac{1}{k}, \\ &\vdots \\ -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

k nın bu değeri ile Teorem 6.4 ü tatbik eder ve

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}$$

olacak şekilde rasyonel bir m/n sayısını elde ederiz. Şimdi, bu $\lambda - m/n$ in $-1/kn$ ile $1/kn$ arasında bulunmasının ve böylece $\lambda - m/n$ in $-1/k$ ile $1/k$ arasında bulunmasının icap ettiğini söyler; senbolle bu

$$-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}$$

dir. Fakat mademki bütün (3) eşitsizlikleri yanlıştır, m/n in i adet $m_1/n_1, m_2/n_2, \dots, m_i/n_i$ sayılarının her birinden

farklı olduğu sonucunu çıkartırız. Dolayısı ile Teorem 6.5 in eşitsizliklerini sağlayan bir rasyonel kesir daha elde ettik.

MİSAL. İrrasyonel π sayısına, Teorem 6.5 eşitsizliklerini gerçekleyecek, kâfi yakınlıkta (en basitleştirilmiş) dört rasyonel yaklaşık değer bulunuz.

ÇÖZÜM. Evvelâ $\pi = 3,14159 \dots$ olduğundan

$$-\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{3}{1} < \frac{1}{1^2} \quad \text{ve} \quad -\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{1}{1} < \frac{1}{1^2}$$

olduğunu görürüz. Diğer ikisini bulmak için 2, 3 vesaire paydalı en yakın

$$\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \dots$$

rasyonel sayıları elde etmek için Teorem 6.3 teki metodu kullanabiliriz. $6/2$ ile $9/3$ ü atarız, zira en basitleştirilmiş halde değildirler, ve diğerlerini ise Teorem 6.5 teki eşitsizliklerde deneriz; meselâ

$$-\frac{1}{36} < \pi - \frac{19}{6} < \frac{1}{36} \quad (\text{Doğru!})$$

Böylece $13/4$ ile $16/5$ i atmağa, ve $19/6$ ile $22/7$ yi alıkoymağa sevk olunuruz. Böylece $3/1$, $4/1$, $19/6$ ve $22/7$ cümlesi soruya cevap teşkil edecektir.

$22/7$ rasyonel sayısı π nin çok iyi bir yaklaşığıdır. Paydası 1 ile 56 arasında olan ve π ye daha yakın olabilecek hiç bir rasyonel sayı mevcut değildir. $179/57$ rasyonel sayısı π ye $22/7$ den biraz daha yakındır, fakat Teorem 6.5 deki eşitsizlikleri sağlamaz. $355/113$ rasyonel sayısı Teorem 6.5 in eşitsizliklerini sağlar ve π ye $22/7$

ye nazaran bariz olarak daha yakındır. Hakikatte bu altı ondalık haneye kadar sahihtir.

Teorem 6.5 in aşağıdaki kuvvetli ifadesini ispat etmek mümkündür: *İrrasyonel her hangi bir λ sayısı verildiğinde*

$$-\frac{1}{n(n+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(n+1)}$$

olacak şekilde, en basitleştirilmiş, sonsuz çok m/n rasyonel sayıları vardır.

Bu teoremin yardımıyla (π nin nisbeten zayıf bir yaklaşığı olan) $4/1$ sayısı yukarıdaki misalden elenebilir.

Teorem 6.5 in kuvvetli ifadesini ispat etmek için, Teorem 6.4 ün kuvvetli bir ifadesine ihtiyacımız vardır. Biz ancak esas kademelerin taslağını verip teferruatları okura bırakacağız.

Teorem 6.4 ün ispatında, k aralıklarında dağılmış k sayı verildiğinde, ya ilk aralıkta bir sayının varlığını, veya bu sayılardan en az iki veya daha çok sayıyı ihtiva eden bir aralığın mevcut olduğunu söyleyen, Dirichlet'in güvercin-delik prensibi kullanılmıştır. Teorem 6.4 ün daha kuvvetli bir ifadesini elde etmek için birim aralıklarımızı $k+1$ alt aralıklarına ayırırız ve: $k+1$ aralıkta dağılmış k sayısı verilirse, ya ilk aralıkta bir sayının varlığını, veya en az iki sayı ihtiva eden bir aralığın mevcudiyetini söyleriz. Güvercin-delik prensibinin kullanılması, bize ifadeyi değiştirmeden, Teorem 6.4 de şimdi ortaya çıkan daha kuvvetli

$$-\frac{1}{n(k+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(k+1)}$$

eşitsizliğini ikame etmek imkânını vermektedir. Şimdi Teorem 6.5 in kuvvetli şeklinin ispatı hemen yapılır.

Problem serisi 25

1. Verilen irrasyonel bir λ için, Teorem 6.5 in «sonsuz çok rasyonel m/n sayılarından» ikisinde $n = 1$ olduğunu, yani tamsayılar olduklarını ispatlayın.
2. λ verilmiş bir irrasyonel sayı olsun. Tek bir istisnadan gayri, Teorem 6.5 in eşitsizliklerini gerçekleyen her hangi bir rasyonel sayı otomatik olarak Teorem 6.3 ün eşitsizliklerini de gerçeklediğini ispatlayın.
3. Tamsayılar olmayan, Teorem 6.5 in eşitsizliklerini
 (a) $\lambda = \sqrt{2}$; (b) $\lambda = \sqrt{3}$; (c) $\lambda = \sqrt{5}$
 için gerçekleyen iki rasyonel sayı bulun.
4. (a) (1) dizisindeki ilk beş sayıdan hangileri,
 $\lambda = \sqrt{2}$ ile, Teorem 6.3 ün eşitsizliklerini gerçekler?
 (b) Hangileri Teorem 6.5 in eşitsizliklerini gerçekler?
5. (a) (2) dizisindeki ilk beş sayıdan hangileri,
 $\lambda = \sqrt{3}$ ile, Teorem 6.3 ün eşitsizliklerini gerçekler?
 (b) Hangileri Teorem 6.5 in eşitsizliklerini gerçekler?
- *6. $\lambda = 3/5$ hali için Teorem 6.5 ifadesinin yanlış olduğunu ispatlayın.
- *7. (a) a/b ile m/n en basitleştirilmiş pozitif paydalar rasyonel sayılar olsunlar. $n > b$ olursa eşit olamayacaklarını ispat edin. Buradan $n > b$ için

$$-\frac{1}{bn} < \frac{a}{b} - \frac{m}{n} < \frac{1}{bn}$$

eşitsizliklerinin yanlış olduğunu ispatlayın.

(b) λ her hangi sabit rasyonel bir $\lambda = a/b$ sayısı ise Teorem 6.5 in ifadesinin yanlış olduğunu ispatlayın.

- *8. Teorem 6.5 in kuvvetli ifadesinin ispatını (bu problem serilerinden hemen evvel verilmiş krokiyi takip ederek) tamamlayın. $\pi - 4/1$ ile $\pi - 19/6$ nin kuvvetli eşitsizliği gerçekleştirmediğini, fakat $\pi - 22/7$ nin gerçeklediğini gösteriniz.

6.6 Yaklaşıklıkların sınırlanması

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$$

olacak şekilde, her hangi irrasyonel bir λ sayısına tekabül eden sonsuz sayıda m/n rasyonel sayılarının mevcut olduğunu Teorem 6.3 de ispatladık. Sonra da Teorem 6.5 de

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

olacak şekilde sonsuz çok m/n lerin mevcut olduğunu tesis ettik.

$$-\frac{1}{2n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n^2}$$

olacak şekilde sonsuz çok m/n in mevcut olduğunu ispat etmek mümkün müdür?

İspatını burada yapmayacağımıza rağmen cevap evettir. Hakikaten

$$-\frac{1}{\sqrt{5} n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5} n^2}$$

olacak şekilde irrasyonel her hangi bir λ sayısına tekabül eden sonsuz çok m/n lerin bulunduğunu, ve bundan başka $\sqrt{5}$ in en iyi yaklaşığı veren sabit olduğunu ifade eden meşhur bir teorem vardır. Bu, eğer $\sqrt{5}$ yerine daha büyük her hangi bir sabit konulduğunda ifadenin yanlış olacağı anlamına gelir. Sabit büyüklüğünün bir limiti olduğunun nasıl ispat edilebileceğı imkânına dair biraz fikir vermek için, aşağıdaki sonucu tesis edeceğiz:

$$(4) \quad -\frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}$$

olacak şekilde rasyonel m/n sayıları sonsuz çok mevcut değildir.

Hakikatte, 10 dan büyük her hangi bir n tamsayısı için (4) ü ispat etmek imkânsızdır.

İspat direkt değildir. $n > 10$ yanında bazı m ve n tamsayıları için (4) ün cari olduğunu farzederiz.

$$-\frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} - \frac{m}{2}$$

eşitsizliği, $n > 10$ için

$$(5) \quad \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} + \frac{1}{500} < 2$$

olacağına delâlet eder. Diğer taraftan

$$\sqrt{2} - \frac{m}{2} < \frac{1}{5n^2}$$

eşitsizliği, $n > 10$ için

$$(6) \quad \frac{m}{n} > \sqrt{2} - \frac{1}{5n^2} > \sqrt{2} - \frac{1}{500} > 1$$

olacağına delâlet eder.

Şimdi eğer m/n i (4) eşitsizliklerin taraflarına ilâve edersek

$$(7) \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} + \frac{1}{5n^2}$$

elde ederiz.

Teorem 6.1 (e) gereğince, bu üç kısmın her birinin karesi alınabilir ve, her kısmın pozitif olduğunu ispat etmek şartile, eşitsizlikler muhafaza edilebilir. (6) gereğince

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} > 1 - \frac{1}{5n^2} > 1 - \frac{1}{500} > 0$$

olacağını görürüz. Bu sebepten (7) nin bütün kısımları pozitifdir, ve hepsinin karesini alarak

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} \right)^2 < 2 < \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{5n^2} \right)^2,$$

$$\frac{m^2}{n^2} - \frac{2m}{5n^3} + \frac{1}{25n^4} < 2 < \frac{m^2}{n^2} + \frac{2m}{5n^3} + \frac{1}{25n^4}$$

elde edilir. n^2 ile çarparak

$$(8) \quad m^2 - \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2} < 2n^2 < m^2 + \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2}$$

elde edilir. Şimdi (5) den dolayı

$$\begin{aligned}
 m^2 + \frac{2}{5} \left(\frac{m}{n} \right) + \frac{1}{25n^2} &< m^2 + \frac{2}{5} (2) + \frac{1}{25n^2} \\
 (9) \qquad \qquad \qquad &< m^2 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2500} < m^2 + 1
 \end{aligned}$$

olacağını görürüz. Diğer taraftan (5) den dolayı

$$\begin{aligned}
 m^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{m}{n} \right) + \frac{1}{25n^2} &> m^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{m}{n} \right) \\
 (10) \qquad \qquad \qquad &> m^2 - \frac{4}{5} > m^2 - 1
 \end{aligned}$$

yazabiliriz. (8) e (9) ve (10) u tatbik ederek

$$\begin{aligned}
 m^2 - 1 &< m^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{m}{n} \right) + \frac{1}{25n^2} < 2n^2 \\
 &< m^2 + \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2} < m^2 + 1, \\
 m^2 - 1 &< 2n^2 < m^2 + 1
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat $2n^2$ bir tamsayıdır, ve eğer $m^2 - 1$ ile $m^2 + 1$ tamsayıları arasında bulunursa, m^2 ye eşit olacaktır. Bu sebepten

$$2n^2 = m^2, \quad 2 = \frac{m^2}{n^2}, \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

sonucuna varırız; burada m ve n tamsayılar olarak farzedilir, $\sqrt{2}$ irrasyonel olduğundan bu bizi bir çelişmezliğe düşürür.

