TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı: 17

L. GODEAUX

ÇEŞİTLİ GEOMETRİLER

Çeviren
FERRUH ŞEMİN

İSTANBUL — 1965

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı: 17

L. GODEAUX

ÇEŞİTLİ GEOMETRİLER

Çeviren
FERRUH ŞEMİN

İSTANBUL — 1965

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısiyle mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerek fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Savaşından sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karsı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana getirilmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özelikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'un bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

ÖNSÖZ

Hiçbir iddia taşımıyan bu eserde, bahsedilen konuların kesin bir izahına rastlanılmıyacaktır. Zira bu, matematikcilere mahsus bir eser olmayıp, çok daha mütevazı bir maksatla kaleme alınmıştır. Şöyle ki, geometrinin gelişimini, ana çizgileriyle anlatmak istedik, ve bunu da o şekilde yapmağa çalıştık ki orta öğrenimde edinilen kültür seviyyesinden daha yükseğine sahib olmıyanlar dahi bizi takib edebilsinler. Tabii böyle bir teşebbüsün doğuracağı tüm güçlüğün farkındayız ve bu hususta okurların hoşgörürlüğünü dilediğimizi şimdiden bildirmek isteriz.

Eski Yunanlılardan bize elementer geometri kaldığı için, önce onların bu alandaki buluşlarını hatırlatmakla işe başlıyacağız. Yunan geometrisinin gelişimi birtakım merhalelerle göze çarpar: PHYTAGORAS, ELEALILAR, EUKLEIDES, APOLLONIOS. Bu merhalelere dair lüzumlu kısımları ihtiva eden birinci bölüme, QUÉTELET ve DANDELIN'in koniklerle ilgili teoremleri hakkında bazı bilgiler ekledik; zira bu teoremler, okuyanları hiçbir hayrete düşürmeden, APOLLONIOS'un koniklere dair kitabında da pek âlâ yer alabilirdi.

Eski Yunanlıların faaliyet gösterdikleri devreden sonra, geometride yeni usullerin meydana çıkmasını görebilmek için, 17 nci yüzyıla kadar beklemek gerekir. Bu yeni usuller arasında, ilkönce, DESCARTES ve FERMAT'nın koordinatlar usulünü, ya da Analitik Geometri'yi sayabiliriz ki bu da ikinci bölümün konusunu teşkil etmektedir. İkinci olarak, aynı usuller arasında, DESARGUES ve PASCAL ile birlikte ve Analitik Geometri ile aynı zamanda ortaya çıkan izdüşümler usulü zikredilebilir. Fakat

İzdüşel Geometri'nin bir kurulma safhasına girebilmesi çok ağır bir tempo ile vaki olmuştur: gerçekten, bu bilim dalı, ancak 18 inci yüzyılın başlarına doğru, MONGE ve L. CARNOT'dan sonra, PONCELET tarafından bağımsız bir doktrin halinde tesis olunmuş ve CHASLES tarafından da çok geliştirilmiştir. Bu geometri de üçüncü bölümün konusunu vücuda getirmektedir.

Dördüncü bölümü, geometri ilkeleri üzerindeki araştırmaların açıklanmasına, beşinci bölümü de gurup kavramının geometriye sokulmasına ayırdık. Hayatı, kısa olduğu nispette ızdırap içinde geçen, ÉVARISTE GALOIS adında yirmi yaşlarında bir matematikci tarafından ortaya atılan bu gurup kavramı sayesinde, S. LIE ve F. KLEIN'ın çeşitli geometrileri makul bir sınıflandırmaya tâbi tuttukları bilinen bir keyfiyyettir. Bu kitabı yazmak için önceden kararlaştırdığımız sınırları aşmamak isteği de, ELIE CARTAN tarafından LIE ve KLEIN'ın fikirlerine verilmiş olan teşmilden, ancak kısa bir atıf yapmak suretiyle, bahsetmemizi mümkün kıldı.

Son bölümde Topologi bahis konusudur. Bunu da, F. ENRIQUES in bir fikrine dayanarak, yâni Elementer Geometri'den hareket etmek ve birbiri ardınca sıra ile önce doğru çizgi, sonra da uzaklık kavramlarını bir yana bırakmak suretiyle, ithal ettik. Okurların, daha çok sezgilerinin yardımından yararlanmak suretiyle bu geometrinin mahiyyeti hakkında bir fikir edineceklerini umuyoruz.

Bundan sonraki sahifelerde ele alınan teoriler hakkında tamamlayıcı bilgileri, gerektiğinde okurlar, Bibliyografya kısmında bulabileceklerdir.

Kitabımızda ele aldıklarımızın dışında bahsetmemiz gereken daha birçok noktaların bulunduğunu takdir ediyoruz. Nitekim, hiperuzay geometrilerinden olsun, cebirsel geometriden olsun, nihayet klâsik infinitezimal geometriden olsun, kısaca bahsettik. Bu geometriler arasında başta kaydettiklerimizden, başka bir

eserde de bahsetmek fırsatını daha önce elde etmiştik. Bu esere başvurmalarını, okurlarımıza tavsiye etmek cesaretini kendimizde buluyoruz[1]). Bu hususta, ayrıca **Encyclopédie Française**'in I inci cildinde geometri hakkındaki makale de gözden geçirilebilir.

Velhasıl, yirmi yaşlarında bulunduğumuz sıralarda okumak isteğinde bulunabileceğimiz bir kitabı yazmağa gayret ettik. Okurlara yararlı olması dileğiyle,

Liége, 21 aralık 1936

[1]) **La Géométrie** (Biblithèque scientifique belge). PARIS, HERMANN, ve LIEGE, THONE (1931).

ÇEVİRENİN NOTU

Kitabın aslı, çok acele yazıldığı izlenimini uyandırmaktadır. Öyle ki farklı baskılarda aynı dizgi yanlışları tekrarlanmıştır. Örneğin (compatibilité - bağdaşabilirlik) kelimesi gerek metinde gerek kitabın sonundaki (İçindekiler) kısmında, ayrı ayrı baskılarda, hep (comptabilité - muhasebe) şeklinde dizilmiştir. Çok tanınmış bazı matematikcilerin adlarının ilk harfi türlü baskılarda, hep aynı şekilde hatalı yazılmıştır. Meselâ ÉLIE CARTAN, A. CARTAN olmuştur. Şekiller de, tatmin edici olmaktan çok uzaktır. Bu türlü ve daha başka eksikliklerine rağmen, L. GODEAUX tarafından yazılmış bulunan bu eserin okurlara çok yararlı olacağı kanısındayız.

Aranılan konuların kolaylıkla bulunmalarını temin amaciyle, çevirinin baş tarafına bir (Alfabetik Konu İndeksi) ni eklediğimiz gibi, sonuna da eserde adı geçenlerle ilgili bir indeksin bulunmasını uygun gördük. Şekilleri olduğu gibi bırakmağa da pek gönlümüz razı olmadı. Hepsini yeniden, bazı ilâvelerle, çizdik. Kitabın aslının hazırlandığı tarihten bu yana, aynı alanda pek çok eser yayınlandığı için, bunların en önemlilerini, kısa bir Ek Bibliyografyada sumağı yararlı bulduk.

Sadece kendi hatamız yüzünden gözümüzden kaçan ve ilk bakışta farkına varılabilen birkaç dizgi yanlışı için de ayrıca bir cetvel hazırlama yoluna gitmedik.

F. Ş.

İÇİNDEKİLER

Önsöz VII
Çevirenin notu X
Konular için alfabetik indeks XV
Ek Bibliyografya XXXI

BİRİNCİ BÖLÜM: **ELEMENTER GEOMETRİ** 1
1. Geometrinin doğuşu. 1
2. PYTHAGORAS Geometrisi 2
3. ELEA Paradoksları 4
4. EUKLEIDES Geometrisi 5
5. Açının üçe bölünmesi 8
6. Kübün iki kat kılınması 11
7. Dairenin karelenmesi 13
8. Yunanlıların konik kesitlerle ilgili ilk araştırmaları. 16
9. APOLLONIOS'un Konik Kesitleri. 19
10. Belçikalıların koniklere dair teoremleri 21
11. Eski yunan geometrisinin Batılılara intikali 24

İKİNCİ BÖLÜM: **ANALİTİK GEOMETRİ** 26
12. Analitik geometrinin doğuşu 26
13. Koordinatlar usulü 27
14. Analitik geometride açıların ölçümü 30
15. Muhtelif koordinat sistemleri 32
16. Düzlem eğrilerin sınıflandırılması. 35
17. Düzlemde geometrik yerler problemi. 38
18. Teğetler problemi 40
19. Cebirsel düzlem eğrilerin arakesidi 42
20. CRAMER paradoksu 45
21. Uzayda koordinatlar usulü 47
22. Uzayda geometrik yerler. 48
23. Cebirsel uzay eğrileri 50

24. Bir uzay eğrisinin izdüşüren silindirleri 52
25. Bir cebirsel uzay eğrisinin monoidal temsili 54
26. Analitik Geometride kullanılan fonksiyonlar hakkında 55

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM : İZDÜŞEL GEOMETRİ 57
27. DESARGUES'ın koniklerle ilgili araştırmaları 57
28. PASCAL'ın «Essais pour les coniques (konikler üzerine deneme)» adlı eseri hakkında 60
29. DE LA HIRE ve LE POIVRE'ın çalışmaları 60
30. Tasarı Geometri 63
31. Metrik özelikler ve konum özelikleri. 64
32. Le Traité des propriétés projectives des figures (Şekillerin izdüşel özelikleri) adlı eser hakkında . . . 65
33. Süreklilik ilkesi 67
34. Düalite ilkesi. 68
35. Sonsuzdaki elemanlar 70
36. Harmonisiz oran. 72
37. Dört noktanın harmonisiz oranının değerleri. . . . 74
38. İzdüşel geometrinin temel formları 76
39. İki form arasında izdüşellik. 78
40. Birinci cinsten iki form arasındaki izdüşellik . . . 79
41. İkinci cinsten iki form arasındaki izdüşellik 83
42. Üçüncü cinsten bir formda izdüşellikler 84
43. Koniklerin izdüşel olarak doğurtulması. 85
44. Koniklerin VON STAUDT'a göre tanımı 88
45. Uzaya teşmiller 89
46. Eğrilerin izdüşel olarak doğurtulması 91
47. CHASLES'ın tekabül ilkesi. 95
48. İhtar 100

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM: GEOMETRİ İLKELERİ 102
49. EUKLEIDES postulâtının PROKLUS'den LEGENDRE'a kadar geçirdiği türlü safhalar 102
50. LOBAÇEVSKI geometrisi 106

51. POINCARÉ'nin LOBAÇEVSKI geometrisi modeli 108
52. RIEMANN geometrisi. 110
53. EUKLEIDES geometrisinin postulâtları. 112
54. Postulâtların bağdaşabilirlik ve bağımsızlığı. . . . 115
55. ARKHIMEDES postulâtı ve doğru parçalarının ölçümü . 117
56. İzdüşel geometrinin postulâtları 118
57. Birinci cinsten formlarda dolanım yönü 120
58. Bire-bir tekabüller 122
59. İzdüşelliklerin tanımı ve İzdüşel Geometri'nin temel teoremi 123
60. Düalite ilkesi 126

BEŞİNCİ BÖLÜM: GURUPLAR TEORİSİ VE GEOMETRİ . 128
61. Metrik geometri ve hareketler. 128
62. Gurup kavramı 129
63. Metrik geometrinin asal gurubu 132
64. EUKLEIDES geometrisinin asal gurubu 133
65. Hareketler gurubu ve Analitik Geometri 134
66. Benzeşimler gurubunun analitik ifadesi 138
67. Argeziyen Uzay 139
68. Sonsuzdaki sanal elemanlar. 142
69. Afin geometri 144
70. Afiniteler, benzeşimler ve hareketler arasında bağıntılar 148
71. Açı ölçümlerine LAGUERRE tarafından verilen yorum şekli 150
72. İzdüşel uzay 152
73. İzdüşel geometrinin asal gurubu 154
74. Afinitelerle homografiler arasında bağıntı 156
75. Düalite ilkesinin yürürlük alanı 157
76. Soyut bir geometrinin yapımı 158
77. Bağlı geometriler 159
78. Bir geometri örneği. 160
79. Eşdeğer geometriler 161

80. Regle geometri 164
81. İzdüşel Geometrinin teşmili. 168
82. Cebirsel Geometri 172

ALTINCI BÖLÜM: **TOPOLOGİ** 176
83. Eğriler üzerine sezgiye dayanan düşünceler 176
84. Eğri kavramı 178
85. Yüzey kavramı 181
86. Topologi 183
87. Genel metrik 185
88. Topologi ve Elementer Geometri 187
89. RIEMANN yüzeyleri 188
90. Düğümler teorisi. 192
91. Eğrilerin analitik olarak gösterilmesi. JORDAN eğrileri 194
92. PEANO eğrisi 196
93. Homeomorfilerin analitik olarak gösterilmesi. . . . 198
94. Teğetler Problemi 200
95. Teğetlerin varlık şartları. 203
96. Türlü mertebelerden dar anlamlı topologiler 205
97. Dolaysız İnfinitezimal Geometri 207
98. Sonlu Geometri 211
99. Topologinin gelişimi 214
Kısa bibliyografya 217
Eserde adı geçen kimseler için Alfabetik İndeks . . 220

(Konular için)

ALFABETİK İNDEKS

A

Açı, İki Doğru arasındaki —, 111
— , İkiyüzlü — , 111
Açının üçe Bölünmesi, 8
Açı Ölçülerine Laguerre tarafından verilen Yorum Şekli, 150
Afiks, 109
Afin Geometri, 144, 145, 158, 159, 171
Afinite, 145, 146, 148, 149, 151, 171
Afinite Oranı, 148
Afiniteler, Benzeşimler ve Hareketler arasında Bağıntılar, 148
Afinitelerle Homografiler arasında Bağıntılar, 156
Aksiyom, Bütünlük — u, 115
— , Ortaklık — u, 112
— , Paralellik — u, 115
— , Süreklilik — u, 115
Aksiyomlar, 6, 7
— , Dağılım — ı, 113
— , Denklik — ı, 115
— , Eşitlik — ı, 112
Alan, Dairenin — ı, 1
— , Dörtgenin — ı, 1
— , İkizkenar Üçgenin — ı, 1
Alt Gurup, 134
Analitik, Benzeşim Gurubunun — İfadesi, 138

Analitik, Eğrilerin — olarak Gösterilmesi, 194
— , Hareketler Gurubu ve — Geometri, 134
— , Homeomorfilerin — olarak Gösterilmesi, 198
Analitik Geometride Açıların Ölçümü, 30
Analitik Geometride kullanılan Fonksiyonlar hakkında, 55
Analitik Geometrinin Doğuşu, 26
Arakesit, Cebirsel Düzlem Eğrilerin — i, 42
Argeziyen Uzay, 139, 141, 142, 145, 153
Apollonios'un Konik Kesitleri, 19
Arkhimedes Postulâtı, 115
Arkhimedes Postulâtı ve Doğru Parçalarının Ölçümü, 117
Asal Gurup, 133
— — , Eukleides Geometrisinin — — u, 133
— — , İzdüşel Geometrinin — — u, 154
— — , Metrik Geometrinin — — u, 132

B

Bağdaşabilirlik, Postulâtların — ve Bağımsızlığı, 115
Bağımsızlık, Postulâtların Bağdaşabilirlik ve — ı, 115
Bağlı Geometriler, 159
Basitlik Katsayısı, 15
Benzeşim, 149, 151, 172
Benzeşim Gurubu, 134
Benzeşimler, Afiniteler, — ve Hareketler arasında Bağıntılar, 148
Belçikalıların Koniklere dair Teoremleri, 21
Birasyonel Dönüştürümler, 174, 175
Bire-Bir Tekabüller, 122
Birleşik Düzlem, 145
Birleşik Nokta, 95, 96, 122
Büküm Noktası, 213

C

Cebirsel, Bir - Uzay Eğrisinin Monoidal Temsili, 54
— , n ninci Dereceden Düzlem — Eğri, 37

Cebirsel Düzlem Eğrilerin Arakesiti, 42
Cebirsel Geometri, 172, 174
Cebirsel Uzay Eğrileri, 50
Chasles'ın Tekabül İlkesi, 95
Cins, Birinci — den Form, 146
— , Birinci — den Formlarda Dolanım Yönü, 120
— , Birinci — den iki Form arasındaki İzdüşellik, 79
— , İkinci — den iki Form arasındaki İzdüşellik, 83
— , Üçüncü — den bir Formda İzdüşellikler, 84
Cramer Paradoksu, 45
Cümle, Doğrusal Nokta — si, 77

Ç

Çarpım, Homografi — ı, 155
Çember, Mutlak — , 143, 149
— , Sonsuzdaki sanal — , 143
Çifte ya da Harmonisiz Oran, 72, 74, 146
Çift Kutupsal Koordinatlar, 33
Çizgiler, Koordinat — i, 34

D

Dağılım, 112
Dağılım Aksiyomları, 113
Dairenin Alanı, 1
Dairenin Karelenmesi, 8, 13
Demet, Işın — i, 77
— , Düzlem — i, 77
Denklik Aksiyomları, 114
Doğru, 112
— , Has — , 74
— , Hasolmıyan — , 71, 72, 74
— , İki — arasındaki Açı, 111
— , İzotrop — , 144
— , Sonsuzdaki — , 71

Doğrultu, 71
Doğruluk Katsayısı, 15
Doğrusal Nokta Cümlesi, 77
Dolanım, Birinci Cinsten Formlarda — Yönü, 120
Dolaysız İnfinitezimal Geometri, 207
Dönüm Noktası, 209
Dönüştürümler, Birasyonel — , 174, 175
— , Kremoniyen — , 174
Dörtgenin Alanı, 1
Dört Noktanın Harmonisiz Oranının Değerleri, 23
Düalite, Düzlemde — , 69
Düalite İlkesi, 68, 126
Düalite İlkesinin Yürürlük Alanı, 157
Düğümler Teorisi, 192
Düzlem, 77, 112
— , Birleşik — , 145
— , Cebirsel — Eğrilerin Arakesiti, 42
— , Hasolmıyan — , 72
— , Homologi — i, 67
— , İzdüşel — , 71
— , n ninci Dereceden — Cebirsel Eğri, 37
Düzlemde Düalite, 69
Düzlemde Geometrik Yer, 38
Düzlemde Homologi, 66
Düzlem Demeti, 77
Düzlem Eğrilerin Sınıflandırılması, 35
Düzlemde Sanal Nokta, 43
Düzlemin Koordinatları, 154
Düzlemler, Homografik — , 83
— , Karşıt — , 83

E

Eğri, Bir Cebirsel Uzay — sinin Monoidal Temsili, 54
— , Bir — nin Rasyonel Transformesi, 52
— , Bir Uzay — sinin İzdüşüren Silindirleri, 52
— , Jordan — si, 195
— , n ninci Dereceden Düzlem Cebirsel — , 37
— , Peano — si, 196
Eğri Kavramı, 178
Eğriler, Cebirsel Düzlem — in Arakesiti, 42
— , Cebirsel — , 37
— , Cebirsel Uzay — i, 50
— , Düzlem — in Sınıflandırılması, 35
— , Transandant — , 37
Eğrilerin Analitik olarak Gösterilmesi, 194
Eğrilerin İzdüşel olarak Doğurtulması, 91
Eğriler üzerine Sezgiye dayanan Düşünceler, 176
Eğrisel Koordinatlar, 49
Elea (veya *Zenon*) *Paradoksları*, 4, 5
Elemanlar, Sonsuzdaki — , 70
— , Sonsuzdaki sanal — , 142
Elementer, Topologi ve — Geometri, 187
Elementer Geometri, 1, 188
Eşdeğer Geometriler, 161, 162
Eşharmonisiz Oran, 76
Eşitlik, 112
Eşitlik Aksiyomları, 114
Eukleides Geometrisi, 5, 158, 159, 172
Eukleides Geometrisini Asal Gurubu, 133
Eukleides Geometrisinin Postulâtları, 112
Eukleides Postulâtı, 7, 102
Evirtim, 173

F

Form, Birinci cinsten — , 146
— , Birinci cinsten iki — arasındaki İzdüşellik, 79
— , İki — arasındaki İzdüşellik, 78
— , İkinci cinsten iki — arasındaki İzdüşellik, 83
— , İzdüşel — , 146
— , Üçüncü cinsten bir — da İzdüşellikler, 84
Formlar, Birinci cinsten — da Dolanım Yönü, 120
— , İzdüşel Geometrinin Temel — ı, 76

G

Geometri, Afin, 144, 145, 158, 159, 171
— , Analitik — de Açıların Ölçümü, 30
— , Analitik — de kullanılan Fonksiyonlar hakkında, 55
— , Analitik — nin Doğuşu, 26
— , Cebirsel — , 172, 174
— , Dar Anlamda İzdüşel — , 156
— , Doğruların İzdüşel — si, 166
— , Dolaysız İnfinitezimal — , 207
— , Elementer — , 1, 188
— , Eukleides — si, 5, 158, 159, 172
— , Eukleides — sinin Asal Gurubu, 133
— , Eukleides — sinin Postulâtları, 112
— , İzdüşel — , 55, 156, 171, 188
— , İzdüşel — nin Asal Gurubu, 154
— , İzdüşel — nin Postulâtları, 118
— , İzdüşel — nin Temel Formları, 76
— , İzdüşel — nin Teşmili, 168
— , İzdüşelliklerin Tanımı ve İzdüşel — nin Temel Teoremi, 123
— , İzdüşel Regle — , 167
— , Lobaçevski — si, 106

Geometri, Metrik — , 158, 159, 172
— , Metrik — nin Asal Gurubu, 132
— , Metrik — ve Hareketler, 128
— , Poincaré'nin Lobaçevski — si Modeli, 108
— , Pythagoras — si, 2, 3
— , Regle — , 164
— , Riemann — si, 110
— , Sonlu — , 211
— , Soyut bir — nin Yapımı, 158
— , Tasarı — , 63
— , Topologi ve Elementer — , 187
Geometri İlkeleri, 102
Geometrik Yer, Düzlemde — — , 38
— — , Uzayda — — ler, 48
Geometriler, Bağlı — , 159
— , Eşdeğer — , 161, 162
Geometrografi, 15
Gurup, Alt — , 134
— , Asal — , 133
— , Benzeşim — u, 134
— , Benzeşim — nun Analitik İfadesi, 138
— , Hareketler — u, 133, 137
— , Hareketler — ve Analitik Geometri, 134
— , Homeomorfiler — u, 185
— , Homografiler — u, 167
— , İşlemler — u, 129
— , İzdüşel Geometrinin Asal — u, 154
— , İzdüşellikler — u, 170
Gurup Kavramı, 129

H

Hareket, 149
Hareketler, Afiniteler, Benzeşimler ve — arasında Bağıntılar, 148
— , Metrik Geometri ve — , 128

Hareketler Gurubu, 133, 137
Hareketler Gurubu ve Analitik Geometri, 134
Harmonik Oran, 76
Harmonisiz Oran, Çifte ya da — — , 72, 74, 146
— — , Dört Noktanın — — ının Değerleri, 74
Has Doğru, 74
Has Nokta, 71
Hasolmıyan Doğru, 71, 72, 74
Hasolmıyan Düzlem, 72
Hiperdüzlem, 168
— , Hasolmıyan — , 171
— , Sonsuzdaki — , 171
Hiperkuvadrik, 167
Homeomorfi, 178
Homeomorfiler Gurubu, 185
Homeomorfilerin Analitik olarak Gösterilmesi, 198
Homografi, 83, 85, 155, 156, 170, 175
— , Afinitelerle — ler arasında Bağıntı, 156
— , Uzay — si, 156
Homografi Çarpımı, 155
Homografik Düzlemler, 83
Homologi, Düzlemde — , 66
— , Uzayda — , 67
Homologi Düzlemi, 67
Homologi Ekseni, 67
Homologi Merkezi, 67
Homoteti, 134

İ

İdeal, Ortak — Kiriş, 67
İdeal Düzlem, 111
İkiyüzlü Açı, 111
İkizkenar Üçgenin Alanı, 1
İlke, Düalite — sinin Yürürlük Alanı, 157
— , Düzlemde Düalite — si, 69

İlke, Süreklilik — si, 67
İnfinitezimal, Dolaysız — Geometri, 207
İnvolüsyon, 164
İzdüşel, Dar Anlamda — Geometri, 156
— , Doğruların — Geometrisi, 166
— , Eğrilerin — olarak Doğurtulması, 91
İzdüşel Düzlem, 146
İzdüşel Form, 146
İzdüşel Geometri, 55, 156, 171, 188
İzdüşel Geometrinin Asal Gurubu, 154
İzdüşel Geometrinin Postulâtları, 112
İzdüşel Geometrinin Temel Formları, 76
İzdüşel Geometrinin Teşmili, 168
İzdüşel Koordinatlar, 153
İzdüşel Regle Geometri, 167
İzdüşel Uzay, 72, 152, 153, 167, 168
İzdüşellik, Birinci Cinsten iki Form arasında — , 79
— , İki Form arasındaki — , 78
— , İkinci Cinsten iki Form arasındaki — , 83
İzdüşellikler, Uzay — i, 156
— , Üçüncü Cinsten bir Formda — , 84
İzdüşellikler Gurubu, 170
İzdüşelliklerin Tanımı ve İzdüşel Geometrinin Temel Teoremi, 123
İzdüşel Özelikler, 65
— — , Şekillerin — — Adlı Eser hakkında, 65
İşlemler Gurubu, 129
İzdüşüm, 65, 74
İzdüşüren, Bir Uzay Eğrisinin — Silindirleri, 52
İzotrop Doğru, 144

I

Işın Demeti, 77

J

Jordan Eğrisi, 195

K

Karelenme, Dairenin — si, 8, 13
Karşıt Düzlemler, 83
Karşıtlık, 83, 85, 155, 156, 170
Karteziyen, Homogen — Koordinatlar, 140
— , n Boyutlu — Uzay, 171
Karteziyen Uzay, 139, 172
Katsayı, Basitlik — sı, 15
— , Doğruluk — sı, 15
Kesim, 65, 74
Kiriş, Ortak İdeal — , 67
Kolineasyon, 83, 85
Konik Kesitler, Apollonios'un — — i, 19
— — , Yunanlıların — — ile ilgili ilk Araştırmaları, 16
Konikler, Belçikalıların — e dair Teoremleri, 21
— , Desargues'ın — le ilgili Araştırmaları, 57
— , Pascal'ın — üzerine Deneme Adlı Eseri hakkında, 60
Koniklerin izdüşel olarak Doğurtulması, 85
Koniklerin von Staudt'a göre Tanımı, 88
Kontenjan, 207
Konum, Metrik Özelikler ve — Özelikleri, 64
Koordinat, Muhtelif — Sistemleri, 32
Koordinat Çizgileri, 34
Koordinatlar, Çift Kutupsal — , 38
— , Düzlemin — ı, 154
— , Eğrisel — , 49
— , Homogen Karteziyen — , 140
— , Kutupsal — , 32
— , Teğetsel — , 154
— , Uzayda — Usulü, 47
Koordinatlar Usulü, 27
— — , Uzayda — — , 47

Korelasyon, 83, 85
Kremoniyen Dönüştürümler, 174
Kutupluluk, 69
Kutupsal, Çift — Koordinatlar, 33
Kutupsal Koordinatlar, 32
Kübün İkikat kılınması, 8, 11

L

Laguerre, Açı Ölçülerine — tarafından verilen Yorum Şekli, 150
Linear, n Boyutlu — Uzay, 168
Lobaçevski, Poincaré'nin — Geometrisi Modeli, 108

M

Mertebe, n ninci — den Çokkat Nokta, 195
— , n ninci — den dar Anlamlı Topologi, 205, 207
Merkez, Homologi — i, 67
Metrik Geometri, 158, 159, 172
Metrik Özelikler ve Konum Özelikleri, 64
Model, Poincaré'nin Lobaçevski Geometrisi — i, 109
Monad, 3, 4, 5
Monoid, 55
Monoidal, Bir Cebirsel Uzay Eğrisinin — Temsili, 54
Mutlak Çember, 143, 149

N

Nokta, 112, 113
— , Birleşik — , 95, 96, 122
— , Büküm — sı, 213
— , Doğrusal — Cümlesi, 77
— , Dönüm — sı, 209
— , Dört — nın Harmonisiz Oranının Değerleri, 74
— , Düzlemde Sanal — , 43
— , Has — , 71

Nokta, Hasolmıyan — , 71, 72, 74
— , İkikat — , 95
— , Limit — sı, 207
— , n ninci Mertebeden Çokkat — , 195
— , Siklik — , 143, 144
— , Sonsuzdaki — , 70
— , Yığılma — sı, 207

O

Oran, Afinite — ı, 148
— , Çifte ya da Harmonisiz — , 72, 74, 146
— , Dört Noktanın Harmonisiz — nın Değerleri, 74
— , Eşharmonisiz — , 76
— , Harmonik — , 76
Ortak İdeal Kiriş, 67
Ortaklık, 112
Ortaklık Aksiyomları, 112
Özelik, Metrik — ve Konum — leri, 64
— , Şekillerin İzdüşel — leri Adlı Eser hakkında, 65

Ö

Ölçü, Açı — lerine Laguerre tarafından verilen Yorum Şekli, 150

P

Paradoks, Cramer — u, 45
— , Elea veya Zenon — u, 4, 5
Paralellik, 112
Paralellik Aksiyomu, 114
Paratenjan, 207
Paratenjant, 208
Peano Eğrisi, 196
Perspektivite, 78

Postulât Arkhimedes — ı, 115
— , Arkhimedes — ı ve Doğru Parça'larının Ölçümü, 117
— , Eukleides — ı, 7, 102
Postulâtlar, 6
— , İzdüşel Geometrinin — ı, 118
Postulâtların Bağdaşabilirlik ve Bağımsızlığı, 115
Pythagoras Teoremi, 3

R

Rasyonel, Bir Eğrinin — Transformesi, 52
Regle, İzdüşel — Geometri, 167
Riemann Yüzeyleri, 188

S

Sanal, Düzlemde — Nokta, 43
— , Sonsuzdaki — Çember, 143
— , Sonsuzdaki — Elemanlar, 142
Siklik Nokta, 143, 144
Silindir, Bir Uzay Eğrisinin İzdüşüren — leri, 52
Sistemler, Muhtelif Koordinat — i, 32
Sınıflandırılma, Düzlem Eğrilerin — sı, 35
Sıralanmış Tekabüller, 122
Sonsuzdaki Doğru, 71
Sonsuzdaki Elemanlar, 70
Sonsuzdaki Hiperdüzlem, 171
Sonsuzdaki Nokta, 70
Sonsuzdaki Sanal Çember, 153
Sonsuzdaki Sanal Elemanlar, 142
Sübstitüsyon, 130
— , İdentik — , 131
— , Ters — , 130, 132
Sübstitüsyonların Çarpımı, 130, 132

Süreklilik, 112
Süreklilik Aksiyomu, 115
Süreklilik İlkesi, 67

Ş

Şartlar, Teğetlerin Varlık — ı, 203
Şekillerin İzdüşel Özelikleri Adlı Eser hakkında, 65

T

Tanım, İzdüşelliklerin — ı ve İzdüşel Geometrinin Temel Teoremi, 123
— , Koniklerin von Staudt'a göre — ı, 88
Tanımlar, 6
Teğetlerin Varlık Şartları, 203
Teğetler Problemi, 40, 200
Teğetsel Koordinatlar, 154
Teka'bül, Chasles'ın — İlkesi, 95
Tekabüller, Bire-Bir — , 122
— , Sıralanmış — , 122
Temel, İzdüşel Geometrinin — Formları, 76
— , İzdüşelliklerin Tanımı ve İzdüşel Geometrinin — Teoremi, 123
Temsil, Bir Cebirsel Uzay Eğrisinin Monoidal — i, 54
Teoremler, Belçikalıların Koniklere dair — i, 21
Teşmil, İzdüşel Geometrinin — i, 168
Topologi, 176, 178, 183, 188
— , n ninci Mertebeden Dar Anlamlı — , 205, 207
Topologinin Gelişimi, 214
Topologi ve Elementer Geometri, 187
Transandant Eğriler, 37
Transforme, Bir Eğrinin Rosyonel — si, 52

U

Uzay, 77
— , Argeziyen — , 139, 141, 142, 145, 153
— , Bir Cebirsel — Eğrisinin Monoidal Temsili, 54
— , Bir — Eğrisinin İzdüşüren Silindirleri, 52
— , Cebirsel — Eğrileri, 50
— , İzdüşel — , 72, 152, 153, 167, 168
— , Karteziyen — , 139, 172
— , n Boyutlu Karteziyen — , 171
— , n Boyutlu Linear — , 168
Uzayda Geometrik Yerler, 48
Uzayda Homologi, 67
Uzayda Koordinatlar Usulü, 47
Uzay İzdüşellikleri, 156

Ü

Üçgen, İkizkenar — nin Alanı, 1

V

Varlık, Teğetlerin — Şartları, 203

Y

Yapım, Soyut bir Geometrinin — ı, 158
Yarım-Doğru, 27
Yığılma Noktası, 207
Yorum, Açı Ölçülerine Laguerre tarafından verilen — Şekli, 150
Yön, Birinci Cinsten Formlarda Dolanım — ü, 120
Yönelim, 71
Yürürlük Alanı, Düalite İlkesinin — — , 157
Yüzey, Riemann — leri, 188
Yüzey Kavramı, 181

Z

Zenon (veya Elea) *Paradoksları*, 4, 5

EK BİBLİYOGRAFYA

BORSUK, K. VE SZMIELEV, W. : **Foundations of Geomotry,** Amsterdam (1960)

COXETER, H. S. M. : **Introduction to Geometry,** TORONTO (1961)

— : **Non-Euclidean Geometry,** TORONTO (1957)

FORDER H. G. : **The Foundations of Euclidean Geometry,** NEW YORK, (1958)

GOULD, S. H. : *Origins and Development of Concepts of Geometry,* 23d YEAR BOOK of the NCTM, Bölüm IX (1957)

KRREKJARTO B. M. DE : *Les Fondements de la Géométrie,* BUDAPEST (1955)

LEFSCHETZ, S. : **Introduction to Topology,** PRINCETON (1949)

ROBINSON, G. DE B. : **The Foundations of Geometry,** TORONTO (1959)

BİRİNCİ BÖLÜM

ELEMENTER GEOMETRİ

1. Geometrinin doğuşu. İlk geometrik araştırmalar genellikle Mısır ve Babillilere atfolunur.

Mısırda Nil nehri dolayısiyle husule gelen su basmalarının periyodik bir tarzda vaki oluşu, arazi ölçümü ile meşgul olan kimseleri, bu arazinin sınırlarını her yıl yeni baştan çizmek zorunda bırakıyordu. Fakat Mısırlılara hâs olan Geometri, tecrübî bir karakter taşıyordu, kullanılan formülller de ampirikti. Nitekim, kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dörtgenin alanını hesaplamak için onlar

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

formülünü kullanıyorlardı; halbuki bu formül, bahis konusu dörtgene ait açıların dik açılara yakın olmaları nispetinde yaklaşık bir değer verir.

Bunun gibi, kenar uzunlukları a, a, b olan bir ikizkenar üçgenin alanı, onlara göre

$$\frac{a \cdot b}{2}$$

formülü ile belli oluyordu, halbuki bu formülün temin ettiği yaklaşıklık, a nın b den büyük olması nispetinde ehemmiyetlidir.

Yarıçapı R olan dairenin alanı da

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 R^2$$

formülü ile hesaplanıyordu ki bu da çember çevresinin çapa oranı olarak: 3,1604... değerini veriyordu.

Mısır matematiği hakkında bildiklerimizin çoğu kısmı, RHIND papirüsünün EISENLOHR tarafından yapılan tercümesine dayanır. *müstensih* AHMES'*in* **Hesap Elkitabı**'ndan başka bir şey olmıyan bu papirüs, M. Ö. 1700 ilâ 2000 yıllarına aittir. MOSKOVA da muhafaza edilen başka bir papirüsün son zamanlarda yapılan tercümesi sayesinde STRUVE gördü ki Mısırlılar hem küre yüzeyini hem de eksik piramidin hacmını hesaplamasını biliyorlardı.