Problem serisi 26

$$1. \quad (a) \quad -\frac{1}{5n^2} < \sqrt{3} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}$$

olacak şekilde, $n > 10$ ile, rasyonel hiç bir m/n sayısının mevcut olamayacağını ispatlayın.

(b) Bu eşitsizlikleri gerçekleyen bütün rasyonel m/n sayılarını bulun.

$$2. \quad (a) \quad -\frac{1}{n^3} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}$$

olacak şekilde, $n > 10$ ile, rasyonel hiç bir m/n sayısının mevcut olamayacağını ispatlayın.

(b) Bu eşitsizlikleri gerçekleyen bütün rasyonel m/n sayılarını bulun.

$$3. \quad (a) \quad -\frac{1}{n^3} < \sqrt{3} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}$$

olacak şekilde, $n > 10$ ile, rasyonel hiç bir m/n sayısının mevcut olamayacağını ispatlayın.

(b) Bu eşitsizlikleri gerçekleyen bütün rasyonel sayıları bulun.

6.7 Özet

Sonsuz çok rasyonel m/n sayıları ile her hangi irrasyonel bir λ sayısına ne kadar yaklaşılabilceği hakkında bir çok sonuçlar tesis ettik. Kuvvetli teorem, λ ya $1/n$ civarı dahilinde yaklaşık ifade edilebileceğini, ifade eder. Bundan sonra 6.6 kısmında negatif bir sonuç tesis ettik, yani $\sqrt{2}$ nin $1/(5n^2)$ civarı dahilinde m/n rasyonellerinin

sonsuz çok olamayacaklarını tesis ettik. Benzer negatif bir sonuç ta her hangi cebrik bir sayıya tatbik edilir. Her hangi cebrik bir λ sayısı için, λ ya $1/n^3$ civarı dahilinde sonsuz çok rasyonel m/n sayılarının mevcut olamayacağı doğrudur, fakat burada ispatı verilmemiştir. Genel olarak transandant sayılar için bu söylenemez; hepsi için doğru olmayıp, bazı transandant sayılar için doğrudur. Gelecek bölümde, sonsuz çok m/n ile yaklaşık ifade edilebilen bir sayının yalnız $1/n^3$ civarı içinde olmayıp, fakat $1/n^4$, $1/n^{100}$ ve, hatta okur j yi ne kadar büyük seçerse seçsin, $1/n^j$ civarı içinde yaklaşık ifade edilebileceğini göstereceğiz. Ortaya konulan böyle sayıların cebrik olmadıkları ispat edilecektir, ve böylece bu gibi şeylerin transandant sayılar olduklarını göstermiş olacağız. Mevcut olduklarını bile bilmeden, şimdiye kadar, bunlardan bahsettik!

BÖLÜM 7

TRANSANDANT SAYILARIN MEVCUDİYETİ

Transandant sayıların mevcudiyetini nasıl biliyoruz? Bu sorunun cevabını bu nihai bölümde vereceğiz. Transandant bir sayıyı göstermek oldukça kolaydır; transandant olduğunu ispat ise tamamen başka bir konudur. Transandantlığını tesis edeceğimiz özel sayının ondalık açılımı, pek çok sıfırdan ibaret olma gibi mühim bir özelliğe sahiptir. Bu sayıyı α ile göstereceğiz; değeri

$$\alpha = 0,1100010000 \dots$$

dir; burada birler

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots$$

numaralı ondalık hanelerde, yani

$$1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, \dots$$

numaralı ondalık hanelerde bulunur. k bir tabii sayı olmak üzere, $k!$ senbolü *faktoriel* k olarak okunmalıdır ve 1 den k ya kadar bütün tabii sayıların çarpımını gösterir; şu halde

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k$$

dır.

α nın ondalık açılımındaki bütün rakkamlar, yukarıda yerleri faktoriel sayılarla tarif edilenler hariç, sıfırdır.

Dolayısıyla α 10'un negatif kuvvetlerinin bir toplamı olarak yazılabilir; yani

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \alpha &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + \dots \\
 &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \dots \\
 &= 0,1 + 0,01 + 0,000001 + \dots
 \end{aligned}$$

dir. Bu α sayısına, transandant sayıların mevcudiyetini ilk gösterip ispat eden Fransız matematikçisine izafeten, bir Liouville sayısı denir.

α 'nın cebrik olmadığını ispat için transandant α sayısının hangi muşahhas (konkret) özelliğini kullanabiliriz? Cevap, α sonsuz çok rasyonel m/n ile yalnız $1/n^2$ civarı dahilinde yaklaşık ifade edilebilmeyip, $1/n^3$, $1/n^4$, ve r her hangi pozitif bir sayı olursa olsun, $1/n^r$ civarı içinde de ifade edilebileceğidir. Hiç bir cebrik sayı bu özelliğe sahip değildir. Eğer λ her hangi irrasyonel bir sayı ise, Teorem 6.5 de gördüğümüz gibi, $1/n^2$ civarı içinde sonsuz çok m/n rasyonel ile yaklaşık ifade edilebilir. Fakat eğer λ cebrik ise, sonsuz çok m/n ile $1/n^3$ civarından veya hattâ $1/n^{2,1}$ civarından daha yakın yaklaşık ifade edilemez; $1/n^r$ lerin arasında mümkün olan en iyisi $1/n^2$ civarı dahilidir. Cebrik sayılar hakkındaki bu cins bir sonucu bulmak, senelerce çözülemeyen askıda kalmış bir problemdi. İngiliz matematikçisi K. F. Roth 1955 yılında problemi çözmüş ve hünerli bu çalışma için 1958 yılında İskoçyada Edinburgda Milletlerarası Matematikçiler Kongresinde bir Fields madalyası kendisine tevcih edilmiştir. Sonuç Thue-Siegel-Roth teoremi olarak bilinir, zira Thue ve C. L. Siegel Roth'un çalışmasının dayandığı bazı belli başlı sonuçları ispat ettiler.

Söylediğimiz gibi, α 'nın transandantlığını ispat etmek α 'nın ondalık açılımını yazmaktan çok daha zor bir mesele.

ledir. Kısım 6.1 deki eşitsizlikler hakkındaki fikirleri kullanacağız. Mutlak değer kavramına da ihtiyacımız vardır. Okur belki bu kavrama aşınadır, fakat aşına değil ise, bu konuya ve çarpan teoremine kısa bir giriş veriyoruz.

7.1 Cebire ait bazı başlangıç bilgileri

Her hangi reel bir a sayısı ya pozitif, ya negatif veya sıfırdır. Böyle her a sayısı için, $|a|$ senbolü ile gösterilen, « a nın mutlak değeri» ni tarif edeceğiz *. Eğer a pozitif veya sıfır ise, a nın mutlak değerini $|a| = a$ denklemi ile tarif ederiz. Eğer a negatif ise, tarif $|a| = -a$ dır. Meselâ,

$$|0| = 0, \quad |7| = 7, \quad |-4| = 4, \quad |-6| = 6$$

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |-1000| = 1000.$$

a nın pozitif, sıfır, veya negatif olmasına göre tarifi hallere ayırmak yerine, a nın mutlak değerini

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

basit denklemi ile tarif edebiliriz, zira $\sqrt{a^2}$ nın hiç bir vakit negatif bir değer göstermeyeceği konvansiyonu vardır.

İki sayının eşit olmasının esas bir sonucu da mutlak değerlerinin eşit olmasıdır. Eğer $a = b$ ise, senbollerle $|a| = |b|$ yazılır. (2) tarifimizin basit diğer bir sonucu,

*) Mutlak değer kavramının daha yakından tetkiki için Edwin Beckenbach ve Richard Bellman'ın bu serideki monografının Bölüm III'üne bakınız.

a ne değerde olursa olsun, a ve $-a$ nin aynı mutlak değerlere sahip oluşudur. Sembollerle $|a| = |-a|$ yazılır.

Diğer önemli bir sonuç ta

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

dir. Bunu (2) yi kullanarak kolayca aşağıdaki şekilde ispat edebiliriz:

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

olacak şekilde

$$|a| = \sqrt{a^2}, \quad |b| = \sqrt{b^2}, \quad |ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$

dir.

Daha sonra $|a + b|$ nin $|a| + |b|$ ile münasebeti nedir?

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

olduğunu göstereceğiz. Karmaşık sayılarda *Üçgen eşitsizliği* diye bilinen bu sonucu ispat etmek için, problemi hallere ayırırız.

Eğer a ve b nin her ikisi de pozitifse, o zaman

$$|a + b| = |a| + |b|$$

olacak şekilde

$$|a + b| = a + b, \quad |a| = a, \quad |b| = b$$

dir. Eğer a ve b nin her ikisi de negatifse, o zaman tekrar

$$|a + b| = |a| + |b|$$

olacak şekilde

$$|a + b| = -a - b, \quad |a| = -a, \quad |b| = -b$$

dir. Eğer a ve b değişik işaretle iseler, biri pozitif ve diğeri negatif ise, o zaman $a+b$ de bir miktar birbirini götürür, ve $|a+b|$ nin $|a|$ ve $|b|$ nin en büyüğünden küçük olduğunu söyleyebiliriz. Bundan

$$|a+b| < |a| + |b|$$

çıkar.

Eğer sayılardan biri, meselâ $b=0$, sıfır olursa, o zaman

$$|a+b| = |a+0| = |a|, \quad |b| = |0| = 0,$$

ve dolayısı ile

$$|a+b| = |a| + |b|$$

olur.

Özet olarak, bütün hallerde

$$|a+b| = |a| + |b| \quad \text{veya} \quad |a+b| < |a| + |b|$$

den biri vardır.

Mutlak değerler hakkındaki bütün bu sonuçlar aşağıdaki teoremden toplanmıştır.

TEOREM 7.1. *Bütün a ve b reel sayılar için*

- (1) *Eğer $a=b$ ise, o zaman $|a|=|b|$ dir;*
- (2) $|a| = |-a|$;
- (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- (4) $|a+b| \leq |a| + |b|$

vardır.

Bundan sonra cebirdeki *çarpan teoremini* ispat ediyoruz. Hakikatte bunu ilerdeki ihtiyaçlarımız için ispat edeceğiz.

TEOREM 7.2. *$f(x)$ katsayıları tamsayı olan bir*

polinom ve rasyonel β sayısı $f(x) = 0$ n bir kökü olsun. Bu takdirde $x - \beta$ $f(x)$ in bir çarpanıdır; yani $f(x) = (x - \beta) q(x)$ olacak şekilde bir $q(x)$ polinomu vardır. Bundan başka $q(x)$ in katsayıları rasyonel ve derecesi de $f(x)$ in derecesinden bir derece aşağıdır.

İSPAT. $f(x)$ i $x - \beta$ ye bölersek bir $q(x)$ bölüm sonucu ile bir r kalanı elde ederiz. Kalanın derecesi daima bölünen (bu halde birinci derece bir polinom olan $x - \beta$) derecesinden daha ufak olduğundan, r x ten müstakil bir bir sabittir. Bundan

$$f(x) = (x - \beta) q(x) + r$$

çıkar, ve bölme işlemindeki kademeler rasyonel operasyonlar diye bilindiğinden, $q(x)$ in katsayılarının rasyonel olmaları lâzımdır. Yukarıdaki denklem x cinsinden bir özdeşliktir, şu halde x yerine β koyarak

$$f(\beta) = r$$

elde ederiz. Mamafih $f(\beta) = 0$ dır, zira β $f(x) = 0$ in bir köküdür. Bundan dolayı $r = 0$ dır. Böylece $f(x)$ in $x - \beta$ ile bölümü bir sıfır kalan verir, ve böylece

$$f(x) = (x - \beta) q(x)$$

dir. En nihayet, $f(x)$ in derecesi ne olursa olsun, $q(x)$ in derecesi bir derece aşağıdır.

Problem serisi 27

1. $|2|$, $|-2|$, $|-8|$, ve $|10^{-1}|$ in değerlerini yazın.
2. Eğer $a = b$ ise $|a| = |b|$ olduğu metinde tesis edilmişti. Bunun karşıtı doğru mudur?
3. $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$ olduğunu ispat edin.

4. (a) $x \geq -7$ olursa $|x + 7| = x + 7$ olacağını, fakat $x \leq -7$ olursa $|x + 7| = -x - 7$ olacağını ispat edin.
- (b) $|x - 7| = x - 7$ nin benzer bir analizini verin.
5. x in, eğer varsa, hangi değerleri için aşağıdaki denklemler caridir?
- (a) $|x + 7| = 5 + |x|$; (c) $|x + 7| + |x - 7| = |x| + 7$;
 (b) $|x| = |x - 4|$; (d) $|2x| = 2|x|$.

6. Bölüm 6 daki Teorem 6.5 in

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliklerinin

$$\left| \lambda - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}$$

şeklinde yazılabileceğini ispatlayın.

7. $8! = 8(7!)$ olduğunu ispat edin: $(j+1)! = (j+1)(j!)$ olduğunu da ispat edin.
8. $(j+1)! - j! = j(j!)$ olduğunu ispat edin.
9. $3/2$ nin $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 4x - 21 = 0$ in bir kökü olduğunu deneyin. Sonra bu polinomu $f(x)$ ile gösterip Teorem 7.2 yi, $f(x)$ in $x - 3/2$ ile bölünmesinde $q(x)$ bölüm sonucunu hesaplayarak, gerçekleyin.

7.2 α ya yaklaşık bir hesaplama

α nın transansantlığının belli başlı sebebi bazı rasyonel sayılarla fevkalâde iyi şekilde yaklaşık hesaplanabileceğidir. Biz şimdi bunu ispatlayacağız. α nın iyi bir

rasyonel yaklaşığı, α yı tarif eden (1) serisinin terimlerini sonlu sayıda almakla, elde edilebilir. (1) de verildiği gibi α nın ilk j teriminin toplamını β olarak tarif ederiz; yani

$$(3) \quad \beta = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \dots + 10^{-j!}$$

dir. j tamsayısının değeri daha sonra açıklanacaktır. β nın rasyonel olduğunu görürüz, çünkü paydaları 10 un kuvvetleri olan kesirlerin bir toplamı olarak yazılabilir;

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{j!}}$$

Bütün bu kesirler müşterek $10^{j!}$ paydası ile yazılabilir, ve böylece basit bir

$$\beta = \frac{t}{10^{j!}}$$

kesrini vermek üzere toplanabilir; burada t payı tam değeri bilinemeyen bazı *tamsayını* gösterir.

β rasyonel sayısı α ya çok yakındır. (1) ve (3) eşitliklerinden

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + 10^{-(j+3)!} + \dots$$

olduğunu görürüz. $\alpha - \beta$ nın ondalık açılımı, α nın kendisinde olduğu gibi, sıfır sıfır ve birlerden ibarettir. 1 rakkamı ilk defa $(j+1)!$ hanesinde rastlanır, bundan sonra $(j+2)!$ hanesinde rastlanır, v.s. Böylece $\alpha - \beta$ sayısı

$$0,000000 \dots 0000002$$

den daha küçüktür; burada $(j+1)!$ hanesindeki 2 rakkamı

hariç bütün rakkamlar sıfırdır. Bunu söylemenin diğer bir yolu da

$$(5) \quad \alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}}$$

dir.

α ve β yı ihtiva eden başka bazı basit eşitsizliklere ihtiyacımız olacaktır. Mademki α ve β pozitifler, o halde α ve β nin bütün kuvvetleri de pozitiftir. Bundan başka, $\alpha < 1$ ve $\beta < 1$ olduğundan, her hangi pozitif r ve s tamsayıları için $\alpha^r < 1$ olacağını, $\beta^s < 1$ olacağını, ve $\alpha^r \beta^s < 1$ olacağını görürüz, ve böylece

$$(6) \quad 0 < \alpha^r < 1, \quad 0 < \beta^s < 1, \quad 0 < \alpha^r \beta^s < 1,$$

olur.

7.3 İspatın bir plânı

α nın transandant olduğunu ispat etmek için, tamamen aksini kabul edeceğiz, yani α nın cebrik olduğunu kabul edeceğiz ve bir çelişmezliğe düşeceğiz. α nın cebrik olduğunu kabul etmek α nın, katsayıları tamsayılar olan, bazı cebrik denklemi gerçeklediği anlamındadır. α tarafından gerçekleştirilen katsayılar tamsayılar olan bütün cebrik denklemler arasından en alçak derecelisini seçelim, bu

$$(7) \quad c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

olsun. İşi kısa tutmak için (7) nin sol tarafındaki polinom yerine $f(x)$ yazacağız. Bu $f(x)$ polinomu Bölümün geri

kalan kısmı boyunca mühim bir rol oynayacaktır. $f(x)$ hakkında akılda tutulması icap eden temel faraziyeler şunlardır:

- (1) Katsayıları tamsayılardır;
- (2) α sayısı, $f(\alpha)$ idantik olarak sıfır olacak şekilde $f(x) = 0$ in bir köküdür; [burada $f(\alpha)$ olarak $f(x)$ de x yerine α koyarak elde edilen sonucu anlıyoruz];
- (3) α sayısı, katsayıları tamsayılar olan, n den daha aşağı derecedeki hiç bir denklemin kökü değildir.

$f(x)$ de x yerine β koyarak elde edilen $f(\beta)$ sayısı da analizde büyük rol oynayacaktır.

İspatın esas fikri şudur. $f(\alpha) - f(\beta)$ [veya $f(\alpha) = 0$ olduğunda aynı değerde olan $-f(\beta)$] sayısına iki farklı yoldan bakacağız. $-f(\beta)$ yı β cinsinden katsayıları tamsayı olan bir polinom olarak görürüz. Mademki β rasyoneldir, $-f(\beta)$ de rasyoneldir, ve mutlak değerinin nisbeten büyük olduğunu görürüz. $f(\alpha) - f(\beta)$ yı iki polinomun farkı olarak görürüz; ve gelecek kısımda nisbeten küçük olan bu farkın $\alpha - \beta$ nin büyüklüğü mertebesinde olduğunu göstereceğiz [Bakınız, denklem (5)]. Böylece, α yı cebrik kabul ederek, $f(\alpha) - f(\beta)$ için çatışan iki büyüklük mertebesi çıkarıyoruz ve böylece bir çelişmezlik tesis ediyoruz.

Bunun için $f(\beta)$ nin sıfır olmadığını ve $f(\alpha) - f(\beta)$ nin $\alpha - \beta$ ile aynı büyüklük mertebesinde olduğunu göstererek gelecek kısma yol hazırlıyoruz.

Problem serisi 28

$$1. \quad (a) \quad \alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta) (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3);$$

$$(b) \alpha^5 - \beta^5 = (\alpha - \beta) (\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4);$$

$$(c) \alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta) (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^4 + \beta^5)$$

özdeşliklerini gerçekleyin.

2. Derecesi 6 olan bir polinom ile $\alpha - \beta$ nin çarpımının $\alpha^7 - \beta^7$ olacağını ifade eden bir özdeşlik yazın.
3. Cebrik bir sayının, katsayıları tamsayılar olan, sonsuz çok cebrik denklemlerin kökleri olduğunu ispatlayın.

7.4 Polinomların özellikleri

TEOREM 7.3. β sayısı (7) denkleminin bir kökü değildir; yani $f(\beta) \neq 0$ dir.

İSPAT. Eğer $\beta(7)$ nin bir kökü olsaydı, o zaman Teorem 7.2 gereğince $x - \beta$ $f(x)$ in bir çarpanı, yani

$$f(x) = (x - \beta) q(x)$$

olacaktı. Teorem 7.2 dolayısıyla $q(x)$ in rasyonel katsayıları vardır, ve derecesi $f(x)$ in derecesinden bir aşağıdır. Şimdi, α $f(x) = 0$ in bir kökü olduğundan

$$f(\alpha) = (\alpha - \beta) q(\alpha) = 0$$

olur. Fakat ancak eğer çarpanlardan en az biri sıfır ise bu çarpım sıfırdır. $\alpha - \beta$ çarpanı sıfır değildir, zira α β dan farklıdır. Şu halde $q(\alpha) = 0$ dir; yani α $q(x) = 0$ in bir kökü ve $q(x)$ in derecesi $n - 1$ dir. Eğer $q(x)$ in rasyonel katsayılarının bütün paydalarının çarpımını k ile gösterirsek, o zaman $kq(x)$ çarpımının katsayıları tamdır ve α $kq(x) = 0$ in bir köküdür. Fakat bu, α nın katsa-

yıları tamsayı olan n den daha küçük derecede hiç bir denklemi sağlamadığı olayı ile çelişme halindedir. $f(\beta) = 0$ hipotezi bir çelişmezliğe sevkettiğinden $f(\beta) \neq 0$ sonucuna varıyoruz.

Bundan sonra son kısımda verilen ana hattı takip ederek $|f(\alpha) - f(\beta)|$ nin, çok küçük olan $|\alpha - \beta|$ nin aynı büyüklük mertebesinde olduğunu göstereceğiz (Bakınız Kısım 7.2).