Babilliler de, muhtemelen gene arazi ölçümünden ve ticarî ihtiyaclardan doğma, bazı matematik bilgilere sahibdiler. Muhtemelen M. Ö. 2000 yıllarına ait olan ve BRITISH MUSEUM'da muhafaza edilen bir yontma taş üzerinde, bir ikinci derece denkleminin, hattâ bir ikikat kareli denklemin çözümüne irca olunan bir takım problemler vardır [1]).

Bir dik üçgenin hipotenüsünün karesi ile ilgili teoremin bazı özel hallerde, Hindliler tarafından da bilindiği sanılıyor.

Mısırlıların ve Duğulıların matematik bilgileri, ticarî alış verişler sayesinde Eski Yunanistan'a intikal etti. Mısır geometrisinin Eski Yunanistan'a sokulması hususu, M. Ö. 600 seneleri civarında yaşıyan ilk Yunan geometricilerinden THALES'e atfolunur.

2. Pythagoras Geometrisi. M. Ö. 572 seneleri civarında SISAM adasında dünyaya gelen PHYTAGORAS, KROTON'da sonradan çok tanınmış bir okul kurdu; buranın hem ilmî hem de felsefî olan öğretimi başlangıçta gizli ve mistik bir vasıf taşıyordu. İşte bu okulda, muhtemelen ilk defa olarak, Geometri artık sadece tatbikatı bakımından yayılmadı, istidlâlî bir şekle de sokuldu.

---

[1]) F. THUREAU—DANGIN, *L'équation du second degré dans la mathématique babylonienne, d'après une tablette inédite du British Museum.* —BRITISH MUSEUM'da bulunan ve hakkında henüz yayın yapılmamış olan bir yontma taşa göre, Babil matematiğinde ikinci derece denklemi — (*Revue d'Assyriologie*, 1936, S. 27—48, ve *Textes mathématiques babyloniennes* — Babil'e ait matematik tekstler, (aynı dergi, S. 65—84).

PAUL TANNERY'ye göre, muhtevası EUKLEIDES'inkine oldukça benziyen bir PYTHAGORAS geometrisi kitabı muhtemelen vardı. Fakat bu kitapta nokta, çizgi ve yüzey kavramları tamamiyle farklı bir mahiyette idiler. PYTHAGORAS'a göre nokta, henuz bizim geometrimizdeki boyutsuz nokta değildi; bu, küçük kum zerresini ampirik olarak sezişimize uyacak tarzda düşünülen boyutlu bir nokta idi; buna *monad* veya bir durumu haiz *birim* deniliyordu. Bir çizgi, monadlardan müteşekkil bir dizi, yâni bir nevi çok ince tel şeklinde düşünülüyordu; bir çizginin hareketi neticesinde meydana gelen bir yüzey, az çok kalınlığı olan bir örtü idi.

PYTHAGORAS Geometrisinde, biri m öteki de n sayıda monadı ihtiva eden iki doğru parçasının uzunluklarının oranı $m:n$ ye eşitti; bütün uzunluklar ortak ölçümlü idi ve Geometrik Orantılar Teorisi de bu esasa göre kurulmuştu.

Bununla beraber, PYTHAGORAS teoremi —yani «Bir dik üçgende hipotenüsün karesi, diğer iki dik kenarın kareleri toplamına eşittir.» teoremi— monad kavramı üzerine kurulmuş olan geometriyi yıkacak delili sağlıyacaktı.

m ve n aralarında asal iki sayıyı göstermek üzere, hipotenüsünün dik kenara oranı $m:n$ ye eşit olan bir ikizkenar dik üçgeni nazarı itibara alalım. Bu halde, hipotenüsün karesi ile ilgili teorem

$$m^2 = 2\,n^2$$

sonucunu gerektirir. Bu takdirde m nin bir çift sayı olması lâzımdır, dolayısiyle m^2, 4 ün katıdır. Buna göre n çifttir ve her iki sayı, hipotezin tersine, aralarında asal iki sayı değildir. Bu çelişme gösterir ki ikizkenar dik üçgenin hipotenüsü ile dik kenarı, başka deyimle, bir karenin köşegeni ile kenarı ortak ölçümlü değildirler.

Uzun zaman gizli tutulan bu buluş, METAPONTION'lu HIPPASOS

tarafından açığa vuruldu. Rivayete göre, bu olay üzerine KROTON'daki okuldan kovulan HIPPASOS bir deniz kazasında ölmek suretiyle Tanrılar tarafından cezalandırıldı.

3. Elea Paradoksları. Tirene denizi kıyılarındaki Elea adlı bir Yunan şehri, başlıca mümessilleri PARMENIDES ve onun yetiştirmesi ZENON'dan ibaret bulunan bir okulun merkezi idi. PARMENIDES, M. Ö. 500 senesi civarında Elea'da dünyaya geldi; öyle sanılıyor ki nokta, çizgi, yüzey ve genellikle Geometri şekillerinin bir ideal varlığa sahib olduklarının ilk farkına varan kimse o idi. EUKLEIDES'de rastlanan aşağıdaki tarifi, PROKLOS ona atfeder: *nokta, kısımları olmıyan şeydir.*

Üstadının fikirlerini savunmak amaciyle, ZENON, zamanımıza kadar şöhretlerini muhafaza eden dört paradoksu ortaya attı; biz burada ancak, sadece Geometriyi ilgilendiren ilk ikisini söz konusu edeceğiz:

1. Hareketli bir nokta, bir A noktasından bir B noktasına gidebilmek için, önce AB doğru parçasının C orta noktasından, sonra CB doğru parçasının D orta noktasından, ilâ... geçmek zorundadır; ve bu harekete ilâ nihaye devam edecektir. Şu halde B ye asla varamıyacaktır.

2. Ayağına çabuk AKILLEUS kendisinden biraz ilerde bulunan kaplumbağayı hiçbir zaman yakalıyamıyacaktır. Zira, farzedelim ki AKILLEUS kaplumbağadan 100 metre ötededir ve ondan 10 kere daha hızlı koşabilmektedir. Eğer başlangıçta AKILLEUS A da kaplumbağa da B de bulunuyorlarsa, AKILLEUS B ye vardığı zaman, kaplumbağa da 10 metre katetmiş olacak ve C ye gelecektir. AKILLEUS C ye gelince, kaplumbağa da 1 metre kadar ilerlemiş bulunacak ve bu, böylece nihayetsiz bir şekilde devam edip gidecektir.

PAUL TANNERY'ye göre, bu paradokslar, PYTHAGORAS'cılara hâs fikirlerin abese irca şeklinde telâkki olunmalıdırlar. Monad

denilen şey varsa, her doğru parçası bir ε miktarından daima büyüktür ve sonsuz sayıda doğru parçasının toplamı sonsuzdur; işte ZENON paradoksları böyle bir hipotezin mânasızlığını gösterir.

Sırası gelmişken, ZEUTHEN'le birlikte, şurasını da kaydedelim ki ZENON paradoksları bir geometrik dizi toplamının bilindiğini tazammun eder. Birinci paradokstaki AB uzunluğu birim olarak alındığı takdirde

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

dir.

İkincisinde de

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=100+\frac{100}{9},$$

veya her iki tarafı 100 le bölerek

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=1+\frac{1}{9}$$

dur.

Esasen Elealılar tarafından yapılan tenkid monad kavramına öldürücü darbeyi indirdi ve pek az bir süre sonra bu kavram Yunan Geometrisinden kalktı.

4. Eukleides Geometrisi. EUKLEIDES M. Ö. 300 senesi civarında İSKENDERİYE'de yaşıyordu. Onun, bu gün dahi öğretimimizin temelini teşkil eden *Eleman*'larında, Aritmetik ve Geometri'nin esas kısımları, belirli sayıda birtakım ipotezlere dayanılarak, mantıkî bir şekilde izah edilmektedir.

EUKLEIDES'in eseri onüç kitaba bölünmüştür: ilk dördü Düzlem Geometri ile ilgilidir, beşincisi büyüklükler ve bunların oranları hakkındaki genel teoriyi ihtiva eder ve bu teori altıncı kitapta Düzlem Geometriye tatbik edilmiştir. Bundan sonraki

üç kitap aritmetiğe, onuncusu ortak ölçümsüz sayıların tasnifine, ve nihayet son üçü de Uzay Geometrisine tahsis olunmuştur.

EUKLEIDES Geometrisinin dayandığı hipotezler üç türlüdür: *tanımlar*, *postülâtlar* ve *aksiyomlar*. Netice itibariyle en önemlileri sayılabilen ve birinci kitapta bulunan hipotezleri söz konusu edeceğiz.

Önce şu noktayı kaydedelim ki EUKLEIDES'in verdiği tanımlar, tanımlanan nesnelerin varlığını hiçbir zaman tazammun etmez, Esasen bu tanımların birçoğu mübhemdir. Meselâ doğruyu tanımlarken, EUKLEIDES, aslına bakılırsa, sadece doğru denilen çizgilerin varlığını söylemektedir. Ancak ilk postülâtların ifade edilmesi sayesinde daha etraflıca bilgi sahibi olunacaktır.

EUKLEIDES tarafından vazedilen tanımlardan birkaçı şöyledir:

Nokta, kısımları olmıyan şeydir.

Çizgi, genişliği olmıyan bir uzunluktur.

Bir çizginin uçları noktalardan ibarettir.

Yüzey sadece uzunluk ve genişliği olan şeydir. Bir yüzeyin uçları çizgilerden ibarettir. Doğru her noktasında kendisinin aynı kalan çizgidir.

Düzlem, üzerinde bulunan bütün doğrulara göre aynı kalan yüzeydir.

Bir doğru, başka bir doğru ile eşit komşu açılar vucuda getirirse, eşit açılardan her biri bir dik açıdır ve ilk doğru ikinciye diktir, denilir.

Paraleller bir düzlemin öyle doğrularıdır ki nihayetsiz bir şekilde uzatıldıkları zaman birbirlerini kesmezler.

Postulât'ların sayısı beştir.

I. İki noktadan bir doğru geçirilebilir.

II. Sınırlı bir doğru nihayetsiz bir şekilde uzatılabilir.

III. Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.

IV. Bütün dik açılar birbirlerine eşittir.

V. Başka iki doğruyu kesen bir doğru, bu iki doğru ile aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirse, iki doğru veya bunların uzantıları, iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük olan tarafta kesişirler.

Daha önce söylediğimiz gibi, ilk iki postulât, iki noktanın bir doğru belirlediği ve doğrunun sınırsız olduğu hususlarını kesin bir şekilde tasrih ederek doğru kavramını aydınlatırlar.

Beşinci postulât, EUKLEIDES postulâtı adı altında tanınmıştır; hem daha önceki postulâtlara dayanarak beşinci postulâtı ispat etmek için yapılan teşebbüsler, hem de bu teşebbüslerdeki başarısızlığın, geometrinin kalkınmasına sebep oluşu yüzünden bu beşinci postulât pek tanınmıştır.

Büyüklükleri inceleyen bütün bilimlerde **aksiyomlar** ortaktır; bunların sayıları sekizdir.

I. Aynı bir şeye eşit olan şeyler birbirlerine eşittir.

II. Eşit şeylere eşit şeyler eklenirse, toplamlar eşit olurlar.

III. Eşit olmıyan şeylere eşit şeyler eklenirse, toplamlar eşit olmazlar.

IV. Eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar eşit olurlar.

V. Eşit şeylerin iki katları eşittir.

VI. Eşit şeylerin yarıları eşittir.

VII. Birbiri üzerine konulabilen şeyler birbirine eşittir.

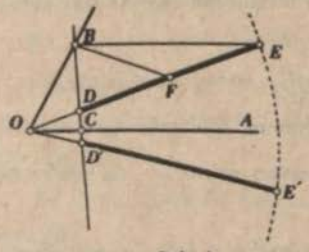
VIII. Bütün, parçasından büyüktür.

Netice itibariyle EUKLEIDES bu aksiyomlar yardımiyle büyüklüklerin eşitliğini tamamlamaktadır. Hususiyle, yedinci aksiyom, geometrik şekiller arasındaki eşitliğin, birbiri üzerine konabilmek suretiyle ispatlanacağını göstermektedir.

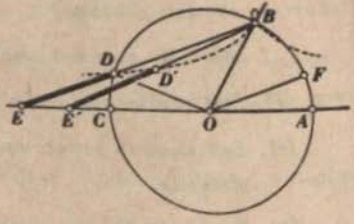
5. Açının üçe bölünmesi. M. Ö. V inci yüzyıldan itibaren Yunanlılar, sonradan çok meşhur olan, şu üç problemle uğraştılar: *açının üçe bölünmesi, kübün iki kat kılınması, dairenin karelenmesi*. Bu problemleri, cetvel ve pergel yardımiyle yapılan çizimlerle çözmek istediler. Halbuki ancak yakın zamanlarda, söz konusu problemlerin bu çeşit çizimlerle çözülemiyeceği ispat edilebildi, bununla beraber Yunanlıların bu hususta araştırmaları boşa gitmedi; bu sayede bazı eğriler incelendi. Belki de konik kesitlerin ilk defa tetkiki keyfiyetini bu araştırmalara bağlamak yerinde olur.

Açının üçe bölünmesi problemi, verilen bir açıyı üç eşit parçaya bölmekten ibarettir. Yunanlı Geometriciler tarafından ileri sürülen çözümlerden üçünü gözden geçirelim:

1. Üç eşit parçaya bölünmesi gereken açı $\sphericalangle AOB$ olsun (*Şek.* 1). B den OA ya BC dikmesini indirelim, sonra B den OA



Şek. 1



Şek. 2

nın BE paralelini geçirelim, nihayet O dan itbaren öyle bir OE doğrusunu çizelim ki DE doğru parçasının uzunluğu $2.OB$ ye eşit olsun. Buna göre, DE nin orta noktası F ise

$$OB = DF = FE = BF$$

dir, ve dolayısiyle $\sphericalangle BOE$, $\sphericalangle BFO$ açıları birbirine eşittir. Bunlardan sonuncusu, $\sphericalangle BEF$ açısının iki katına, yâni AOE açısının iki katına eşittir. O halde

$$\sphericalangle AOE = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$$

dir.

Böylece problemin çözümü, iki BC, BE doğrusu arasına, O dan geçmesi gereken bir doğru üzerinde, verilen bir $DE = 2.OB$ uzunluğunun *yerleştirilmesine* irca edilmiş oluyor.

BC yi D' noktasında kesen herhangi bir doğru O dan geçirilir ve bu doğru üzerinde D' den itibaren OD' yönünde bir $D'E' = 2.OB$ uzunluğu alınırsa, E' nün geometrik yeri NIKOMEDES *Konkoidi* denilen bir eğridir; bu eğri BE yi E noktasında keser. Bu defa problem, bir doğru ile bir eğrinin arakesitini bulmaya irca edilmiştir. Bu eğri, kolayca tasavvur olunabilen mekanik bir alet yardımiyle esasen sürekli bir çizgi halinde çizilebilir.

2. Üç eşit parçaya bölenmesi gereken açı gene $\sphericalangle AOB$ olsun (*Şek.* 2). Merkezi O olmak üzere, açının kenarlarını A, B noktalarında, ve AO nun uzantısını da C de kesen bir çember çizelim. Bu çemberi D de ve AO nun uzantısını da E de kesmek üzere B den öyle bir doğru geçirelim ki $ED = OB$ olsun. OED, BOD üçgenleri ikizkenar olduklarından

$$\sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \sphericalangle ODB = \frac{1}{2} \sphericalangle DBO$$

dur.

O dan, çemberi F noktasında kesen ve ED ye paralel olan doğruyu geçirelim. Bu takdirde

$$\sphericalangle AOF = \sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \sphericalangle DBO = \frac{1}{2} \sphericalangle BOF = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB$$

dir.

Burada da problem bir *yerleştirme*'ye, yâni B den geçen bir doğru üzerinde bulunmak üzere, $DE = OB$ uzunluğunun, AO doğrusu ile çember arasına yerleştirilmesine irca edilmiştir.

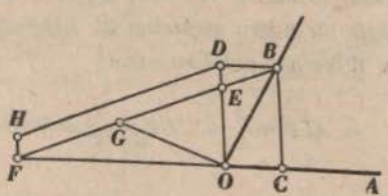
Eğer B den, AO yı E' de kesen bir doğru geçirilir ve E'

den itibaren bu doğru üzerinde ve $E'B$ yönünde bir $E'D' = OB$ uzunluğu alınırsa, D' nün geometrik yeri çemberi D de kesen ikinci bir konkoiddir.

Bu suretle karşılaştığımız iki konkoid bir nevi birbirinin tamamlayıcısıdır. Gerçekten, önceki şekilleri bir tarafa bırakarak, bir O noktasiyle bu noktadan geçmiyen bir r doğrusunu ele alalım. O dan geçen ve r yi P de kesen bir p doğrusu üzerinde, P den itibaren ve P nin her iki tarafında, verilen bir uzunluğa eşit PM, PM' doğru parçalarını alalım. Farzedelim ki, PM' parçasının yönü, P den O ya giden yöndür. p doğrusu değiştiği takdirde, M noktası birinci çizimde kullanılan konkoidi, M' noktası da ikinci çizimde kullanılan konkoidi çizer.

3. Pappos tarafından nakledilen üçüncü bir çizimde, konkoid yerine bir ikizkenar hiperbol kullanılmaktadır.

Üç eşit parçaya bölünmesi söz konusu olan $\sphericalangle AOB$ açısını yeniden ele alalım. (*Şek.* 3). B den OA ya BC dikmesini indire-



Şek. 3

lim ve kenarları OC, BC olan $OCBD$ dikdörtgenini tamamlıyalım. B den öyle bir BF doğrusu geçirelim ki bunun üzerinde AO, OD doğrularının ayırdığı EF doğru parçasının uzunluğu $2.OB$ ye eşit olsun. Nihayet EF nin orta noktasına da G diyelim. $\sphericalangle OFE$ açısı, $\sphericalangle OGB$ açısının yarısına, yâni $\sphericalangle OBG$ açısının yarısına eşittir. Öte yandan, $\sphericalangle OFE$, $\sphericalangle DBE$ açıları eşittir ve nihayet $\sphericalangle OBD$ açısı, verilen $\sphericalangle AOB$ açısına eşittir. Buradan da $\sphericalangle OFE$ açısının, $\sphericalangle AOB$ nin üçte birine eşit olduğu neticesi çıkarılır.

Bu anlaşıldıktan sonra, D den BF nin ve F den de BC nin paralellerini geçirelim; bu iki doğru H da kesişirler. Benzer BCF, BED üçgenlerinden

$$\frac{CF}{BD}=\frac{BC}{DE},$$

buradan da

$$CF\cdot FH=OC\cdot CB$$

sonucu çıkarılır.

OC ve BC sabit tutulduğuna göre, H noktası, asimptotları CF, CB olan bir δ ikizkenar hiperbolü üzerindedir. Bu hiperbol, $CB=OD$ olduğundan, D noktasından da geçer. DH doğru parçasının uzunluğu $EF=2.OB$ dir; öte yandan, B noktası seçildiğine göre, D noktası belirlidir ve H noktası da merkezi D ve yarıçapı $2.OB$ olan çember üzerindedir.

H noktası, δ ikizkenar hiperbolü ile biraz önce bahsedilen çemberin arakesiti olarak belirlendiğine göre, F noktası belirlidir ve problem çözülmüştür.

İlk iki çizimde olduğu gibi, bu üçüncü çizimde de problem, öace bir *yerleştirme*'ye, sonra iki eğride ortak bir noktanın belirlenmesine irca olunmuştur.

6. Kübün iki kat kılınması. Kübün ikikat kılınması probleminde, hacmi, verilen bir kübünkinin ikikatı olan bir kübün inşası bahis konusudur.

Verilen kübün ayrıtı uzunluk birimi olarak alınırsa, ikincinin x ayrıtı

$$x^3=2$$

denklemini çözmek suretiyle elde edilecektir.

Hippokrates daha genel olarak bu problemi, hacmi, a^2 kare tabanlı ve b yükseklikli bir dik paralelyüzünkine eşit bir kübün inşasına, yâni

$$x^3 = a^2 b$$

denkleminin çözümüne irca etti.

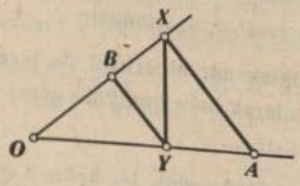
HIPPOKRATES, verilen a, b doğru parçaları arasına iki x, y orantılı ortalarının yerleştirilmesiyle, yâni

(1) $$a : x = x : y = y : b$$

denklemlerinin çözülmesiyle problemin sonuca bağlanacağını kaydetmektedir.

ARKHYTAS da bu problemi, birazdan izah edileceği şekilde, bir kesik çizginin bir açı içine çizilmesi problemine irca etti.

Bir $\sphericalangle AOB$ açısını düşünelim (*Şek.* 4) ve A dan OB ye AX



Şek. 4

dikmesini indirelim, B den de OB ye BY dikmesini çıkalım. Farzedelim ki XY doğrusu AO ya diktir. Benzer OAX, OXY üçgenleri

$$OA : OX = OX : OY,$$

ve benzer OXY, OYB üçgenleri de

$$OX : OY = OY : OB$$

eşitliklerini verirler.

Eğer

$$OA = a,\ OB = b,\ OX = x,\ OY = y$$

dersek, (1) bağıntılarını buluruz.

Şu halde problem, OA ve OB uzunlukları bilindiğine göre, öyle bir $\sphericalangle AOB$ açısının bulunmasına irca edilmiş olur ki bunun içine $AXYB$ kesik çizgisi çizilebilsin. Bu çizimi bilfiil yapabilmek için Yunanlılar birtakım mekanik aletler düşündüler. Çok daha sonraları, DESCARTES, **Geometri** adlı kitabında, bunlara benzer bir alet tasavvur edecekti.

HIPPOKRATES'in orantılı ortalar probleminl, MENECHME, arakesitlerini aradığı konikler yardımiyle çözdü. Bu hususta MENECHME tarafından yapılan çizimleri, aşağıda modern dile çeviriyoruz :

(1) Bağıntılarından

(2) $$x^2 = ay,\ y^2 = bx,\ xy = ab$$

eşitlikleri çıkarılır.

Ox, Oy birbirine dik iki eksen olsun. (2) denklemlerinden birincisi, tepesi O ve ekseni Oy olan bir parabolü gösterir; ikincici tepesi O ve ekseni Ox olan bir parabolü temsil eder; sonuncusu da asimptotları Ox, Oy olan bir ikizkenar hiperbolün denklemidir. HIPPOKRATES problemi, ya yukarıki iki karabolün arakesitini, yahut da ikinci parabol ile ikizkenar hiperbolün ara kesisitini düşünmek suretiyle, MENECHME tarafından çözüldü.

7. Dairenin karelenmesi. Dairenin karelenmesi problemi Yunanlılar tarafından iki bakımdan ele alınmışdı. Bir yandan, yarıçapı verilen bir dairenin alanına tekabül eden değeri hesapla bulmak istemişlerdi, ki bu da daire çevresinin çapına olan oranının değerini aramak demektir. Öte yandan, alanı, verilen bir dairenin alanına eşit bir kareyi grafik olarak çizmeğe çalışmışlardı.

Problemin birinci tarzda anlaşılması keyfiyetine gelince, tabiatiyle problemin çözümüne dairenin iç ve dış çokgenlerinin düşünülmesi ile girişildi. Bu hususta kesin bir sonucun elde edilmesi ARKHIMEDES'le (M. Ö. 287—212) başlar.

Dairenin ölçümü adlı kitabında ARKHIMEDES önce şu keyfiyeti ispat ile işe başlar: Bir dairenin alanı, tabanı dairenin çevre uzunluğuna ve yüksekliği de dairenin yarıçapına eşit bir üçgenin alanına eşittir. Böylece dairenin karelenmesi meselesi, dairenin çevre uzunluğunun çapa olan oranının hesaplanmasına irca edilmiş olur ki hâlen bu oran π ile gösterilmektedir. Bu maksatla ARKHIMEDES, her biri 96 kenarlı bir iç bir de dış çokgen düşünür. Bunlardan iç çokgenin çevre uzunluğu $3\frac{10}{71}$ kere çaptan büyüktür ve dış çokgeninki de $3\frac{1}{7}$ kere çaptan küçüktür. Buna göre π sayısı $3\frac{10}{71}$ ile $3\frac{1}{7}$ arasındadır.

Problemin ikinci tarzda ele alınması keyfiyeti de, daha önce söz konusu edilen problemlerde olduğu gibi, Yunanlıların yardımcı eğrileri düşünmelerini gerektirdi. Bunlardan *kareleyici* denilen bir tanesi transandant bir eğridir ve dik koordinatlarda denklemi

$$y = x\,tg\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

şeklinde yazılır.

Ancak 1882 yılında, HERMITE'in bir usulünü kullanan LINDEMAN (1852—1919) π sayısının hiçbir cebirsel denklemin kökü olmadığını, yani π nin bir transandant sayıdan ibaret bulunduğunu ispat ettiği vakit sâbit oldu ki cetvel ve pergel yardımiyle dairenin karelenmesi imkânsızdı.

Bu türlü düşünceler dolayısiyle geometriciler, yalnız cetvel ve pergel kullanmak şartiyle grafik olarak çözülebilecek problemleri incelemeğe koyuldular. Bu kategoriye sokulabilecek yegâne problemler cebir yolu ile ancak birinci ve ikinci dereceden denklem sistemlerinin çözümüne irca olunabilenlerdir. Bunlardan gayri problemlerin grafik olarak çözülebilmeleri için, daha karışık aletlerin, meselâ daireden başka eğrileri de çizmeğe yarıya

ve kürvigraf denilen aletlerin kullanılması gereklidir. İşte Yunanlılar tarafından ele alınan ve biraz önce söz konusu edilen üç problem hakkında bilhassa bu hal vârid olar.

Modern araştırmalar göstermiştir ki cetvel ve pergel yardımiyle grafik olarak çözülebilen problemler, birbirine paralel iki kenarı haiz bir cetvel, yâni bildiğimiz cetvelle de çözülebilir.

Üçgen geometrisi üzerindeki çalışmalariyle çok tanınmış olan E. LEMOINE isimli bir fransız mühendisi, *Geometrografi* adı altında, cetvel ve pergel yardımiyle çözülebilen problemler için bir sınama yolu düşündü.

LEMOINE bu hususta şu beş işlem sembolünü ithal ediyor:

R_1: Bir cetvelin kenarını verilen bir noktadan geçirmek.

R_2: Bir cetvelin kenarı boyunca bir doğru çizmek.

C_1: Bir pergelin sivri ucunu verilen bir noktaya koymak.

C_2: Bir pergelin sivri ucunu, verilen bir doğrunun işaretlenmemiş bir noktasına koymak.

C_3: Bir pergel yardımiyle bir çember çizmek.

Verilen bir problemin grafik çözümünde bu işlemler birkaç defa bahis konusu olabilirler. Farzedelim ki her biri sırasiyle l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 kere bahis konusu oluyor. Bu takdirde elde edilecek çözüm

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$$

sembolünü haiz olacaktır.

Çizimin *basitlik katsayısı*, bütün işlemlerin bahis konusu olduğu

$$l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$$

toplamı ve *doğrulak katsayısı* da, daha ziyade ressamın el ustalığına bağlı işlemleri ilgilendiren

$$l_1 + m_1 + m_2$$

toplamıdır.

En iyi çizim, imkân nispetinde küçük basitlik ve doğruluk katsayılarını sağlıyan çizim olacaktır. (Bu hususta daha etraflı bilgi için E. LEMOINE'ın **La Géométrographie ou art des constructions géométriques** - Geometrografi veya geometrik çizimler san'atı -, Paris, 1902 adlı eserine bakınız.)

8. Yunanlıların konik kesitlerle ilgili ilk araştırmaları. Evvelce gördüğümüz gibi, Yunanlılar konik kesitleri, bir açının üçe bölünmesi ve bir kübün ikikat kılınması problemlerinde kullanmışlardı. Bu eğriler önce bir dönel koninin kesitleri olarak tarif edildiler.

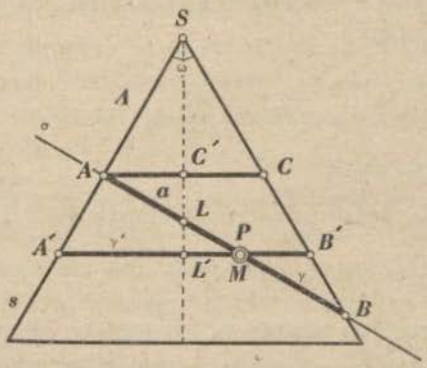
Tepe açısı ω ve tepesi S olan bir Λ dönel konisini ele alalım. Bu koninin bir anadoğrusu s, buna dik olan ve S tepesinden geçmiyen bir düzlem de σ olsun. Yunanlılara göre, Λ konisinin σ düzlemiyle arakesiti, tarif gereğince, bir γ konik kesitidir; onlar Λ nın diğer düzlem kesitlerini itibara almıyorlardı. ω açısının dar, dik veya geniş olmasına göre γ eğrisi bir elips, bir parabol veya bir hiporboldür. Zâten APOLLONIOS'dan önce bu eğriler bu şekilde adlandırılmıyorlardı; o zamanlar bunlara dar açılı, dik açılı veya geniş açılı koninin kesitleri deniliyordu. Hattâ ARKHIMEDES bile bunları hep bu isim altında ele alır.

Konik kesitleri incelemek için Yunanlılar bunların tarifinden karakteristik bir planimetrik özelik çıkarıyorlardı. Elips halinde, Yunanlılar tarafından takib edilen yolu aşağıda gösteriyoruz :

s anadoğrusundan ve koninin ekseninden geçen α düzlemiyle σ düzleminin ara kesidi, γ koniğinin a ile gösterilen bi simetri eksenidir.

(*Şek.* 5) koninin α düzlemiyle kesitini göstersin ve konini α düzlemindeki anadoğrulariyle σ düzleminin ortak noktala

A, B olsun. O şartla ki SA doğrusu s anadoğrusundan ibaret bulunsun. (Buna göre SA ve AB doğruları birbirine diktir). A, B noktaları, γ elipsinin a ekseni üzerindeki tepeleridir. AB nin koni ekseni ile kesim noktası L olsun.



Şek. 5

AB doğrusunun herhangi bir P noktasını ele alalım ve P den α düzlemine çıkılan dikmenin koni ile kesim noktalarından birisi M olsun. M noktası γ koniğine aittir.

P noktasından koni eksenine dik olarak geçirilen düzlem koniyi L' merkezli γ' çemberi boyunca SA ve SB yi de sırasiyle A', B' noktalarında keser. Çemberin bilinen bir özeliği gereğince

(*) $$\overline{PM}^2 = A'P \cdot PB'$$

dür.

A dan, SB yi C ve SL yi de C' noktasında kesmek üzere $A'B'$ nün paralelini geçirelim. APA' ve $C'AL$ benzer üçgenleri

$$A'P : LA = AP : AC'$$

bağıntısını verirler.

Keza $PB'B$ ve ACB benzer üçgenlerinden

$$PB' : AC = PB : AB$$

sonucu çıkarılır.

$AC = 2 \cdot AC'$ den faydalanıldığı takdirde son iki bağıntı yardımiyle (*) eşitliği

$$\overline{PM}^2 = 2 \frac{AL}{AB} AP \cdot PB \qquad (**)$$

şeklinde de yazılabilir.

AL ve AB doğru parçaları verilmiştir ve

$$AP + PB = AB \qquad (***)$$

eşitliğinin sağlandığı bundan önceki bağıntı, M noktasının, dar açılı koninin kesitine ait olması şartını ifade eder.

Modern dile çevirmek için

$$AL = p, \quad AB = 2a, \quad AP = x, \quad PB = x', \quad PM = y$$

dersek, (**) ve (***) dan

$$y^2 = \frac{p}{a} xx', \quad x + x' = 2a$$

eşitlikleri çıkarılır.

Geniş açılı koninin düzlem kesiti (yâni hiperbol) halinde,

$$y^2 = \frac{p}{a} xx', \quad x' - x = 2a$$

olur.

Dik açılı koninin kesiti (yâni parabol) halinde, yukarıdakine benzer usullerle

$$y^2 = 2px$$

bulunur.

Her üç halde, $AL = p$ doğru parçasına eğrinin *yarı-parametresi* denilir.

9. Apollonios'un konik kesitleri. APOLLONIOS, —262 yıllarına doğru Anadoluda PERGA şehrinde dünyaya geldi; hayatının büyük kısmını İSKENDERİYYE'de, EUKLEIDES'in yerine geçenlerin yanında geçirdi. Konik kesitleri üzerine, ancak yedisi elimize geçebilen sekiz kitaplık bir eser hazırladı. İlk dört kitap konik kesitleri teorisinin esaslarını ihtiva eder; bundan sonrakiler bazı özel meselelerden bahseder; örneğin, beşincisi normaller problemine ve özel olarak bir koniğe düzlemindeki bir noktadan çizilen normaller problemine hasredilmiştir.

Konikler teorisindeki önemli ilerlemeleri APOLLONIOS'a borçluyuz; bu geometrici, kendisinden önce gelenlerin çok dar anlamlı tanımını bir yana bırakarak, çember tabanlı bir koninin, tepeden geçmiyen herhangi bir düzlem kesitine konik adını vermektedir.

Bir σ' düzleminde bir γ' çemberi ile σ' dışında bir S noktasını ele alalım. S den, γ' ye dayanan doğruları geçirelim; böylece APOLLONIOS'un iki yaygısını da kaale aldığı, S tepeli ve çember tabanlı bir Λ konisini elde ederiz. Λ konisinin S den geçmiyen herhangi bir σ düzlemi ile kesiti, tanım gereğince bir γ koniğidir. Koninin iki yaygısını da ele alması keyfiyeti APOLLONIOS'a hiperbolün iki kolunu da aynı zamanda, aynı bir eğriyi vucuda getiriyorlarmış gibi, inceleme fırsatını verdi ki bu kendisinden önce yapılmıyordu.

APOLLONIOS'un konik diye Λ conisinin herhangi bir σ düzlemiyle olan kesitine dediğini yazarken bu geometrici tarafından yapılan bir kayıtlamayı bir tarafa bırakmış oluyoruz. APOLLONIOS, Λ konisinin dairesel kesitlerini bir yana bırakıyor ve işe bu çeşit kesitleri belirlemekle başlıyor. Aşikârdır ki, σ' ye paralel düzlemler Λ konisini bir takım çemberler boyunca keserler, ama aynı özeliği haiz olan birbirine paralel başka bir düzlem ailesi daha vardır. S tepesini γ' çemberinin C merkezine birleştiren doğruya, Λ konisinin ekseni diyelim; eksenden geçen ve σ' düzle-

mine dik olan düzlem σ' nün iki A, B noktasından geçen iki anadoğru boyunca koniyi keser. SA nın A' ve SB nin de B' gibi öyle iki noktasını ele alalım ki, AB ve $A'B'$ kenarları birbirine paralel olmamak üzere (günümüzde çoğu kere kullanılan bir ifade gerginee bu doğrular antiparaleldirler) SAB ve $SB'A'$ üçgenleri birbirinin benzeri olsunlar. $A'B'$ den geçen ve SAB düzlemine dik olan düzlem, Λ konisini bir çember boyunca keser, ve buna paralel her düzlem için aynı hal vârid olur. İşte Apollonios bunlara ters yönlü kesitler adını verir. Biraz önce rastladığımız düzlem ailelerine ait olmıyan herhangi bir düzlem ile koninin arakesitinin bir çember olamıyacağını bu geometrici ispat eder; bu kesit bir koniktir.

Bu nokta anlaşıldıktan sonra, Λ konisini bir γ koniği, ve γ' çemberinin σ' düzlemini de bir r doğrusu boyunca kesen bir σ düzlemini ele alalım. γ' çemberinin r doğrusuna dik olan çapını çizelim ve bu çapla koninin S tepesinden geçen düzlemi düşünelim. Bu düzlem koniyi iki anadoğru boyunca keser; bunlar σ ve σ' düzlemlerini sırasıyle A, A' ve B, B' noktalarında delerler.