TEOREM 7.4. $|f(\alpha) - f(\beta)| < N |\alpha - \beta|$
olacak şekilde ve ancak $f(x)$ in katsayıları ile derecesine bağlı bir N sayısı vardır.

İSPAT. N sayısı

$$(8) \quad N = n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + (n-2)|c_{n-2}| \\ + \dots + 2|c_2| + |c_1|$$

denklemleri ile tarif edilmiştir. Bilhassa β nin tarifinde kullanılan j tamsayısına N in bağlı olmadığına dikkat ediniz.

İspat boyunca $\alpha^k - \beta^k$ nin çarpanlara ayrılması ile $\alpha^k - \beta^k$ nin sağladığı bir eşitsizliği kullanacağız. Çarpanlara ayrılma

$$(9) \quad \alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta) (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \alpha^{k-3}\beta^2 \\ + \dots + \alpha^2\beta^{k-3} + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1})$$

ile verilmiştir; burada k her hangi pozitif bir tamsayıdır. Bu çarpanlara ayrılma (9) denkleminin sağ tarafı çarpılarak sağlanabilir:

$$\alpha(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}) \\ = \alpha^k + \alpha^{k-1}\beta + \dots + \alpha^2\beta^{k-2} + \alpha\beta^{k-1}$$

ve

$$\begin{aligned} & \beta(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}) \\ &= \alpha^{k-1}\beta + \alpha^{k-2}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{k-1} + \beta^k. \end{aligned}$$

Eğer bu iki denklemi birbirinden çıkartırsak, ilk denklemin ilk terimi ve ikinci denklemin son terimi hariç, bütün terimlerin yok olduğunu görürüz. Böylece ancak $\alpha^k - \beta^k$ kalır.

(9) denkleminin sağ tarafına baktığımızda, (6) eşitlikleri sayesinde α^{k-1} , $\alpha^{k-2}\beta$ v.s. terimlerin her birinin 1 den küçük olduğunu görürüz. Fakat mademki bu terimlerden tam k tane vardır ve $\alpha - \beta$ pozitifdir, şu halde

$$\begin{aligned} (10) \quad \alpha^k - \beta^k &< (\alpha - \beta) (1 + 1 + \dots \\ &+ 1 + 1 + 1) = k (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Şimdi (7) denklemini kullanarak $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ yı hesaplar ve $f(\alpha)$ dan $f(\beta)$ yı çıkartırız. Böylece

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= c_n (\alpha^n - \beta^n) + c_{n-1} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \\ &+ \dots + c_1 (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bundan sonra sağ taraftaki bütün terimlere müşterek $\alpha - \beta$ çarpanını dışarı almak için (9) özdeşliğini kullanırız. Bu bize

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha - \beta) [c_n (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots \\ &+ \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) \\ &+ c_{n-1} (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-3} \\ &+ \beta^{n-2}) + \dots + c_1] \end{aligned}$$

verir. Mutlak değerleri alıp Teorem 7.1 ve (10) eşitsizliğini kullanarak

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < |\alpha - \beta| [n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + \dots + |c_1|]$$

elde ederiz. $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ olduğuna dikkat ederek ve N sayısını tarifleyen (8) denklemini kullanarak nihayet

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$$

elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

7.5 α nın transandantlığı

Şimdi (1) denklemi ile tarif edilen α sayısının transandantlığının ispatını tamamlayacağız. Evvelâ $f(\alpha) - f(\beta)$ yı başka bir yoldan tetkik edeceğiz.

TEOREM 7.5. *j pozitif tamsayısına ne değer verilirse verilsin*

$$(11) \quad |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{n \cdot j!}$$

sayısı pozitif bir tamsayıdır.

İSPAT. Mademki $f(\alpha) = 0$ dır, söz konusu edilen sayı

$$|-f(\beta)| \cdot 10^{n \cdot j!} \quad \text{veya} \quad |f(\beta)| \cdot 10^{n \cdot j!}$$

şeklinde yazılabilir. (7) ve (4) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
 f(\beta) &= c_n \beta^n + c_{n-1} \beta^{n-1} + c_{n-2} \beta^{n-2} + \dots + c_1 \beta + c_0 \\
 &= \frac{c_n t^n}{10^{n,j!}} + \frac{c_{n-1} t^{n-1}}{10^{(n-1),j!}} + \frac{c_{n-2} t^{n-2}}{10^{(n-2),j!}} \\
 &\quad + \dots + \frac{c_1 t}{10^{j!}} + c_0
 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. $10^{n,j!}$ ile çarparak

$$\begin{aligned}
 f(\beta) \cdot 10^{n,j!} &= c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} 10^{j!} + c_{n-2} t^{n-2} 10^{2,j!} \\
 &\quad + \dots + c_1 t^{(n-1),j!} + c_0 10^{n,j!}
 \end{aligned}$$

elde ederiz; sağ taraf bir tamsayıdır. Bu tamsayı sıfır olamaz, zira Teorem 7.3 gereğince $f(\beta) \neq 0$ dir. Mutlak değerleri alarak

$$|f(\beta) \cdot 10^{n,j!}| \quad \text{veya} \quad |f(\beta)| \cdot 10^{n,j!}$$

nin bir pozitif tamsayı olduğunu görürüz; Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi, (11) ile verilen sayının 0 ile 1 arasında bulunduğunu göstererek Teorem 7.5 ile açık bir çelişmezliğe düşeceğiz. Bunu yapmak için, β nın tarifinde kullanılan, j tamsayısını

$$(12) \quad \frac{2N \cdot 10^{n,j!}}{10^{(j+1)!}} < 1$$

gerçekleyecek şekilde seçeceğiz. Bu yapılabilir mi? Yapılabilir, zira bu eşitsizlik

$$\frac{2N}{10^{(j+1)!} - n,j!} < 1$$

e denktir, burada paydadaki üs

$$(j+1)! - n \cdot j! = (j+1)j! - n \cdot j! = (j+1-n)j!$$

gibi yazılabilir. Sabit n için j yi çok büyük alarak bu üs istenildiği kadar büyük yapılabilir. n ve N (7) ve (8) denklemlerile tesbit edilmiştir; fakat mademki j ne n e ve ne de N e bağlı olmadığından (12) sağlanacak şekilde j yi büyük alabiliriz.

Bundan sonra (11) ile verilen sayının 0 ile 1 arasında bulunduğunu Teorem 7.4 ve (5) eşitsizliğini kullanarak göstereceğiz; böylece

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{n \cdot j!} &< N(\alpha - \beta) \cdot 10^{n \cdot j!} \\ &< \frac{2N \cdot 10^{n \cdot j!}}{10^{(j+1)!}} \\ &< 1 \end{aligned}$$

dir; burada en son adımda (12) yi kullandık. Tabii (11) deki sayı, Teorem 7.3 gereğince, pozitifdir.

Bu yüzden bir çelişmezliğe düşeriz, ve α nın (7) şeklinde her hangi bir denkleme sağlamadığı sonucuna varırız. Şu halde α transandant bir sayıdır.

7.6 Özet

Bu bölümde «Her hangi bir transandant sayı var mıdır?» sorusunu bir Liouville sayısını ortaya koyup bunun transandant olduğunu, yani cebrik olmadığını ispatladık.

Detaylar ispatı gölgeliyebileceğinden ispatın tamamını tekrar gözden geçirelim. Esas fikir olarak

$$\alpha = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \dots$$

sayısının rasyonel sayılar ile çok sıkı yaklaşımının bulunabileceğini bölümün başlangıcında söyledik. Hakikaten bu olay, β ya nazaran $\alpha - \beta$ nin çok küçük olduğunu söyleyen (5) eşitsizliğinde ifade edilmiştir. β nin paydası $10^{j!}$ olan rasyonel bir sayı olduğunu [Bakınız: (4) denklemi], fakat $\alpha - \beta$ nin ise $10^{-(j+1)!}$ mertebesinde olduğunu hatırlayalım. Bu büyüklüğün küçük mertebesi Teorem 7.4 de $\alpha - \beta$ den $f(\alpha) - f(\beta)$ ya teşmil edilmiştir; burada $f(x)$ $x = \alpha$ için sıfır olan ve katsayıları tamsayılar olan bir polinomdur.

Diğer taraftan Teorem 7.5 de $f(\alpha) - f(\beta)$ yi tamamen farklı bir yoldan göz önüne alarak, $f(\alpha) - f(\beta)$ nin büyüklüğünün daha evvel yapılan tahminden daha büyük olduğunu gösterdik. (Teorem 7.5 de $10^{n \cdot j!}$ çarpanı esaslı bir rol oynamamaktadır; $f(\alpha) - f(\beta)$ nin iki büyüklük mertebesi arasındaki bariz tezağı göstermek için mevcuttur.) Bu $f(\alpha) - f(\beta)$ nin sadece $-f(\beta)$ olduğunu ve $f(\beta)$ nin paydası $10^{n \cdot j!}$ olan bir rasyonel sayı olduğunu kabul etmekle yapılmıştır. Bu sebepten α nın $f(x) = 0$ i gerçeklediği hipotezi bize $f(\alpha) - f(\beta)$ nin daha evvel hesabının gösterildiğinden çok daha büyük olma ispatı imkânını vermektedir. Bu tezağ α nın transandant olduğu olayını tesis eder.

E K A

SONSUZ ÇOK ASAL SAYI MEVCUDİYETİNİN İSPATI

Burada yapılan ispat endirekt ispat adı ile maruftur, veya çelişmezlikle veya *reductio ad absurdum* ile ispat diye bilinir. Bu tip ispatta önermenin yanlış olduğu kabul edilir sonra da bu ipoteze aykırı bir sonuç çıkartılır. Şimdiki önerme halinde, şu halde, ancak sonlu sayıda asal sayının mevcudiyetini kabul ederiz.

Bundan sonra asal sayılar için bir notasyon sistemi tesis edeceğiz. Ancak sonlu bir sayıda olduklarından onları

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$$

ile gösterelim. k her hangi bir tabii sayı olmak üzere, bu notasyon tam k sayıda asal sayının mevcut olduğunu gösterir. Bu asal sayıların büyüklüklerine göre sıralandıklarını kabul edersek, tabii $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$, v.s. olur. Bununla beraber bu ispatta 2, 3, 5, v.s. yerine p_1, p_2, p_3 , v.s. notasyonunu kullanmak daha elverişlidir.

Her tabii sayının asal sayılar çarpanlarına ayrılabil-
diğinden her tabii sayının

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$$

asal sayılarından en az birisi ile bölünebileceğini görürüz, çünkü ipotezimize göre bunlardan gayrı başka asal sayı yoktur. Fakat bütün asal sayıların çarpımına 1 ilâvesi ile

elde edilecek tabii n sayısını göz önüne alalım:

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k + 1$$

Bu n sayısı p_1 ile bölünemez, çünkü p_1 i n ile bölersek

$$\text{bölüm sonucu} = p_2 p_3 \cdots p_k \quad \text{kalan} = 1$$

bir bölüm sonucu ile bir kalan elde edilir.

Eğer n p_1 ile bölünebilseydi kalan 0 olacaktı; şu halde n p_1 ile bölünemez.

Benzer bir ispat n in p_2 veya p_3 veya p_4 , ..., veya p_k ile bölünemediğini gösterir.

Hangisi ile olursa olsun hiç bir asal sayı ile bölünemeyen bir n sayısının mevcudiyetini gösterdik, bu ise saçma bir sonuçtur. Böylece, ancak sonlu miktarda asal sayının mevcudiyeti hipotezi bir mantiki çelişmezliğe sevkeder, dolayısı ile bu hipotez yanlış olmalıdır. Bu sebepten sonsuz çok sayıda asal sayı vardır.

E K B

ARİTMETİĞİN TEMEL TEOREMİNİN İSPATI

Bu ekde 1 den gayrı her tabii sayının, çarpanların sırası hariç, ancak tek bir tarzda asal sayı çarpanlarına ayrılabilceği ispatlanmıştır. 23 de olduğu gibi, kendisi asal bir sayı olan her hangi bir tabii sayıda olduğu gibi bir «asal sayılar çarpanlarına ayrılma» anlaşılır. Sonuç küçük tabii sayılar için kolayca sağlandığı görülür. Meselâ 10 2.5 olarak çarpanlara ayrılabilir, ve başka bir çarpanlara ayrılmanın mümkün olmadığını tecrübe ile biliriz. 10 a kadar olan bütün sayılar için aynısı doğrudur:

$$2 = 2$$

$$3 = 3$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$7 = 7$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

Bu liste devam edilebilir, fakat ne kadar uzun olursa olsun böyle bir listeleme bir ispat teşkil etmez. Çünkü, ne de olsa, sonsuz çok sayıda tabii sayı vardır; bütün hepsinin çarpanlara ayrılmasının kontrolunu yapamayız.

Bunun için matematik bir ispata lüzum vardır. 2 den

10 a kadar bütün tabii sayıların, her birinin yegâne tarzdaki çarpanlara ayrılmaları ile, listesi yapılmıştır. Şimdi her tabii sayı için ya bu liste yegâne çarpanlara ayrılmasını vermek üzere sonsuz olarak genişletilebilir veya listenin bir yerinde yegâne tarzda bölenlere ayrılma son bulur. Bunlar yalnız mümkün olan iki imkândır. Bu iki imkândan birincisini tesis etmek istiyoruz ve bunu biz indirekt bir ispatla yapacağız. İkinci imkânın cari olduğunu farzederiz, yani tabii sayıların listelenmesinin bir yerinde yegâne şekilde çarpanlara ayrılma özelliğinin son bulduğunu, ve bunun bir çelişmezliğe sevkettiğini gösteririz.

Oldukça uzun olan bu ispatın teferruatlarını yerine getirmeden evvel okura yol göstermek için, kısa bir taslak veriyoruz.

Birden daha fazla tarzda asal çarpanlara ayrılabilen ilk tamsayıyı m ile göstereceğiz, ve m için iki farklı çarpanlara ayrılma yazacağız. İspatın Kısım I 'inde, m in bir çarpanlara ayrılmasında geçen hiç bir asal sayının diğer çarpanlara ayrılmada geçmiyeceğini göstereceğiz. Eğer m in hakikaten iki farklı tarzda çarpanlara ayrılması varsa, birindeki bütün asal sayıların diğerindeki bütün asal sayılardan farklı olacağını tesis ettikten sonra, nihayet, m den daha küçük olan ve iki farklı yoldan çarpanlara ayrılabilen bir sayıyı ispatın Kısım II sinde inşa ederiz. Bu, m in iki farklı asal çarpanlarına ayrılan en küçük tamsayı olması faraziyesini yalanlar, ve bu ise ispatı tamamlar.

Birden fazla tarzda asal çarpanlarına ayrılabilen ilk tamsayıyı m ile gösterelim. diğer bir deyimle, m den küçük her tabii sayının yegâne tarzda çarpanlara ayrılma özelliğine sahip olduğunu farzederiz, halbuki m in birden fazla çarpanlara ayrılması vardır. Böylece m in en az iki farklı çarpanlara ayrılmasının mevcut olduğunu biliriz. Bunları

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{ve} \quad m = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

olarak yazarız. Bu notasyondan ne kastederiz? m in p_1, p_2, p_3 , v.s. p_r e kadar asal çarpanlarına ayrılabilceğini, ve m in diğer bir q_1, q_2, q_3 , v.s. q_s e kadar asal çarpanlarına ayrılmasının başka bir yolunun daha varlığını kastediyoruz. Neden q_1, q_2, q_3 , v.s. q_s e kadar değil? Çünkü çarpanlara ayrılmanın her ikisinde asal çarpanlar sayısının aynı olduğunu farzedemeyiz; bütün bildiklerimiz için ayrı olabilir.

Notasyonun daha çok izahata ihtiyacı vardır. Ek A da yaptığımız gibi, p_1 in 2 asal sayısının tam başka bir etiketi, p_2 nin 3 asal sayısının başka bir etiketi, v.s. olduğunu kastetmiyoruz. Aslâ. 2 asal sayısının $p_1, p_2, \dots, p_r$ yığnında olup olmadığını bilmeyiz. Böylece p_1 2 olabilir, veya 23 olabilir, veya 47 olabilir, veya bunlardan hiç biri olmayabilir. Sadece asal bir sayıdır. Benzer şekilde p_2 her hangi bir asal sayıdır. p_1 gibi aynı asal sayı olabilir, veya olmayabilir. Bütün farzedeceğimiz şey m tabii sayının asal çarpanlarına ayrılmasının iki farklı yoldan yapılabilceğidir.

İSPATIN BİRİNCİ KISMI. Şimdi göstereceğimiz ilk şey birinci yığındaki $p_1, p_2, \dots, p_r$ asal sayıların ikinci yığındaki $q_1, q_2, \dots, q_s$ asal sayılarından tamamen farklı olmasıdır. Diğer bir deyimle, birinci yığındaki 7 asal sayısı ikinci yığında geçmez. Bu tamamen aşikâr olmadığından bir ispat vermeğe mecburuz. İki yığının müşterek bir asal sayısı olsaydı, her yığında asal sayının birinci olmasını gösterecek şekilde notasyonu düzenlerdik, böylece $p_1 = q_1$ olurdu. (Bunu yapabiliriz çünkü her çarpanlara ayrılımda asal sayılar her hangi bir sırada düşünülebilir.) Şimdi $p_1 = q_1$ olduğundan q_1 yerine p_1 de yazabiliriz, böylece iki çarpanlara ayrılma

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{ve} \quad m = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

olur. Bu denklemleri p_1 ile bölersek

$$\frac{m}{p_1} = p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{ve} \quad \frac{m}{p_1} = q_2 q_3 \cdots q_s$$

elde ederiz. Şimdi m/p_1 tabii sayısının iki farklı çarpanlara ayrılmasına sahibiz, çünkü m için iki farklı çarpanlara ayrılma ile başlıyoruz. Fakat bu imkânsızdır zira m birden fazla tarzda çarpanlara ayrılması olan en küçük sayı idi, ve m/p_1 m den küçüktür.

İSPATIN İKİNCİ KISMI. Böylece m in birinci çarpanlara ayrılmasındaki $p_1, p_2, \dots, p_r$ asal sayılarının ikincideki $q_1, q_2, \dots, q_s$ asal sayılarından tamamen farklı olduğunu tesis ettik. Bilhassa p_1 in q_1 e eşit olmadığını biliriz; matematik olarak $p_1 \neq q_1$ sembollerile yazılır. Her ikisinde p_1 in en küçük olduğunu kabul edeceğiz; yani $p_1 < q_1$ dir. Bunu farzetmeğe bir hakkımız vardır zira notasyon asal sayıların iki yığını arasında tamamen simetrik bir. Böylece, $p_1 < q_1$ halindeki ispatı tamamlayabilirsek, p ler ve q ler aralarında değiştirildiğinde, simetrik bir ispat benzer şekilde $p_1 > q_1$ haline tatbik edilebilir.

Şu halde $p_1 < q_1$ i kabul ederek, iki farklı şekilde çarpanlara ayrılması olan, m den küçük bir sayı sunacağız. Bu, ispatı tamamlayacaktır çünkü birden fazla tarzda çarpanlara ayrılması yanında m in en küçük sayı olduğuna dair başlangıçta yaptığımız faraziye ile çelişmezliğe düşeceğiz. İfade edilen şartları karşılayacak bir tabii sayı

$$n = (q_1 - p_1) q_2 q_3 q_4 \cdots q_s$$

olacaktır. n in nasıl teşkil edildiğine dikkat edin: $q_1 - p_1$

ile $q_2, q_3, \dots, q_r$ asal sayılarının çarpımıdır. Bir fark olarak yazılabilir;

$$n = q_1 q_2 q_3 \dots q_r - p_1 q_2 q_3 \dots q_r$$

veya

$$n = m - p_1 q_2 q_3 \dots q_r$$

ve mademki $p_1 q_2 q_3 \dots q_r$ pozitif bir sayıdır bu n in m den küçük olduğunu gösterir.

Nihayet, n tabii sayısının iki farklı çarpanlara ayrılmasının olduğunu tesis ederiz. Bunu yapmak için, n in derpiş edildiği şekle bakarız, şöyle ki

$$n = (q_1 - p_1) q_2 q_3 \dots q_r$$

$q_2, q_3, \dots, q_r$ çarpanlarından her biri bir asal sayıdır, fakat ilk $q_1 - p_1$ çarpanı muhakkak bir asal sayı değildir. $q_1 - p_1$ asal çarpanlarına ayrılıyorsa, *çarpanlardan biri olarak p_1 asal sayısını ihtiva etmeyecek* n in asal çarpanlarına ayrılmasına sahip olacaktık. Bunu görmek için ispatın Kısım I inde gösterildiği gibi $q_2, q_3, \dots, q_r$ asal sayılarının aralarında evvelâ p_1 in olmayacağına dikkat ederiz. İkinci olarak, $q_1 - p_1$ in nasıl asal çarpanlarına ayrıldığını göz önünde tutmayarak, p_1 asal sayısı mevcut olmayabilir; çünkü eğer p_1 $q_1 - p_1$ in asal çarpanlarına ayrılmasında bir çarpan olsaydı, o zaman p_1 $q_1 - p_1$ in bir böleni olacaktı. Yani, b bölme işleminde bölüm sonucu olmak üzere

$$q_1 - p_1 = p_1 b$$

denklemini cari olacaktı. Fakat bu bizi

$$q_1 = p_1 + p_1 b \quad \text{ve} \quad q_1 = p_1 (1 + b)$$

denklemlerine sevkedecekti; sonuncu p_1 yi q_1 in bir böleni olarak yorumlayarak ifade edilebilir, bu ise, bir asal sayı diğer bir asal sayının böleni olamayacağından, imkânsızdır.