Eğer γ nın bir M noktasından, γ yı ikinci bir defa bir M' noktasında kesmek üzere, r nin paraleli geçirilirse, MM' doğru parçasının P orta noktası AB doğrusunun bir noktasıdır. O halde AB doğrusu γ nın bir çapıdır ve bunun eşleniği olan kirişler r doğrusunun paralelleridir.

Bu sonuç bir kere elde edildikten sonra, Apollonios, dönel koni halinde kullanılan bir usulün benzeri yardımiyle, konikleriu planimetrik bir özeliğini bulacaktır. Bugünki dile çevirmek maksadiyle MP doğru parçasına y, AP doğru parçasına x, PB doğru parçasına x', AB doğru parçasına $2a$ ve nihayet C noktası koninin ekseni ile σ düzleminin arakesitini göstermek üzere AC doğru parçasına da p diyelim. Bu takdirde

$$y^2 = \frac{p}{a} xx'$$

olur ve γ nın bir elips olması halinde $x + x' = 2a$, bir hiperbol olması halinde $x' - x = 2a$ dır ve eğer γ bir parabol ise

$$y^2 = 2px$$

dir.

Bundan sonra APOLLONIOS sonsuz sayıda çapın varlığını ve bunlar içinde hiç olmazsa birinin kendi eşlenik kirişlerine dik olduğunu ispat eder. Bu sonuç da, APOLLONIOS'dan önce ele alınan dönel koni kesitleriyle kendi eğrilerinin özdeşliğini göstermesine yarar.

APOLLONIOS'un bahis konusu eseri, çaplar, eksenler, merkezler, asimptotlar hakkında bugün bilinen özelikleri ihtiva etmekdedir. Elips ve hiperbol halinde odaklar ithal edilmekte, ama doğrultmanlar bahis konusu olmamaktadır. Bu vakıa da parabolün odağı kavramının yokluğunu izaha belki medar olabilir. Elips ve hiperbolün odaklarına gelince, APOLLONIOS, eğrinin bir noktasının odaklardan uzaklıkları ile ilgili özeliği vermektedir; yâni: elipsin bir noktasının odaklardan uzaklıklarının toplamı sâbittir; hiperbolün bir noktasının odaklardan uzaklıklarının farkı sabittir.

Bir konik kesitin DESCARTES ve FERMAT sayesinde 17 nci yüzyılda ortaya çıkacak olan denklemi kavramına eski yunanlıların varamamasına şaşılabilir. Bunun sebebi, cebirsel hesabın bilinmemesidir; yunanlılarda cebir geometrikti; onlar, uzunluklar, alanlar ve hacimler üzerinde muhakeme yürütüyorlardı.

10. Belçikalıların koniklere dair teoremleri. APOLLONIOS ve yunanlı geometricilerden çok sonraları, konikler DESARGUES ve PASCAL tarafından koni kesitleri alarak yeniden ele alınacaktı, ama bu matematikciler, ilerde de görüleceği gibi, incelemelerinde, sonradan izdüşel geometrinin doğmasına vesile olan, yeni me-

todlar kullanacaklardı. Buna karşılık, geçen yüzyılda ADOLPHE QUETELET (1796 - 1874) ve GERMINAL DANDELIN (1794 - 1847) adlarındaki belçikalı geometriciler, koni kesitlerinin bir takım yeni özeliklerini çok basit yollarla buldular, öyle ki bu özelikler, okuyanları hiç de hayrete düşürmeden, APOLLONIOS'un evvelce bahsedilen eserinde de pek alâ yeralabilirdi. İşte bu yüzden kitabımızın bu kısmında bu özelikler, veya bunlardan en önemlileri bahse konu olacaktır.

S tepeli bir Λ dönel konisini ve bunu bir konik, meselâ bir γ elipsi boyunca kesen bir σ düzlemini ele alalım (*Şek.* 6). Λ konisine içten ve σ düzlemine de F, F' noktalarında teğet olan iki Σ, Σ' küresi vardır. Σ ve Σ' küreleri koniye sırasiyle α, α' düzlemlerinde bulunan birer C, C' çemberi boyunca teğettirler. Açıkca görüleceği gibi α, α' düzlemleri koninin eksekine diktirler.

γ nın bir noktası M ve SM doğrusunun C, C' çemberlerini kestiği noktalar da sırasiyle N, N' olsun. Bu takdirde

$$MF = MN, \qquad MF' = MN'$$

dür ve buradan

$$MF + MF' = MN + MN' = NN'$$

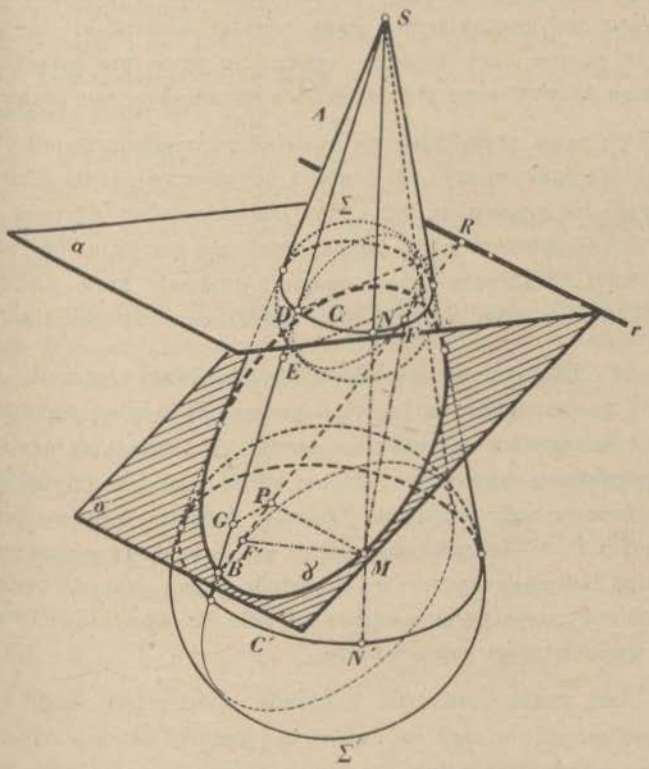
çıkar.

Fakat M nin değişmesi halinde NN' uzunluğu değişmez; o halde F, F' noktaları γ elipsinin odaklarıdır.

Esasen zahmetsizce görülür ki eğer A, B noktaları FF' doğrusunun koniyi deldiği noktalar ise, NN' uzunluğu elipsin büyük ekseni olan AB ye eşittir.

C çemberinin α düzlemi, AB doğrusuna R noktasında dik olan bir r doğrusu boyunca σ düzlemini keser. Bu r doğrusu F odağına tekabül eden doğrultmandır.

Gerçekten, M noktasından AB ye MP dikmesini indirelim. M noktasının r den olan uzaklığı PR ye eşittir. Eksene dik olan MP doğrusu ile A noktasından eksene dik olan düzlemleri geçirelim ve bu düzlemlerin SA yı kestikleri noktalar sırasiyle G



Şek. 6

ve E olsun. SB doğrusu ile α düzleminin kesim noktasına da D diyelim. BRD, BPG, BAE üçgenlerinin benzerliğinden

$$DG : PR = BE : BA$$

eşitliği çıkarılır. Fakat

$$DG = MN = MF \quad \text{ve} \quad BE = FF'$$

olduğundan

$$MF : PR = FF' : AB$$

dir.

Başka deyimle, elipsin bir M noktasının F odağından ve r doğrusundan uzaklıklarının oranı, odaklar arasındaki uzaklığın büyük eksene olan oranına eşistir. Bu da r nin gerçekten F odağına tekabül eden doğrultmandan ibaret olduğunu gösterir.

Yukarıda söylediklerimiz hiperbol ve parabole teşmil olunabilir. Bir dönel koniye bir çemberi boyunca ve herhangi bir düzleme de bir noktasında teğet olan bir kürenin bu düzleme değdiği nokta, koninin bahis konusu düzlemle kesitinin bir odağıdır. Koni ile kürenin değme çemberi düzlemi, kesit düzlemini bahis konusu odağa tekabül eden doğrultman boyunca keser.

11. Eski yunan geometrisinin Batılılara intikali. Eski yunan geometrisinin en parlak devirleri; EUKLEIDES, ARKHIMEDES ve APOLLONIOS'un zamanlarına rastlar. Şüphesiz, onlardan sonra da geometrinin yayılmasına devam edildi, ama öyle büyük önemi haiz buluşlar pek meydana çıkmadı. Bununla beraber üçüncü yüzyılda İSKENDERİYE'de yaşıyan ve eserlerinde harmonisiz oranın izlerine rastlanan PAPPOS, ve sayesinde yunan geometri tarihinin birçok noktalarını öğrenebildiğimiz EUKLEIDES yorumcusu PROKLOS gibi geometricileri kaydedebiliriz.

Eski yunan geometrisi hakkında bildiklerimiz Doğu Roma imparatorluğu ile arap kaynaklarına dayanır. Batıda, orta çağda yunan matematikcilerinin eserleri hakkında hemen hemen hiçbir bilgi yoktu. Bu eserlerin batıya yayılışını görmek için Üniversitelerin kuruluşunu (ilk Üniversiteler, 1150 yıllarında kurulan PARİS ve BOLONYA Üniversiteleridir) ve Rönesansı beklemek gerekmiştir.

1200 yılı civarında yaşıyan PİZA'lı LEONARDO FİBONACCI,

Doğuya yaptığı seyahatler sırasında matematik öğrenimi yapmak fırsatını elde etti. İtalya'ya dönüşünde türlü eserler yayınladı; bunlar arasında Aritmetik ve Cebirden bahseden **Liber Abaci** ve bilhassa EUKLEIDES'in uzay geometrisi üzerine yazdığı kitaplardan parçalar ihtiva eden **Practica Geometriae** yi zikredebiliriz. 18 inci yüzyılda EUKLEIDES'den yapılan çeviriler daha da sıklaşmağa başladı ve JORDANUS DE NEMORE ve ingiliz BRADWARDIN gibi bazı matematikciler üçgen ve çokgenlere dair kendi araştırmalarını tanıttılar.

14 üncü yüzyılda Paris Üniversitesinin JEAN BURIDAN, ALBERT DE SAXE, NICOLE ORESME, NICOLAS DE CUES, DOMINIQUE SOTO gibi birçok hocaları modern mekaniğin müjdecileri oldular. Bunlardan ORESME, analitik geometriyi sezdi.

APOLLONIOS'un eserlerini batı ülkeleri EUKLEIDES'inkilerden çok daha sonraları tanıyabildi. Nitekim APOLLONIOS'un koniklere dair ilk dört cildinin JEAN-MARIE-MEMUS tarafından yapılan ve VENEDİK'te yayınlanan bir lâtince tercümesi için 1537 yılını beklemek gerekti. Aynı kitapların bir ikinci tercümesi FRÉDÉRIC COMMANDI tarafından 1566 yılında BOLONYA'da yayınlandı. Bundan sonraki yüzyılda çeviriler daha da çoğaldı, ve bunlardan bazıları arapça metinlere dayanılarak yapıldı.

İKİNCİ BÖLÜM

ANALİTİK GEOMETRİ

12. Analitik geometrinin doğuşu. Düzlemin bir noktasının durumunu, uygun şekilde yerleştirilmiş iki doğru parçası yardımiyle, yâni netice itibariyle koordinatlariyle tespit etmek fikri herhalde eski yunanlıların da aklına gelmişti, ama analitik geometri ancak bu koordinatlar arasındaki bağıntıların tefsiri suretiyle doğabilirdi. Bu merhalenin de ilk defa Paris Üniversitesi hocalarından Nicole Oresme tarafından aşıldığı tahmin ediliyor; bu zat 1356 da Collège de Navarre'de baş hoca idi ve 1382 de Lisieux şehrinin Piskoposu iken hayata gözlerini yumdu.

Fransa Millî kitaplığında Nicole Oresme'in **Tractatus de figuratione potentiarum difformitatum** adlı ve 1371 den önce yazılmış bir eserinden el yazması üç nüsha vardır; bu eserde, adı geçen matematikçi (boylam ve enlem adını verdiği) dik koordinatlardan bahsetmekle yetinmez, hattâ doğrunun denklemini dahi verir [1]).

Oresme işe, bir olayın grafik temsilinin ilkesini koymak ve ordinat olarak alınacak miktarların ölçüm biriminin keyfî bir şekilde seçilebileceğini söylemekle başlar. Bundan sonra, üç noktanın aynı bir doğru üzerinde bulunması şartını öyle bir şekilde ifade eder ki bugünki dile çevrildiği takdirde bu şart

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

denklemiyle yazılabilir.

---

[1]) P. Duhem, *Dominique soto et la scolastique parisienne* (Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux, Bulletin hispanique, 1911, S. 454-467).

Fakat ORESME, üç boyutlu uzaya ve hattâ DUHEM'in kaydettiği gibi, gerçekte, modern geometricilerin dört boyutlu uzayını andıran bir uzaya da geçmekle daha da ilerilere gitmiş oluyor.

Bununla beraber, NICOLE ORESME'in yaşadığı sıralarda cebir sembolismi henuz yaratılmamıştı ve analitik geometrinin pratik bir şekil alması için de XVII nci yüzyılı beklemek gerekiyordu. Bu sonuc da RENÉ DESCARTES (1596 - 1650) ve PIERRE DE FERMA (1596 - 1663) adlı iki fransız bilgininin eseridir.

Bu geometricilerin eserlerinde, koordinatlar dik olmak üzere, analitik geometriye bugün alışkın olduğumuz şekilde rastlanır. Nitekim DESCARTES, **Géométrie** adlı eserinde [1]) bir hiperbolün denklemini, tipografik yazış tarzı farkiyle

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

şeklinde verir.

FERMAT'ya gelince, **Introduction aux lieux plans et solides**[2]) (Düzlem ve uzay geometrik yerlere giriş) adlı eserinde, a ve e herhangi bir noktanın koordinatlarını ve z de bir sabiteyi göstermek üzere, bir ikizkenar hiperbolün denklemini

$$ae = z^{11}$$

şeklinde yazar.

13. Koordinatlar usulü. Koordinatlar usulünün ilkelerini hatırlatalım. Üzerinde, pozitif yön diye adlandırmağı uygun bulduğumuz, bir hareket yönünü tespit ettiğimiz bir x doğrusunu ele alalım. Öteki hareket yönüne negatif yön diyeceğiz. Bu takdirde bir *yarım-doğru* nun bahis konusu olduğunu söyliyeceğiz. Bu yarım-doğru üzerinde iki A, B noktası tespit edildiğine göre,

---

[1]) RENE DESCARTES, La Géométrie, Paris (1661).

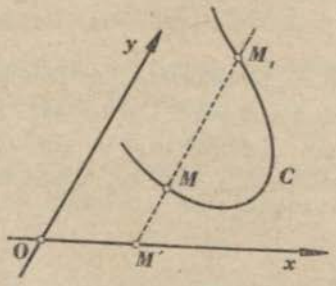
[2]) PAUL TANNERY ve CHARLES HENRY tarafından bastırılan FERMAT'nın Eserleri, Cilt III, S. 85 - 108, Paris, 1896.

başlangıcı A ve ucu B olan AB doğru parçasının cebirsel ölçümü diye, A dan B ye giden hareketli bir noktanın yarım doğruyu pozitif veya negatif yönde katetmesi halinde, bu doğru parçasının $+$ veya $-$ işaretiyle alınan ölçümüne diyeceğiz.

Burası anlaşıldıktan sonra, x yarım-doğrusu üzerinde bir O noktasını tespit edelim. Doğrunun her M noktasına, OM doğru parçasının x cebirsel ölçümünü tekabül ettirebiliriz. Karşıt olarak, pozitif veya negatif bir x sayısı verildiği takdirde; bu sayı, M ucu temamiyle belirli olan bir doğru parçasının ölçümüdür.

x yarım-doğrusu ile O noktasının birleşiminden meydana gelen şekle *Ox-ekseni* denilir. O noktası eksenin başlangıcıdır.

Şimdi aynı O merkezini haiz farklı iki Ox, Oy eksenini ele alalım (*Şek.* 7). M, düzlemin herhangi bir noktası olduğuna gö-



Şek. 7

re, bu noktadan Ox i M' noktasında kesen, Oy ye paralel olan ve Oy ile aynı yönü haiz bulunan doğruyu geçirelim. OM', $M'M$ doğru parçalarının ölçümlerine x, y diyelim. M noktası x, y sayılarını temamiyle belirler, ve bunun tersine iki x, y sayısı verilirse, $x = OM'$, $y = M'M$ olacak şekilde bir tek M noktası vardır. x, y sayılarına M noktasının koordinatları denilir; x sayısı bu noktanın apsisi, y de ordinatıdır. Düzlemin M noktalariyle x, y sayı çiftleri arasında bire-bir bir tekabül vardır.

Şimdi düzlem üzerine çizilmiş bir C eğrisini düşünelim. Bir x değerini, yâni Ox ekseninin bir M' noktasını verelim. Bu noktadan Oy ye çizilen paralel C eğrisini, ordinatlarını y, y_1, ... ile göstereceğimiz M, M_1, ... noktalarında kesecektir. Şu halde C eğrisini vermek demek, x in her değerine y nin bir veya birkaç değerini tekabül ettirmek demektir. Başka deyimle, C eğrisini vermek demek, x ile y nin değerleri arasında sembolik olarak

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

denklemiyle gösterilen ve C eğrisinin denklemi denilen bir tekabül kurmak demektir.

Bunun tersine, (1) şeklindeki bir denklem bir eğrinin denklemi, yâni düzlemin, koordinatları bu denklemi sağlıyan noktalarının meydana getirdiği bir topluluk şeklinde düşünülebilir.

Buna göre, C eğrisinin incelenmesi demek, (1) denkleminin incelenmesi demektir; işte koordinatlar metodu da bundan ibarettir.

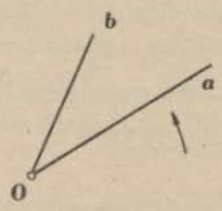
Bununla beraber bazı noktalara dikkati çekmek yerinde olur.

Her şeyden önce, koordinatlar usulü pratikte ancak, $F(x, y)$ fonksiyonunun bilinen semboller yardımiyle ifade edilebilmesi halinde uygulanabilecektir. Tabiatiyle analitik geometrinin doğuşu sıralarında görüş tarzı bu merkezdeydi; o zamanlar ele alınan denklemlere cebirsel, trigonometrik, eksponansiyel veya logaritmik fonksiyonlar giriyordu. Başka fonksiyonların varlığı muhtemelen tasavvur dahi olunamıyordu ama analitik geometrinin şimdiki fonksiyon kavramının teşekkülü üzerine etkide bulunduğu da muhakkak gibidir. *Önceden* verilen bir eğrinin denklemini kurmak probleminin, fonksiyon kavramının genişlemesine yol açtığında da şüphe yoktur.

Bir başka yönden, başlangıçta incelenen eğriler, üzerlerinde kolaylıkla işlem yapılabilen, incelenmeleri eğrilerinkinden daha

kolay olan basit denklemlerle temsil olunanlardı. Fakat geometriciler meselâ herhangi cebirsel eğrilerle meşgul olmaya başlayınca artık aynı hal vârid olmadı. Bir eğrinin ve buna tekabül eden denklemin incelenmeleri birbirlerine paralel bir şekilde yapıldığı ve birbirlerine dayandığı halde bir eğriyi incelemek için, bunun denklemini incelemek yeter, demek artık doğru değildir.

14. Analitik geometride açıların ölçümü. Analitik geometrinin gelişmesi, doğru parçalarının ölçümünde bahis konusu olanlara benzer bazı itibarların, açıların ölçümünde de ele alınmalarının zorunluğunu gösterdi. Bir O noktasında kesişen iki a, b yarım-doğrusunu ele alalım (*Şek.* 8). Bu iki yarım-doğru arasın-



Şek. 8

daki açı, bunlardan birini O noktası etrafında, ötekinin üzerine gelinceye kadar çevirmek suretiyle tanımlanabilir; fakat O noktası etrafında iki ayrı dönme yönü bulunduğundan, bu tanımı daha kesin bir şekilde yapmak yerinde olur.

O etrafında bir dönme yönü, meselâ şekilde okla gösterileni seçelim. Buna pozitif dönme yönü, bunun tersine de negatif dönme yönü diyeceğiz. a yarım-doğrusunun b yarım-doğrusuyla teşkil ettiği pozitif açı diye, a yarım-doğrusunu O noktası etrafında pozitif yönde çevirerek b yarım-doğrusu ile çakıştırmak suretiyle elde olunan açılardan herhangi birisine denilir; bu açı $\widehat{(a, b)}$ yazış tarziyle gösterilir. a yarım-doğrusunun b yarım-doğrusu ile

teşkil ettiği negatif açı diye, a yarım-doğrusunu O noktası etrafında negatif yönde çevirerek b yarım-doğrusu ile çakıştırmak suretiyle elde olunan açılardan herhangi birisine denilir; bu açı $-(\widehat{a, b})$ yazış tarzı ile gösterilir.

Eğer a nın b ile teşkil ettiği pozitif açılardan herhangi birisi, a' nün b' ile vücude getirdiği pozitif açılardan birine eşitse iki $(\widehat{a, b})$, $(\widehat{a', b'})$ açısına birbirine eşittir, denilir; eğer a ile b arasındaki pozitif açılardan herhangi birisi, a' ile b' arasındaki negatif açılardan birisine eşitse, böyle iki açıya da eşit ve ters işaretli denilir. Birinci halde

$$(\widehat{a, b}) = (\widehat{a', b'})$$

ve ikinci halde de

$$(\widehat{a, b}) = -(\widehat{a', b'})$$

yazılır.

İlk bakışta tanımlar biraz muğlak görünebilir. Gerçekte, açıların 2π nin katları farkiyle belirli oldukları, bunun da bu açıların trigonometrik fonksiyonlarında bir değişiklik husule getirmiyeceği keyfiyetlerine dikkat edilecek olursa, bu muğlaklık da ortadan kalkar. a ile b arasındaki pozitif açılardan en küçüğünü ω ile gösterirsek, yukarıki tanımlara göre, k sıfır olabilen herhangi bir pozitif sayıya delâlet etmek üzere

$$(\widehat{a, b}) = \omega + 2k\pi, \qquad -(\widehat{a, b}) = 2\pi - \omega - 2k\pi$$

dir.

Açıların eşitliği de ekseriya bu kelimeye verilen mânada bir eşitlik değildir: nitekim iki açı ancak 2π nin katları kadar farklı oldukları vakit eşittirler. Böylece

$$(\widehat{a, b}) = \omega + 2k\pi, \qquad -(\widehat{b, a}) = -\omega - 2k'\pi,$$

$$(\widehat{a, b}) = -(\widehat{b, a})$$

dır ve

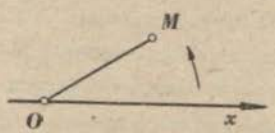
$$(\widehat{a, b}) + (\widehat{b, a}) = 0$$

yazılır.

15. Muhtelif koordinat sistemleri. Koordinatlar usulü, netice itibariyle, bir düzlemin noktaları ile u, v sayı çiftleri arasında bir tekabül kurmaktan ibarettir, o şekilde ki bir u, v çifti bir nokta yardımiyle temamiyle belirlenmiş olsun, ve tersine bir nokta da bir u, v çifti ianesiyle eksiksiz tanımlanmış bulunsun. Koordinat çeşitleri arasında karteziyen adını verdiklerimiz şüphesiz en basitleridir, fakat bazı soruların çözümlerinde çok faydalı basitleşmelerin ithaline yarıyabilen başka koordinat sistemleri de vardır.

Bahsini ettiğimiz bu sistemler arasında en çok kullanılanı kutupsal koordinatlar sistemidir.

Bir Ox eksenini (*Şek.* 9) ele alalım ve O noktası etrafında



Şek. 9

bir pozitif dönme yönünü tespit edelim. Düzlemin bir noktası M ve OM yarım-doğrusu ile Ox arasındaki en küçük pozitif açı ω, OM uzaklığının mutlak ölçümü de ϱ olsun. O ve M noktalarından geçen bir yarım-doğru ile Ox arasındaki açılardan biri ve OM doğru parçasının bu yarım-doğru üzerindeki ölçümü M noktasının kutupsal koordinatlarıdır. Buna göre, M noktasının kutupsal koordinatları, k herhangi bir tam sayıyı göstermek üzere

$u = \omega + 2k\pi$, $v = \varrho$, veya $u = \omega + (2k+1)\pi$, $v = -\varrho$

dur.

(Bir açı ve bir doğru parçasından ibaret olan) kutupsal koordinatlar verildiği takdirde düzlemin bir tek noktası belirli olur, buna mukabil düzleme ait bir noktanın sonsuz kutupsal koordinat takım vardır. Bu mahzuru bertaraf etmek için ω açısı 0 ile π arasında farzolunabilir, veya ϱ daima pozitif olarak alınabilir. Pratikte, bu itibarlara göre hareket etmemek daha elverişlidir. Bununla beraber, yukarıdaki formüllerde genel olarak $k = 0$ farzolunacaktır.

Öte yandan,

$$x = \varrho \cos \omega, \qquad y = \varrho \sin \omega$$

dır.

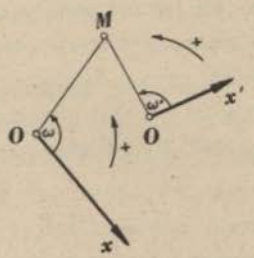
Kutupsal koordinatlar cinsinden çok basit olan

$$\varrho = \frac{p}{1 - e \cos \omega}$$

denklemi, bir odağı O ve odaksal ekseni Ox olan bir koniği gösterir. e nin mutlak değer bakımından birden küçük, bire eşit veya birden büyük olmasına göre bu konik de sırasiyle bir elips, bir parabol veya bir hiperboldür.

Başka koordinat sistemleri de düşünebilir. Meselâ Ox, $O'x'$ iki eksen olsun, O, O' noktaları etrafında pozitif dönme yönleri seçelim (*Şek.* 10). Ox in OM yarım-doğrusu ile ve $O'x'$ nün de $O'M$ yarım-doğrusu ile teşkil ettikleri ω, ω' açılarına bir M noktasının *çift kutupsal koordinatları* diyebiliriz. Bir M noktasının sonsuz çift kutupsal koordinat takımı vardır, fakat (iki açıdan ibaret olan) bir çift kutupsal koordinat takımı genel olarak bir tek nokta belirler. Esasen, ω ve ω' açıları için 2π den küçük olma şartı koşulursa, bir noktanın bu neviden bir tek koordinat takımı olacaktır.

Ox ve $O'x'$ eksenlerini aynı OO' doğrusu üzerinde ve aynı yönlü farzetmek aşikâr bir şekilde çok elverişli olacaktır. Şurasını da kaydedelim ki OO' doğrusunun her noktası aynı koordinatları haizdir.



Şek. 10

Biraz önce tarif edilen koordinat sisteminde

$$a\,\omega\omega' + b\,\omega + c\,\omega' + d = 0$$

denklemi, O ve O' noktalarından geçen bir koniği gösterir.

Herhangi bir u, v koordinat sistemini ele alalım. $u =$ sabit, $v =$ sabit denklemleri, *koordinat çizgileri* denilen eğrileri gösterirler. $u = u_0$, $v = v_0$ gibi iki koordinat çizgisi, koordinatları u_0, v_0 olan bir tek noktada kesişmelidirler.

Karteziyen koordinat sisteminde, koordinat çizgileri, Oy eksenine paralel $x = x_0$ doğruları ile Ox eksenine paralel $y = y_0$ doğrularından ibarettir.

Kutupsal koordinat sisteminde, koordinat çizgileri, O dan geçen $\omega = \omega_0$ yarım-doğruları ile O merkezli $\varrho = \varrho_0$ çemberleridir. Bu sistemde, $\varrho = 0$ denklemi O noktasını gösterir.

Çift kutupsal koordinat sisteminde, koordinat çizgileri, sırasiyle O ve O' noktalarından geçen $\omega = \omega_0$, $\omega' = \omega_0'$ yarım-doğ-

rularıdır. Biraz önce de kaydettiğimiz gibi, OO' doğrusunun bütün noktaları aynı koordinatları haizdirler. Burada, daha evvelki sistemlerde rastlanılmayan bir belirsizlik vardır.

Birazdan tarifini vereceğimiz bir koordinat sistemini daha tasavvur edelim. Bir M noktasının koordinatları diye, bunun sabit iki O, O' noktasından olan ϱ, ϱ' uzaklıklarına diyelim. Bu takdirde, verilen bir noktanın bu nevi koordinatları temamiyle belirli olduğu halde, aynı koordinatları haiz olan ve OO' ye göre simetrik bulunan iki nokta vardır. Bununla beraber, düzlemin sadece OO' doğrusunun belirli bir tarafında bulunan noktaları ele alındığı, veya bu doğruya göre simetrik şekillerin incelenmesi gerektiği zaman bu koordinat sistemi yararlı olabilir. Bu defa, koordinat çizgileri, O ve O' merkezli çemberlerdir.

Şurasını da kaydedelim ki bir M noktasının koordinatları olarak $u = \varrho + \varrho'$, $v = \varrho - \varrho'$ miktarları da alınabilir. Bu takdirde, koordinat çizgileri, O, O' ortak odaklı $u = u_0$ elipsleriyle, $v = v_0$ hiperbolleridir. Öte yandan, bu çizgilerin dik olarak kesiştikleri de bilinen bir keyfiyettir.

16. Düzlem eğrilerin sınıflandırılması. Karteziyen koordinatları yeniden ele alalım. Gördük ki düzlemin her eğrisine, bu eğriye ait noktaların koordinatlarının sağladığı bir $f(x, y) = 0$ denklemi tekabül ettirilmektedir. Denklemleri, analizin mutad fonksiyonlariyle ifade olunabilen eğrilerle yetinelim; esasen 17 ve 18 inci yüzyıllarda yaşamış olan geometricilerin görüşü de bu merkezde idi.

Eğrileri sınıflandırmak, açıkca, bunlara tekabül eden denklemleri sınıflandırmak demektir. Ama bu sınıflandırmayı hangi kriterlere dayanarak yapmak gerekir? Düzlem üzerine çizilmiş bir C eğrisi düşünüldüğü takdirde, bunu analitik olarak göstermek için, Oxy mukayese sistemini keyfî olarak seçebiliriz. Buna göre, eğrilerin veya denklemlerinin sınıflandırılması, mukayese

sisteminin seçimine, yâni koordinat dönüştürümlerine bağlı olmamalıdır.

Herhangi iki Oxy, $O'x'y'$ mukayese sistemini ele alalım. İkinciyi birinciye göre tespit etmek için, O' nün Oxy ye göre x_0, y_0 koordinatlarından başka, $O'x'$ ve $O'y'$ eksenlerinin doğrultularını da bilmeliyiz. $O'x'$ nün durumunu tespit etmek maksadiyle, O noktasından $O'x'$ doğrusunun paralelini geçirelim ve bunun üzerinde seçilen yön $O'x'$ nünkinin aynı olsun; bu doğruya ait P noktaları arasında, OP doğru parçasının ölçümünü $+1$ e eşit kılanın l_1, m_1 koordinatlarını bildiğimiz takdirde, bu yarım-doğru temamiyle belirli alacaktır. Esasen bu l_1, m_1 sayıları bağımsız değildirler ve birbirlerine, OP doğru parçası ölçümünün $+1$ e eşit olduğunu ifade eden

$$l_1^2 + m_1^2 + 2\, l_1\, m_1 \cos(\widehat{x,\ y}) = 1$$

bağıntısı ile bağlıdırlar.

Aynı şekilde, $O'y'$ nün durumunu tespite yarıyan ve

$$l_2^2 + m_2^2 + 2\, l_2\, m_2 \cos(\widehat{x,\ y}) = 1$$

bağıntısı ile birbirine bağlı bulunan sayılar da l_2, m_2 olsun.

Bir M noktasının $O'x'y'$ ye göre x', y' koordinatları, aynı noktanın Oxy ye göre x, y koordinatlarına

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + l_1 x' + l_2 y', \\ y &= y_0 + m_1 x' + m_2 y' \end{aligned}$$

bağıntılariyle bağlıdırlar.

Bir C düzlem eğrisi, Oxy sistemine göre, $f(x,\ y) = 0$ denklemi ile gösteriliyorsa, bunun $O'x'y'$ sistemine göre denklemi, $f(x,\ y) = 0$ da x, y yerine (1) ifadeleriyle verilen değerleri koyarak bulunur; böylece bir $\varphi(x',\ y') = 0$ denklemi elde oluna-

caktır. $f(x, y)$ fonksiyonunun, eğrilerin sınıflandırılmasında esas tutulacak olan karakterlerine, $\varphi(x', y')$ fonksiyonunda da rastlamak gerekir.

$f(x, y)$ ve $\varphi(x', y')$ fonksiyonlarının aynı zamanda cebirsel veya transandant olacaklarının böylece derhal farkına varılır. Dolayısiyle, düzlem eğrileri, denklemlerinin mahiyyetine göre, iki sınıfa ayırmak gerektiği sonucuna varılır :

a) Cebirsel eğriler.

b) Transandant eğriler.

Şu noktaya da dikkati çekelim ki $f(x, y)$ nin cebirsel bir fonksiyon olması halinde, (toplamalar, çarpmalar, kuvvetlere yükseltmeler şeklindeki) rasyonel işlemlerle, eğrinin denklemi $F(x, y) = 0$ şekline sokulabilir ; burada $F(x, y)$ ifadesi x, y cinsinden tam ve rasyonel bir çokterimlidir. Bu şartlar altında, $F(x, y) = 0$ denkleminde, x, y yerine (1) bağıntılariyle verilenler konulacak olursa, $\Phi(x', y')$ fonksiyonu $F(x, y)$ ile aynı dereceyi haiz olmak ve x', y' cinsinden tam ve rasyonel bir çokterimliyi göstermek üzere, bir $\Phi(x', y') = 0$ denklemi elde olunacaktır. Buradan da, cebirsel düzlem eğrilerin bu derecenin değerine göre sınıflandırılabileceği sonucuna varılır.

n-inci dereceden düzlem cebirsel eğri diye, denklemi, rasyonel işlemlerle, sıfıra eşit kılınan n-ninci dereceden bir çokterimli şekline sokulabilen düzlem cebirsel eğrilere denilir.

Böylece

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

eğrisi cebirseldir. Çünkü, kareye yükseltmelerle, bunun denklemi

$$4xy - (1 - x - y)^2 = 0$$

şekline sokulur ; şu halde bu bir ikinci derece eğrisidir. Yalnız, koordinatları ikinci denklemi sağlıyan bütün noktalar birinci

denklemle tanımlanan eğri üzerinde bulunmazlar; zira bu sonuncu eğri ancak $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ şartlarını sağlıyan ve bir ikinci dereceden eğri yayı vücuda getiren noktaları ihtiva eder.

Birinci dereceden bir eğri bir doğrudan ibarettir ve karşıt olarak her doğru birinci dereceden bir denklemle gösterilir.

İkinci dereceden bir eğri bir konik kesittir. Gerçekten, eski yunanlılar tarafından ele alınan konik kesitlerin ikinci dereceden denklemlerle temsil edilecekleri derhal görülür. Ve bunun karşıtı da hiçbir güçlüğe uğramada tesis olunur.

Burada, analitik geometriye borçlu olduğumuz esaslı bir ilerleme bahis konusudur. Eski yunanlılara göre, elips, hiperbol ve parabol, özelikleri ayrı ayrı incelenen birbirinden farklı üç eğriden ibaretti. Analitik geometri sayesinde görüldü ki bu üç eğri, genel

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0 \qquad (2)$$

denklemiyle temsil olunan ve aykırılıkları $B^2 - 4AA'$ ifadesinin değerine dayanan ikinci dereceden eğrilerin sadece üç cinsidir.

Fakat analitik geometri yardımiyle daha da ileriye gidilebilir. (2) eğrisinin bazı özelikleri, birinci tarafın birinci dereceden iki çokterimlinin çarpımı şeklinde olması halinde de vârittir, ve bu takdirde eğri iki doğruya parçalanmıştır.