Bundan sonra, p_1 asal çarpanların biri olmak üzere, n diğer bir yolda çarpanlara ayrılabilceğini gösteriyoruz. Bunu yapmak için, daha evvelki bir

$$n = m - p_1 q_2 q_3 \cdots q_r$$

denklemine dönüyor, m yerine

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$$

koyuyor ve böylece

$$\begin{aligned} n &= p_1 p_2 p_3 \cdots p_r - p_1 q_2 q_3 \cdots q_r \\ &= p_1 (p_2 p_3 \cdots p_r - q_2 q_3 \cdots q_r) \end{aligned}$$

elde ediyoruz. Parantez içindeki kısım muhakkak bir asal sayı değildir; fakat bunu eğer asal çarpanlarına ayırırsak, p_1 asal sayısını ihtiva eden, n in bir asal çarpanlara ayrılmasına malik olacağız. Böylece n in iki tarzda çarpanlara ayrılmasını sunduk, veya daha doğrusu, biri çarpanlar arasında p_1 asal sayısının bulunmayan ve diğerinde bulunan olmak üzere n in çarpanlara ayrılması için iki usul verdik. Diğer bir deyimle, m den küçük olan n sayısının iki farklı asal çarpanlara ayrılması vardır. Bu ispatı tamamlar.

E K C

TRANSANDANT SAYILARIN VARLIĞI HAKKINDA CANTOR'UN İSPATI

Bölüm 7 de birini sunarak transandant sayıların varlığını gösterdik. Bu Ekde tamamen değişik bir metodla varlıkları hakkında, aynı zamanda sonsuz çok sayıda transandant sayıların mevcut olduğunu göstererek, bağımsız bir ispat vereceğiz. Bir bakıma, hakikatte, transandant sayıların cebrik sayılara nazaran daha fazla olduklarını tesis ederiz.

İlk önce dikkatimizi cebrik *reel* sayılar ile transandant *reel* sayılara hasredeceğimizi açıklayalım. Meselâ $x^2 + 1 = 0$ in kökleri cebrik olup *reel* cebrik sayılar değildir. İfade ettiğimiz sonuç ve ispatlar karmaşık sayılarda da caridir, fakat biz dikkatimizi reel sayılara hasrederek ufak güçlüklerden sakınmış oluruz.

Bir S cümlesi ile muayyen, iyi ayırtlanabilen eşya topluluğunu kastederiz. Bu eşyalara S cümlesinin üyeleri veya S cümlesinin elemanları denir. Bir S cümlesi, meselâ 20 den küçük

$$S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

asal sayılar cümlesi gibi sonlu olabilir; veya S , meselâ bütün tabii sayılar cümlesinde olduğu gibi sonsuz olabilir:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Sonsuz bir cümleye, eğer üyeleri

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

gibi bir dizi halinde, cümlelerin her üyesi dizide bulunabilecek şekilde yazılabilirse, sayılabilir (veya taded edilebilir) denir. Meselâ dizide n ci terim $2n$ olacak şekilde çift sayılar cümlesi

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

olarak yazılabilir, şu halde bu bir sayılabilir cümledir.

Bütün tamsayılar cümlesi sayılabilir, çünkü

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

dizisi halinde yazılabilir. Diğer bir tarzda bir dizi halinde de yazılabilir, fakat her hangi bir yol cümlelerin sayılabilir olduğunu göstermeğe kâfidir.

Bir cümlelerin sayılabilir olduğu sonucuna varmak için bir cümlelerin n inci terimini veren has her hangi bir formülünü bilmemize lüzum yoktur. Meselâ

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, \dots$$

asal sayılar cümlesi, hattâ yüz milyonuncu asal sayının tam kat'ı değerini bilmesek bile, sayılabilir. Bütün cümle için bir dizisel sıra tasavvur edebilerek böyle bir asal sayının var olduğunu bilmek kâfidir.

Bundan sonra bütün rasyonel sayılar cümlesinin sayılabilirliğini tesis ederiz. Her hangi bir rasyonel sayının, katsayıları a ve b tamsayıları olan, $ax + b = 0$ lineer bir denklemin bir kökü olduğunu görürüz. Bundan başka genellikle her hangi bir şey kaybetmeden a nın pozitif

olma şartını koyarız Meselâ $3/5$ rasyonel sayısı $5x-3=0$ in bir köküdür. $ax + b = 0$ denkleminin endisi

$$1 + a + |b|$$

dir deriz; bir denklemin endisi böylece pozitif bir tamsayıdır. Meselâ $5x - 3 = 0$ denkleminin endisi 9 dur. Endisi 1 olan hiç bir denklem yoktur, ve endisi 2 olan ancak bir tane denklem vardır, o da $x=0$ dır. C 1 Tablosu endisi 5 e kadar olan bütün lineer denklemleri ihtiva eder. Büyüklük sırasına göre, C 1 Tablosundaki denklemlerle ithal edilen rasyonel sayılar, C 2 Tablosunda gösterildiği gibi, cetvel halinde de yazılabilirler.

Her hangi bir j endisi için ancak sonlu sayıda lineer denklemlerin mevcut olduğu aşikârdır. Hakikatte, j endisli $2j-3$ denklem vardır (tam sayının hakikatte bir ehemmiyeti yoktur). Böylece her artan bir endis ile ancak yeni rasyonel sayılar sonlu sayıda sunulur. Bu sebepten rasyonel sayıları her defasında, 2 endisli denklemlerin, sonra 3 endisli denklemlerin, ve daha büyük endisli denklemlerin köklerinin cetvelini yaparak

$$0, -1, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, \dots$$

gibi bir dizi şeklinde yazabiliriz.

TABLO C 1

Endis	Denklemler
2	$x=0$
3	$2x=0, x+1=0, x-1=0$
4	$3x=0, 2x+1=0, 2x-1=0,$ $x+2=0, x-2=0$
5	$4x=0, 3x+1=0, 2x+2=0,$ $2x-2=0, x+3=0, x-3=0$

TABLO C 2

Endis	Sunulan rasyonel sayılar
2	0
3	-1, +1
4	-2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2
5	-3, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 3

Mademki her rasyonel sayı bu dizide geçecektir, bundan rasyonel sayıların sayılabilir olduğu sonucu çıkar.

Hakikatte aynı ispat cebrik sayılar cümlesinin sayılabilir olduğunu tesis için kullanılabilir. Fakat evvelâ bir cebrik denklemin kaç tane kökü olabileceği hakkında bir şeyler bilmemiz lâzımdır. Cebrik bir sayının

$$(1) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

tipinde, katsayıları tamsayılar olan, $f(x)$ denklemini sağladığını hatırlayınız, a_n i pozitif alabiliriz, eğer negatif ise, o zaman köklerine dokunmadan, denklemi -1 ile çarpabilirdik.

TEOREM C 1. (1) şeklindeki her hangi bir denklemin en fazla n farklı kökü vardır.

İSPAT. İspat edilecek olanın aksine (1) denkleminin $n+1$ farklı kökü olduğunu farzedelim, bunlar $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ olsun. Biz şimdi Teorem 7.2 yi, veya daha doğrusu, bu sonuçta biraz farklı olanını kullanırız. Bu teoremin ispatı bize, β ister rasyonel bir sayı olsun veya

ister olmasın, eğer β $f(x) = 0$ in bir kökü ise, $x - \beta$ $f(x)$ in bir çarpanı olduğunu temin eder. β nın irrasyonel olması halinde, bölüm sonucu $q(x)$ in katsayıları irrasyoneldir, fakat bu hal burada bahis konusu değildir. Böylece bu kısımda $x - \beta_1$ in $f(x)$ in bir çarpanı olduğunu görürüz; $q_1(x)$ bölüm sonucu olmak üzere

$$f(x) = (x - \beta_1) q_1(x)$$

dir. Mademki β_2 $f(x) = 0$ in diğer bir köküdür, o halde $q_1(x) = 0$ in da bir kökü olmasının lâzım geldiğini görürüz, ve böylece $x - \beta_2$ $q_1(x)$ in bir çarpanıdır; $q_2(x)$ bölüm sonucu olmak üzere

$$q_1(x) = (x - \beta_2) q_2(x)$$

$$f(x) = (x - \beta_1) q_1(x) = (x - \beta_1) (x - \beta_2) q_2(x)$$

dir. Bu işlem $\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_n$ ile devam edilirse, $f(x)$ in

$$(2) \quad f(x) = (x - \beta_1) (x - \beta_2) (x - \beta_3) \dots (x - \beta_n) q_n(x)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilceğini görürüz. Fakat $f(x)$ in derecesi n dir, şu halde $q_n(x)$ bir sabit olmalıdır; hakikatte bu çarpanlara ayrılmanın (1) denkleminde uygun düşmesi için $q_n(x)$ a olmalıdır.

Şimdi bütün diğer köklerden farklı olan β_{n+1} kökünün göz önüne alalım. $f(\beta_{n+1}) = 0$ olmasından, (2) den sıfır olmayan terimlerin çarpımlarının sıfır olması imkânsız olan

$$(\beta_{n+1} - \beta_1) (\beta_{n+1} - \beta_2) (\beta_{n+1} - \beta_3) \dots (\beta_{n+1} - \beta_n) a = 0$$

çıkar. Böylece Teorem C 1 ispatlanmış olur.

TEOREM C 2. *Cebrik sayılar cümlesi sayılabilir.*

$$\begin{aligned} \text{İSPAT.} \quad n + a_n + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| \\ + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0| \end{aligned}$$

ne (1) denkleminin endisidir deriz. a_n pozitif olduğundan bu bir pozitif tamsayı olup bir lineer denklem endisi tarifinin açık bir genelleştirilmesidir. Endislerin ufak değerlerine tekabül eden bütün denklemleri, Tablo C 3 de gösterildiği gibi, cetvel halinde verebiliriz.

TABLO C 3

Endis	Denklemler
-2	$x = 0$
3	$x^2 = 0, 2x = 0, x + 1 = 0, x - 1 = 0$
4	$x^3 = 0, 2x^2 = 0, x^2 + 1 = 0, x^2 - 1 = 0,$ $3x = 0, 2x + 1 = 0, 2x - 1 = 0,$ $x + 2 = 0, x - 2 = 0$

Lineer denklemler halinde olduğu gibi, Tablo C 3 ün denklemlerinden çıkan bütün yeni cebrik sayıların şimdi listesini yaparız. Bunları her endis için büyüklük sırasına göre alırsak

$$\begin{aligned} (3) \quad & 0; -1, 1; -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; -3, \\ & -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ & -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ & 3; -4, \dots \end{aligned}$$

dizisini elde ederiz. 0 sayısı endisi 2 olan bir denklemden, -1 ve $+1$ sayıları endisi 3 olan, -2 , $-1/2$, $1/2$, 2 sayıları endisi 4 olan, v.s. denklemlerden gelmektedir. Tesbit edilen her hangi bir h endisli denklemin sayısı sonludur, zira n derecesi ve $a_n, \dots, a_0$ katsayıları sonlu bir tamsayılar cümlesine inhisar etmektedir. Aynı zamanda her denklemin Teorem C 1 gereğince en fazla n kökü olacağını biliyoruz. Bu sebepten (3) dizisi bütün reel cebrik sayıları ihtiva eder. Mamafih daha yüksek endislere geçtiğimizde, verilen her hangi bir endisdeki bütün denklemlerin her safhada listesini çıkarabilmemize rağmen, (3) de ilk bir kaç sayıyı elde ettiğimiz gibi, has kök şekillerinin listesini yapmağa devam edemeyiz.

Teorem C 2 den, 0 ile 1 arasındaki reel cebrik sayıların sayılabilir olduğuna dair yeni bir sonuç tesis etmek arzu ediyoruz. Bu, altcümlelere ait bir teorem ile ifade edeceğimiz genel basit bir prensipten çıkar. Eğer M in her elemanı S in bir elemanı olursa bu takdirde bir M cümlesine bir S cümlesinin bir altcümlesidir denir.

TEOREM C 3. *Her hangi sayılabilir sonsuz bir altcümlelerin kendisi de sayılabilir.*

İSPAT. M sayılabilir bir cümle olan S in bir sonsuz altcümlesi olsun; bu $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ olsun. a_1 S in M de bulunan ilk elemanı, a_{i_2} ikinci elemanı, v.s. olsun. Bu halde

$$M = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}$$

M cümlesi olup bunun da sayılabilir olduğu aşikârdır.

Buraya kadar göz önüne aldığımız her sonsuz cümle sayılabilirdi. Şimdi sayılamıyan farklı bir cümleyi tetkik edeceğiz.

TEOREM C4. *Reel sayılar cümlesi sayılamaz.*

İSPAT. Teorem C3 den dolayı, 0 ile 1 arasındaki reel sayılar için bunu ispat etmek kâfi gelecektir; bilhassa 1 i ihtiva edip 0.1 hariç tutan $0 < x \leq 1$ yi sağlayan x reel sayılar içindir. Farzedelim ki 0 ile 1 arasındaki reel sayılar cümlesi sayılabilir olsun:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$$

Bütün bu hallerde sonsuz peryodik şekilleri kullanarak (Bakınız Kısım 2.5) bitimli ondalıklardan kaçınarak bu sayıları ondalık şekilde yazın. Meselâ $1/2$ 0,5 den ziyade 0,499999 ... olarak yazılmalıdır. Böylece

$$r_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \dots,$$

$$r_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \dots,$$

$$r_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \dots, \text{ v.s.}$$

olacaktır. Şimdi bir

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

sayısını aşağıdaki şekilde teşkil edelim. b_1 1 ile 9 arasında, b_1 a_{11} den farklı olması mecburiyeti hariç, her hangi bir rakkam olsun. Benzer şekilde, b_2 a_{22} den başka her hangi sıfır olmayan bir rakkam olsun. Genel olarak, b_k a_{kk} dan başka sıfır olmayan her hangi bir rakkam olsun. Bu sebepten β sayısı r_1 den farklı (zira birinci ondalık basamakta farkederler), r_2 den farklı (zira ikinci ondalık basamakta farkederler), ve genel olarak β r_k dan farklıdır (zira k inci ondalık basamakta farkederler). Böylece β r lerin her birinden farklıdır. Fakat β 0 ile 1 arasındaki reel bir sayıdır, şu halde bir çelişmezliğe düşeriz.

Bu teoremden, mademki 0 ile 1 arasındaki cebrik sayılar sayılabilir ve fakat 0 ile 1 arasındaki sayılar sayılamazlar, şu halde cebrik olmayan reel sayıların mevcut olmasının icap ettiği sonucuna varırız. Bunlar, varlıkları böylece ispatlanan, transandant sayılardır.

TEOREM C 5. *Reel transandant sayılar cümlesi sayılamazlar.*

İSPAT. Reel transandant sayıların sayılabilir olduğunu farzedelim; bunlar

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

olsunlar. Mademki reel cebrik sayılar Teorem C 2 gereğince sayılabilir, bunlar $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ olsunlar, Teorem C 4 ün aksine reel sayılar cümlesi

$$t_1, a_1, t_2, a_2, t_3, a_3, t_4, a_4, \dots$$

gibi dizi halinde listesi verilebilir. Böylece bir çelişmezliğe düşer ve Teorem C 5 tesis edilmiş olur.

Nihayet, Teorem C 2 ve C 5 i, transandant sayıların cebrik sayılardan «daha fazla» olduğunu söyleyerek yorumlayabiliriz. Cebrik sayıların sonsuz bir dizi halinde listesi yapılabilir, fakat böyle bir dizi halinde listelemeyi mümkün kılamıyacak kadar çok sayıda transandant sayı vardır.

Problem serisi 29

1. (a) 6 endisli bütün lineer denklemlerin listesini yapın, ve (b) bu denklemlerin, daha alçak endisli lineer

denklemlerin kökleri olmayan, bütün köklerinin listesini verin.

2. Pozitif ve negatif, bütün tek tamsayılar cümlesinin sayılabilir olduğunu ispat edin.
3. a ve b si bütün tabii sayılar bölgesinde olan $a + bx^4$ polinomlar cümlesinin sayılabilir olduğunu ispat edin.
4. Endisi 5 olan bütün denklemlerin listesini yapın, ve sonra eleman 3 e kadar (3) dizisini sağlayınız.
5. a ve b si bütün rasyonel sayılar bölgesinde olan $a + b$ 3 şeklindeki sayılar cümlesinin sayılabilir olduğunu ispat edin.
6. Bir A cümlesi sayılabilir B ve C cümlelerine ayrılabilirse A nın sayılabilir olduğunu ispat edin.
7. Reel sayılar cümlesinin (tamamen) 0 ile 0,1 arasında sayılamaz olduklarını ispatlayın.
8. Bütün irrasyonel sayılar cümlesinin sayılamaz olduğunu ispat edin.

SEÇİLMİŞ PROBLEMLER İÇİN ÖĞÜTLER VE CEVAPLARI

Seri 1

1. (a) Yanlış: $1 + 1 = 2$.
(b) Doğru.
(c) Yanlış: $1 - (-1) = 2$.
(d) Doğru.
* (e) Yanlış: $2^1 + 2^2 = 6$, ve 6 2 nin tamsayı bir kuvveti değildir. —
2. Sekiz, şunlardır: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
3. Beş, şunlardır: 1, 2, 4, 8, 16.
4. 4.
5. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
- *6. *Öğüt.* Verilen bir d sayısının tam katları olan sayılar için iyi bir notasyon bulunuz.

Seri 2

- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| 1. Evet; $q = -7$. | 7. Hayır. |
| 2. Evet; $q = -7$. | 8. Evet; $q = 1$. |
| 3. Evet; $q = 7$. | 9. Hayır, çünkü q yegâne değildir. |
| 4. Hayır. | 10. Evet. |
| 5. Evet; $q = -35$. | 11. Evet. |
| 6. Evet; $q = 0$. | |

Seri 3

1. (a), (b), ve (f) doğrudur; (c), (d), ve (e) yanlıştır.
2. Bütün hallerde doğrudur.
3. (a), (c), ve (d) doğrudur; (b) ve (e) yanlıştır.
4. (a), (b), (c), ve (d) doğrudur; (e) yanlıştır.

Seri 4

6. (a) kapalı değildir, (b) kapalıdır, (c) kapalıdır, (d) kapalı değildir, (e) kapalıdır, (f) kapalıdır, (g) kapalıdır.

Seri 6

1. (a) 0,25; (b) 0,015; (c) 0,8025;
(d) 0,0112; (e) 2,816; (f) 1,2596.

Seri 7

2. (a) Yanlış, meselâ $b = 10$ halinde;
(b) Doğru;
(c) Yanlış, meselâ $b = 10$ halinde;
(d) Yanlış, meselâ $b = 7$ halinde;
(e) Yanlış, meselâ $b = 7$ halinde;
(f) Doğru.
3. (a) Yanlış, meselâ $3/6$ kesri halinde;
(b) Doğru;
(c) Yanlış, meselâ $3/6$ kesri halinde.
4. $ab = 0$ olursa, o zaman $a = 0$ veya $b = 0$ (olur).
5. (b) Evet.

Seri 8

1. (a) $1/9$;
(b) $17/3$;
(c) $3706/9900 = 1853/4950$
(d) $9978/9990 = 1663/1665$;
(e) $1/9900$;
(f) 1.

Seri 9

1. (a) 0,12; (b) 0,3; (c) 4,8; (d) 10,0.
2. (a) 0,72999 ...; (b) 0,0098999 ...; (c) 12,999
3. b 2 ve 5 den gayrı hiç bir asal sayı ile bölünemeyecek özelliğini haiz ve $a \neq 0$ olan (basitleştirilmiş) a/b rasyonel sayıları.
4. Hiç biri.

Seri 10

7. Rasyonel.

Seri 11

1. $\sqrt{3}$ ve $-\sqrt{2}$ olacaktır.
2. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ olacaktır.
3. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ olacaktır.
4. $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ olacaktır.
5. $\sqrt{3}$ ve $1/\sqrt{2}$ olacaktır.

Seri 12

1. (a) $n=3$, $c_3=15$, $c_2=-23$, $c_1=9$, $c_0=-1$;
 (b) $n=3$, $c_3=3$, $c_2=2$, $c_1=-3$, $c_0=-2$;
 (c) $n=3$, $c_3=2$, $c_2=7$, $c_1=-3$, $c_0=-18$;
 (d) $n=4$, $c_4=2$, $c_3=0$, $c_2=-1$, $c_1=-3$,
 $c_0=5$;
 (e) $n=5$, $c_5=3$, $c_4=0$, $c_3=-5$, $c_2=6$,
 $c_1=-12$, $c_0=8$;
 (f) $n=4$, $c_4=1$, $c_3=0$, $c_2=-3$, $c_1=-5$,
 $c_0=9$.
2. (a) evet; (b) evet; (c) evet; (d) hayır; (e) evet;
 (f) hayır.
4. Öğüt. Denklemi $b_3b_2b_1b_0$ çarpımı ile çarpınız.

Seri 13

2. Öğüt. Teorem 4.1 ile Problem 1 deki sonuçlardan birini kullanınız.
7. Öğüt. Meselâ $2/2 x^2 - 1 = 0$ in bir köküdür.

Seri 15

1. (a) Öğüt. (5) denkleminde θ yerine 40° koyunuz,
 ve $\cos 120^\circ = -1/2$ olayını kullanınız.
 (b) Öğüt. Problem 1(a) daki sonuç ile denklem (8) i
 kullanınız.
 (c) Öğüt. $\theta = 10^\circ$ ile (8) denkleminin birinci kıs-
 mını kullanınız.
 (d) Öğüt. Problem 1(a) daki sonuç ile $\cos \theta$
 $= \sin(90^\circ - \theta)$ özdeşliğini kullanınız.

3. (a) *Öğüt.* (1) denkleminde A yerine 30 ve B yerine 20 koyunuz ve (3), (4), (5) ve (7) denklemlerini kullanınız.
4. (a), (b), (c), (d), (i), (k) rasyoneldir.