17. Düzlemde geometrik yerler problemi. Eski usullerin çâresiz kaldığı hallerde, geometrik yerler, analitik geometrinin yardımiyle incelenebilmiştir. Bu incelemenin nasıl yapıldığını görelim:

Bir M noktası, verilmiş birtakım elemanları ihtiva eden geometrik bağıntılarla bazı şartlara tâbi kılınmıştır. Bu şartlardan bazılarını bir tarafa bırakacak olursak, geometrik yerin bir noktasının x, y koordinatlarının, bazı katsayıların belirsiz ol-

duğu, yâni değişken birtakım $u_1, u_2, \ldots, u_k$ parametrelerinin bulunduğu bir bağıntıyı sağladıklarını görürüz. Bu bağıntı

$$f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0 \tag{1}$$

olsun.

Başka şartları bir tarafa bırakacak olursak, geometrik yerin bir noktasının koordinatlarının ikinci bir

$$f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0 \tag{2}$$

bağıntısını sağladığını görürüz.

Ele alınmamış olan öteki şartlar da ifade olunduğu takdirde, problemin belirli olması halinde, değişken parametreler arasında

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{k-1} = 0 \tag{3}$$

şeklinde $k-1$ bağıntı elde edilir.

$u_1, u_2, \ldots, u_k$ parametrelerinin (1), (2), (3) denklemleri arasında yokedilmesi, aranan geometrik yerin denklemini verecektir.

(3) denklemleri $u_1, u_2, \ldots, u_k$ parametrelerinden $k-1$ tanesini, geriye kalan ve u ile gösterilen cinsinden ifade etmemizi sağlarlar. Bu ifadeler, (1) ve (2) denklemlerinde yerlerine konacak olursa, iki

$$F_1(x, y, u) = 0, \qquad F_2(x, y, u) = 0 \tag{4}$$

denklemi bulunacaktır.

Bu denklemlerden her biri bir eğri ailesini temsil eder. Ele alınan geometrik yer, iki ailenin eğrileri arasında u parametresinin aynı değerine tekabül edenlerde ortak olan noktalardan meydana gelecektir.

Problemin çözümünü tamamlamak üzere, (4) denklemleri

arasında u yu yok edebiliriz ve böylece geometrik yerin denklemini

$$F(x, y) = 0$$

şeklinde elde ederiz; bununla beraber, (4) denklemlerini x, y ye göre de çözebiliriz. Böylece, geometrik yerin parametreli denklemleri denilen

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u)$$

yu elde ederiz.

u nun, yukarıki denklemlerde ele alınacak her değeri; geometrik yerin bir noktasını verecektir.

Meselâ maddî bir noktanın hareketi incelendiği vakit, u değişkeni zamanı gösterir, ve geometrik yere ait denklemlerin yukarıki şekli zâten tabiî olarak karşımıza çıkar.

Şurasını da kaydedelim ki bir düzlem eğrinin denklemi,

$$x = u, \qquad y = f(u)$$

parametreli denklemlerine tekabül etmek üzere,

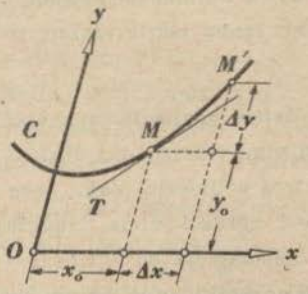
$$y = f(x)$$

şekline de sokulabilir.

18. Teğetler problemi. Eski yunanlılar daha o vakitler çemberin, konik kesitlerin ve bazı özel eğrilerin teğetlerini ele almışlardı; fakat teğetler problemini en genel şekilde ortaya koyabilmek ancak eğrilerin analitik temsiliyle mümkün olabilecekti.

Bir C düzlem eğrisini ele alalım. Bu eğriye bir M noktasında teğet doğru diye, M den ve eğrinin M ye yaklaşan bir M' noktasından geçen doğrunun limit durumuna denilir (*Şek.* 11).

M noktasının koordinatlarına x_0, y_0 dersek, M ye yeter derecede yakın olarak seçilmiş M' noktasınınkileri $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$ ile gösterebiliriz. MM' doğrusunun denklemi



Şek. 11

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$$

dır.

M' noktası M ye yaklaştığı vakit, Δx sıfıra yaklaşacağı gibi, Δy için de aynı hal vârid olur; M noktasındaki teğetin açı katsayısı $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in limitidir. Eğrinin denklemi

$$y = f(x)$$

şeklinde verilmişse, şu halde teğetin açı katsayısı

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ifadesinin limiti, yâni $f(x)$ in x_0 noktasındaki $f'(x_0)$ türevidir. Analitik geometrinin kuruluşundan sonra teğetler problemiyle uğraşan ilk geometriciler öyle eğrileri ele aldılar ki, bunların denklemleri, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ifadesinin limiti, elemanter usullerle bulunabilecek şekilde, basitti. Bu bakımdan, diferansiyel hesabın keş-

finde teğetler probleminin büyük bir önemi olmuştur; türev kavramına götüren problemlerden biri de budur.

Biraz önce verilen teğet tanımı, tabiatiyle bu teğetin varlığı ve temamiyle belirli bulunması halinde bir mâna taşır. Modern matematikte bu tanım tasrih olunur ve bunun uygulanma alanı sınırlanır.

19. Cebirsel düzlem eğrilerin arakesidi. Bazı problemlerin çözümünü, eski yunanlıların, iki düzlem eğrinin ortak bir noktasını bulmaya irca ettiklerini daha önce gördük. Geometriciler herhangi düzlem eğrileri alma imkânını veren bir usule sahib olunca, daha başlangıçta bu eğrilerin ve özel olarak cebirsel düzlem eğrilerin arakesidi problemini kendi kendilerine sormak zorunda kaldılar.

İki

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

cebirsel eğrisini, meselâ iki koniği ele alalım.

Bu eğrilerin ortak noktalarınının koordinatlarını bulmak için, (1) denklemleri arasında y yi yok edelim ve bu işlem sonucunda da

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

elde edilsin.

Genel olarak (2) denklemi dördüncü derecedendir ve bu denklemin her reel köküne, (1) denklemlerini sağlamak üzere bir ve genel olarak yalnız bir reel y kökü tekabül eder. Şu halde (2) denkleminin reel köklerinin sayısı genel olarak (1) konikleri-nin ortak noktalarının sayısına eşittir.

(1) eğrileri herhangi dereceden cebirsel düzlem eğrilerse, mesele tabiatiyle aynı tarzda bahis konusu edilebilir. Eğer daha

kesin bir şekilde (1) eğrileri genel olarak m ve n ninci dereceden eğrilerse, (2) denkleminin derecesi genel olarak mn olacaktır, ve dolayısiyle dereceleri m ve n olan iki cebirsel düzlem eğrinin genel olarak mn ortak noktası vardır. Bu da BEZOUT (1730 - 1783) teoreminden ibarettir.

Genel ifadeler elde etmek endişesi geometricileri, analitik geometri denklemlerinin uygulanma alanını, itibarî noktaların ithali suretiyle genişletmeye sevketti : böylece bir yandan sanal noktalar, öte yandan da sonsuzdaki noktalar düşünüldü.

İki koniğin arakesidini incelemek suretiyle bu düşüncelere nasıl varıldığı hakkında fikir edinilebilir.

İki C, C' koniğini, meselâ iki elipsi ele alalım. Daha fazla kolaylığı temin maksadiyle de, bu iki elipsin ortak bir noktalarının bulunması halinde, bu noktadaki teğetlerinin aynı olmadığını farzedelim. Koordinat eksenleri herhangi bir şekilde alınmışsa, koniklerin denklemleri arasında y yi yoketmekle (2) şeklinde dördüncü dereceden bir denklem elde edilecektir. Koniklerin denklemlerindeki katsayılar gerçel olduğuna göre, (2) denklemleminin katsayıları da gerçel olacaktır.

Bu nokta anlaşıldıktan sonra, (2) denkleminin

$$x = a + bi$$

şeklinde bir sanal kökü olduğunu farzedelim.

Bu değer, C ve C' koniklerinin denklemlerinde yerine konulacak olursa, ortak bir y' kökünü haiz y li iki denklem elde olunacaktır. C, C' elipslerinin $x = a + bi$, y' koordinatlı ortak bir sanal noktalarının bulunduğunu söylemek tabiîdir.

Buna göre, içlerinden hiç olmazsa bir tanesi sanal olan iki x, y sayısından meydana gelen koordinat takımına *düzlemde sanal nokta* diyeceğiz. Koordinat dönüştürümü formülleri de dahil olmak üzere, analitik geometri formüllerini bu itibarî noktalara uygulayacağız.

Şurasını da kaydedelim ki (2) denkleminin katsayıları gerçel olduğuna göre, aynı denklem, $a+bi$ nin eşleniği olan $a-bi$ kökünü de haizdir. Böylece, birbirinin eşleniği iki sanal nokta kavramını da ithal etmek gerektiğini görürüz; zira, C ve C' nün denklemlerinde $x=a-bi$ değerini yerine koyacak olursak, bulunacak iki denklemin y ortak kökü y' nün eşleniği olacaktır. Düzlemde bulunan sanal iki noktanın (aynı isimli) koordinatları birbirinin eşleniği iki sanal sayı ise, bu noktalara da birbirinin *eşleniği* denilecektir.

Artık aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz: *Aynı bir düzlem üzerinde bulunan iki elipsin dört ortak noktası vardır; bu noktaların ya dördü de gerçeldir, ya ikisi de eşlenik sanaldır, yahut da birbirinin eşleniği iki sanal çift bahis konusudur.*

İki elips bir noktada birbirine teğetse, bu dört noktadan en az ikisi çakışabilir.

Bununla beraber, sanal noktaların ithali dahi, ifadelere genel bir karakter verme keyfiyetini sağlamaz.

Meselâ iki

$$xy=1, \qquad Ax^2+Bxy+Cx+C'y+D=0$$

hiperbolünü ele alalım.

y nin bu iki denklem arasında yokedilmesi, dördüncü dereceden bir denklem yerine, üçüncü dereceden x li bir

$$Ax^3+Cx^2+(B+D)x+C'=0$$

denklemini verir. Bunun sebebi, Ox ekseninin, her iki hiperbolün ortak asimptotik doğrultusuna paralel olmasıdır. Eğer x ekseninin sonsuzdaki noktasının her iki eğride ortak olduğunu söylemeyi uygun bulursak, genel bir ifade şeklini elde etmiş olur ve ele alınan hiperbollerin dört ortak noktasının bulunduğunu yazabiliriz.

Buna göre, şunu kabul edeceğiz ki, paralel iki doğrunun sonsuzdaki noktaları aynı olmak üzere, her doğru üzerinde *sonsuzdaki nokta* adı verilen itibarî bir nokta vardır. DESARGUES zamanında dahi bilinen bu kavram çok daha sonraları tasrih edilmiştir. İlerde bu konuya yeniden döneceğiz.

Ne olursa olsun, bu itibarlar yardımiyle, BEZOUT teoremi şu şekilde ifade olunabilir: *Dereceleri m ve n olan iki cebirsel düzlem eğrinin mn sayıda ortak noktası vardır; bunlar gerçel veya sanal, farklı veya çakışık, sonlu uzaklıkta veya sonsuzda olabilir.*

Özel olarak, derecesi n olan bir düzlem ve cebirsel eğriyi aynı düzlemin herhangi bir doğrusu n noktada keser.

20. Cramer paradoksu. Bir doğru

$$Ax + By + C = 0$$

şeklinde birinci dereceden bir denklemle temsil edildiğine göre, bir doğrunun belirlenmesi için, üç A, B, C katsayısından ikisinin üçüncüye oranını bilmek gerekir. Bir doğrunun farklı iki noktadan geçtiği analitik olarak ifade edildiği takdirde bu oranlar belli olur.

Bunun gibi, bir

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0$$

koniğini belirlemek için de A, A', ..., D katsayılarından beşinin altıncıya oranını bilmek gerekir. Buradan da bir koniğin beş farklı noktasiyle belirlendiği sonucu çıkarılır.

Üçüncü dereceden bir düzlem eğrinin, veya bir düzlem kübiğin, denkleminde on katsayı vardır ve bu eğriyi belirlemek için bu katsayılar arasında kurulmuş dokuz bağıntının bilinmesi lâzımdır. Buna göre bir düzlem kübik birbirinden farklı dokuz noktasiyle temamiyle belirli olur. Bununla beraber, BEZOUT teo-

remine göre, iki düzlem kübiğin dokuz ortak noktası vardır ve dolayısiyle dokuz nokta yardımiyle zorunlu olarak bir tek düzlem kübik belirlenmiş olmaz.

Daha genel bir şekilde, derecesi n olan bir düzlem eğrinin denkleminde

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

katsayı vardır ve böyle bir eğri farklı

$$\frac{1}{2}n(n+3)$$

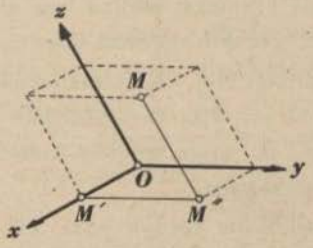
noktasiyle belirli olur. Fakat dereceleri n olan iki düzlem eğrinin n^2 ortak noktası vardır ve n nin 3 den büyük olması halinde n^2 sayısı $\frac{1}{2}n(n+3)$ den büyüktür. MAC-LAURIN (1698-1746) ve CRAMER (1704-1752) böyle bir müşahededе bulundukları halde bundan doğan «paradoks» ı izah edemediler. Bunun izahını LAMÉ (1795-1870) ye borçluyuz.

n ninci dereceden bir düzlem eğrinin verilen $\frac{1}{2}n(n+3)$ noktadan geçtiği ifade olunursa, eğrinin denklemindeki katsayılar arasında aynı sayıda lineer denklem elde olunur; bu denklemler genel olarak bağımsızdırlar ve dolayısiyle bahis konusu katsayıları belirlerler. Fakat eğer $\frac{1}{2}n(n+3)$ sayıda nokta, n ninci dereceden iki düzlem eğrinin ortak n^2 sayıdaki noktaları arasından seçilirse, elde edilecek denklemlerden birisi diğerlerinin bir neticesidir ve eğrinin denklemindeki katsayılar arasında bağımsız olarak sadece $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ denklem bulunur; şu halde bu katsayılardan birisi belirsiz kalır.

Bütün bunlar göstermektedir ki düzlem eğrilerin incelenmesi keyfiyeti, yoketme teorisinin kesin bir şekle sokulmasını gerektirmiştir.

21. Uzayda koordinatlar usulü. Koordinatlar usulü, kolayca uzaya teşmil olunur.

Aynı bir düzlemde bulunmıyan ve aynı O başlangıç noktasını haiz olan üç Ox, Oy, Oz koordinat eksenini seçelim (*Şek.* 12).



Şek. 12

Bir M noktasından, xOy düzlemini M'' noktasında kesen ve Oz ye paralel olan doğruyu geçirelim ve bunun Oz gibi yönlendirildiğini kabul edelim. M'' noktasından da Ox i bir M' noktasında kesen ve Oy ye paralel olan doğruyu geçirelim ve bu doğrunun Oy gibi yönlendiğini düşünelim. M noktası OM', $M'M''$, $M''M$ doğru parçalarının mütekabil ölçümleri olan x, y, z sayılarını temamiyle belirlediği gibi, bunun tersine, bahis konusu sayılar da M noktasını temamiyle belirlerler. Bu x, y, z sayıları M noktasının koordinatlarıdır.

M noktasının bir yüzey çizdiği düşünülecek olursa, x ve y sayılarının her değer çiftine z nin bir veya birçok değeri tekabül edecektir ve bu bağıntı

$$F(x, y, y) = 0$$

denklemiyle gösterilecektir.

Ele alınan yüzey, koordinatları yukarıki denklemi sağlıyan noktalar topluluğu ile meydana gelmiştir. Yüzeyin incelenmesi böylece denkleminin incelenmesine irca olunmuştur.

Yüzeylerin sınıflandırılması, düzlem eğrilerinkine esas olan ilkelere göre yapılır. $F(x, y, z)$ fonksiyonunun cebirsel veya transandant olmasına göre mütekabil yüzey cebirsel veya transandanttır. Yüzeyin cebirsel olması halinde bunun denklemi; rasyonel işlemlerle, x, y, z cinsinden tam ve rasyonel bir çokterimlinin sıfıra eşit kılınması şekline irca olunabilir. Bu çokterimlinin derecesine, yüzeyin derecesi denilir.

Düzlemde yapıldığı gibi, koordinatlarından hiç olmazsa birisi sanal olan sanal noktalar ve sonsuzdaki noktalar ithal olunabilir. Daha ileride bu bahse dönmek üzere şimdilik bu sonuncular üzerinde durmıyacağız.

n ninci dereceden bir yüzeyi, buna ait olmıyan bir doğru n noktada keser.

22. Uzayda geometrik yerler. Uzayda bahis konusu olacak geometrik yerler ya eğriler, ya da yüzeylerdir.

Birtakım geometrik şartlara bağlı bir M noktasının geometrik yeri olan yüzeyin denklemini bulma keyfiyeti iki hal arzedebilir:

Ya denklemleri değişken iki u, v parametresine bağlı üç

$$(1) \qquad F_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

yüzeyinin ortak noktalarının geometrik yeri düşünülebilir, ya da denklemleri, değişken bir u parametresine bağlı iki

$$(2) \qquad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0$$

yüzeyinin ortak eğrilerinin geometrik yeri ele alınabilir. Her iki halde geometrik yerin denklemi, değişken parametreleri, yâni (1) denklemlerinde u, v yi, (2) denklemlerinde de u yü yok ederek elde olunacaktır.

Birinci hal dolayısiyle ilgi çekici bir nokta bahis konusu olur.

(1) denklemleri arasında u, v yi yokedecek yerde bu denklemler x, y, z ye göre çözülebilir. Böylece yüzeyin

$$(3) \qquad x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v)$$

parametreli denklemleri elde olunur.

v ye belirli bir değer verelim. (3) denklemleri bu takdirde yüzey üzerine çizilmiş ve u eğrisi diyeceğimiz bir eğriyi gösterirler. v nin değişmesi halinde bu eğri yüzeyi doğurur. Bunun gibi, eğer u ya belirli bir değer verecek olursak, (3) denklemleri v eğrisi denilen ve u nun değişmesi halinde yüzeyi doğuran bir eğriyi gösterirler.

u ve v eğrileri yüzey üzerinde tıpkı düzlemde koordinat çizgilerinin belirttiklerine benzer bir şebeke meydana getirirler. Bu benzerlik dolayısiyle yüzeyin bir M noktasından geçen bir u eğrisi ile bir v eğrisini elde etmek için (3) denklemlerinde u ve v ye verilmesi gereken değerlere yüzeyin bu M noktasının *eğrisel koordinatları* denilir. Başka deyimle, M noktasının eğrisel koordinatları, (3) denklemlerinde yerlerine konulduklarında M noktasının x, y, z koordinatlarını veren u, v değerleridir.

Genel olarak bir u eğrisi ile bir v eğrisi, eğrisel koordinatları aynı olan birkaç noktada kesişebilirler. Fakat yüzeyin kâfi derecede küçük öyle bir parçasiyle iktifa olunabilir ki bu kısımda u ve v eğrileri birbirini tek noktada kessinler. Bu takdirde koordinat sistemlerinin sağladığı faydalar bahis konusu olur. Bir yüzey, noktalarından biri civarında incelenmek istendiği zaman bu usul bilhassa faydalıdır; işte infinitezimal geometri bu usulu kullanır.

Eğrisel koordinatlara dair en basit misal, kürenin parametreli temsiliyle elde olunur. Merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı R olan bir kürenin parametreli denklemleri

$$x = R\cos u\cos v, \qquad y = R\sin u\cos v, \qquad z = R\sin v$$

şeklinde yazılabilir.

Bu örnekte u ve v çizgileri sırasiyle paralellerle meridyenlerdir. u, v koordinatları boylam ve enlemden ibarettir.

Şimdi eğrilere geçelim. Bu defa M noktası, denklemleri bir u parametresine bağlı üç

$$F_1(x, y, z, u) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0 \tag{4}$$

yüzeyinin arakesidi olarak belirlenir. Bu parametre, birbiri ardınca ikişer ikişer alınan (4) denklemleri arasında yokedilebilir, bu da eğriden geçen üç yüzeyin denklemini verir. Fakat (4) denklemleri x, y, z ye göre de çözülebilir ki bu da eğrinin

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u)$$

parametreli denklemlerini verir.

23. Cebirsel uzay eğrileri. Düzlem eğrilerden ayırdetmek maksadiyle, düzlem olmıyan eğrilere uzay eğrileri denilir.

Bir uzay eğrisi her vakit iki yüzeyin arakesidinin tamamını teşkil etmediğinden, uzay eğrilerinin cebirsel ve transandant olarak sınıflandırılması bazı güçlükler arzeder.

Bu hususta en basit örneği, parametreli denklemleri

$$x = u^3, \qquad y = u^2, \qquad z = u$$

şeklinde yazılabilen, uzay kübiği verir.

Bu eğri, ikinci dereceden iki

$$xz = y^2, \qquad y = z^2$$

yüzeyinin arakesitinin bir kısmıdır.

Bu iki yüzey, uzay kübiğinden başka Ox $(y=z=0)$ doğrusu boyunca kesişirler.

Cebirsel bir uzay eğrisini tanımlamak için, bu eğrinin denklemleri bir u parametresine bağlı üç

$$(1)\quad F_1(x, y, z, u)=0, \qquad F_2(x, y, z, u), \qquad F_3(x, y, z, u)=0$$

yüzeyinde ortak olan bir noktanın geometrik yeri şeklindeki doğuruluşuna başvurulur.

Eğer

a. (1) yüzeyleri cebirsel ise,

b. (1) denklemlerinin birinci tarafları u parametresinin cebirsel fonksiyonları ise, bahis konusu eğri cebirseldir.

Bununla beraber bu tanımın, bir örnekle anlatmağa çalışacağımız, bir mahzuru vardır.

Dik eksen sisteminde, ikinci dereceden yüzeylerle tarif edilen bir

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2+uf(x, y, z)=0$$

demetini ele alalım, ve u nun değişmesi halinde başlangıçtan (2) kuvadriğine indirilen normallerin ayaklarının geometrik yerini araştıralım.

O dan (2) yüzeyine indirilen normallerin ayaklarının

$$(3)\quad \frac{x}{2x+u\frac{\partial x}{\partial f}}=\frac{y}{2y+u\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{z}{2z+u\frac{\partial z}{\partial f}}$$

eğrisi üzerinde bulunduğu bilinen bir keyfiyettir.

Aranılan geometrik yer (2) ve (3) denklemleri arasında u yu yoketmekle bulunacaktır. Biraz önce verilen tanıma göre de bu bir cebirsel eğridir. Halbuki, $u=0$ için (2) ve (3) denklemleri

$$x^2+y^2+z^2=1$$

e müncer olur ki bu da merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 1 olan küreyi gösterir. O halde bu küre de geometrik yere aittir. Esasen bu keyfiyet de geometrik olarak aşikârdır.

Genel hale döndüğümüzde görürüz ki u nun bazı değerleri için (1) denklemleriyle gösterilen yüzeylerin ortak kısımları bulunabilir ve bu kısımların hesaba katılmaması gerekir.

Bir cebirsel uzay eğrisinin yukarıda verilen tanımı yerine aşağıdakinin alınabileceği ispat olunur:

Cebirsel uzay eğrisi diye öyle bir noktanın geometrik yerine denilir ki bu noktanın koordinatları bir cebirsel denklemi sağlıyan iki u, v parametresinin rasyonel fonksiyonlarıdır.

Eğer $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$ rasyonel fonksiyonlarsa ve $f(u, v)$ tam ve rasyonel bir çokterimli ise,

$$x=f_1, \quad y=f_2, \quad z=f_3, \quad f=0$$

denklemleri, tanım gereğince, bir C cebirsel uzay eğrisini gösterirler.

u, v ye bir düzlemdeki kartezyen koordinatlar gözü ile bakalım. $f=0$ denklemi bu düzlemde bir Γ cebirsel eğrisini gösterir. Γ nın bir noktasına C nin bir noktası tekabül eder, fakat bunun tersine C nin bir noktası Γ nın birçok noktasına tekabül edebilir. C eğrisinin Γ nın *rasyonel bir transformesi* olduğu söylenir.

Bir cebirsel uzay eğrisinin derecesi, herhangi bir düzlemle bu eğrinin gerçel veya sanal kesim noktalarının sayısıdır.

24. Bir uzay eğrisinin izdüşüren silindirleri. Bir C uzay eğrisini ele alalım ve bunun her noktasından Oz ekseninin paralellerini geçirelim. Bu doğrular, denklemi

$$f(x, y) = 0$$

şeklinde yazılan bir silindir doğururlar.

Bu silindire *eğrinin izini Oz ye paralel olarak düşüren silindir* denilir. Tabiatiyle C nin izini Ox e ve Oy ye paralel olarak düşüren silindirler de düşünülebilir.

Evvelce gördük ki bir uzay eğrisinin, iki yüzeyin arakesitinin temamından ibaret bulunması şart değildir. İki yüzeyin arakesitinin izdüşüren silindirlerinin ele alınması, bu arakesitin mahiyeti hakkında fikir verebilir.

İki

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

yüzeyini ele alalım.

Bu iki yüzeyin arakesitinin izini Ox e paralel olarak düşüren silindirin denklemi, yukarıki denklemler arasında x i yokederek bulunur. İki yüzeyin arakesitinin izini Oy ve Oz ye paralel olarak düşüren silindirlerin denklemleri de aynı şekilde (1) denklemleri arasında y veya z yi yoketmekle elde olunacaktır. Böylece (1) denklemlerinin arakesidini göstermek üzere üç

$$f_1(y, z) = 0, \qquad f_2(z, x) = 0, \qquad f_3(x, y) \tag{2}$$

denklemleri elde edilecektir. Şurası açıktır ki bu arakesit birçok eğriden meydana geliyorsa, (2) silindirlerinden ikisi parçalanacaktır.

Örneğin, iki

$$x - yz = 0, \qquad y^2 - xz = 0$$

yüzeyleri bahis konusu olsun.

Bu iki yüzeyin arakesitinin izdüşüren silindirlerinin denklemleri

$$y(y-z^2)=0, \qquad x(x-z^2)=0, \qquad x^2-y^3=0$$

dır.

O halde bu arakesit Oz ekseninden ibaret olan bir doğru ile bir eğriye parçalanmıştır, bu eğri de daha yukarıda bahsa konu olan kübikten başka bir şey değildir.

Sırası gelmişken şurasını da kaydedelim ki bir eğrinin üç izdüşüren silindirinin, bahis konusu eğriden başka, ortak bir takım noktaları bulunabilir.

25. Bir cebirsel uzay eğrisinin monoidal temsili. Cebirsel uzay eğrilerinin oldukça basit bir temsili CAYLEY (1821 - 1895) tarafından elde edilmiştir.

n ninci dereceden bir cebirsel eğri C olsun. Öyle bir $Oxyz$ mukayese üçyüzlüsü seçelim ki

a. z ekseninin sonsuzdaki noktası eğriye ait olmasın.

b. Eğrinin bir noktasından z eksenine çizilen paralel eğriyi genel olarak artık bir ikinci noktada kesmesin.

Bu şartlar altında, C eğrisinin izini Oz ye paralel olarak düşüren

$$f(x, y)=0$$

silindiri n ninci derecedendir.

Bu silindirin Oxy düzlemiyle arakesitine C' diyelim. C' nün bir M' noktasından Oz ye çizilen paralel C eğrisini genel olarak bir tek M noktasında keser ve dolayısiyle bu noktanın z kotu M' noktasının x, y koordinatlarının rasyonel fonksiyonu olur. φ ve ψ çokterimlileri göstermek üzere, bu rasyonel fonksiyonu

$$z=\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

şeklinde yazalım.

$f(x, y)=0$, $\psi(x, y)=0$ silindirleri bazı anadoğruları bo-

yunca kesişirler. Bu anadoğrulardan birisinin C' eğrisi ile ortak noktası P' olsun. C' nün P' ye yakın bir M' noktasını ele alalım. M' noktasına C eğrisi üzerinde tekabül eden M noktasının koordinatları temamiyle belirlidir. M' noktasını C' eğrisi üzerinde P' ye yaklaştıralım. $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ fonksiyonları sıfıra yaklaşırlar ve iki hal vârid olabilir:

a. $\varphi(x, y)$ fonksiyonu P' noktasında sıfırdan farklıdır.

b. $\varphi(x, y)$ fonksiyonu sıfıra yaklaşır.

Birinci halde, M noktasının z kotu, M' nün P' ye yaklaşması halinde sonsuza gider. Fakat bu, Oz ekseninin sonsuzdaki noktasının C ye ait bulunmaması hipoteziyle çelişme halindedir.

Geriye mümkün olabilen yegâne hal olarak ikincisi kalır. Yâni $f(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ silindirlerinin ortak bir anadoğrusu $\varphi(x, y) = 0$ silindirine de aittir.

$f = 0$ silindiri n ninci derecedendir. Buna göre

$$z\psi(x, y) - \varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

yüzeyinin derecesi m olsun.

Bu takdirde $\psi(x, y) = 0$ silindiri $m-1$ inci derecedendir ve $f = 0$ silindiri ile $n(m-1)$ ortak anadoğruyu haizdir. Bu doğrular (1) yüzeyine aittir ve dolayısiyle $f = 0$ silindiri ile (1) yüzeyinin arakesiti C eğrisinden ve Oz ye paralel $n(m-1)$ doğrudan ibarettir.

(1) yüzeyi *monoid* adını taşır; bu yüzeyin z ekseni üzerinde sonsuzda $m-1$ inci mertebeden bir çokkat noktası vardır (yâni z eksenine paralel her doğru bu yüzeyi sonlu uzaklıkta ancak bir noktada keser).

26. Analitik Geometride kullanılan fonksiyonlar hakkında. Bundan önceki kısımlarda, denklemlere giren fonksiyonlar hakkında hiçbir hipotez yürütmedik; gerçekte, bu fonksiyon-

larla yapılacak her türlü işlemin mümkün olduğunu zımnen farzettik. Geçen yüz yılın ortalarına kadar da geometricilerin görüşü bu merkezde idi, ve Analitik Geometriyi öğretirken başlangıçta yapılması uygun olan da bu idi.

Fonksiyon kavramının gelişmesi, çağdaş matematikcilerin bu elemanter görüşü genişletmelerini gerektirdi.

Hâlen, belirli bir soru ile uğraşırken, geometriciler, denklemlere giren fonksiyonlar hakkında mümkün olduğu kadar az hipotez yürütmeğe gayret sarf ederler.

Bir başka yönden, sezgiye dayanan eğri veya yüzey kavramına tekabül eden nokta cümlelerinin analitik temsili de modern araştırmaların konusunu teşkil etmektedir.

Bu eserde takib ettiğimiz elementer görüşe uyarak, bu açıklamalarla yetiniyoruz. Bununla beraber şurasını da ilâve edelim ki sadece cebirsel fonksiyonlarla dahi yetinilse, aydınlatılması gereken daha birçok problem vardır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

İZDÜŞEL GEOMETRİ

27. Desargues'in koniklerle ilgili araştırmaları. Evvelce gördüğümüz gibi, APOLLONIOS, konikleri, çember tabanlı bir koninin düzlem kesitleri olarak düşünmüştü; fakat gerek APOLLONIOS'a gerek bütün yunanlı geometricilere göre elips, parabol ve hiperbol birbirinden temamiyle farklı eğrilerdi ve bunların incelenmesi her birine has özel usullerle yapılıyordu. Bu üç eğrinin aynı zamanda incelenmesinin mümkün olduğunu sırfî geometri ile ispat etmek LYON'lu GIRARD DESARGUES (1593 - 1662) a nasib olmuştur; DESCARTES'da analitik geometri yardımiyle aynı tarihlerde bu sonuca varacaktı.

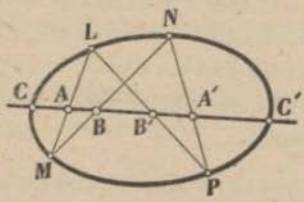
DESARGUES'in yaşadığı sıralarda, Rönesans devrine ait mimar ve ressamların tesiriyle, Perspektif büyük gelişmeler kaydetmiş, esasen LYON'lu geometrici de Perspektif üzerine **Méthode universelle de mettre en prespective les objets donnés réellement, ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer, aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage** adı altında PARIS'de 1636 yılında basılan bir eser neşretmişti. DESARGUES ayrıca, sonunda güneş saatlerine ait bir notla birlikte Taş Kesimine ait bir eser de yayınlanmıştır (1640). DESARGUES'ın ana fikri, perspektif usullerini geometri'ye naklet-mek olmuştur.

Bir α düzlemiyle bu düzlemin bir γ çemberini ve α ya ait olmıyan bir δ noktasını düşünelim. δ dan geçen ve γ ya dayanan doğrular bir A konisini meydana getirirler. δ dan geçmiyen ikinci bir α' düzlemi A konisini bir γ' koniği boyunca keser. Bu γ' ko-

niği γ çemberinin δ noktasına göre α' düzlemi üzerindeki izdüşümüdür. γ çemberine ait her özelik, γ' koniğinin cinsi ne olursa olsun, bu koniğe bu suretle naklolunabilecektir.

DESARGUES bu fikrini geliştirmek üzere **Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan** adı altında 1639 da yayınlanan, çok nâdir rastlanan ve varlığı PASCAL ve BEAUGRAND sayesinde bilinen küçük bir kitap hazırladı.

İşte DESARGUES isminin bağlı kaldığı aşağıki teoreme bu kitapta rastlanır: Tepeleri bir konik üzerinde bulunan $LMNP$ dörtgeniyle bunun LM, NP karşı kenarlarını A, A' de, diğer LP, MN karşı kenarlarını B, B' de koniği de C, C' de (*Şek.* 13) kesen



Şek. 13

bir doğruyu ele alalım. Bu takdirde, DESARGUES'ın *altı nokta arasındaki involasyon bağıntısı* adını verdiği

$$\frac{AB\cdot AB'}{A'B\cdot A'B'}=\frac{AC\cdot AC'}{A'C\cdot A'C'}$$

bağıntısı mevcuttur. Bu bağıntıdan

$$\frac{BA\cdot BA'}{B'A\cdot B'A'}=\frac{BC\cdot BC'}{B'C\cdot B'C'},\qquad \frac{CA\cdot CA'}{C'A\cdot C'A'}=\frac{CB\cdot CB'}{C'B\cdot C'B'}$$

eşitliği çıkarılır, ve bu üç bağıntıdan herhangi biri diğer ikisini gerektirir; yâni (A, A'), (B, B') ve (C, C') çiftlerinin simetrik rolleri vardır.

Fakat DESARGUES daha da ileriye giderek bazı çiftleri teşkil eden noktaların çakışmaları hallerini de ele alır. Eğer meselâ B, B' noktaları çakışırsa, yukarıki bağıntılar

$$\left(\frac{AB}{A'B}\right)^2=\frac{AC\cdot AC'}{A'C\cdot A'C'},\qquad \left(\frac{CB}{C'B}\right)^2=\frac{CA\cdot CA'}{C'A\cdot C'A'}$$

şeklini alırlar.

Ayrıca C, C' noktaları da çakışırsa

$$\left(\frac{AB}{A'B}\right)^2=\left(\frac{AC}{A'C}\right)^2$$

olur ki bu da BC çiftinin AA' çifti tarafından harmonik olarak bölünmesine tekabül eden bağıntı şekline sokulabilir.

Öte yandan DESARGUES şurasını da kaydeder ki konik yerine iki doğrunun vucuda getirdiği şekil de alınabilir. Bu takdirde PAPPOS tarafından da bilinen bir özelik elde olunur.

Bir çemberin izini düşürerek hiperboller ve paraboller elde edince, DESARGUES, sonsuzdaki nokta kavramına da varacaktı. DESARGUES, bu kavram hakkında gayet sarih fikir sahibi olanlardan ilki sayılabilir; üstelik, paralel iki doğrunun, ortak noktaları sonsuzda bulunan iki kesişen doğru sisteminin bir özel hali gibi telâkki olunabilmesi onun çok bildiği bir keyfiyetti.

Çok sonraları geometri ilkelerinin tartışılmasında önemli bir rol oynıyan bir teoremi de DESARGUES'a borçluyuz: Aynı düzlemde bulunsun bulunmasın iki ABC, $A'B'C'$ üçgeni AA', BB', CC' doğruları aynı bir noktada kesişecek şekilde verilmişse, karşıt BC ve $B'C'$, CA ve $C'A'$, AB ve $A'B'$ kenarlarının kesim noktaları da aynı bir doğru üzerinde bulunurlar. ABC, $A'B'C'$ üçgenlerinin aynı bir düzlemde bulunmamaları halinde teorem derhal ispat olunur. Teoremi, iki üçgenin aynı düzlemde bulunması halinde ispat etmek için DESARGUES, kesenler teorisini kullanıyordu.

28. Pascal'ın «Essais pour les coniques (Konikler üzerine deneme)» adlı eseri. Daha ancak onaltı yaşlarında iken PASCAL (1623 - 1662) konik kesitleri üzerine, hiçbir vakit basılmıyan, bir eser hazırlamıştı; bunun varlığı, LEIBNITZ tarafından (PASCAL'ın yeğeni) PÉRIER'ye yazılan ve basıldığı takdirde içindeki bahislerin hangi sırada tertiplenmesinin uygun düşeceği işaret olunan bir mektuptan bilinmektedir. Bereket versin ki PASCAL 1640 yılında **Essais pour les coniques** adı altında yayınladığı küçük bir risalede daha önce elde ettiği teoremlerin başlıcalarını bildirdi. Bu teoremler arasında en çok dikkati çekeni, PASCAL'ın kendisinin Mistik Hekzagram diye adlandırdığı altıgeni ilgilendiren, ve bir koniğe ait altı nokta arasında ilk defa bir durum bağıntısı vereni idi:

Tepeleri bir konik üzerinde bulunan bir $ABCDEF$ altıgenini ele alalım; karşıt üç çift AB ve DE, BC ve EF, CD ve FA kenarlarının kesim noktaları aynı bir doğru üzerindedirler.

PASCAL yukarıda adı geçen *Essais* (*Denemeler*) inde DESARGUES'in usullerini kullanarak eserini vücuda getirdiğini açıkca bildirmekte ve bu nokta esasen LEIBNITZ'in mektubu ile de teyid olunmaktadır. Beş noktası ile belirli olan bir koniği inşa etmek için PASCAL'ın yukarıda bahis konusu edilen teoremini kullandığı da gene aynı mektuptan anlaşılmaktadır.

29. De La Hire ve Le Poivre'ın çalışmaları. DESARGUES ve PASCAL'ın ortaya attıkları usuller onlardan sonra birçok geometriciler tarafından kullanıldı ve bunlardan da DE LA HIRE (1640 - 1718) ve LE POIVRE (.... — 1710) ın isimlerini hâtırda tutmak uygun olur.

DE LA HIRE 1685 de **Sectiones conicoe in novem libros distributae** adı altında konik kesitleri üzerine bir eser yayınladı. Bu eser, DESARGUES ve PASCAL'ın anlayışına göre düzenlenmiştir; konikler burada, çember tabanlı bir koninin kesitleri olarak ele

alınmışlardır, kutup ve kutup doğruları teorisi temamiyle geometrik bir tarzda geliştirilmiş ve bir nevi bu eserin temelini teşkil etmiştir.

Bu kitabın temel önermesini bir P noktasının bir koniğe göre kutup dağrusu ile ilgili olan özelik, yâni P den geçen bir kesenle kutup doğrusunun ortak noktası, kesenle koniğin kesim noktalarına göre P nin eşleniğidir, özeliği teşkil eder.

De La Hire'in bu eserinde, modern dile çevirdiğimiz aşağıki teoremlere rastlanır:

Bir P noktasından geçen bir doğru ile bir koniğin ortak noktalarındaki teğetler, P noktasının p kutup doğrusu üzerinde kesişirler. Karşıt olarak, p doğrusunun her hangi bir noktasından bir koniğe teğetler çizilirse, değme kirişi p doğrusunun P kutbundan geçer.

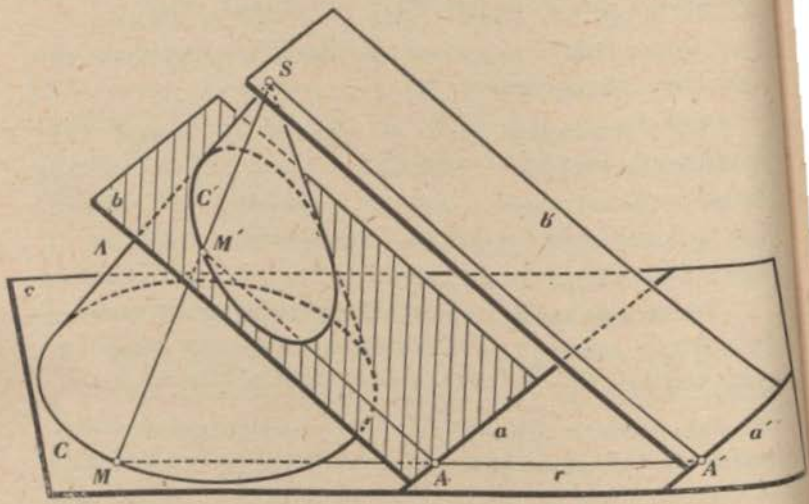
Tepeleri bir konik üzerinde bulunan bir dörtgenin herhangi karşılıklı iki kenarının ortak noktasının koniğe göre kutup doğrusu, karşılıklı diğer iki kenar çiftinde ortak noktalardan geçer.

Fakat De La Hire'in konikler teorisinin gelişmesindeki başlıca himmeti yukarıda söylediklerimizden farklı mahiyettedir.

Desargues ve Pascal'a göre bir konik, bir çemberin, düzlemi dışındaki bir S noktasından itibaren bir düzlem üzerindeki izdüşümünden ibaretlir. 1673 de **Nouvelles méthodes en géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques** adı altında yayınladığı bir eserde De La Hire bir çemberden kendi düzleminde bulunan bir koniğe geçmeği sağlıyan bir usul tasavvur etti.

Aynı usul Le Poivre tarafından bulunmuş ve Paris'de 1704 yılında yayınlanan **Traité des sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles** adlı eserinde etraflıca izah olunmuştur.

Tepesi S ve tabanı bir C çemberi olan bir A konisini ele alalım (*Şek.* 14). Bir kesit düzlemi b ve buna S den paralel olarak geçirilen düzlem b' olsun. C çemberinin c düzlemiyle b, b' düzlemlerinin arakesit doğrularına a, a' diyelim. C nin bir M noktasından, a ve a' doğrularını sırasiyle A ve A' noktalarında kesen herhangi bir r doğrusunu geçirelim. A noktasından $A'S$ doğ-



Şek. 14

rusuna çizilen paralel MS doğrusunu bir M' noktasında keser ki bu nokta da MS doğrusu ile b düzleminin kesim noktasından başka bir şey değildir ve dolayısiyle A konisinin b düzlemiyle olan C' kesitine aittir. M noktasından hangi r doğrusu geçirilirse geçirilsin, zâten hep aynı M' noktası bulunur. C çemberine ait noktalardan C' koniğininkine geçmeği sağlıyan bu çizim, hattâ S noktasının c düzleminde, yâni C çemberi düzleminde bulunması halinde de doğrudur; bu takdirde a, a' paralel doğruları keyfî olarak seçildiğine göre bütün çizim bu düzlemde yapılır. Bunu ispat etmek için, ya De La Hire'in yaptığı gibi C çembe-

rinin c düzlemi b düzlemi üzerine yatırılır, ya da Le Poivre'ın yaptığı gibi uzay şeklinin izi, c düzlemi üzerine düşürülür.

Bahsi edilen usul yardımiyle çizilen koniklere De La Hire «planikonik» adını veriyordu. Aynı geometrici, 1679 da yayınlanan bir eserinde konikleri, odaklı tariflerini ele alarak, yâni ya sâbit iki noktadan uzaklarının toplamı veya farkı sabit olan noktaların geometrik yeri (elips veya hiperbol) olarak, ya da sâbit bir nokta ile sâbit bir doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri şeklinde (parabol) inceliyordu.

Le Poivre da 1708 de Mons'da basılan ikinci bir eserinde, kendi yönünden, konik kesitleri incelemek maksadiyle, bugünkü deyimiyle iki perspektif düzlem kullanıyordu. Yazarın dikkatini en çok çeken şey de teğetlere ait özeliklerdir.

30. Tasarı Geometri. Nasıl ressamlar ve mimarlar tarafından kullanılan perspektif kuralları Desargues'ın geometriye yeni kavramlar getirmesini gerektirdiyse, aynı şekilde epürlerin ve bilhassa müstahkem mevki plânlarının çizimi de Monge (1746 - 1818) un Tasarı Geometri'yi yaratmasına sebeb oldu.

Monge usulünün neden ibaret olduğu bilinmektedir. Uzayda bir F şekliyle birbirine dik iki α, α' düzlemi verildiğine göre, F şeklinin α ve α' düzlemleri üzerindeki dik izdüşümleri alınır ve α, α' düzlemlerinden birisi arakesitleri etrafında döndürülerek diğeri üzerine yatırılır, ve böylece aynı bir düzlem üzerinde F şeklinin izdüşümlerinden ibaret olan öyle iki şekil elde olunur ki bunlar, uzayda kolayca yapılması imkânsız olan geometrik çizimlerin düzlemde basitce icrasını mümkün kılarlar. α, α' düzlemleri de genellikle düşey ve yatay düzlemlerdir.

Monge Tasarı Geometriyi yaratmak suretiyle, kendisinden önce uzun hesapları gerektiren ve az çok ampirik bir mahiyet taşıyan epur çizimlerini açık birtakım ilkelere bağlıyarak tatbikî bilimlere büyük bir hizmette bulunmakla yetinmemiş, aynı zamanda Sırfî Geometriye de aynı derecede faydalı olmuştur.

Gerçekten, MONGE'un bu alandaki usulleri, şekillerin özeliklerini tespit için araştırma aracı olarak kullanılmıştır, esasen PONCELET'nin de açıkça kabul ettiği gibi, İzdüşel Geometri'nin yaratılmasında bu usullerin belli bir etkisi olmuştur.

Tasarı Geometri sayesinde uzayın ve bilhassa ikinci derece yüzeyleri veya kuvadriklerin geometrik özeliklerini incelemekle kalınmamış, aynı zamanda düzlem geometride yeni özelikler de elde olunmuştur.

31. Metrik özelikler ve konum özelikleri. DESARGUES, PASCAL ve MONGE'un usulleri ve LAZARE CARNOT (1753-1823) nun **Géométrie de position** et **l'Essai sur la théorie des transversales** adlı eseri, geometricilerin geometrik özelikleri iki kategori halinde sınıflandırmalarını gerektirdi:

a. Açı ve uzaklık ölçülerinin bahis konusu olduğu metrik özelikler.

b. Geometrik elemanların sadece birbirine göre konumlarının bahis konusu olduğu konum özelikleri veya tasarı özelikler.

Örneğin bir dik üçgende hipotenüsün karesiyle ilgili teorem açık bir şekilde bir metrik özelikdir, buna karşılık PASCAL'ın mistik hekzagram hakkındaki teoremi de bir konum özeliğidir.

Hiç olmazsa düzlem şekiller halinde, bu iki türlü özelik arasındaki fark, konum özeliklerinin izdüşüm neticesinde bir değişikliğe uğramıyacakları, buna mukabil metrik özeliklerin genellikle bâki kalmıyacakları vakıasından meydana çıkacaktı. Bununla beraber, bir konum özeliği metrik şekilde de göze çarpabilir ve esasen ilk zamanlarda daima bu hal vârid olmuştur. Nitekim, DESARGUES'in bir konum özeliği olan altı nokta arasındaki involusyon bağıntısı, ilk bakışta bir metrik ifade gibi görünebilir.

Birçok hallerde Analitik Geometri yardımiyle metrik özelikler izdüşel özelikden ayırdedilebilir. Birinciler, dik veya eğik koordinat sistemlerinin seçilmesine göre az veya çok karışık he-

sapları gerektirirler; bunun tersine, bir konum özeliği bahis konusu ise, hesaplar her iki halde de aynı kolaylıkla yapılır.

Gerçekte, ilerde göreceğimiz gibi, gurup kavramının geometriye sokulması sayesinde, bu iki türlü özelik arasındaki fark ancak son zamanlarda açıkça tesbit edilebilmiştir.

32. Le Traité des propriétés projectives des figures (Şekillerin izdüşel özelikleri) adlı eser hakkında. Paris Politeknik Okulunun eski öğrencilerinden Jean-Victor Poncelet (1788-1867) Fransa ile Rusya arasındaki savaş sırasında Mareşal Ney idaresinde bulunan kolorduda görevliydi. 18 Kasım 1812 de esir edilen ve Saratova'da sürgün hayatı yaşıyan Poncelet, kendisine vaktiyle Geometri derslerinde öğretilenleri, hiçbir nota başvurmadan ve herhangi bir eserin yardımı olmadan yeniden hatırlamağa çalıştı. Onun bu derin düşünceleri sonunda Paris'de 1822 yılında basılan ve orijinal fikirlerle dolu olan **Traité des propriétés projectives des figures** adlı eseri doğdu. Böylece izdüşel geometri muhtar bir doktrin haline geldi.

Poncelet'nin eserindeki ana fikir iki işlemin kullanılmasına dayanır: *İzdüşüm* ve *kesim*.

Nokta ve doğrulardan ibaret bir F düzlem şeklini düşünelim ve bu şeklin, düzleminde bulunmıyan bir S noktasından itibaren, izdüşümünü alalım. Bu suretle S noktasından geçen doğru ve düzlemlerden teşekkül eden yeni bir F' şeklini elde ederiz. F şeklinin konum özelikleri, veya tasarı özelikleri, yahut da Poncelet'nin dediği gibi *izdüşel özelikleri* F' şeklinin izdüşel özeliklerine yol açarlar. Şimdi F' şeklini S den geçmiyen bir düzlemle keselim. Böylece izdüşel özelikleri F' nünkinden, dolayısiyle F ninkilerden çıkan ve nokta ve doğrulardan husule gelen üçüncü bir F'' şeklini elde ederiz. F, F'' şekilleri aynı bir F' şeklinin *kesim*'leridir. F' şekli ise F veya F'' nün *izdüşüm*'üdür.

Aynı bir düzlem şeklin, farklı iki merkeze göre izdüşümlerinden ibaret olan iki şekil de düşünülebilir. Bunlardan birinin izdüşel özelikleri ötekine ait olanlardan çıkacaktır.

PONCELET'nin bu işlemleri nasıl kullandığını bir örnek üzerinde görelim :

Bir $ABCD$ dörtgeni ile AB ve CD doğrularını M, M' de; BC ve AD doğrularını N, N' de; nihayet AC ve BD doğrularını da P, P' de kesen bir doğruyu ele alalım ve

$$\frac{MN \cdot MN'}{MP \cdot MP'} = \frac{M'N \cdot M'N'}{M'P \cdot M'P'}$$

bağıntısını çıkarmağa çalışalım. Bu bağıntı, DESARGUES'ın altı nokta arasındaki envolüsyon bağıntısından başka bir şey değildir; yalnız burada özel bir hal bahis konusudur, yâni konik iki AC, BD doğrusundan teşekkül etmektedir.

Bunu ispat etmek için, PONCELET, şeklin bir düzlem üzerine o tarzda izini düşürür ki AB ve CD kenarlariyle, AD ve BC kenarlarının homologları paralel doğrular olsun, yâni dolayısiyle dörtgen yerine bir paralelkenar alınsın. Paralelkenar halinde bahis konusu özelik, benzer üçgenlerin ele alınmasiyle zahmetsizce ispat olunur. Bu takdirde de orantılar teorisi, dörtgen için ispatı gereken bağıntıya kolaylıkla geçilmesini sağlar.

Görülüyor ki PONCELET, izdüşüm ve kesim işlemlerini o tarzda kullanıyordu ki, kurulması istenilen bağıntının kolaylıkla ispat edildiği özel bir şekil, genel şekil yerine kaaim olsun.

PONCELET eserinde *düzlemde* ve *uzayda homologi* teorisinden de bahseder. Bir düzlemde bir S noktasiyle bu noktadan geçmiyen veya geçen bir s doğrusunu alalım. A, B, ... noktalarına öyle A', B', ... noktalarını tekabül ettirelim ki AA', BB', ... doğruları S den geçsin ve AB, ... ve $A'B'$, ... doğruları s üzerinde kesişsinler. Bu dönüştürüm *düzlem homologi* adını alır; S noktası homologi *merkezi* s de homologi *ekseni*dir.

Uzayda homologi ile $A, B, \ldots$ noktalarına öyle $A', B' \ldots$ noktaları tekabül eder ki $AA', BB' \ldots$ doğruları (homologi *merkezi* denilen) sâbit bir S noktasından geçerler ve $AB, \ldots$ ve $A'B', \ldots$ doğruları (homologi *düzlemi* adı verilen) bir düzlem üzerinde kesişirler.

Homologi teorisi izdüşüm ve kesim işlemlerine doğrudan doğruya bağlıdır. Aynı bir noktadan geçen doğru ve düzlemlerden ibaret bir şeklin iki ayrı düzlem kesiminden ibaret olan iki F, F' düzlem şeklini ele alalım. Herhangi bir noktadan itibaren F, F' şekillerinin bir düzlem üzerine izlerini düşünelim. Bu düzlem üzerinde bu tarzda ithal olunacak şekiller düzlem homologi halindedir, ve esasen düzlem homologi halindeki şekillerin hepsi bu yolla bulunabilir.

33. Süreklilik ilkesi. Aynı düzlemde bulunan iki konik dört noktada kesişirler, ve evvelce gördüğümüz gibi, sanal nokta kavramının ithaliyle analitik geometri yukarıki ifadeye genel bir anlam kazandırır.

İki γ, γ' koniğinde ortak noktalar A, B, C, D olsun, ve önce bu dört noktayı gerçel sayalım. Bu dört noktadan geçen konikler arasında AB, CD doğrularından teşekkül eden parçalanmış bir konik vardır. A, B noktalariyle γ koniğini sâbit tutup γ' koniğini sürekli bir şekilde değiştirelim. γ' nün bazı durumlarında C, D noktaları sanaldır, yâni iki γ, γ' koniğinin ortak gerçel noktalarının sayısı ancak ikidir. Fakat gerçel doğru olarak CD doğrusu daima mevcuttur. PONCELET bu doğruya γ, γ' koniklerinin *ortak ideal kirişi* adını verir. Bazı özelikler, CD kirişinin ideal olması hâlinde de bâki kalırlar. Nitekim bu kiriş ideal olsun olmasın, CD doğrultusunun γ, γ' koniklerindeki eşlenik çapları CD yi aynı noktada keserler.

Noktalardan, doğrulardan ve eğrilerden ibaret bir düzlem F şeklini düşünelim ve bunun sürekli bir tarzda şeklini tebdil ederek yer değiştirdiğini farzedelim. Bu şeklin bir F' konumu

için, elemanlarından bazılarının sanal hale geldiklerini kabul edelim. F şeklinin bu elemanları ilgilendirmiyen, fakat belki de bu elemanları kullanmak suretiyle tesis edilmiş bulunan bir özeliği, F' şekli için de muteber olacaktır. Kendi kitabında bu hususu açık bir şekilde ifade etmemiş olmakla beraber, PONCELET' nin *süreklilik ilkesi* işte bundan ibarettir.

Bu çok genel şekli altında bahis konusu ilke tabiatiyle doğru olmıyan sonuçlara vardırabilir.

Modern eleştirme, süreklilik ilkesinin uygulanma alanını belirlemiştir: denilebilir ki bahis konusu özeliklerin analitik geometride cebirsel bağıntılarla ifade edilebilmeleri hallerinde bu ilke muteberdir. PONCELET'nin yapmak istediği gibi, Cebirin yardımı olmadan bu ilkeyi Geometriye sokmak imkânsız gibi görünmektedir.

Şurasını da kaydetmek yerinde olur ki sanal elemanların, hattâ görünüş bakımından sırf geometrik olan düşünceler halinde dahi, Geometri de ele alınmaları MONGE ve CARNOT'nun alışageldikleri şeylerdi. Nitekim, bir doğrunun bir kuvadriğe göre eşleniğine ait özelikleri tesis için MONGE bu doğrudan kuvadriğe iki teğet düzlem geçirilebileceğini kabul eder. Bu düzlemlerin daima gerçel olmadıkları bilinmektedir. Buna göre MONGE'un takib ettiği yol, gerçel ve sanal elemanları birtutmaktan ibarettir ki, bu da hâlen cebirsel geometride alışılagelen bir şeydir.

34. Düalite ilkesi. Bir düzlemde bir Γ koniğini ele alalım. Bunun düzleminin bir P noktasına, bu noktanın Γ ya göre p kutup doğrusunu tekabül ettirelim. P noktasından Γ ya çizilen teğetler ister gerçel ister sanal olsunlar, bu kutup doğrusu çizilebilir. Gerçekten Γ koniğini sırasiyle A ve A', B ve B' noktalarında kesmek üzere P den iki a, b doğrusunu geçirelim. p kutup doğrusu AB ve $A'B'$ doğrularının kesim noktasiyle AB' ve $A'B$ doğrularının ortak noktasından geçer (DE LA HIRE tarafından bulunan teorem).

Düzlemin P noktalariyle p doğruları arasındaki bu dönüştürümün önemli bir özeliği vardır. p doğrusu bir P noktasının kutup doğrusu ise, p nin bir P' noktasının kutup doğrusu p nin P kutbundan geçer. Buradan da şu netice çıkar ki bir nokta bir doğruyu çizdiği takdirde, bu noktanın kutup doğrusu bahis konusu doğrunun kutbundan geçer. Buna kutup ve kutup doğrularının karşıt özeliği denilir.

Bir koniğe göre kutup ve kutup doğrusu olma keyfiyetine *kutupluluk* dersek, bu dönüştürüm sonucunda :

1. Bir P noktasına bir p doğrusu ;

2. Bir p' doğrusunun noktalarına, bir P' noktasından geçen doğrular,

3. Bir p' doğrusu üzerinde bulunan bir P noktasına, homoloğu p' olan bir P' noktasından geçen bir p doğrusu tekabül eder.

Noktalardan ve doğrulardan ibaret bir F şekline ait bir özeliği tesis ettiğimizi tasavvur edelim ve F ye ait nokta ve doğrular yerine bunların verilen bir koniğe göre kutup doğruları ve kutuplarının alınmasiyle meydana gelen şekle F' diyelim. F şekli için bahis konusu olan özeliğin ifadesindeki «nokta» ve «doğru» kelimelerini sırasiyle «doğru» ve «nokta» kelimeleriyle tebdil etmek suretiyle F' şekli için de bir özelik elde olunacak mıdır ? Bunun mutlaka böyle olacağını söyliyemeyiz ; zira böyle olabilmesi için bahis konusu özeliğin ifadesine metrik kavramlar (yâni doğru parçalarının ve açıların ölçümleri) girmemelidir ; başka bir deyimle, bu özeliğin bir konum veya izdüşel özelik olması gereklidir.

Şu halde PONCELET ile birlikte, *düzlemde düalite ilkesi* denilen aşağıki ilkenin ifadesini verebiliriz :

Düzlemin her konum özeliğine, bu özeliğin ifadesindeki «nokta» ve «doğru» kelimelerinin yerine sırasiyle «doğru» ve «nokta» kelimelerini koymak suretiyle yeni bir özelik tekabül eder.

Ve bu yeni özeliği ispat etmeğe lüzum yoktur, çünkü ilk özeliğin bir koniğe göre kutupluluk yolu ile dönüşümü neticesinde bu yenisinin elde olunması vakıası bunun zimnen ispatı demektir.

Yeni geometrik özelikler elde etmek için bir koniğe göre kutupluluk dönüştürümünün kullanılması keyfiyeti MONGE'un ve onun yanında yetişenlerin bildikleri bir şeydi. PONCELET bunu sistemli bir şekilde kullandı ve MICHEL CHASLES (1793 - 1880) da ona büyük bir teşmil imkânını sağladı.

Şurasını da kaydedelim ki düalite ilkesinin ifadesinde, bir koniğe göre kutupluluğun tarifindeki üçüncü özelik bahis konusu değildir. Öte yandan, her noktaya bir doğru tekabül ettiren öyle başka usuller düşünülebilir ki bir doğrunun noktalarına da bir noktadan geçen doğrular tekabül etsin. O halde, düalite ilkesinin, bir koniğe göre kutupluluktan müstakil olması gerekir. Gerçekten de böyledir ve geometrinin sonraki gelişmesi bu noktanın tasrihini mümkün kılmıştır.

Düalite ilkesi tabiatiyle uzaya da teşmil olunur ve bunun da menşei bir kuvadriğe göre, MONGE ve Okulu tarafından incelenen, kutupluluk olmuştur. Bunun ifadesini vermekle yetinelim:

Uzayın her konum özeliğine, bunun ifadesindeki «nokta» ve «düzlem» kelimeleri yerine sırasiyle «düzlem» ve «nokta» kelimelerinin konulmasiyle ifade olunan ikinci bir özelik tekabül eder.

«Doğru» kelimesinin bu türlü ifadelerde değiştirilmemesi lâzımdır, fakat «iki noktadan geçen doğru» ifadesinin yerine «iki düzlemin arakesiti olan doğru» ifadesinin konulması gerektiğini söylemeğe de hemen hemen ihtiyaç yoktur.

35. Sonsuzdaki elemanlar. Evvelce işaret ettiğimiz gibi, *sonsuzda nokta* kavramı DESARGUES'e kadar gider. Bu geometriciye göre, birtakım paralel doğrular, kesim noktaları sonsuzda telâkki olunmak üzere, birtakım kesişen doğruların benzeri idi.

Fakat bir düzlemin sonsuzdaki noktaları topluluğunun bir doğru şeklinde ele alınması gerektiğine ilk işaret eden PONCELET'dir.

Bu kavramlar geometriye aşağıdaki tarzda kesin bir şekilde sokulabilir:

Önce düzlemle yetinelim. İtibarî olarak iki paralel doğrunun aynı *doğrultu*yu haiz olduklarını söyliyelim. Buna göre aşağıki özelikleri ifade edebiliriz:

Farklı iki nokta bir doğru belirtir.

Bir nokta ile bir doğrultu bir doğru belirtir (yâni bir noktadan verilen bir doğruya paralel bir doğru geçirilebilir.)

Kelimenin alışılmış mânasındaki bir noktaya *has* nokta, ve bir doğrunun doğrultusu ifadesine de *sonsuzda nokta* veya *has olmıyan* nokta diyelim. Bu takdirde biraz önceki iki ifade birtek ifade şeklinde birleştirilebilir:

Hiç olmazsa birisi has olan iki nokta bir doğru belirtir.

Bu ifadede de hâlâ bir istisnaî hal vardır. Eğer bir düzlemin türlü doğrularının hasolmıyan noktaları topluluğuna düzlemin *sonsuzdaki doğrusu* veya *hasolmıyan doğrusu* demeği uygun bulursak, bu istisnaî hali de ortadan kaldırabiliriz. Bu takdirde diyebiliriz ki:

Farklı iki nokta bir doğru belirler.

Bu itibari tanımlarla, *İzdüşel düzlem* denilen şeyi tarif etmiş oluyoruz. Elementer geometrideki düzlemle bunun arasındaki fark, hasolmıyan yâni sun'î noktaları ihtiva eden ve hasolmıyan doğru denilen sun'î bir doğrunun bu düzleme katılmasından ileri gelir.

Bu kavramların uzaya teşmili kendiliğinden olur. Önce iki paralel düzlemin aynı *yönelimi* haiz bulunduklarını, iki paralel doğrunun aynı *doğrultulu* olduklarını, ve bir doğrunun bir düzleme paralel bulunması halinde doğrultusunun düzlemin yönelimine

ait olduğunu ihbarî olarak söyliyelim. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler ileriye sürülebilir :

Farklı üç nokta bir düzlem belirler.

Farklı iki nokta ile bir doğrulta bir düzlem belirler (yâni iki noktadan geçen ve tabii bu iki noktayı birleştiren doğruya paralel olmıyan bir doğruya paralel olan bir düzlem mevcuttur.)

Bir nokta ile farklı iki doğrulta bir düzlem belirler (yâni bir noktadan geçen ve farklı iki doğruya paralel olan bir düzlem mevcuttur).

Bir doğrunun doğrultusuna *hasolmıyan nokta*, bir düzlemin yönelimine *hasolmayan doğru* ve nihayet hasolmıyan nokta ve doğruların meydana getirdiği şekle de *hasolmıyan düzlem* demeği uygun görürsek, bu takdirde bir tek ifade elde ederiz :

Farklı üç nokta bir düzlem belirler.

Hasolmıyan elemanları elementer geometrideki uzaya katmakla *İzdüşel uzay* elde olunur.

Bundan önceki kısmlarda raslanan (hasolmıyan) ve (sonsuzda) ifadeleri eşanlamdadır ; bundan sonra da bunları ayırdetmeden kullanacağız.

36. Harmonisiz oran. Bir doğru üzerinde bulunan dört (has) A, B, C, D noktasını ele alalım. Bu takdirde

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

ifadesine A, B, C, D noktalarının *harmonisiz oranı* veya *çifte oranı* denilir.

Bu kavramın izlerine taa PAPPOS zamanında bile rastlanırsa da bunun izdüşel geometrideki önemini ortaya koyanlar CHASLES ve MÖBIUS (1790 - 1868) olmuştur. Üstelik bu geometriciler bahis

konusu kavramı aynı bir noktadan geçen ve aynı bir düzlem üzerinde bulunan dört doğrudan ve bir doğrudan geçen dört düzlemden ibaret sistemlere de teşmil etmişlerdir.

Aynı düzlem üzerinde bulunan dört a, b, c, d doğrusu aynı bir (has) noktadan geçerse, (ac), (ad), ... sırasiyle a ve c, a ve d, ... doğruları arasındaki açıları göstermek üzere, bu dört doğrunun karmonisiz oranının ifadesi

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin(ac)}{\sin(ad)} : \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}$$

dir.

Eğer dört α, β, γ, δ düzlemi aynı bir (has) doğrudan geçiyorsa, $(\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta)$, ... lar sırasiyle α ve γ, α ve δ, ... düzlemleri arasındaki iki düzlemli açıları göstermek üzere, bu dört düzlem arasındaki harmonisiz oran

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\alpha\delta)} : \frac{\sin(\beta\gamma)}{\sin(\beta\delta)}$$

dır.

Aynı bir düzlem üzerinde bulunan ve aynı bir S noktasından geçen dört a, b, c, d doğrusunu yeniden ele alalım ve bunları S den geçmiyen bir s doğrusu ile keselim. Kesim noktaları A, B, C, D ise derhal görülür ki

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

dir.

Gerçekten

$$\frac{\sin(ac)}{AC} = \frac{\sin(as)}{SC}, \qquad \frac{\sin(ad)}{AD} = \frac{\sin(as)}{SD},$$

$$\frac{\sin(bc)}{BC} = \frac{\sin(bs)}{SC}, \qquad \frac{\sin(bd)}{BD} = \frac{\sin(bs)}{SD}$$

dir.

Buna göre diyebiliriz ki aynı düzlemde bulunan a, b, c, d doğrularının bir s doğrusu ile kesilmesi neticesinde harmonisiz oranı dört doğrununkine eşit olan dört nokta elde olunur, veya başka deyimle, aynı bir doğru üzerinde bulunan dört A, B, C, D noktasının bir S noktasından itibaren izleri düşürülecek olursa, harmonisiz oranı dört noktanınkine eşit olan dört doğru elde olunur.

Aynı derecede kolaylıkla ispat olunur ki aynı bir doğrudan geçen dört α, β, γ, δ düzlemi bir doğru ile dört A, B, C, D noktasında veya bir düzlemle dört a, b, c, d doğrusu boyunca kesilirse

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D) = (a, b, c, d)$$

dir.

Bundan önceki tanımlara, aşağıdakilerini de katalım: aynı bir düzlem üzerinde bulunan dört paralel doğrunun, veya birbirine paralel dört düzlemin harmonisiz oranı, bu dört doğru veya düzlemin bir doğru ile kesilmesi neticesinde bulunan dört noktanın harmonisiz oranına eşittir.

Artık harmonisiz oranın izdüşel geometrideki önemini belirten aşağıki teoremi ifade edebiliriz:

(Has) bir doğru üzerinde bulunan dört noktanın, veya aynı bir düzlem üzerinde bulunan ve (has veya hasolmıyan) bir noktadan geçen dört doğrunun, veyahut (has veya hasolmıyan) bir doğrudan geçen dört düzlemin harmonisiz oranları, bu şekillerin birinden diğerine sonlu sayıda izdüşümler ve kesimlerle geçilebildiği takdirde, birbirine eşittir.

İzdüşüm ve kesim işlemlerine karşı harmonisiz oranın bir invaryant olduğu da söylenebilir.

37. Dört noktanın harmonisiz oranının değerleri. Bir doğru üzerinde bulunan dört A, B, C, D noktasını yeniden ele

alalım. Bu dört noktanın harmonisiz oranının değeri bu noktaların sıralanış şekline bağlıdır. Halbuki dört nokta yirmidört farklı şekilde sıralanabileceğine göre, ince elenip sık dokunulmadığı takdirde, dört noktanın aynı sayıda harmonisiz oran vereceği zehabı uyanabilir. Hakikatte, değer bakımından farklı olanların sayısı, genel olarak, altıdır.

Gerçekten, bir kere

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{BC}:\frac{AD}{AC}=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{DB}{DA}:\frac{CB}{CA}$$

yâni

$$(A,\ B,\ C,\ D)=(B,\ A,\ D,\ C)=(C,\ D,\ A,\ B)=(D,\ C,\ B,\ A)$$

olduğuna işaret edelim.

Başka deyimle, ilk iki nokta ile son iki nokta kendi aralarında aynı zamanda değiştirilirse, veya ilk iki nokta ile son iki noktanın yerleri tebdil olunursa harmonisiz oran değişmez.

Bu anlaşıldıktan sonra

$$\alpha=(A,\ B,\ C,\ D)$$

dersek,

$$(A,\ B,\ D,\ C)=\frac{1}{\alpha},\quad (A,\ C,\ B,\ D)=1-\alpha,\quad (A,\ C,\ D,\ B)=\frac{1}{1-\alpha},$$

$$(A,\ D,\ B,\ C)=\frac{\alpha-1}{1},\quad (A,\ D,\ C,\ B)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

olur.

Bunlar dört nokta ile teşkil olunabilecek harmonisiz oranların altı değeridir.

Bu konuda daha fazla ilerlemeden şurasını kaydedelim ki dört A, B, C, D noktası birbirinden farklı ise, α sayısı 0 ve 1 değerlerini alamaz ve öte yandan daima sonludur.

Genellikle, harmonisiz oranın altı değeri birbirinden farklı-

dır, fakat A, B, C, D noktalarının bazı özel durumları için, bu değerlerden bazıları birbirine eşit olabilir.

Örneğin ilk iki nokta, ya da son iki nokta kendi aralarında değiştirilebilirse, yâni

$$(A, B, C, D) = (A, B, D, C)$$

ise, $\alpha = -1$ dir. Bu takdirde oranın *harmonik* olduğu, veya $ABCD$ dörtlüsünün harmonik olduğu, veyahut C, D noktalarının A, B çiftini harmonik olarak böldüğü söylenir. Bu halde, harmonisiz oranın altı değeri üçe iner:

$$(A, B, C, D) = -1, \quad (A, C, B, D) = 2, \quad (A, C, D, B) = \tfrac{1}{2}.$$

Bilindiği gibi, harmonisiz orana, bir koniğe göre kutup ve kutup doğruları teorisinde rastlanır; bu oran hassatan De La Hire tarafından kullanılmıştır.

Harmonisiz oranın altı değerinin birbirinden farklı bulunmadığı bir hal daha vardır, bu da α nın

$$\alpha^2 - \alpha + 1 + 0$$

denkleminin kökü olması halidir.

Bu takdirde altı değer ikiye iner ki bunlar da işte yukarıki denklemin (sanal) kökleridir. Bu halde orana *eşharmonisiz* denilir ve dört noktanın hepsi birden gerçel olamaz.