Seri 16

1. (a) *Öğüt.* $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ yi kullanınız.
 (c) *Öğüt.* $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ yi kullanınız.
 (d) *Öğüt.* $\cos 40^\circ$ nin irrasyonel olma olayını, ve $\cos 2 \cdot 35^\circ = \cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$, v.s olayını kullanınız.
2. (b) Evet.

Seri 17

3. *Öğüt.* $\log m + \log n = \log mn$ olduğunu hatırlayınız.
4. *Öğüt.* Diğer şeyler meyanında metindeki Misâl 3 ü kullanınız.

Seri 18

1. (a) *Öğüt.* $x^2 - 3 = 0$ nin bir köküdür.
 (b) *Öğüt.* $x^2 - 5 = 0$ nin bir köküdür.
 (c) *Öğüt.* $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ nin bir köküdür. Bölüm 4 deki denklem (5) e bakınız.
 (d) *Öğüt.* Bölüm 5 deki denklem (6) ya bakınız.

Seri 21

5. (a) Meselâ eğer $r = -2$ ve $s = -3$ ise yanlıştır;
 (b) Meselâ eğer $r = 4$, $s = 3$, ve $c = -2$ ise yanlıştır;
 (c) Doğru;
 (d) Doğru;
 (e) Doğru;
 (f) Meselâ eğer $\lambda = 2/5$ ise yanlıştır;
 (g) Doğru
6. $-10 < \lambda < 10$.
8. (b) Evet. Fark şudur ki $u - v$ (b) de sıfır olabilir fakat (a) da olamaz.

Seri 22

2. (a) 1, (b) 3, (c) 4, (d) 6, (e) 5, (f) 7, (g) 3, (h) 31, (i) -2 , (j) -22 .

Seri 23

1. $2/1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, 10/6, 12/7, 14/8, 16/9, 17/10$.
2. $3/1, 6/2, 9/3, 13/4, 16/5, 19/6, 22/7, 25/8, 28/9, 31/10$.
3. *Öğüt.* Bunu Teorem 6.3 den çıkarınız.
- *5. *Öğüt.* $\lambda = \sqrt{2}$ ve $n = 4$ halini göz önüne alınız, ve

$$-\frac{1}{8} < \lambda - \frac{m}{4} < \frac{1}{8}$$

olacak şekilde hiç bir (basitleştirilmiş) $m/4$ kesrinin bulunamayacağını tesis ediniz.

Seri 24

1. $n = 4, m = 7.$

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
n	2	3	4	4	1	3	5
m	3	5	7	7	1	4	7

	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)
n	5	5	5	1	1	1	7
m	7	7	7	3	3	3	22

Seri 25

1. *Öğüt.* Tamsayıyı λ dan hemen daha büyük ve tamsayıyı hemen biraz küçük alınız.
3. (a) $3/2$ ve $4/3$ olacaktır.
(b) $3/2$ ve $5/3$ olacaktır.
(c) $7/3$ ve $9/4$ olacaktır.
4. (a) Onların hepsi.
(b) $1/1$, ve $14/10$ $7/5$ in irca edilmiş şeklinden alınmıştır.
5. (a) $3/1$, $31/10$, $314/100$; (b) $3/1$.
- *6. *Öğüt.* Teorem 6.5 deki eşitsizliklerin $\lambda = 3/5$ ve $n > 5$ ile her hangi bir m/n in aşağıdaki şekilde olduğu gibi doğru olmadığını ispat ediniz: $\lambda - m/n$ ya pozitif veya negatiftir. Pozitif ise en az $1/5n$ olduğunu, negatif ise en fazla $-1/5n$ olduğunu gösteriniz.
- *7. (a) *Öğüt.* Ek B de verildiği gibi, Aritmetiğin Temel Teoremini verilen rasyonel sayıların eşit olmalarının ispatında kullanınız.

- (b) *Öğüt.* Teorem 6.5 deki eşitsizliklerin n i b den büyük olan her hangi bir m/n rasyonel sayısı için cari kalamıyacağını ispat ediniz.

Seri 26

1. (b) Hiç biri yoktur.
2. (b) $1/1$, $2/1$, $3/2$.
3. (b) $1/1$, $2/1$.

Seri 27

1. 2, 2, 8; ve 10^{-1} .
2. Hayır.
4. (b) $x \geq 7$ ise $|x - 7| = x - 7$ dir; $x \leq 7$ ise $|x - 7| = -x + 7$ dir.
5. (a) $x = -1$; (b) $x = 2$; (c) $x = 7$ ve $x = -7$; (d) x 'in bütün değerleri.

Seri 28

2. $\alpha^7 - \beta^7 = (\alpha - \beta)(\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6)$.
3. *Öğüt.* $f(x) = 0$ in her hangi bir kökü $f(x)g(x) = 0$ in de bir köküdür.

Seri 29

1. (a) $5x = 0$, $4x \pm 1 = 0$, $3x \pm 2 = 0$, $2x \pm 3 = 0$, $x \pm 4 = 0$;
(b) -4 , $-3/2$, $-2/3$, $-1/4$, $1/4$, $2/3$, $3/2$, 4 .
2. Meselâ, 1, -1 , 3, -3 , 5, -5 , 7, -7 , 9, -9 , ...

3. *Öğüt.* $a + bx^4$ ün endisi olarak $a + b$ yi tarif ediniz; sonra verilen her hangi bir endis için sonlu sayıda polinomların mevcut olduğunu görünüz, ve hepsini sayınız.
4. $x^4 = 0$, $2x^3 = 0$, $x^3 \pm 1 = 0$, $x^3 \pm x = 0$,
 $x^3 \pm x^2 = 0$, $3x^2 = 0$, $2x^2 \pm 1 = 0$, $x^2 \pm 2 = 0$,
 $2x^2 \pm x = 0$, $x^2 \pm x \pm 1 = 0$, $x^2 \pm 2x = 0$,
 $4x = 0$, $3x \pm 1 = 0$, $2x \pm 2 = 0$, $x \pm 3 = 0$.
5. *Öğüt.* Bütün bu sayılar cebriktir; Teorem C 3 ü kullanınız.
6. *Öğüt.* $b_1, b_2, b_3, \dots$ B nin elemanlarının dizi halinde listesi olsun; bu halde A dizi halinde

$$b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots$$

yazılabilir.

7. *Öğüt.* Teorem C 4 ün ispatını takip edin; fakat $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots$ sayıları şimdiki konumuzda hep sıfırdır. Arzu edilen listelenmemiş sayıları $b_1 = 0$, $b_2 \neq a_{12}$ ve $b_2 \neq 0$, $b_3 \neq a_{23}$ ve $b_3 \neq 0$, ve genel olarak, $b_i \neq a_{i-1,i}$ ve $b_i \neq 0$ seçerek kurunuz.

İ N D E K S

- Altında kapalı, 9
 Aritmetiğin Temel Teoremi, 14,
 117 v.d.
 Asal sayılar, 10
 Sonsuz sayıda olmaları, 164

 Beckenbach, E., 149
 Bellman, R., 149
 Bir açının üçe bölünmesi, 103
 Bitimli olmayan ondalıklar, 30
 Bitimli ondalıklar, 29
 Bölen, 10, 27
 Bölge, 18
 Bölüm sonucu, 27
 Bölünen, 27

 Cantor, G., 4, 5, 172
 Cebrik sayı, 100
 Courant, Richard, 105

 Çarpan, 10
 Çarpan teoremi, 151

 Dalreye esit bir kare çizimi, 103
 Direkt ispat, 37
 Dirichlet'in güvercin-delik prensibi, 133

 Eğer ve ancak eğer, 33
 Endirekt ispat, 36
 Eşitsizlikler, 115

 Faktoriyel, 147

 Gelfond, A., 102
 Geometrik çizimler, 103
 Geometrik problemler, 62, 103
 Güvercin-delik prensibi, 133

 Hilbert, David, 101

 Irrasyonel sayılar, 28, 52 v.d., 70 v.d., 91 v.d.
 Irrasyonellik, 55, 70 v.d., 91 v.d.
 Logaritmik sayıların, 97
 Trigometrik sayıların, 91 v.d.
 $\sqrt{2}$ nin, 55
 $\sqrt{3}$ ün, 57
 $\sqrt{6}$ nin, 58
 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ün, 58
 İspatın mahiyeti, 23, 33 v.d.

 Kalan, 27
 Karmaşık sayılar, 62
 Kat, 10
 Kesir, 27
 Kökler, 62
 Kübün düplikasyonu, 103

 Liouville, J., 4, 5, 148
 Logaritmik sayılar, 91, 97

 Mutlak değer, 149
 Mütekilli, 37

- Ondalıklar, 29
 Bitimli, 29
 Bitimsiz, 30
 Peryodik, 40
 Sonsuz, 29 v.d., 41, 53
 Orantı, 63

 Ölçülebilir, 61
 Ölçülemiyen, 61

 Peryodik ondalıklar, 40
 Polinom denklemler, 75
 Endis'i, 174, 177
 Polinom denklemlerin kökleri, 76,
 77, 78
 Polinomlar, 75, 157

 Rasyonel kesir, 26
 Rasyonel sayı, 26
 Reel doğru, 52
 Reel sayılar, 3, 51
 Robbins, Herbert, 105
 Roth, K. F., 148

 Sayı,
 Asal, 10
 Cebrik, 100
 İrrasyonel, 52, 70 v.d., 97 v.d.
 Liouville 148
 Logaritmik, 91, 97
 Karmaşık, 62
 Rasyonel, 26
 Reel, 3, 50
 Tabii, 9
 Transandant, 100
 Trigonometrik, 91
 Sayılabilir, 173
 Schneider, Th., 102
 Siegel, C. L., 148
 Sıfır ile bölme, 17
 Sonsuz ondalıklar, 29 v.d., 41, 53

 Tabii sayılar, 9
 Tadaad edilebilir, 173
 Tamsayı, 15
 Çift, 18
 Tek, 18
 Tersinir (resiprok), 29
 Thue, A., 148
 Transandant sayılar, 100
 Mevcudiyeti, 147 v.d., 172 v.d.
 Transandantlık, 101
 log 2 nin, 101
 π nin, 101
 $2^{\sqrt{2}}$ nin, 101
 Trigonometrik sayılar, 91, v.d.

 Üçgen eşitsizliği, 150

 Yaklaşıklık, 114 v.d.
 Yegâne şekilde çarpanlara ayrıl-
 ma, 12, 166 v.d.

Yayınlanmış olan eserler:

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Bazı Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekaniğin Matematiğe Bazı Tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergel Kullanarak Yapılan Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Diophant Denklemleri) (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — Matematiksel İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvel Kullanarak Yapılan Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş (550 Krş.)
- 16 — Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (600 Krş.)
- 18 — İndirgemeli Diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
- 22 — Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (400 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler:

- 17 — Gayri Euklid Geometriler

Matematik Derneğinin adresi:

Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü

Vezneciler - İstanbul

Fiatı 600 Krş.