38. İzdüşel geometrinin temel formları. İzdüşel geometride kullanılan izdüşüm ve kesim işlemleri bazı şekillerin önemini meydana çıkarmıştır: bir noktadan veya bir doğrudan itibaren izdüşürülür, bir doğru veya bir düzlem yardımiyle kesim işlemi yapılır. İşte bunlardan izdüşel geometrinin altı formu doğmuştur. Bunlar:

1. Bir doğru üzerindeki noktalar cümlesi, veya *doğrusal nokta cümlesi*.

2. Bir noktadan geçen ve aynı bir düzlem üzerinde bulunan doğrular (veya ışınlar) cümlesi, veya *ışın demeti*.

3. Aynı bir doğrudan geçen düzlemler cümlesi, veya *düzlem demeti*.

4. Bir düzlemin noktalarından ve doğrularından müteşekkil cümle, veya *düzlem*.

5. İtalyan geometricilerin yıldız adını verdikleri ve aynı bir noktadan geçen doğru ve düzlemlerden ibaret olan *buket*.

6. Noktalarından ve düzlemlerinden müteşekkil cümle gibi düşünülen *uzay*dan ibarettir.

Şurasını kaydetmek yerinde olur ki, bu tanımlar izdüşel uzay için verilmiştir, yâni tanımlarda bahsa konu olan bazı elemanlar hasolmıyabilir. Nitekim bir doğrusal nokta cümlesini taşıyan bir doğru hasolmıyabilir (bu takdirde de bahis konusu doğrusal nokta cümlesi bir düzleme ait doğruların doğrultularından müteşekkil cümledir); bir ışın demetinin bütün doğrularında ortak olan nokta hasolmıyabilir ve bu takdirde birbirine paralel (ve aynı düzlemde bulunan) doğrular bahis konusudur; bir buketin doğrularında ve düzlemlerinde ortak olan ve buketin tepesi denilen nokta da hasolmıyabilir, ve bu takdirde buket aynı bir doğruya paralel doğru ve düzlemlerin cümlesidir.

Şu nokta derhal göze çarpar ki izdüşüm ve kesim işlemleriyle bir formdan ötekine daima geçilemez. Bunun mümkün olması halinde iki formun aynı cinsten oldukları söylenir. Daha kesin bir tarzda, ilk üç forma birinci cinsten formlar denilir; dördüncü ve beşinci formlar ikinci cinstendir; sonuncusu da üçüncü cinsten bir formdur. Meselâ görülebilir ki bir doğrusal nokta cümlesinin (taşıyıcısı dışındaki) bir noktadan itibaren izdüşümü bir ışınlar demetidir; bir düzlemin (dışındaki) bir noktadan iti-

baren izdüşümü bir buketdir: bir düzlem demetinin (demete ait olmıyan) bir düzlemle kesimi bir ışın demetidir, v.s.

39. İki form arasında izdüşellik. DESARGUES ve PASCAL bir α düzleminde bulunan bir γ çemberinden bir α' düzleminde bulunan bir γ' koniğine geçmek için ne α ya ne de α' ye ait olmıyan bir S noktasından itibaren γ nın α' üzerindeki izdüşümünü alıyorlardı. Netice itibariyle, α düzleminin, S noktasından itibaren izini alıyorlar ve S tepeli buketi α' düzlemiyle kesiyorlardı.

DE LA HIRE ve LE POIVRE γ çemberi ile γ' koniğini aynı düzlemde farzetmek yolunu tutmuşlardı. Evvelce de kaydettiğimiz gibi, ne α ya ne de α' ye ait olmıyan bir S' noktasından itibaren α' düzleminin α düzlemi üzerine izi düşünülürse, bu geometricilerin kullandıkları usul yeniden elde olunur. DESARGUES ve PASCAL farklı iki düzlem arasındaki bir tekabülü ele alıyorlar, buna karşılık DE LA HIRE ve LE POIVRE böyle bir tekabülü çakışık iki düzlem (taşıyıcıları aynı olan iki düzlem) arasında kuruyorlardı. Yukarıda adları geçen geometriciler tarafından ele alınan dönüştürümler, PONCELET ve onun yolunda gidenlerce düşünülen izdüşelliklerin özel halleridir.

PONCELET der ki birinden ötekine sonlu sayıda izdüşüm ve kesimlerle geçildiği takdirde, birinci cinsten iki form izdüşeldir; bu formlar arasındaki tekabüle de izdüşellik adı verilir.

Özellikle, biri ötekinin izdüşümü veya kesimi ise, veya her ikisi aynı bir formun kesiminden veya izdüşümünden ibaretse, birinci cinsten iki forma perspektif halde iki form denilir. Bu takdirde formlar arasındaki tekabüle de *perspektivite* adı verilir.

PONCELET'nin tanımı ikinci cinsten formlara teşmil edilmek istenirse, bunların birinden ötekine sonlu sayıda izdüşüm ve ke-

sim işlemiyle geçilebildiği takdirde, bu iki formun izdüşel olduğu söylenecektir. Fakat bu tanım çok dar anlamdadır.

Bu tanımı geçici olarak kabul edelim ve α, α' iki izdüşel düzlem olsun. α nın bir noktasına, α' nün bir noktası, ve α nın bir doğrusunun noktalarına da α' nün bir doğrusunun noktaları tekabül eder; dolayısiyle, α nın bir doğrusuna α' nün bir doğrusu tekabül eder ve α nın bir noktası α nın bir doğrusuna aitse, α' nün homolog noktası da homolog doğruya aittir.

Fakat bir koniğe göre kutupluluk ve daha genel olarak düzlemde düalite ilkesi gösterdi ki buna benzer başka tekabüller de vardır, öyle ki bunlarda da bir noktaya bir doğru ve bir doğruya bir nokta tekabül eder. Bundan dolayı bu tanımı enine boyuna değiştirmek ve yerine aşağıkini almak gerekti:

İki düzlem verildiğine göre

1. Bunlardan birinin bir (nokta veya doğrudan ibaret) elemanına ötekinin bir elemanı tekabül ederse;

2. Birinin birinci cinsten bir formunun elemanlarına, ötekinin birinci cinsten bir formunun elemanları tekabül ederse, bu iki düzlem izdüşeldir.

İki buket arasındaki veya bir düzlemle bir buket arasındaki izdüşellik'in tarifi de bunun benzeridir.

İki düzlem arasındaki izdüşelliğin, öncekinden daha geniş anlamdaki yeni tanımı, daha yukarıda bahse konu olan iki hali ihtiva etmekle beraber ortaya başka bir mahzur çıkarır. İki izdüşel düzlem içinde bulunan birinci cinsten iki homolog form izdüşeldir; PONCELET'nin, birinci cinsten iki form arasındaki izdüşellik için verdiği tanım bu özeliği ispatlamağa yetmiyordu. Bu tanımın nasıl tâdil edilebildiğini birazdan göreceğiz.

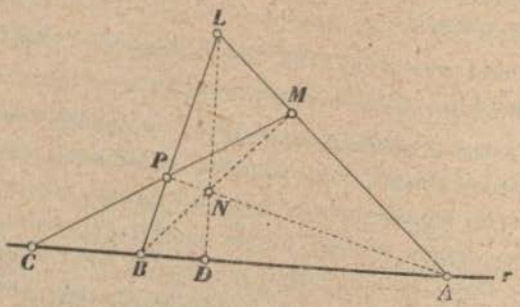
40. Birinci cinsten iki form arasındaki izdüşellik. Birinci cinsten iki form, ve fikirleri tespit maksadiyle, meselâ PONCELET

anlamında izdüşel olan iki r, r' doğrusal nokta cümlesini düşünelim. Bu takdirde r den r' ye sonlu sayıda izdüşüm ve kesimle geçilebilir. Dolayısiyle A, B, C, D eğer r nın dört farklı noktası ve A', B', C', D' de bunların r' üzerindeki homologları ise, ilk dört nokta ile son dört noktanın harmonisiz oranları birbirine eşittir:

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D).$$

Buna göre iki doğrusal nokta cümlesi arasındaki izdüşelliği, iki doğrusal nokta cümlesinin noktaları arasında harmonisiz oranı muhafaza eden birebir bir tekabül şeklinde tanımlamak akla gelebilir. Fakat bu tanım uygun düşmiyebilir, zira bir doğrusal nokta cümlesine ait dört noktanın harmonisiz oranı ancak hem bu doğrusal nokta cümlesini taşıyan doğrunun hem de dört noktanın has olmaları halinde tanımlanmıştır.

Birinci cinsten bir forma ait elemanlarla teşkil olunan harmonik dörtlünün bütün hallerde grafik olarak tanımlanabileceği hususunu gözönüne almak suretiyle bahis konusu güçlük ortadan kaldırılabildi.



Şek. 15

Bir r doğrusal nokta cümlesinin üç A, B, C noktasını ele alalım ve bu noktalardan, ortak noktaları bulunmıyan üç AL, BL, CM doğrularını geçirelim (*Şek.* 15). B noktasını, AL ve CM

nin M kesim noktasına, A noktasını BL nin CM yi kestiği P noktasına, ve nihayet L yi de BM ve AP nin N ortak noktasına birleştirelim. LN doğrusu r yi bir D noktasında keser ve $ABCD$ dörtlüsü harmoniktir.

Gerçekten, CM doğrusu ile kesilen ALB üçgeninde MENELAOS teoremine göre

$$\frac{LM}{AM} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BP}{LP} = +1$$

dir.

Öte yandan, aynı üçgene CEVA teoremini tatbik etmekle

$$\frac{LM}{AM} \cdot \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BP}{LP} = -1$$

bulunur, buradan da taraf tarafa bölmek suretiyle

$$(A, B, C, D) = -1$$

elde olunur.

Bu ispattan özel olarak D noktasının konumunun AL, BL, CM doğrularının seçimine bağlı olmadığı sonucu çıkar.

Harmonik dörtlünün bu tanımı bütün hallere uygulanabilir. Örneğin eğer doğrusal nokta cümlesinin taşıyıcısı has ve buna karşılık A noktası has değilse, AL ve AP doğrularını r ye paralel olarak çizmek kâfi gelir. Eğer r doğrusal nokta cümlesinin taşıyıcısı has değilse, bir yandan LM ve PN öte yandan da MN ile LP birbirine paralel olmak üzere $LMNP$ dörtgeni bir paralelkenardır.

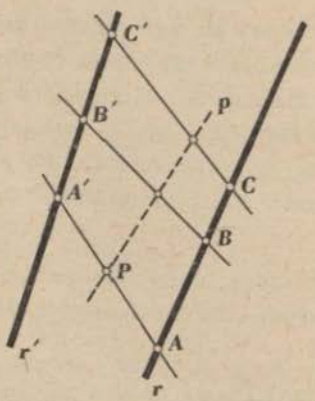
Bütün hallerde buna benzer usuller bir doğru demetine veya bir düzlem demetine ait bir harmonik dörtlünün inşasını mümkün kılar.

Bunlar anlaşıldıktan sonra, *birinci cinsten iki form verildiğine göre, bunlardan birinin her harmonik dörtlü elemanına öteki-*

nin bir harmonik dörtlü elemanı tekabül edecek şekilde bu formlar arasında birebir bir tekabül varsa, birinci cinsten bu iki forma izdüşel denilir.

VON STAUDT (1797-1867) tarafından kabul edilen tanım budur. Geriye, üç homolog eleman çifti verildiği takdirde, birinci cinsten iki form arasındaki izdüşelliğin temamiyle belirli olduğunu ispat etmek kalır. Bu VON STAUDT'ın temel teoremidir; bundan sonraki bölümde bu bahse yeniden döneceğiz. Şimdilik, bu teoremi kabul etmek suretiyle, birinci cinsten izdüşel iki form verildiği takdirde bunların birinden ötekine sonlu sayıda izdüşüm ve kesim işlemleriyle geçilebildiğini ispat etmekle yetinelim.

Önce şurasını kaydedelim ki ele alınan iki formu, taşıyıcıları birbirini kesmiyen, doğrusal iki nokta cümlesi şeklinde farzetmek daima mümkündür. Gerçekten, sonlu sayıda izdüşüm ve kesim yardımiyle birinci cinsten herhangi bir form yerine bir doğrusal nokta cümlesi alınabilir ve bu işlemler, harmonik dörtlüleri değiştirmediğine göre, VON STAUDT anlamında izdüşelliklerdir.



Şek. 16

Bu nokta anlaşıldıktan sonra, taşıyıcıları uzayın aykırı iki doğrusu olan iki izdüşel doğrusal nokta cümlesine r, r' diyelim (*Şek.* 16). r nin üç noktası A, B, C ve bir izdüşellikte bunların r' üzerindeki homologları A', B', C' olsun. AA', BB', CC' doğrularını çizelim; bunlar ikişer ikişer kesişmezler. AA' nün bir P noktasından BB' ve CC' ye dayanan bir p doğrusu geçer. p den geçen düzlemler, r ve r' doğrularını, bahis konusu izdüşelliği meydana getirecek şekilde keserler.

Görülüyor ki VON STAUDT'ın tanımını kabul etmekle özelik olarak PONCELET'ninki bulunur.

41. Ikinci cinsten iki form arasındaki izdüşellik. İkinci cinsten iki formu ele alalım ve fikirleri tespit maksadiyle bunların iki ϱ, ϱ' düzlemi olduğunu farzedelim. ϱ, ϱ' nün elemanları bunların noktaları ve doğrularıdır.

Eğer

1. *ϱ nun bir elemanına ϱ' nün bir elemanı tekabül ederse;*

2. *ϱ nun birinci cinsten bir formunun elemanlarına, ϱ' nün birinci cinsten bir formunun elemanları tekabül ederse, ϱ ve ϱ' düzlemlerine izdüşel denilir.*

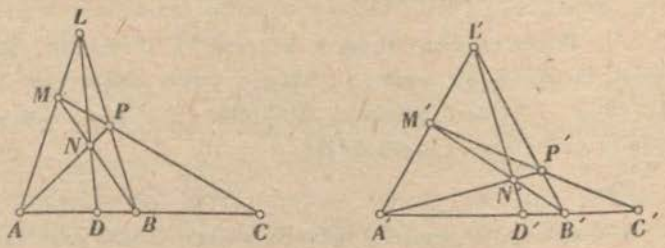
Şayet bahis konusu elemanların nev'i tasrih olunursa, iki hal vârid olabilir:

A. ϱ nun bir noktasına ϱ' nün bir noktası ve ϱ nun doğrusal bir nokta cümlesinin noktalarına ϱ' nün doğrusal bir nokta cümlesinin noktaları tekabül eder. Bu takdirde ϱ, ϱ' düzlemlerine *homografik* ve birinden ötekini geçmeyi sağlıyan işleme de *hemografi* veya *kolineasyon denilir.*

B. ϱ nun bir noktasına ϱ' nün bir doğrusu ve ϱ nun doğrusal bir nokta cümlesinin noktalarına da ϱ' nün bir ışınlar demetinin doğruları tekabül eder. ϱ, ϱ' düzlemlerine *karşıt* ve birinden ötekine geçmeyi sağlıyan işleme de *karşıtlık* veya *korelasyon* adı verilir.

Bu tanıma dayanarak, birinci cinsten homolog iki şeklin izdüşel olduğu zahmetsizce ispat olunabilir. İspat öteki hallere de derhal uygulanabildiğine göre, iki homografik düzlem halinde bunu gösterelim.

ϱ düzleminde bir r doğrusal nokta cümlesi ile bunun üzerinde bir $ABCD$ harmonik dörtlüsünü düşünelim (*Şek.* 17). İki karşı LM, NP kenarı A dan, öteki karşı iki LP, MN kenarı B den, MP kenarı C den, dolayısiyle son LN kenarı D den geçen $LMNP$ dörtaçılısını çizelim.



Şek. 17

ϱ' nün r ye tekabül eden doğrusal nokta cümlesi r' ve A,B,C,D nin homologları da A', B', C', D' olsun. L, M, N, P noktalarına da L', M', N', P' noktaları tekabül eder. LM doğrusu A dan geçtiğinden bunun homologu da A' dan geçer. Aynı şekilde N' P' doğrusu A' den, L' P' ve M' N' de B' den, nihayet M' P' doğrusu C' den ve L' N' de D' den geçer. Buna göre A' B' C' D' dörtlüsü harmoniktir. r, r' doğrusal nokta cümleleri arasında harmonik dörtlüleri muhafaza eden bire-bir bir tekabül vardır, o halde bu bir izdüşelliktir.

42. Üçüncü cinsten bir formda izdüşellikler. Uzayın elemanları kendi noktaları ve düzlemleridir. Uzayın bir izdüşelliği aşağıdaki şartlarla tanımlanmıştır.

1. *Uzayın bir elemanına uzayın bir elemanı tekabül eder.*

2. *İkinci cinsten bir formun elemanlarına, gene ekinci cinsten bir formun elemanları tekabül eder.*

Elemanların nev'i ayırdedilirse, iki hal elde olunur:

Bir noktaya bir nokta, ve bir düzlemin noktalarına gene bir düzlemin noktalarını tekabül ettiren *homografi* veya *kolineasyon*.

Bir noktaya bir düzlem, ve bir düzlemin noktalarına bir demetin düzlemlerini tekabül ettiren *karşıtlık* veya *korelasyon*.

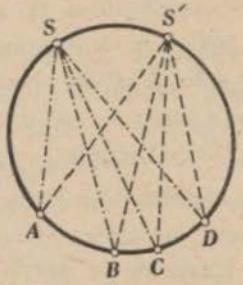
Uzayın bir izdüşelliğinde, birinci cinsten bir formun elemanlarına, birinci cinsten bir formun elemanları tekabül eder ve esasen izdüşelliklerin tanımında bu özelik ikinci şartın yerini tutabilir.

Öte yandan aşikârdır ki birinci veya ikinci cinsten iki homolog form izdüşeldir.

Şu noktaya da dikkat olunacaktır ki uzayın izdüşelliğinin tanımında doğru, eleman olarak bahis konusu olmamıştır. Bunun da sebebi şudur: üç düzlemin bir nokta, üç noktanın bir düzlem belirlemesine mukabil, verilen dört doğruya dayanan iki doğru vardır. Bire-bir tekabül kavramına dayanan izdüşellik kavramı burada bahis konusu olamazdı. Esasen şu noktayı da işaret edelim ki uzayın her izdüşelliğinde her doğruya gene bir doğru tekabül eder ama burada doğrular ya doğrusal nokta cümlelerinin taşıyıcısı, ya da düzlem demetlerinin ekseni şeklinde ele alınırlar.

43. Koniklerin izdüşel olarak doğurtulması. Bir γ çemberi ile bunun altı A, B, C, D, S, S' noktalarını ele alalım (*Şek.* 18). A, B, C, D, noktalarının sırasiyle S ve S' noktalarından itibaren izlerini düşürelim; böylece, eşit açılar yardımiyle hesabedildikleri için harmonisiz oranları eşit olan iki dörtlü doğru elde ederiz.

γ Çemberinin α düzleminin, bu düzlem üzerinde bulunmıyan herhangi bir O noktasından itibaren herhangi bir α_1 düzlemi üzerine izini düşürelim. γ çemberine α_1 üzerinde γ_1 koniği ve



Şek. 18

S, S', A, B, C, D noktalarına da sırasiyle S_1, S'_1, A_1, B_1, C_1, D_1 noktaları tekabül eder. İzdüşüm ve kesim işlemleriyle harmonisiz oranlar değişmediklerinden,

$$(S_1 A_1, S_1 B_1, S_1 C_1, S_1 D_1) = (S_1'A_1, S_1'B_1, S'_1C_1, S_1'D_1)$$

olur.

Bu özelik tabii S_1 ve S'_1 noktaları hangi noktalar olursa olsun, doğru olacağından, şu teorem elde olunur: Bir koniğin noktalarını bu koniğin sâbit dört noktasına birleştiren doğruların harmonisiz oranı sâbittir. Dolayısiyle bir konik, dört noktayı sâbit harmonisiz oran altında gören noktaların geometrik yeridir.

Bu özelik de dönüştürülebilir. Γ bir konik ve S, S' de bunun iki noktası olsun. S den geçen bir a doğrusuna, a nın Γ ile ikinci kesim noktası olan A dan ve S' den geçen a' doğrusunu tekabül ettirelim. Böylece S, S' tepeli ışın demetleri arasında bire-bir bir tekabül kurmuş olduk. Bu tekabül esasen bir izdüşelliktir, zira S den geçen ve harmonik bir dörtlü vücuda geti-

ren dört a, b, c, d doğrusunu ele alacak olursak, S' den geçen homolog a', b', c', d' doğruları da harmonik dörtlü teşkil ederler. Dolayısiyle, bir koniğin noktalarının, bu koniğin iki noktasından itibaren izlerini düşüren doğrular iki izdüşel demet meydana getirirler.

İzdüşel geometride bir koniği, aynı düzlemde bulunan iki izdüşel demetin homolog ışınlarının ortak noktalarının geometrik yeri olarak tanımlayabilir miyiz? Önce bir noktayı göz önüne almak gerekir.

Ne S den ne de S' den geçmiyen bir r doğrusal nokta cümlesine ait noktaların iki S, S' noktasından itibaren izlerini düşürmekle iki izdüşel demet elde edersek de, bu izdüşellik özeldir, zira birinci demetin SS' ışınına ikinci demette aynı ışın tekabül eder. PONCELET tarafından ortaya atılan ve esasen bugün de daima kullanılan bir deyime göre, her iki demet perspektiftir. Esasen, iki demetin izdüşel olması ve ortak ışınlarının kendi kendisine tekabül etmesi halinde bunların perspektif olduğu ispat olunur. Bu anlaşıldıktan sonra, izdüşel geometride, bir konik aşağıdaki tarzda tanımlanır:

Aynı düzlemde bulunan ve perspektif olmıyan iki izdüşel doğru demetinin homolog ışınlarında ortak olan noktalar cümlesine konik adı verilir.

Birinci demetin SS' ışınına ikinci demette S den geçmiyen bir s' doğrusu tekabül eder ve tanım gereğince bu doğru Γ koniğine S' de teğettir.

Konikler teorisinin yukarıki tanıma dayanan gelişmesi, S ve S' yerine eğrinin başka iki noktası alındığı takdirde de koniğin elde olunacağını göstermekle mümkün olacaktır.

Bundan sonra, perspektif o'mıyan (yâni ortak noktaları kendi kendisine tekabül etmiyen) ve aynı düzlem üzerinde bulunan iki izdüşel doğrusal nokta cümlesinin homoloğ noktalarını

birleştirmekle elde olunan doğrular cümlesini ele almak yerinde olur. Bu cümleye zarf-konik adı verilir ve nokta geometrik yeri olan bir koniğin teğetlerinden ibaret bulunduğu ispat edilir.

44. Koniklerin von Staudt'a göre tanımı. Geometrici VON STAUDT, konikler teorisini, *önceden* inşa olunmuş kutupluluğa dayanan başka bir tanımdan hareket ederek kurmağı tercih etti.

Çakışık iki ϱ, ϱ' düzlemi arasındaki bir Ω karşıtlığını ele alalım. ϱ nun bir P noktasına Ω karşıtlığı ϱ' nün bir p' doğrusunu tekabül ettirir. Bu doğruyu ϱ ya ait gibi düşünelim; buna Ω bir P' noktasını tekabül ettirir. P' nün bir homografide P ye tekabül ettiğini görmek kolaydır, gerçekten P nin bir doğrusal nokta cümlesini çizmesi halinde p' bir doğru demeti meydana getirir ve P' de bir doğrusal nokta cümlesini çizer. Bu homografi Ω karşıtlığına bağlıdır. Bunun özdeşliğe müncer olması, yâni P' nün daima P ile çakışması halinde, Ω karşıtlığına *kutuplaluk* adı verilir. P nin homologu olan p' doğrusu bu noktanın kutup doğrusudur ve P de p' nün kutbudur.

Bir karşıtlığın bir kutupluluktan ibaret bulunması için gerek ve yeter şartın, tepelerinden her birine karşıtlığın karşı kenarı tekabül ettirecek şekilde bir üçgenin varlığından ibaret bulunduğu ispat olunur.

Bu anlaşıldıktan sonra, artık tanımdan bahsedebiliriz: kendi kutup doğrularına ait olan noktalar cümlesine VON STAUDT geometrik yer koniği adını verir, kutuplarını ihtiva eden doğrular topluluğuna da zarf-konik der.

Bu tanımın üstünlüğü konikleri aynı zamanda hem noktalarının geometrik yeri hem de teğetlerinin zarfı olarak ithal etmesindedir. **Leçons de Géométrie projective** adlı kitabımızda kabul ettiğimiz tanım şekli de bundan ibarettir.

45. Uzaya teşmiller. Koniğin, iki izdüşel doğru demetinde homolog ışınların ortak noktalarının geometrik yeri şeklindeki tanımını yeniden ele alalım. Bu tanımı uzaya nasıl teşmil etmeli ve bu takdirde elde olunacak şekiller hangileridir?

S, S' tepeli izdüşel iki buketi ele alalım. İzdüşelliğin bir homografi veya bir karşıtlık olmasına göre iki hali kaale olmalıyız.

S, S' buketleri homografik oldukları takdirde, S den geçen bir doğruya S' den geçen bir doğru, S den geçen ve bir düzlem üzerinde bulunan doğrulara, S' den geçen ve gene bir düzlem üzerinde bulunan doğrular tekabül eder. O halde S den geçen bir düzleme S' den geçen bir düzlem tekabül eder.

Bu nokta tespit edildikten sonra, iki geometrik yeri ele alabiliriz:

1° SM, $S'M$ doğruları homografide homolog olacak şekildeki M noktalarının K geometrik yeri. Bu K geometrik yeri uzayın her düzlemiyle en fazla üç noktada kesilen bir eğridir ve *uzay kübiği* adını alır.

2° İki buketin homolog düzlem çiftlerinde ortak olan doğruların geometrik yeri. Bunun K eğrisini iki noktada kesen doğrular topluluğundan ibaret bulunduğu ispat olunur.

K eğrisi münasebetiyle ilgi çekici bir noktaya değinmek yerinde olur. Bir lâhza koniklerin iki izdüşel doğru demeti yardımiyle yaratılmasına yeniden dönelim ve şu noktaya işaret edelim ki S, S' merkezli iki perspektif demetin homolog ışınlarının ortak noktalarının geometrik yeri, SS' doğrusu ile iki demetin ortak kesimi olan bir r doğrusundan ibarettir. Bu iki doğru yâni SS' ile r topluluğu, parçalanmış bir konik gibi düşünülebilir. Bu müşahededen hareket etmek suretiyle, K uzay kübiğinin parçalanması halleri araştırılabilir.

Ele alınması gereken üç hal vardır:

a. SS' doğrusu kendi kendisinin homoloğudur. Bu takdirde genel olarak SS' den geçen ve kendi kendilerinin homoloğu olan iki düzlem vardır. K geometrik yeri bazı hallerde çakışabilen ve SS' doğrusuna dayanan iki doğru ile SS' doğrusundan meydana gelir.

b. SS' doğrusu kendi kendisinin homoloğu değildir ama SS' den geçen ve kendi kendisinin homoloğu olan bir düzlem mevcuttur. K geometrik yeri bu düzlemde bulunan bir konikle, bu düzlem dışında olan ve bahis konusu koniği bir noktada kesen bir doğrudan ibarettir.

c. S, S' tepeli buketler perspektiftir, yâni aynı bir σ düzleminin izdüşümleridir. K geometrik yeri SS' doğrusundan ve bu düzlemden meydana gelir. O halde burada bir eğrinin özel hali olarak bir düzlem bulunmaktadır.

S, S' buketlerini bağlıyan homografide bu iki buketde ortak olan elemanlardan hiç birisi kendi kendisinin homoloğu değilse, ancak o zaman K eğrisi tam mânasiyle, yâni parçalanmamış bir uzay kübiği olacaktır.

Şimdi iki S, S' buketinin karşıt olduklarını farzedelim. S den geçen bir doğruya S' den geçen bir düzlem tekabül eder, S den geçen ve bir düzlemde bulunan doğrulara da, S' yü ihtiva eden bir doğrudan geçen düzlemler tekabül eder.

Bu halde, ele alınacak bir tek geometrik yer bahis konusudur, bu da buketlerden birinin doğrulariyle, ikinci de bunların homologları olan düzlemlerin ortak noktalarının Q geometrik yerinden ibarettir.

Eğer M bu geometrik yerin bir noktası ise, SM doğrusuna M den (ve S' den) geçen bir μ' düzlemi tekabül eder. SM den geçen düzlemlere de S' den geçen ve μ' de bulunan doğrular tekabül eder. Özel olarak, $S'M$ doğrusu, SM den geçen bir μ düzleminin homoloğudur. Bu da gösterir ki Q geometrik yerinin tanımında iki buketin simetrik rolleri vardır.

Q geometrik yeri bir ikinci derece yüzeyi veya bir kuadriktir ve bunun da incelenmesine, koniklerinkine benzer şekilde devam olunur.

VON STAUDT'ın konik tanımı uzaya da teşmil olunabilir ve kuvadrikleri verir. Fakat uzay kübiği bu yolla elde olunamaz.

46. Eğrilerin izdüşel olarak doğurtulması. Koniklerin izdüşel olarak doğurtulmasındaki basitlik, geometricileri yüksek dereceden eğriler için de buna benzer doğurtulmalar aramaya sevkedecekti. MICHEL CHALES, MÖBIUS, STEINER (1796-1863) ve onların zamanında yaşıyan geometricilerin meydana getirdiği eser işte bu yoldaki araştırmaların mahsulüdür.

Her şeyden önce bir noktaya işaret etmemiz gerekiyor. Koniklerin ve kuvadriklerin izdüşel geometrisi, (nokta, düzlem ve doğrulardan ibaret) gerçel elemanlarla yetinilerek ve hattâ, bundan sonraki bölümde görüleceği gibi, açı ve doğru parçası ölçüçümü kavramlarına başvurulmadan geliştirilebilir. Yüksek dereceden eğriler üzerinde yapılan araştırmalarda, genel olarak, gerçel ve sanal elemanlar arasında hiçbir fark gözeltilmez. Gerekli malzemeyi aslında analitik geometri sağlar; sadece fikir yürütme şekli izdüşel geometriden alınır.

n ninci dereceden bir düzlem eğri, $F(x, y)$ fonksiyonu x, y ye göre tam, rasyonel ve n ninci dereceden bir çokterimliyi göstermek üzere, koordinatları

$$F(x, y) = 0$$

denklemini sağlıyan gerçel veya sanal noktalar topluluğudur. Böyle bir eğriyi, kendi düzleminde bulunan (ve bu eğrinin parçalanması halinde tabiatiyle eğriye ait olmıyan) her doğru gerçel veya sanal n noktada keser. Karşıt olarak, bir cebirsel eğriyi, düzlemin her doğrusu n sayıda noktada keserse, bu eğrinin derecesi n dir.

Bu noktalar anlaşıldıktan sonra, n ninci dereceden eğri demeti diye, bunlardan ikisinin arakesidinden geçen aynı dereceden eğriler topluluğuna denilir. Eğer

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0$$

bu iki eğrinin denklemleri ise, demetin her eğrisi

$$F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0$$

şeklinde bir denklemle gösterilecektir.

Düzlem üzerinde bulunan ve demetin bütün eğrilerine ait olmıyan bir noktadan bu demetin bir ve yalnız bir eğrisi geçer.

Dereceleri sırasiyle m, n olan iki

$$(1) \qquad F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0, \qquad \Phi_2(x, y) + \mu \Phi_2(x, y) = 0$$

eğri demetini ele alalım. Eğer bu demetlerin elemanları arasında

$$(2) \qquad A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

denklemiyle temsil olunan bir tekabül varsa, bunlara izdüşel denilir.

Bu tekabül bire-bir dir ve ele alınan demetlerin doğru demetleri olmaları halinde ($m = n = 1$), (2) denklemi bu demetler arasındaki izdüşelliğin analitik ifadesidir.

(1) İzdüşel demetlerinin homolog eğrilerinde ortak olan noktaların geometrik yeri (1) ve (2) denklemleri arasında λ, μ parametrelerinin yokedilmesiyle bulunan

$$AF_1\Phi_1 - B\Gamma_1\Phi_2 - CF_2\Phi_1 + DF_2\Phi_2 = 0$$

dan ibarettir.

Şu halde bu geometrik yer, (1) demetlerinden her birine ait

bütün eğrilerin diğerindeki homologlariyle olan ortak noktalarından geçen ve derecesi $m+n$ olan, ve genellikle parçalanmıyan bir eğridir.

Yukarıda, ele alınan eğrilerin denklemlerini yazdık; şurasını kaydetmek yerinde olur ki geometriciler bu denklemleri genel olarak yazmadan fikir yürütürler.

Şimdi düzlem kübiklerin (yâni $m+n=3$) meydana getirilmesinden ibaret olan en bâsit halle yetinelim.

Şimdi dört A, B, C, D noktasından geçen koniklerden müteşekkil cümleyi, yâni bir konik demetini, bir de F tepeli bir doğru demetini ele alalım. Her iki demetin de izdüşel olduğunu farzedelim. Birbirinin homologu koniklerle doğruların ortak noktalarının geometrik yeri bir Γ düzlem kübiğidir. Bunun böyle olduğunu, denklemlere başvurmadan ispat etmek için, aşağıda görüleceği şekilde muhakeme yürütülebilir :

Konik demetinin F den geçen bir koniği vardır; bu koniğin homologu olan doğru F den geçeceği için, F noktası Γ eğrisine aittir. Öte yandan, F den geçen herhangi bir doğruyu, bunun homologu olan konik Γ ya ait iki noktada keser. Buradan da şu sonuç çıkarılır ki F den geçen herhangi bir doğru Γ yı üç noktada keser, dolayısiyle Γ eğrisi bir kübik (yâni üçüncü dereceden bir eğri) dir.

Şurasını da kaydedelim ki bu düşünce tarzı, ele alınan Γ geometrik yerinin cebirsel olduğunu tazammun eder.

Bir düzlem kübik, noktalarından dokuzu yardımiyle belirli olur. Bu dokuz noktanın verilmesi halinde, kübiği meydana getiren doğru demeti ile konik demetini nasıl inşa etmeli? Bu soruya karşılık olarak Chasles tarafından verilen çözüm yolu aşağıdadır:

Verilen dokuz nokta A_1, A_2, ..., A_9 olsun. Bu noktaların ilk dördünden geçen koniklerle teşkil olunan demeti ele alalım. Bu takdirde bir B noktası ile öyle bir izdüşelliği belirlemek ge-

rekmektedir ki konik demeti ile B tepeli doğru demeti arasındaki bu izdüşellik yardımiyle verilen dokuz noktadan geçen kübik meydana getirilmiş olsun.

A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarından ve sırasiyle A_5, A_6, A_7, A_8 noktalarından geçen dört koniğin harmonisiz oranl, dört BA_5, BA_6, BA_7, BA_8 doğrusunun harmonisiz oranına eşit olmalıdır. Bu harmonisiz oran belirlidir; bunun değeri α olsun. B noktası, dört A_5, A_6, A_7, A_8 noktasını α harmonisiz oranı altında gören noktaların geometrik yeri üzerinde, yâni bu dört noktadan geçen bir γ koniği üzerinde bulunur. Aynı düşünce tarzını A_6, A_7, A_8, A_9 noktaları için de tekrarlamak suretiyle deminki noktalardan ve B den geçen ikinci bir γ' koniğini elde ederiz.

İki hal vârid olabilir:

1. γ, γ' konikleri birbirinden farklıdır. Bu iki koniğin dört ortak noktası vardır; bunlardan A_6, A_7, A_8 den ibaret olan üçü bilinmektedir, dördüncüsü de B olduğundan, o da bu şekilde belirli olur. B noktası bu suretle bir kere belirlendikten sonra, konik demeti ile B tepeli demet arasındaki izdüşellik de, yeter sayıda homolog elemanın bilinmesi yüzünden, belirlenmiş olur.

2. γ, γ' konikleri aynıdır. B noktası belirsizdir, buna göre verilen dokuz noktadan geçen sonsuz kübik vardır. Başka deyimle, bu dokuz nokta iki kübiğin ortak noktalarıdır, dolayısiyle bunların belirttikleri demetin bütün kübiklerinde de ortakdır.

Sekiz noktadan geçen kübikler bir demet belirtirler, ve bu şekiz nokta yardımiyle temamen belirli olan bir dokuzuncu noktadan da geçerler. Buna göre, γ, γ' koniklerinin çakışması halinde, A_9 noktasının A_1, A_2, ..., A_8 noktaları yardımiyle belirlenmiş olması gerekir. Zaten A_9 noktasının A_1, A_2, ..., A_8 noktaları yardımiyle temamen belirli olan ve bunların son dört noktasından geçen γ koniği üzerinde bulunduğunu biliyoruz. A_2, A_3, A_4, A_5 noktalarından geçen koniklerin teşkil ettiği demetten hareket ederek aynı düşünceyi tekrar ele alalım, bu takdirde

A_1, A_6, A_7, A_8 noktalarından geçen ve A_9 u ihtiva etmesi gereken bir γ'' koniğini elde ederiz. A_9 noktası A_6, A_7, A_8 ile birlikte γ, γ'' koniklerinin arakesit noktalarını vücuda getireceğinden, belirlidir.

Bu örnek, CHASLES ve çağdaçı geometricilerin o zamanlar ne biçim araştırmalarla uğraştıkları hakkında bir fikir verir. Yüzeylerin meydana getirilişi ile ilgili bunlara benzer araştırmalar, XIX uncu yüzyılın büyük bir kısmında geometricilerin meşgalelerine konu olmuştur.

47. Chasles'in tekabül ilkesi. Biraz önce bahis konusu edilen araştırmalar, CHALES'i, izdüşelliği genelleştiren ve bir doğruya ait noktalar arasında kurulan tekabülleri ele almağa sevketti.

Bir r doğrusunu düşünelim ve bunun, noktalarını sırasiyle X, Y ile göstereceğimiz doğrusal iki nokta cümlesikin taşıyıcısı olduğunu farzedelim. Eğer bu doğrusal nokta cümleleri izdüşelse, bir X noktasına bir Y noktası ve bir Y noktasına da bir X noktası tekabül eder. r üzerinde bir O başlangıç noktasını seçelim ve bu doğruyu yönliyelim. X in OX apsisine x ve Y nin OY apsisine de y diyelim. Bu iki doğrusal nokta cümlesi arasındaki izdüşellik

$$axy + bx + cy + d = 0$$

bağıntısiyle gösterilir.

X değiştiği vakit, Y nin de değişmesi için $ad - bc$ nin sıfırdan farklı olduğu farzolunacaktır.

Y homologu ile çakışan bir X noktasına *birleşik* (veya *ikikat*) nokta adı verilir. O halde birleşik noktaları veren denklem

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0$$

dır; buna göre, genel olarak birbirinden farklı, iki *birleşik* (veya *ikikat*) nokta vardır.

Daha genel olarak, CHASLES X, Y noktaları arasında öyle bir cebirsel tekabül düşündü ki bir X noktasına n tane Y noktası, ve bir Y noktasına da m tane X noktası tekabül etsin. CHASLES buna bir (m, n) tekabülü der. f fonksiyonu x e göre m ninci ve y ye göre de n ninci dereceden bir çokterimliyi göstermek üzere, bu neviden bir tekabül bir

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

denklemiyle gösterilir. Bu takdirde tekabülün birleşik noktaları

$$f(x, x) = 0$$

denklemiyle belirli olur; genel olarak bu denklemin x cinsinden derecesi $m + n$ dir.

Bir düzlemde iki Ox, Oy eksenini ele alalım; (1) denklemi bu düzlemde, x ekseninin sonsuzdaki noktasından n defa, ve y ekseninin sonsuzdaki noktasından da m defa geçen, derecesi $m + n$ olan bir C eğrisini gösterir. Tekabülün birleşik noktaları, C eğrisiyle eksenlerin $x = y$ açıortayının ortak noktalarıdır; o halde bunların sayısı $m + n$ dir, meğer ki $x = y$ doğrusu C eğrisine ait olsun.

Bu son hal, açıkca görüleceği üzere, $x = y$ doğrusunun C eğrisini $m + n$ den daha fazla sayıda kesmesi halinde vârid olur, ve bu takdirde $f(x, y)$ çokterimlisi $x - y$ ile bölünebilen bir çokterimlidir.

Bu noktalar anlaşıldıktan sonra, CHASLES ilkesini şu şekilde ifade edebiliriz:

Bir doğrunun noktaları arasındaki bir (m, n) *tekabülünün ya* $m + n$, *ya da sonsuz birleşik noktası vardır.* Bu sonuncu hal, $m + n$ den fazla birleşik noktanın bilinmesi halinde vârid olur.

Aşağıda CHASLES'in tekabül ilkesinin iki tatbikini veriyoruz:

Önce m ninci dereceden düzlem eğrilerden müteşekkil bir Σ demeti ile n ninci dereceden düzlem eğrilerin meydana getirdiği bir Σ' demetini ele alalım ve bu iki demetin bir izdüşellikle birbirine bağlı olduklarını farzedelim. Her iki demetin homolog eğrilerinde ortak noktaların geometrik yeri olan C eğrisinin derecesini arayalım.

Bir r doğrusunu düşünelim. r nin bir X noktasından Σ nin bir eğrisi geçer; bunun Σ' demetindeki homoloğu olan eğri r doğrusunu n sayıda Y noktasında keser. Bunun tersine, r nin bir Y noktasından Σ' nün bir eğrisi geçer; bu eğrinin Σ daki homoloğu r doğrusunu m sayıda X noktasında keser. Buna göre, X ve Y noktaları arasında bir (m, n) tekabülü vardır. Şurası açıktır ki C nin r ye ait her noktası, bu tekabülün bir birleşik noktasıdır ve bunun karşıtı da doğrudur. Buna göre, bundan önceki parağrafta da farkına vardığımız gibi, C eğrisi $m+n$ ninci derecedendir.

İkinci tatbik, PONCELET tarafından bulunan bir teoremin elde edilmesine yarıyacaktır.

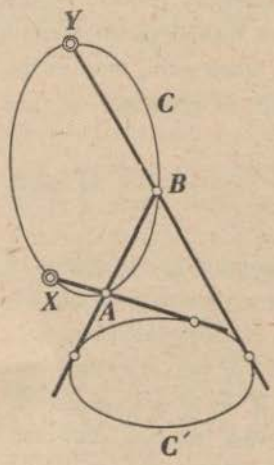
Önce şurasını kaydetmekle işe başlıyalım ki bir doğrunun noktaları arasındaki tekabüller hakkında söylediklerimiz bir koniğin noktaları arasındaki tekabüller için de tekrarlanabilir. Gerçekten, bir C koniğinin noktaları arasında bir (m, n) cebirsel tekabülünü ele alalım. C nin bir noktası R, ve R den geçmiyen bir doğru da r olsun. C koniğinin izini R den itibaren r doğrusu üzerine düşürelim; C nin bir M noktasına, RM doğrusunun r yi kestiği M' noktası tekabül eder; bunun tersine, r nin bir M' noktasına, RM' doğrusunun C yi bir ikinci defa kestiği M noktası tekabül eder. Özel olarak, R noktasına, C nin R deki teğeti ile r nin kesim noktası tekabül eder.

C nin X, Y homolog noktalarına, r üzerinde, bir (m, n) tekabülü ile birbirine bağlı X', Y' noktaları tekabül eder. Bu sonuncu tekabülün bir birleşik noktasına, C üzerinde X, Y nok-

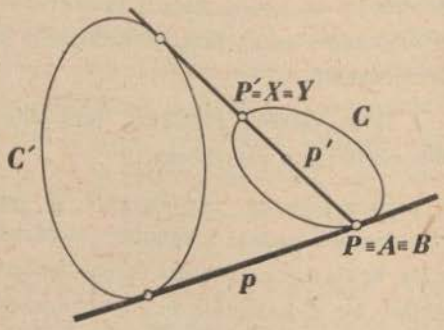
taları arasındaki tekabülün bir birleşik noktası tekabül eder, ve bunun tersi de doğrudur. Dolayısiyle, X, Y noktaları arasındaki tekabülün ya $m+n$, ya da sonsuz birleşik noktası vardır.

Bu noktalar anlaşıldıktan sonra, tepeleri bir C koniği üzerinde bulunan ve kenarları da bir C' koniğine teğet olan üçgenlerin sayısını araştırmak isteğinde bulunalım.

C nin bir X noktasından C' nün bir teğetini geçirelim (*Şek.* 19); bu doğrunun C yi kestiği ikinci A noktasından C' nün ikinci teğetini çizelim; bu doğrunun da C yi kestiği ikinci B noktasından C' nün gene ikinci teğetini geçirelim ve bunun



Şek. 19



Şek. 20

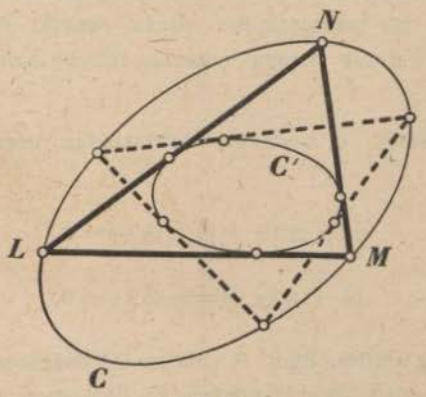
da C yi kestiği ikinci nokta Y olsun. X noktasından C' nün iki teğeti geçtiğine göre, bu X noktasına iki Y noktası tekabül eder. Bunun tersine, bir Y noktasına da iki X noktası tekabül eder.

O halde X, Y noktaları bir (2, 2) tekabülü ile birbirine bağlıdır ve bu tekabülün dört birleşik noktası vardır, yâni soru-

nun karşılığı olarak dört üçgen var gibi görünür. Bu çözümlerin hasolmadıklarını göstereceğiz.

C, C' koniklerinin dört ortak teğeti vardır. Bu teğetlerden biri p (*Şek.* 20), bunun C ye değdiği nokta P, P den C' ye çizilen ikinci teğet p', ve bu sonuncunun da C koniği ile ikinci ortak noktası P' olsun. X noktasının P' ile, ve X den C' ye çizilen teğetin de p' ile çakıştığını farzederek biraz önceki çizimi tekrarlıyalım. A, B noktaları P ile, Y de P' ile, yâni X le çakışır.

O halde tekabülün dört birleşik noktası, hasolmıyan çözümler (yâni bozuk üçgenler) verir. Dolayısıyle genel olarak, tepeleri bir konik üzerinde bulunan, kenarları da başka bir koniğe teğet olan üçgenler yoktur.



Şek. 21

Bir LMN üçgeniyle (*Şek.* 21), bunun tepelerinden geçen bir C koniğini, bir de bunun kenarlarına teğet C' koniğini düşünelim. C koniğinin X, Y noktaları arasında biraz yukarıda tanımlanan tekabülü yeniden ele alırsak, bahsi geçen dört birleşik noktadan başka, üç yeni L, M, N noktasını daha buluruz. Tekabülün dörtten fazla birleşik noktası bulunduğuna göre,

sonsuz birleşik noktası vardır. Böylece PONCELET'nin şu teoremini elde ederiz:

Tepeleri bir konik üzerinde bulunan, kenarları da başka bir koniğe teğet olan bir üçgen varsa, aynı şartları sağlıyan sonsuz üçgen mevcuttur.

48. İhtar. Birçok kereler kaydettiğimiz gibi, CHASLES, STEINER ve genel olarak cebirsel yüzey ve eğrilerle uğraşan geometricilerin kullandıkları düşünceler şekil itibariyle her ne kadar geometrik ise de, aslında cebire dayanılıyor, demektir. Şüphesiz kullanılan usuller üstün derecede verimli çıktılar, denklem şekline sokulması, imkânsız olmasa bile, çok uzun hesapları gerektirecek sorulara bu usuller sayesinde yanaşılabildi. Fakat her an cebir alanından çıkılıp çıkılmadığını tahkik etmek şarttır. HADAMARD'ın bir mekalesinden alınan aşağıki örnek [1] bu tedbirin ihmali halinde ortaya çıkacak tehlike hakkında bir fikir verecektir.

Bir düzlemde, O başlangıç noktasından geçen eşlenik sanal iki

$$(1) \qquad (a + ia')\,x + (b + ib')\,y = 0,$$

$$(2) \qquad (a - ia')\,x + (b - ib')\,y = 0,$$

doğrusunu ele alalım. Eğer P noktası (1) doğrusuna ait ise, bunun eşlenik sanalı olan P' noktası (2) doğrusuna aittir. Şu halde P ve P' noktaları arasında bire-bir bir tekabül vardır. Doğruların ortak O noktası gerçel olduğundan bu tekabülde kendi kendisinin homoloğudur; buna göre bu tekabül bir perspektivitedir ve PP' doğruları sabit bir A noktasından geçerler. Fakat düzlemin gerçel bir doğrusu, (1) ve (2) doğrularını birbirinin eşleniği sa-

[1] *L'Enseignement Scientifique*, 25 aralık 1933.

nal noktalarda keserler, dolayısiyle düzlemin bütün gerçel doğruları A noktasından geçerler.

Bu sonucun saçmalığı şuradan ileri gelir ki P, P' noktaları arasındaki tekabülü bir izdüşellik şeklinde telâkki ettik, halbuki bu tekabül analitik değildir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

GEOMETRİ İLKELERİ

49. Eukleides postulâtının Proklus'den Legendre'a kadar geçirdiği türlü safhalar. Evvelce de gördüğümüz gibi, EUKLEIDES, kendi kurduğu Geometri'ye birçok postulâtlar da koymuş, ve bunlardan bir tanesi, yâni paraleller postulâtı, özellikle EUKLEIDES postulâtı adını almıştır. Bu postulât birçok araştırmalara yer vermiş, bunların da geometrinin gelişmesi, hattâ denilebilir ki Matematiğin tümü üzerine büyük etkileri olmuştur.

Bu araştırmaları çabukca gözden geçirmeden önce, paralellerin tanımını ve EUKLEIDES postulâtının ifadesini hatırlatalım:

Bir doğrunun sınırsız bir şekilde uzatılabileceğini EUKLEIDES postulât olarak kabûl ettikten sonra, sınırsız bir şekilde uzatıldığı halde birbirini hiçbir vakit kesmiyen iki doğruya paralel doğrular adını verir. Bundan sonra, beşinci postulât, ya da EUKLEIDES postulâtı aşağıdaki şekilde ifade olunur:

Başka iki doğruyu kesen bir doğru, bunlarla aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar teşkil ediyorsa, bahis konusu iki doğru, gerektiği takdirde uzatılmak şartiyle, iç açılar toplamının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.

Bu postulâta dayanmak suretiyle EUKLEIDES aşağıdaki özelikleri çıkarır:

a. Bir noktadan, verilen bir doğruya sadece bir tek paralel geçirilebilir.

b. Bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıya eşittir.

c. Verilen bir şeklin benzeri olan şekiller vardır.

Geometriciler önce, yeni bir postulât ithal etmeksizin, EUKLEIDES postulâtını ispat edip bunun kaldırılması çaresini araştırdılar. Bu araştırmaların kısırlığı yavaş yavaş ortaya şu fikrin yayılmasına sebeb oldu ki bir noktadan bir doğruya çizilen paralelin tekliğinin, ve dolayısiyle EUKLEIDES postulâtının kabul edilmediği ve mantık bakımından mümkün görünen geometriler de mevcut olabilir.

Öyle sanılıyor ki EUKLEIDES'ın elemanlarını yorumlıyan eski yunan geometricisi PROKLOS (410-485) bahis konusu postulâtı ispat etmeğe çalışan ilk insan olmuştur. Bundan sonra türk geometricisi TUS'lu NÂSIRÜDDİN'in (1201-1274) denemelerine rastlanır.

1600 yılları civarında CATALDI, ve daha sonraları GIORDANO VITALE (1633-1711), verilen bir doğrunun aynı tarafında bulunan ve bu doğrudan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yerini ele alarak postulâtı ispat etmek teşebbüsünde bulundular; her ikisi de bu geometrik yerin bir doğrudan ibaret bulunduğunu zımnen kabul ediyorlardı.

Verilen bir üçgenin keyfî büyüklükte benzeri bir üçgenin varlığı kabul edildiği takdirde EUKLEIDES postulâtının ispat olunabileceğini WALLIS (1616-1703) gösterdi.

İtalyan jezviti GEROLAMO SACCHERI (1667-1733) inin eseri de bu yolda yeni bir ufuk açar. SACCHERI, AD ve BC kenarları birbirine eşit ve AB tabanına dik olan bir $ABCD$ dörtgenini ele alır, ve C ve D deki iki açının da dik, dar veya geniş olmaları haline tekabül etmek üzere üç hipotez yürütür. Birinci halde, bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıdır ve bundan da EUKLEIDES postulâtı çıkarılır. İkinci halde, bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıdan küçüktür; üçüncü halde ise, aynı toplam iki dik açı-

dan büyüktür. Fakat bu sonuncu sonuç, bir doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceği vakıasiyle çelişme halindedir.

SACCHERI önemli bir görüşü de yazılarına ekler: Eğer bir tek üçgende açıların toplamı iki dik açıya eşitse, bütün üçgenler için aynı hal vârid olur.

Mantık kurallarına göre geliştirilen ve bir üçgenin açıları toplamının iki dik açıdan küçük olduğu bir geometrinin var olabileceğini ilk anlıyanın SACCHERI olması muhtemeldir.

SACCHERI'den sonra, İsviçreli geometrici LAMBERT (1728-1777) üç açısı dik olan bir dörtgeni ele alır ve dördüncü açının dik, dar ya da geniş olması hallerini gözden geçirir. O da SACCHERI'nin bulduğu sonuçlara ulaşır.

Fransız geometricilerinden LAGRANGE (1736-1813), LAPLACE (1749-1827), LEGENDRE (1752-1833), LAZARE CARNOT (1753-1823), FOURIER (1768-1830) de EUKLEIDES postulâtiyle uğraşmışlardır. LEGENDRE'ın bu konu ile ilgili çalışmaları çok önemlidir.

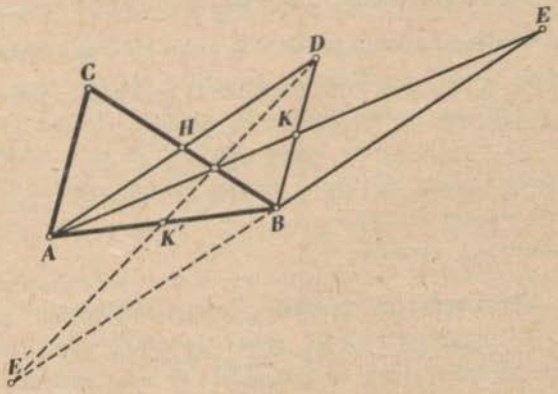
LEGENDRE bilhassa, EUKLEIDES postulâtını kullanmadan bir üçgenin açıları toplamının iki dik açıdan küçük veya iki dik açıya eşit olduğunu ispat eder. Onun bu ispatını aynen alacağız; bu da önemli bir noktaya parmak basmamıza yol açacaktır:

Bir ABC üçgenini ele alalım ve farzedelim ki bunun açıları toplamı 2 dik açı $+ a$ olsun (*Şek.* 22). A yı BC nin H orta noktasına birleştirelim ve bu doğru parçasını $HD = AH$ uzunluğu kadar uzatalım.

AHC, DHB üçgenleri birbirine eşittir ve dolayısiyle $\widehat{CAH}$ ve $\widehat{HDB}$ açıları birbirine eşit olduğu gibi, $\widehat{ACH}$ ve $\widehat{HBD}$ açıları için de aynı şey söylenebilir. Buradan da ABD üçgeninin açıları toplamının da 2 dikaçı $+ a$ ya eşit olduğu sonucu çıkarılır.

$\widehat{DAB}$, $\widehat{ADB}$ açılarının biri en fazla $\widehat{BAC}$ açısının yarısına

eşittir. Bunun $\widehat{DAB}$ açısı için vârid olduğunu farzedelim. BD kenarının orta noktası K olsun; AK doğru parçasını $KE = AK$ uzunluğu kadar uzatalım. ABE üçgeninin açıları toplamı



Şek. 22

2 dik açı $+ a$ dır ve $\widehat{EAB}$, $\widehat{AEB}$ açılarından birisi en fazla $\widehat{DAB}$ açısının yarısına, yâni $\widehat{BAC}$ açısının dörtte birine eşittir.

$\widehat{BAC}$ açısının en fazla yarısına eşit olan açı $\widehat{ADB}$ ise, AB nin K' orta noktasını D ye birleştirip bu doğruyu K' den itibaren $K'E' = DK'$ uzunluğu kadar uzatırız. BDE' üçgenin açıları toplamı 2 dik açı $+ a$ dır ve $\widehat{BDE'}$, $\widehat{BE'D}$ açılarından biri en fazla $\widehat{BAC}$ açısının dörtte birine eşittir.

Bu çizime devam etmekle, n sayıda işlemden sonra, açılarının toplamı 2 dikaçı $+ a$ olan ve açılarından biri en fazla $(\frac{1}{2})^n \widehat{BAC}$ açısına eşit bulunan bir üçgene varılacağı görülür.

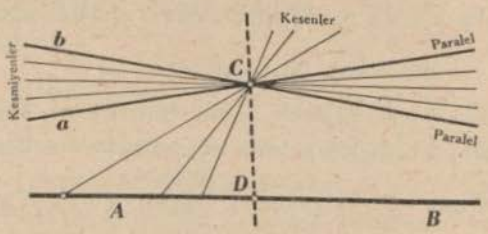
$$(\tfrac{1}{2})^n \widehat{BAC} < a$$

olacak şekilde n yi yeter derecede büyük seçelim. Bu suretle elde olunacak sonuncu üçgenin, toplamı 2 dik açıdan büyük iki açısı bulunacaktır ki bu da saçma bir sonuçtur. O halde görülüyor ki bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıya eşittir.

Bu ispatta, LEGENDRE, bir doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceğini zımnen kabül eder; gerçekten, çizdiği üçgenler dizisinde B açıları karşısındaki kenarlar gidgide büyür. Buna göre, LEGENDRE'ın ispatından şu sonuç çıkarılabilir ki EUKLEIDES tarafından ifade olunan *«bir doğru sınırsız olarak uzatılabilir»* postulatı, tabii olarak, *«bir üçgenin açıları toplamı en çok iki dik açıya eşittir»* sonucuna vardırır.

50. Lobaçevski geometrisi. Rus geometricisi LOBAÇEVSKI (1793-1856) Pangeometri ya da Sanal Geometri adı altında, bugün kendi ismini taşıyan bir geometri vucuda getirdi; bu geogeometride LOBAÇEVSKI, bir düzlemde bir noktadan bir doğruya paralel olarak geçirilen iki doğrunun varlığını kabul eder. Gerçekte, böyle bir geometrinin farkına, onu anti-öklid ya da öklid-dışı şeklinde adlandıran GAUSS (1777-1856), SCHWEIKART (1780-1857), TAURINUS (1794-1874) ve bir az daha sonraları J. BOLYAI (1802-1860) de varmışlardı.

Bir AB doğrusu ile buna ait olmıyan bir C noktasını ele alalım (*Şek.* 23) LOBAÇEVSKI, ABC düzleminde bulunan ve C den geçen doğrular arasında AB ye rastlıyan ve *kesen* adını verdik-



Şek. 23

leriyle AB ye rastlamıyan ve *kesmiyen* adını verdiklerini ayırd eder.

Kesenler topluğunu kesmiyenler topluluğundan, C den AB ye indirilen CD dikmesine göre simetrik iki a, b doğrusu ayırır. a, b doğrularına, C den AB doğrusuna çizilen *paraleller* denilir.

a, b doğrularından her birinin CD dikmesiyle teşkil ettiği daraçıya *paralellik açısı* denilir. Bu açı, C nin AB den a uzaklığının bir $\pi(a)$ fonksiyonudur. a nın sıfıra yaklaşması halinde, $\pi(a)$ açısı bir dik açıya yaklaşır, ve a sınırsız olarak büyüdüğü takdirde, $\pi(a)$ açısı da sıfıra yaklaşır.

D noktasından a, b doğrularından her birine iki paralel geçirilebilir; bu parallerden birisi, her iki hal için de AB dir.

Bir üçüncü doğruya paralel olan ve kesişmiyen iki doğru birbirine paraleldir.

Bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıdan daima küçüktür.

Eukleides geometrisinde bir düzlemde bulunan doğrular iki türlü demet meydana getirirler: Bir noktadan geçen doğrulardan teşekkül eden demetler (has demetler); bir de paralel doğrulardan vücuda gelen demetler (has olmıyan demetler). Lobaçevski geometrisinde bunların dışında üçüncü bir kategori daha vardır: Aynı bir doğruya dik doğrularla elde olunan demetler. Bu üç türlü doğru demetinin ele alınmasiyle, klâsik geometrideki çemberi andıran üç eğri kategorisine varılmış olur.

Üç A, B, C noktasını ele alalım ve BC, CA, AB doğru parçalarını taşıyan doğrulara bu doğru parçalarının orta noktalarından çıkılan dikmeleri sırasiyle a, b, c ile gösterelim.

Klâsik geometride a, b, c doğruları ya aynı bir O noktasında kesişirler, ya da birbirlerine paraleldirler. İlk halde, bahis konusu A, B, C noktaları, merkezi bu dikmelerin ortak O noktası ve yarıçapı da OA olan çembere aittirler; ikinci halde ise A, B, C noktaları aynı bir doğru üzerinde bulunurlar.

Şimdi LOBAÇEVSKI geometrisini uyguladığımızı farzedelim. Bu takdirde a, b, c doğruları ya bir O noktasında kesişirler, ya birbirlerine paraleldirler, ya da aynı bir m doğrusuna diktirler.

Birinci halde A, B, C noktaları O dan eşit uzaklıktadırlar ve O dan OA uzaklığındaki noktaların geometrik yeri olan eğriye aittirler. Bu eğriye *daire* veya *andosikl* denilir.

İkinci halde, LOBAÇEVSKI'nin varlığını ispat ettiği *horisikl* denilen bir eğriye aittirler; bu eğri şu özeliği haizdir: Bu eğrinin herhangi bir kirişinin orta noktasından çıkılan dikme sabit bir doğruya paraleldir.

Üçüncü halde, bahis konusu A, B, C noktaları m doğrusundan esit uzaklıkta bulunurlar ve doğrudan sabit bir uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olan eğriye aittirler. Bu eğriye de *hipersikl* veya *egzosikl* denilir.

51. Poincaré'nin Lobaçevski geometrisi modeli. HENRI POINCARÉ (1854-1912) FUCHS fonksiyonları ile ilgi unutulmaz araştırmalarını yaptığı sırada yepyeni bir geometri ile karşılaşmıştır ki bu da, yazış tarzını değiştirmek suretiyle, LOBAÇEVSKI geometrisine irca olunabilir[1]).

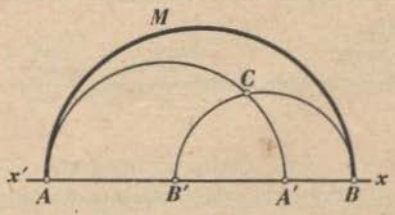
Tanınmış geometrici, düzlemin verilmiş bir $x'x$ doğrusunun aynı tarafında bulunan kısmını, ve bu kısımda merkezleri $x'x$ doğrusu üzerinde bulunan yarım-çemberleri ele alır. (*Şek.* 24).

Bu yarım çemberlerden biri olan AMB yi ve bunun üzerinde bulunmıyan bir C noktasını düşünelim. C noktasından, AMB yi $x'x$ doğrusu üzerinde kesen iki ACA', BCB' yarım-çemberi geçer. C den geçen yarım-çemberler iki sınıfta toplanabilir: AMB yi kesenler ve AMB yi kesmiyenler. Bunlar da ACA', BCB' yarım-çemberleriyle ayrılırlar.

---

[1]) Oeuvres de Henri Poincaré, PARIS (1916) adlı eserin II nci cildine bakınız.

Bu nokta anlaşıldıktan sonra, POINCARÉ şurasını kaydeder ki bahis konusu yarım-çemberlere doğru ve $x'x$ doğrusunun bir noktasında kesişen iki yarım-çembere de paralel doğrular demeği uygun görürsek, tam mânasiyle LOBAÇEVSKI geometrisini elde ederiz.



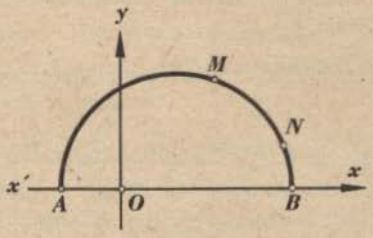
Şek. 24

Bu çizimi tamamlamak amaciyle, POINCARÉ iki nokta arasındaki uzaklığı, bir eğri yayının uzunluğunu ve bir yüzey parçasının alan ölçüsünü tanımlar.

İki nokta arasındaki uzaklığın neden ibaret olduğunu bildirelim. Şekli, birincisi $x'x$ doğrusu ile çakışan iki dik Ox, Oy eksenine nispet edelim. (*Şek.* 25). Sanal

$$z = x + iy$$

sayısı, z nin *afiks* i denilen ve koordinatları x, y olan nokta ile gösterilecektir. Ox ekseninin üst tarafında bulunan yarım-düz-



Şek. 25

lemin M ve N noktaları, sırasiyle m ve n sanal sayılarının afiksleri olsun. M ve N noktalarından, merkezi Ox üzerinde bulunan bir yarım-çember, yâni bir LOBAÇEVSKI doğrusu geçer. Bu yarım-çember Ox i, apsislerini a, b ile göstereceğimiz iki A, B noktasında keser. M, N noktaları arasındaki uzaklık, tanım gereğince, m, n, a, b sayılarının harmonisiz oranının neper logaritmasından, yâni

$$MN \text{ uzaklığı} = \log_e \frac{m-a}{m-b} : \frac{n-a}{n-b}$$

den ibarettir.

POINCARÉ, bu tanımın, araştırmalarında kendisine pek büyük faydası dokunduğunu da ilâve eder. Gerçekten, bu yolla, LOBAÇEVSKI geometrisi, EUKLEIDES geometrisinin bir bölümüne irca edilmiş olur. Dolayısiyle, EUKLEIDES geometrisinin gelişmeleri nasıl hiçbir çelişmeye sebep olmuyorsa, LOBAÇEVSKI geometrisinin ilerlemeleri de böyle bir hale meydan veremez.

52. Riemann geometrisi. EUKLEIDES postulatı hakkında, önceden üç hipotez ileriye sürülebilir.

Bir düzlemde bir a doğrusu ile buna ait olmıyan bir A noktası verildiği takdirde :

1. A noktasından a yı kesmemek üzere bir ve yalnız bir doğru geçirilebilir (EUKLEIDES).

2. A noktasından a yı kesmemek üzere sonsuz doğru geçirilebilir (LOBAÇEVSKI).

3. A noktasından a yı kesmemek üzere hiçbir doğru geçirilemez.

Fakat evvelce gördüğümüz gibi, doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceği kabul olunduğu takdirde, bu sonuncu hipotezin bir tarafa atılması gerekir. Başka deyimle, üçüncü hipotez kabul edildiği takdirde, doğrunun da sonlu bir uzunluğu olduğunu ka-

bul etmek gerekir. İşte RIEMANN (1826-1866) da bu hipotezi ileri sürmüştür.

RIEMANN geometrisinde, paraleller kavramı yoktur, ve doğrunun sonlu bir uzunluğu vardır, yâni doğru bir nevi kapalı bir eğridir. Bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıdan daima büyüktür.

Buketin EUKLEIDES anlamındaki geometrisini uygun tarzda yorumlamak suretiyle RIEMANN geometrisine somut bir şekil verilebilir.

Verilen bir O noktasından geçen doğru ve düzlemler topluluğunu ele alalım ve aşağıki «sözlük» yardımiyle bu topluluğu itibarî olarak bir düzlem şeklinde yorumlayalım :

O merkezli buket	*İdeal düzlem.*
O dan geçen doğru,	*Nokta.*
O dan geçen düzlem,	*Doğru.*
İki doğru arasındaki açı,	*İki nokta arasındaki uzaklık.*
İki yüzlü açı,	*İki doğru arasındaki açı.*
Üçyüzlü,	*Üçgen.*

Bu ideal düzlemde, bir üçgenin açıları toplamı iki dik açıdan büyüktür, zira bir üçyüzlünün ikiyüzlü açıları toplamının bu özeliği vardır.

O dan geçen bir düzleme dik olan ve gene O dan geçen düzlemlerin ilk düzleme O da dik olan ortak bir doğruları vardır. Bu özelik gösterir ki RIEMANN geometrisinde bir doğrunun dikmeleri aynı bir noktadan geçerler.

Yukarıki yorum, RIEMANN geometrisinin mantık yönünden olabilirliğini gösterir. Bu geometrinin gelişmesinin çelişmeleri gerektirmeyiceğinden emin olabiliriz, zira yazış tarzlarında yapılacak bir değişimle, bu geometri EUKLEIDES'inkine irca olunabi-

lir. Fakat bu keyfiyet, RIEMANN geometrisinin «fizik» olabilirliğini ispata hiçbir vakit yetmez.

53. Eukleides geometrisinin postulâtları. EUKLEIDES anlamı dışındaki geometrilerin inşası ve geometrinin ilkeleri üzerinde yapılan araştırmalar, EUKLIEDES anlamındaki geometrinin mantıkî bir analizini ve bunun dayandığı postulâtların birer birer sayımını gerektirdi. Bu da, geçen yüzyılın sonlarında, aralarından H. POINCARÉ, D. HILBERT (1862-1943), F. ENRIQUES (1871-1946) gibilerinin zikredilmesi uygun düşen geometricilerin eseri oldu.

Grundlagen der Geometrie (LEIPZIG 1899) adlı eserinde D. HILBERT, EUKLEIDES anlamındaki geometrinin postulâtlarını birer birer saydı ve *ortaklık*, *doğulum*, *paralellik*, *eşitlik* ve *süreklilik* kavramlarına tekabul etmek üzere bunları beş guruba ayırdı.

HILBERT derki üç çeşit varlık tasavvur edelim:

Birinci çeşit varlıklara *nokta*, ikinci çeşitten olanlara *doğru*, nihayet üçüncü çeşitden varlıklara da *düzlem* diyelim. Bu varlıklar arasında geometrinin protulâtlarıyla ifadelendirilen birtakım bağıntılar vardır.

Ortaklık Aksiyomları.

I. Farklı iki nokta daima bir doğru belirtir.

II. Bir doğrunun farklı her hangi iki noktası bu doğruyu belirler, ve her doğru üzerinde hiç olmazsa farklı iki nokta vardır.

III. Aynı bir doğru ezerinde bulunmıyan üç nokta, daima bir düzlem belirler.

IV. Bir düzlemin aynı bir doğru üzerinde bulunmıyan farklı herhangi üç noktası bu düzlemi belirler.

V. Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlem üzerinde ise, bu doğrunun her noktası için aynı hal vârid olur.

VI. İki düzlemin ortak bir noktası varsa, bunların hiç olmazsa ikinci bir ortak noktaları daha vardır.

VII. Her düzlemde, aynı bir doğru üzerinde bulunmıyan hiç olmazsa üç nokta, uzayda da aynı bir düzlem üzerinde bulunmıyan hiç olmazsa dört nokta vardır.

Dağılım Aksiyomları.

I. Eğer A, B, C aynı bir doğru üzerinde bulunan üç nokta ise, ve eğer B noktası A ile C arasında ise, aynı zamanda C ile A arasındadır.

II. Eğer A ve C bir doğrunun iki noktası ise, bu doğrunun A ve C arasında bulunan hiç olmazsa bir B noktası olduğu gibi, hiç olmazsa öyle bir D noktası vardır ki C noktası A ve D arasında bulunsun.

III. Bir doğru üzerinde bulunan üç nokta arasında daima öyle bir ve yalnız bir tanesi vardır ki diğer ikisi arasında bulunsun.

IV. Bir doğru üzerinde bulunan herhangi dört A, B, C, D noktası daima o şekilde dağıtılabilir ki B noktası hem A ve C, hem de A ve D arasında bulunsun, ve C de hem A ve D, hem de B ve D arasında olsun.

V. A, B, C aynı bir doğru üzerinde bulunmıyan üç nokta, a da bu noktaların hiç birinden geçmiyen ve ABC düzlemine ait olan bir doğru olsun. Eğer a doğrusu AB doğru parçasının bir noktasından geçerse, daima ya AC doğru parçasının, ya da BC doğru parçasının bir noktasından geçer.

Paraleller Aksiyomu.

I. Bir düzlemde, bir a doğrusu dışında alınan bir A noktasından, a yı kesmemek üzere daima bir ve yalnız bir doğru geçirilebilir; bu doğruya, a ya A noktasından geçirilen *paralel* adı verilir.

Eşitlik (veya denklik) Aksiyomları.

I. Eğer AB bir doğru parçası ise, ve A' de bir a' doğrusunun bir noktası ise, a' üzerinde ve A' nün aynı bir tarafında olmak üzere daima öyle bir ve yalnız bir B' noktası bulunabilir ki $A'B'$ doğru parçası, AB doğru parçasının dengi (eşiti) olsun. Her doğru parçası kendi kendisinin dengidir.

AB doğru parçası BA doğru parçasına daima denktir.

II. Aynı bir üçüncü doğru parçasının dengi olan iki doğru parçası birbirine denktir.

III. A, B, C noktaları bir a doğrusunun öyle üç noktası olsun ki AB ve BC doğru parçalarının ortak noktası sadece B ucundan ibaret bulunsun. A', B', C' noktaları da bir a' doğrusunun aynı şartı haiz üç noktası olsun. Eğer AB, $A'B'$ denkse, ve BC ile $B'C'$ de denkse, bu takdirde AC ve $A'C'$ daima birbirinin dengidir.

IV. Bir α düzleminde h, k yarım-doğruları ile belirli olan bir açı (h, k) ve bir α' düzleminin bir doğrusu da a' olsun. a' üzerinde bir O' noktasını ve bir h' yarım doğrusuna seçelim. α' düzleminde ve a' doğrusunun aynı bir tarafında olmak üzere daima O' den geçen bir ve yalnız bir öyle bir k' yarım-doğrusu seçilebilir ki (h', k') açısı (h, k) açısına denk olsun.

Her açı kendi kendisine denktir.

(h, k) açısı daima (k, h) açısına denktir.

V. Aynı üçüncü bir açının dengi olan iki açı birbirine denktir.

VI. Eğer iki ABC, $A'B'C'$ üçgeninde AB, AC doğru parçaları sırasiyle $A'B'$, $A'C'$ doğru parçalarına denkse, ve eğer BAC, $B'A'C'$ açıları da birbirinin dengi ise, bu takdirde ABC, ACB açıları sırasiyle $A'B'C'$, $A'C'B'$ açılarına denktir.

Süreklilik Aksiyomu veya Arkhidemes postulâtı.

I. Bir doğru üzerinde iki nokta A, B ve bunlar arasında bir nokta da A_1 olsun. Öyle A_2, A_3, ... noktalarını inşa edelim ki A_1 noktası A ile A_2, A_2 noktası A_1 ile A_3, ... arasında bulunsun ve üstelik AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... doğru parçaları birbirlerine denk olsunlar. Bu takdirde, B noktası A ile A_n arasında bulunacak şekilde bir A_n noktası mevcut olacaktır.

Bu aksiyoma HILBERT *Bütünlük Aksiyomunu* katmıştır: Noktalar, doğrular ve düzlemlerden meydana gelen sisteme, başka varlıkları katmak suretiyle elde olunacak genelleşmiş sistemin, bundan önceki aksiyomların gerçeklendiği, yeni bir geometri teşkil etmesi imkânsızdır.

İkinci guruba giren aksiyomlar doğruların yönlenmesini, ve açıların bahse konu oldukları vakit de yarım doğrulardan söz açılmasını sağlarlar. Denkliğe gelince, bu da birbiri üzerine koymak suretiyle eşitlikten, yâni tam mânasiyle EUKLEIDES'in ele aldığından (VII nci aksiyom, sahife 7) başka bir şey değildir.

54. Postulâtların bağdaşabilirlik ve bağımsızlığı. Noktalar, doğrular ve düzlemler arasında, keyfi olarak postulât şeklinde seçilen bir takım bağıntılar kurmak suretiyle bir geometrinin inşası açıkça daima mümkün değildir. Bu postulâtların bağdaşabilirliği, yâni bu geometrinin mantık çerçevesinde vâki olacak gelişmesinin çelişmelere sebeb olmaması şarttır.

EUKLEIEDES geometrisinin postulâtlarını bir bir saydıkdan sonra HILBERT gereken dikkati esirgemiyerek bunların bağdaşa-

bildiklerini ispat etti. Bu amaçla, bütün bu postulâtların gerçeklendiği bir analitik geometri kurdu.

Öte yandan, bir geometrinin postulâtlarının bağdaşabildikleri ispat edildikten sonra, ayrıca bunların bağımsız oldukları, yâni bunlardan hiçbirisinin ötekilerinden çıkarılamıyacağı da gösterilmelidir. Bu maksatla, içlerinden bir tanesi müstesna, bütün postulâtların gerçeklendiği geometriler inşa olunur. Nitekim, ARKHIMEDES postulâtının, daha önceki postulâtların bir neticesi olmadığını göstermek amaciyle, HILBERT, ARKHIMEDES postulâtının gerçeklenmediği bir ARKHIMEDES anlamı dışında geometri kurdu. Esasen VERONESE (1854-1917) bu yolda kendisinden daha önce davranmıştı.

Bununla beraber, bir geometrinin postulâtları arasında belirli bir bağlılık da bulunabilir, şu anlamda ki bunların bazıları, diğerleri de zorunlu olarak bir değişikliğe uğramadan, tadil edilemezler. Böylece, bir doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceği postulâtını bir tarafa bırakmadan, paralellerin varolmadığını kabul etmek suretiyle, EUKLEIDES postulâtı red edilemez.

Geometrinin ilkeleri münasebetiyle bahis konusu olacak başka bir problem de şudur: Bir teorem verildiği takdirde, bunu ispat etmek için gereken postulâtlar hangileridir? Bu hususta, teferruata girişmeksizin, sadece işaret etmekle yetineceğimiz tipik bir örnek, DESARGUES'in homolojik üçgenlere dair teoremidir.

HILBERT aşağıdaki teoremin, ancak denklik postulâtları kabul edildiği takdirde, düzlem geometride ispat olunabileceğini gösterdi: *AA', BB', CC' doğruları bir noktada kesişecek şekilde iki ABC, A'B'C' üçgeni verildiği takdirde, BC ve B'C', CA ve C'A', AB ve A'B' karşı kenar çiftleri aynı bir doğru üzerinde bulunan üç noktada kesişirler.* Başka deyimle, denklik postulâtlarını kullanmadan DESARGUES teoremini ispat etmek için, uzay geometrisini kullanmak gerekir. Bunu ispat etmek için HILBERT, ne denklik postulâtlarının ne de DESARGUES teoreminin doğru olmadığı bir düzlem geometri inşa etti.

55. Arkhimedes postulâtı ve doğru parçalarının ölçümü. Her doğru parçasına bununla temamiyle belirli olan bir (rasyonel veya irrasyonel) gerçel sayı tekabül ettirilebildiği takdirde, doğru parçalarının ölçümünden bahsedilebilir. Fakat geometride ve bilhassa analitik geometride bunun karşıtı da, yâni her gerçel sayının bir doğru parçasının ölçümü olması da istenir.

ARKHIMEDES postulâtı yardımiyle dolaysız önerme ithal olunabilir ama, karşıt önerme için aynı şey söylenemez. Bunu yapabilmek için de ikinci bir postulâtın, meselâ HILBERT'in bütünlük postulâtının ithali şarttır.

Fakat bütünlük postulâtı yerine, GEORG CANTOR (1845-1918) un süreklilik postulâtı da ithal olunabilir:

Bir OM doğru parçası üzerinde:

1. OA_1, OA_2, ... *doğru parçaları daima büyümektedir;*

2. OA'_1, OA'_2, ... *doğru parçaları daima küçülmektedir;*

3. $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... *doğru parçaları o şekilde küçülmektedir ki* A_nA_n' *doğru parçasının önceden verilmiş bir doğru parçasından küçük olmasını sağlıyan bir n sayısı daima bulunabilir;*

Şartlarını sağlıyacak şekilde iki sonsuz OA_1, OA_2, ... *ve* OA'_1, OA'_2, ... *doğru parçalarından müteşekkil dizi varsa, bu takdirde OX doğru parçası birinci dizinin bütün doğru parçalarından büyük, ve ikinci dizinin bütün doğru parçalarından da küçük olacak şekilde, bir X noktası mevcuttur.*

Öte yandan, DEDEKIND (1831-1916) bir süreklilik postulâtının ifadesini verdi, ki bu geometrik bir şekle de sokulabilir.

Bir OM doğru parçasına ait noktaların aşağıdaki şartları sağlıyacak şekilde iki sınıfa ayrılabildiğini farzedelim:

1. *Doğru parçasının her noktası sınıflardan birine aittir.*

2. *O noktası birinci sınıfa, M noktası da ikinci sınıfa aittir.*

3. *Birinci sınıfın herhangi bir noktası daima, başlangıcı O ve ucu da ikinci sınıfın bir noktasından ibaret bulunan bir doğru parçasına aittir.*

Bu takdirde öyle bir ve yalnız bir X noktası vardır ki OX doğru parçasının her noktası birinci sınıfa, XM doğru parçasının bütün noktaları da ikinci sınıfa aittir.

Denklik ve DEDEKIND postulâtları kabul edildiği takdirde ispat edilebilir ki bunlardan ARKHIMEDES postulâtı ve yönlü bir doğrunun parçalariyle gerçel sayılar arasında bire-bir bir tekabülün varlığı çıkarılabilir.

Buna karşılık, VERONESE gösterdi ki, aynı şartlar altında CANTOR postulâtı, ARKHIMEDES postulâtının yerini tutamaz; bu iki postulât bağımsızdır.

56. İzdüşel geometrinin postulâtları. Evvelce de kaydettiğimiz gibi, İzdüşel Geometri'de sadece geometrik şekillerin konumlariyle ilgili, yâni doğru parçalarının veya açıların ölçümünü bahis konusu etmiyen önermeler vardır. Fakat şu noktaya da dikkati çektik ki İzdüşel Geometri'deki önermelerin çoğu, başlangıçta metrik bağıntıların ithali suretiyle bahis konusu edilmişti. Nitekim, DESARGUES'ın involusyon bağıntısı, bir doğruya ait noktalar arasındaki harmonik dörtlü gibi kavramlar, doğru parçalarının ölçümlerini ithal etmek suretiyle bahis konusu edilmişlerdir. Ancak çok sonraları bu özeliklerin izdüşel mahiyyetinin farkına varılabilmiştir.

İzdüşel Geometri'yi her türlü metrik kavramlardan temizliyerek, ilk defa kurmaya çalışan VON STAUDT olmuştur. VON STAUDT amacına temamiyle erişemedi ama, ondan sonra gelip bu alanda emek harcayanlar bu hususta daha mutlu çıktılar. Bugün, uzayın sezgiye dayanan konum özeliklerini yansıtan ve İzdüşel Geometri'yi anlatmak için temel vazifesini gören birçok postulât sistemleri bilinmektedir.

F. ENRIQUES tarafından ortaya atılan ve bizce akla en yakın olan postulât sistemini aşağıya aynen alıyoruz.

Aralarında aşağıdaki bağıntılar bulunan ve noktalar, doğrular ve düzlemlerden ibaret üç türlü eleman düşünelim :

I. *İki nokta, kendilerinin de ait oldukları, bir doğruyu belirtir.*

II. *Aynı bir doğruya ait olmıyan üç nokta, kendilerinin de ait bulundukları bir düzlemi belirtir.*

III. *Bir nokta ile bu noktadan geçmiyen bir doğru, bunları ihtiva eden bir düzlem belirtirler.*

IV. *İki düzlem, kendilerine ait olan, bir doğru belirler.*

V. *Aynı bir doğrudan geçmiyen üç düzlem, kendilerine ait olan bir nokta belirler.*

Bu altı postulâttan başka, İzdüşel Geometri'deki birinci cinsten formlarla (yâni doğrusal nokta cümleleri, ışın demetleri, düzlem demetleri ile) ilgili üç ayrı postulât daha ithal edeceğiz. Önce ifadelerini vereceğimiz bu postulâtları sonra irdeleyeceğiz.

Bu postulâtlardan ilk ikisi dolanım yönleriyle ilgilidir.

VII. *Birinci cinsten bir formda bir O elemanı tespit edildiğine göre, bu formun elemanları o şekilde sıralanabilir ki O her elemandan önce gelsin. Bu sıralamada, formun her elemanı daima başka birinden önce gelir ve formun, A nın B den önce geldiği iki A, B elemanı arasında daima A dan sonra ve B den evvel gelen bir elemanı vardır.*

VIII. *Birinci cinsten bir formda, birbirinin karşıtı ve temamiyle belirli iki dolanım yönü vardır, ve eğer bir form bir diğerinden izdüşüm veya kesimle elde ediliyorsa, birinin üzerindeki bir dolanım yönüne diğerinin üzerinde temamiyle belirli olan bir dolanım yönü tekabül eder.*

Sonuncu postulât, DEDEKIND'in süreklilik postulâtının izdüşel dile çevrilmesinden ibarettir :

IX. *Eğer AB, birinci cinsten sıralanmış bir formun bir doğru parçası ise, ve bu doğru parçası iki kısma bölünürse, o şekilde ki*

1. *AB doğru parçasının her elemanı kısımlardan birine ait olsun.*

2. *A birinci kısma, B de ikinci kısma ait bulunsun.*

3. *Birinci kısmın herhangi bir elemanı, ikinci kısmın herhangi bir elemanından önce gelsin.*

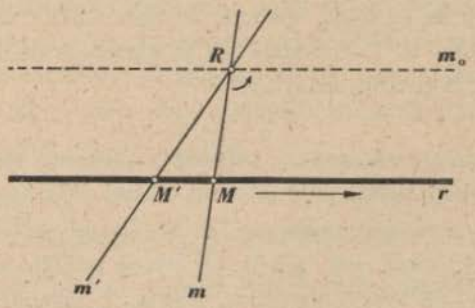
Bu takdirde AB doğru parçasının, (kısımlardan herhangi birine ait olabilen) öyle bir C elemanı vardır ki AB nin C den önce gelen her elemanı birinci kısma, ve C den sonra gelen her elemanı da ikinci kısma aittir.

Bahsini ettiğimiz dokuz postulât yardımiyle İzdüşel Geometri temamiyle kurulabilir.

57. Birinci cinsten formlarda dolanım yönü. Bir doğrusal nokta cümlesini bir nokta farklı iki yönde çizilebilir. Bunun gibi, bir ışınlar demetine ait bir doğru, demetin tepesi etrafında farklı iki yönde dönebilir. Bir demetin bir düzlemi de, demetin ekseni olan doğru etrafında farklı iki yönde dönebilir. Üstelik, eğer bu formlardan ikisi, birbirinin kesimi veya izdüşümü ise, birincideki bir dolanım yönüne, ikincinin temamiyle belirli bir dolanım yönü tekabül eder. İşte VII ve VIII inci postulâtların ifade etmek istedikleri şey de sezgiye dayanan bu özeliklerdir.

Burada önemli bir noktaya dokunmak yerinde olur. Doğrusal bir r nokta cümlesi ile buna ait olmıyan bir R noktasını ele alalım. (*Şek.* 26). r nin temamiyle belirli bir yönde, meselâ soldan sağa doğru, bir M noktası tarafından çizildiğini farzedelim. $m = RM$ doğrusu, R tepeli ışın demetini belirli yönde meydana getirir. Bir an gelir ki Rm ışını, r ye paralel Rm_0 durumunu alır. Rm doğrusu hareketine aynı yönde devam ederek, daha sonrala-

rı Rm' durumunu alacak, ve M noktası da, başlangıçta hareket edilen M mevkinin solunda bir M' noktasına gelecektir. VII ve VIII postulâtlarına göre, doğrusal bir nokta cümlesini belirli bir yönde dolanan bir nokta, sonunda harekete başladığı noktaya



Şek. 26

döner. Başka deyimle, bu postulâtlar, sonsuzda noktalar kavramını İzdüşel Geometriye soktukları gibi, izdüşel doğrunun bir nevi kapalı eğri gibi ele alınmasını gerektirirler.

Bundan da şu sonuç çıkar ki bir doğrusal nokta cümlesinin iki A, B noktası alındığı takdirde, bu noktalar iki izdüşel doğru parçasını belirtirler, o şekilde ki: bir nokta A dan B ye giderek doğrusal nokta cümlesi üzerinde iki ayrı dolanım yönüne göre dolandığı vakit bu iki izdüşel doğru parçasını çizer.

VII ve VIII inci postulâtlar yardımiyle bahis konusu edilebilecek başka bir önemli kavram da birinci cinsten dört elemanla teşkil olunacak guruplarla ilgilidir. Örneğin, bir doğrusal nokta cümlesinin, bunun üzerindeki belirli bir dolanım yönünde, birbirinin ardından gelen dört A, B, C, D noktasını ele alalım. Bunları ikişer ikişer çiftler halinde üç türlü ayırabiliriz: AB ve CD, AC ve BD, AD ve BC. Birinci ve üçüncü halde, bir çiftin noktalarıyle belirli olan doğru parçalarından her biri, çiftin diğer doğru parçasının iki ucunu ya ihtiva etmez, ya da eder. Bunun tersine, ikinci halde, çiftin noktalarıyle belirli olan doğru par-

çalarından biri, öteki doğru parçasının uçlarından birini ihtiva eder. Buna göre AB ile CD çiftinin, ya da AD ile BC çiftininin birbirlerini *ayırmadıkları*, buna mukabil AC ile BD çiftinin birbirini *ayırdığı* söylenir.

Buradan da şu sonuç çıkarılır ki eğer $ABCD$ dörtlüsü harmonik ise, yâni C, D noktaları AB yi harmonik olarak bölüyorsa, AB ve CD çifti birbirini ayırır.

58. Bire-bir tekabüller. Birinci cinsten iki formu, meselâ iki r, r' doğrusal nokta cumlesini ele alalım. Bu doğrusal nokta cümlelerinin elemanları arasında bir T bire-bir tekabülünü düşünelim. Bir nokta r yi belirli bir yönde çizdiği vakit, bunun homologu, r' yü belirli bir yönde çizerse, T tekabülüne *sıralanmış* denilecektir.

Şimdi r, r' doğrusal nokta cümlelerinin aynı bir doğru üzerinde bulunduklarını farzedelim. Bunlar arasındaki T tekabülü sıralanmış bir tekabülse, M noktası r yi belirli bir yönde çizdiği vakit, bunun M' homologu r' yü, bundan önceki ile çakışabilen veya çakışamıyan bir yönde çizer. Birinci halde, T nin *dolaysız*, ikinci halde de *ters* bir tekabül olduğu söylenecektir.

Eğer M noktası özel bir durumda M' homologu ile çakışabilirse, böyle bir nokta tekabülün *birleşik* bir noktası olacaktır.

Bunlar anlaşıldıktan sonra, IX postulâtı, tekabüllerle ilgili bulunan ve sezgiye dayanan vakıaların ifadesinden başka birşey olmıyan birtakım özeliklerin kurulmasını sağlıyacaktır ki bunlardan da birazdan bahsedeceğiz.

Farzedelim ki düz bir yol iki A, B şehrini birbirine bağlamaktadır. İki M, M' yolcusunun bu yolu aldıklarını farzedelim; bu iki yolcunun saatleri aynı ânı gösterdiği vakit, yolcuların da homolog konumlar işgal ettiğini söyliyeceğiz. Böylece yolcularımızın konumları arasında bire-bir bir tekabül vardır.

Eğer M ve M' nün ikisinin de hareket yönleri aynı ise, ve

eğer M, A dan M'den sonra kalkar fakat B ye ondan önce varırsa, hareketinin bir anında M'ye yolda yetişecektir; bu da tekabülün bir birleşik noktası olacaktır. Olabilir ki bu ilk kavuşmadan sonra M hızını kessin ve M' tarafından geçilsin, ve sonra hızını arttırarak biraz daha ötede M'yü yeniden geçsin. Bununla beraber, A ile B arasında M ve M'nün aynı anda bulundukları bir noktanın varlığından, ve A ile bu nokta arasında M'nün daima M yi geride bıraktığından bahsedilebilir.

Eğer M yolcusu A dan B ye, ve M' de B den A ya giderse, yolçular açıkca yalnız bir kere birbirlerine raslıyacaklardır.

Daha kesin terimlerle, aşağıki teoremler bahis konusudur:

I. Eğer birinci cinsten bir formun elemanları arasında sıralanmış dolaysız bir tekabül varsa, ve bu tekabülde bir AB doğru parçasının elemanlarına, bunun ihtiva ettiği bir $A'B'$ doğru parçasının elemanları tekabül ediyorsa, $A'B'$ ye ait öyle bir birleşik P elemanı vardır ki sıralanmış AB doğru parçasında P den önce gelen hiçbir birleşik eleman yoktur.

II. Eğer birinci cinsten bir formun elemanları arasında sıralanmış ve ters bir tekabül varsa, ve bu tekabülde bir AB doğru parçasının elemanlarına, bunun ihtiva ettiği bir $A'B'$ doğru parçasının noktaları tekabül ediyorsa, $AB'A'B$ doğru parçasına ait bir P birleşik elemanı ile, AB nin tamamlayıcısı doğru parçasına ait bir Q birleşik elemanı vardır. AB ile PQ ve $A'B'$ ile PQ çiftleri birbirlerini ayırırlar.

59. İzdüşelliklerin tanımı ve İzdüşel Geometri'nin temel teoremi. Daha önce de söylediğimiz gibi, birinci cinsten iki form arasındaki izdüşelliği VON STAUDT şu şekilde tanımlıyordu: *Harmonik dörtlüleri değiştirmiyen bire-bir bir tekabül.* Bu soruyu daha yakından inceleyelim ve daha fazla kolaylığı temin amaciyle, iki r, r' doğrusal nokta cümlesi arasındaki bir izdüşellikle yetinelim (ki bu da zâten bir kayıtlama demek değildir).

r üzerinde iki A, B noktasını harmonik olarak bölen iki nokta C, D olsun. r ve r' arasındaki ω izdüşelliği, $ABCD$ harmonik dörtlüsüne $A'B'C'D'$ harmonik dörtlüsünü tekabül ettirir. AB, CD çiftleri birbirini ayırdığı gibi, aynı şey $A'B'$, $C'D'$ çiftleri için söylenebilir. Dolayısiyle, r üzerindeki $ACBD$ dolanım yönüne r' üzerinde $A'C'B'D'$ dolanım yönü tekabül eder. O halde bir izdüşellik, sıralanmış bir tekabüldür.

İzdüşel Geometri'nin temel teoremi de şu şekilde ifade olunur: *Birinin verilen üç elemanına ötekinin verilen üç elemanını tekabül ettirmek üzere, birinci cinsten iki form arasında bir ve yalnız bir izdüşellik vardır.*

Başka deyimle, r nin verilen üç L, M, N noktasına, r' nün sırasiyle verilen üç L', M', N' noktasını tekabül ettirmek üzere, iki r, r' doğrusal nokta cümlesi arasında bir ve yalnız bir izdüşellik vardır.

Bu şartları sağlıyan bir izdüşelliğin varlığı kolaylıkla gösterilebilir; zâten bundan önceki bölümde bunu yapmıştık. Fakat bu izdüşelliğin bir tek oluşunu ispat etmek daha ince bir iştir.

Farzedelim ki r nin L, M, N noktalarına r' nün sırasiyle L', M', N' noktalarını tekabül ettirmek üzere iki r, r' doğrusal nokta cümlesi arasında iki ω, ω' izdüşelliği bulunsun. r nin bir P noktasına, ω yardımiyle r' nün bir P' noktası tekabül ettirilir. Bu sonuncu nokta, ω' izdüşelliğinde, r nin bir P_1 noktasına da tekabül eder. r nin P ve P_1 noktaları arasında, açıkca görüldüğü gibi, bire-bir bir tekabül vardır ki bu da bir ω_1 izdüşelliğidir. Bu ω_1 izdüşelliğinde L, M, N noktaları birleşik noktalardır. Eğer r nin bütün noktalarının ω_1 için birleşik noktalar olduğunu, yâni bu izdüşelliğin bir identiklikten ibaret bulunduğunu ispat edersek, ω izdüşelliğinin de bir tek oluşunu ispat etmiş bulunuruz.

İlk önce akla şöyle bir yol geliyor: L, M, N noktalarından

her birinin diğer ikisine göre harmonik eşleniklerini inşa edelim. Böylece öyle üç yeni nokta elde ederiz ki, izdüşelliğin tanımı dolayısiyle bu noktalar ω_1 için birleşiktirler. Bundan sonra bu altı noktadan her birinin geriye kalan beş noktadan ikisiyle teşkil olunan her çifte göre harmonik eşleniklerini alalım. Böylece ω_1 e ait olmak üzere yeni birleşik noktalar elde ederiz, ve bu böylece sürer. Sonunda ω_1 in sonsuz birleşik noktasını buluruz ama r nin her noktasının bu izdüşellik için birleşik olduğu da bu suretle asla ispat edilmiş olmaz.

Dokuzuncu postulâta ve bundan çıkardığımız teoremlerden ilkine dayanmak suretiyle temel teoremin ispatını yapabiliriz.

ω_1 in identiklik olmadığını farzedelim. Bu öyle bir sıralanmış tekabüldür ki LMN doğru parçasına LMN doğru parçasını tekabül ettirir, öyle ise bu bir sıralanmış ve dolaysız bir tekabüldür. LM doğru parçalarından N yi ihtiva etmeyenini düşünelim. Bu doğru parçasının bir P noktasına, aynı doğru parçasının bir P_1 noktası tekabül eder, ve P nin L den M ye gitmesi halinde, P_1 de L den M ye gider. Buna göre, öyle bir X birleşik noktası vardır ki L ile X arasında ω_1 in hiçbir birleşik noktası yoktur (zâten X noktası da M ile çakışabilir). Eğer P noktası, LX doğru parçasının bir noktası ise L, P, P_1, X noktaları LMN dolanım yönünde birbirini takibederler. Şimdi, ω_1 in, P yi P_1 e tekabül ettiren ters tekabülünü düşünelim. Aynı şekilde, (L ile çakışabilen) öyle bir Y birleşik noktası vardır ki eğer P_1 noktası MY doğru parçasının bir noktası ise, deminki gibi M, P_1, P, Y noktaları NML yönünde birbirini takib ederler.

Buna göre XY doğru parçası ω_1 in hiçbir birleşik noktasını ihtiva etmez. Fakat bu sonuç da saçmadır, zira N noktasının XY ye göre harmonik eşlenigi, XY nin içinde bir nokta olduğunda, ω_1 in zorunlu olarak bir birleşik noktasıdır. Bundan da, N yi ihtiva etmiyen LM doğru parçasının bütün noktalarının ω_1 in birleşik noktaları olduğu sonucu çıkarılır. Açıkca görüldüğü gi-

bi, aynı sebepten MN, NL doğru parçalarının bütün noktaları için aynı şey söylenebilir ve dolayısiyle ω_1 identiklikten ibarettir.

Böylece İzdüşel Geometrinin temel teoremi ispat edilmiş olur.

60. Düalite ilkesi. İzdüşel Geometri'nin yukarıda ifade olunan postulâtları, en genel şeklinde, *a priori*, düalite ilkesinin ithaline yararlar.

Bahis konusu postulâtların ifadesindeki «nokta» ve «düzlem» kelimelerini kendi aralarında mübadele edelim. İlk üç postulâtın yerini bunlardan sonra gelen üç postulât alır ve bunun tersi de doğrudur.

VII, VIII ve IX uncu postulâtlara gelince, bunlar birinci cinsten formlarla ilgilidir. Halbuki, «nokta» ve «düzlem» kelimelerinin kendi aralarında değiştokuşu, doğrusal nokta cümlesine düzlem demetini veya bunun tersini, ışın demetlerine de ışın demetlerini tekabül ettirir. Dolayısiyle, bu değiştokuş postulâtları değiştirmez.

Böylece İzdüşel Geometri'nin dokuz postulâtı muhafaza olunduğuna göre, düalite ilkesinin ifadesini verebiliriz:

İzdüşel Geometri'deki her önermeye, «nokta» ve «düzlem» kelimelerinin kendi aralarında değiştokuşu ve «doğru» kelimesinin de değiştirilmeden aynen bırakılması suretiyle ifadesi elde olunan başka bir önerme tekabül eder.

Fakat hâlen bu ilkenin dar bir uygulanma alanı vardır, şu mânada ki bunu ancak dokuz postulâta dayanarak elde olunan önermelere uygulayabiliriz. Bununla beraber karşıtlıkların bundan sonra yapılacak olan incelenmesi sayesinde bu ilkenin uygulanma alanını genişletme imkânı bulunabileceği gibi, bundan sonraki bölümde işaret edeceğimiz vechile, bu alanın sınırları da kesinlikle belirlenecektir.

Düzlemde düalite ilkesi, uzaya tekabül eden ilkeden çıkarılabilir.

Noktaları ve doğruları topluluğu gibi düşünülen bir düzleme, düalite ile, bir buket tekabül eder. Düalite ile birbirine tekabül eden iki şekil veya iki önermeye *bağlaşık* (korelatif) denilir; o halde düzlemle buket bağlaşıktır. Bir σ düzlemiyle, S tepeli bir buketi ele alalım. σ düzleminin noktalardan ve doğrulardan meydana gelen bir F şeklinin bağlaşığı S tepeli buketin düzlemlerden ve doğrulardan müteşekkil bir F_1 şeklidir. Buketi, S den geçmiyen bir σ' düzlemiyle keselim. F_1 şeklinin kesiti, doğrulardan ve noktalardan meydana gelen bir F' şekli olacaktır. Bu anlaşıldıktan sonra, F şekli ile ilgili izdüşel bir önermenin bağlaşığı, F_1 şekli ile ilgili bir önerme olacaktır. Bu önermeye F' şekliyle ilgili izdüşel bir önerme tekabül eder. Bu sonuncu önermenin ifadesi, açıkca görüldüğü gibi, F şekli ile ilgili önermede « nokta » ve « doğru » kelimelerinin yerine sırasiyle « doğru » ve « nokta » kelimelerini koymakla elde olunacaktır. Böylece düzlemde düalite ilkesi elde olunur.

Açıkca görülebileceği üzere, aynı şekilde bukette de bir düalite ilkesi elde olunabilir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

GURUPLAR TEORİSİ VE GEOMETRİ

61. Metrik geometri ve hareketler. Elementer geometride iki şeklin eşitliğini ispat etmek için, her ikisinin üst üste konulabileceği gösterilir. Nitekim iki ABC, $A'B'C'$ üçgeninin eşit olduklarını ispat etmek için, üçgenler çakışacak şekilde A', B', C' nün sırasıyle A, B, C üzerine getirilebileceği gösterilir.

Düzlem geometride kalalım ve düzlemden dışarıya çıkmadan, iki ABC, $A'B'C'$ üçgenini nasıl çakışık hale getiribileceğimize bakalım. ABC üçgenini sabit bırakalım ye $A'B'C'$ üçgenini aşağıki hareketlere tâbi tutalım:

1. $A'B'C'$ üçgenini, kenarları kendi kendilerine paralel kalmak üzere, kaydırarak A' yü A ya getirelim. Bu haretin sonunda $A'B'C'$ üçgeni öyle bir $A''B''C''$ konumunu haiz olacaktır ki AB'' doğrusu $A'B'$ ye, AC'' doğrusu $A'C'$ ye, $B''C''$ doğrusu da $B'C'$ paralel olur.

2. $AB''C''$ yü A etrafında döndürerek B'' yü B ye getirelim. Hareketin sonunda, C'' noktası ya C ile çakışacak, ya da C nin AB ye göre simetriği olan C''' ye gelecektir.

3. Bu son ihtimal halinde, ABC''' nün AB doğrusuna göre simetriğini alalım.

O halde $A'B'C'$ yü ABC ile çakıştırmak için, bir öteleme, bir nokta etrafında döndürme ve nihayet, gerektiğinde, bir doğruya göre simetri işlemlerini yaptık. Zâten, açıkca görüleceği gibi, bu hareketlerin yapılış sırasının hiçbir önemi yoktur.

Daha genel olarak görülebilir ki ötelemeler, döndürmeler ve

bir doğruya göre simetriler sonunda bir düzleme ait iki şekil çakıştırılabildiği takdirde, bunlar eşit şekillerdir.

Bundan da şu sonuç çıkarılır ki düzlem şekillerin ötelemelere, bir nokta etrafındaki döndürmelere ve bir doğruya göre simetrilere tâbi tutuldukları halde bir değişikliğe uğramıyan özelikleri topluluğu düzlemin metrik geometrisini vücuda getirir.

Düzlem hakkında söylenilenler, hiçbir zorluğa uğramaksızın uzaya da teşmil olunabilir ve denilebilir ki şekillerin ötelemelere, bir eksen etrafındaki döndürmelere, ve bir düzleme göre simetrilere tâbi tutuldukları halde bir değişikliğe uğramıyan özeliklerinin incelenmesi uzayın metrik geometrisini vücuda getirir.

Şurasını da kaydetmek yerinde olur ki uzayda bir doğruya göre simetri demek, bu doğru etrafında iki dik açılık bir döndürme demektir.

Yukarıki ifadeleri gözden geçirdiğimiz takdirde görürüz ki:

1. Ötelemeler, döndürmeler ve bir doğru veya düzleme göre simetrilerden ibaret birtakım işlemler topluluğunu ele alıyoruz.

2. İki şeklin eşitliğini şu şartla tanımlayabiliriz ki bunların birinden ötekisine bahis konusu topluluğa ait işlemler yardımiyle geçilebilsin.

Bu topluluğa ait işlemlerin uygulanması sonucunda şekillerin bir değişikliğe uğramıyan, başka deyimle, bu işlemlere karşı invariyant kalan özeliklerini ele alıyoruz.

Göreceğiz ki şimdiye kadar ele aldığımız bütün geometriler için aynı sonuçlara varılabir. Fakat bahis konusu olan işlemler topluluğu birtakım şartlara bağlıdır: bu topluluk, işlemler gurupu denilen şeyi meydana getirir, ve biz de bu kavramı tanımlamakla işe başlıyacağız.

62. Gurup kavramı. Cebirsel denklemlerin çözümü münasebetiyle, *işlemler gurubu* kavramını matematiğe sokan Évariste

Galois (1811-1832) adında genç bir fransız geometricisidir. Bu kavram yavaş yavaş matematiğin bütün dallarını sardı, bugün de aynı kavramın fiziğe sokulmasına gayret gösterilmektedir.

Kolay bir örnek üzerinde, substitüsyon gurupları denilen şeyin ne olduğunu göstermekle işe başlıyalım.

Dört a, b, c, d harfini ele alalım ve bunları herhangi bir sırada, meselâ $badc$ sırasında yazalım. $abcd$ den $badc$ ye geçmeği sağlıyan ve

$$S=\begin{pmatrix} b & a & d & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ile göstereceğimiz işleme *substitüsyon* diyelim. $abcd$ harflerini başka sırada yazdığımız her sefer bir substitüsyon bahis konusu olacaktır. Şimdi aşağıki iki substitüsyonu ele alalım :

$$S=\begin{pmatrix} b & a & d & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \qquad S'=\begin{pmatrix} c & b & d & a \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

İlki $abcd$ den $badc$ ye, ikincisi de $abcd$ den $cbda$ ya, dolayısiyle $badc$ den $dacb$ ye geçmeği sağlar. Eğer S, S' substitüsyonlarını birbirinin ardından uygularsak, $abcd$ den $dacb$ ye geçeriz, yâni yeni bir

$$S''=\begin{pmatrix} d & a & c & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

substitüsyonunu elde ederiz.

S'' nün S nin S' ile *çarpımı* olduğunu itibarî olarak kabul edip

$$S''=S\cdot S'$$

yazacağız.

S' substitüsyonu $abcd$ den $cbda$ ya, dolayısiyle $dbac$ den $abcd$ ye geçmeği sağlar. İtibarî olarak S' nün *tersi* substitüsyon diye, $abcd$ den $dbac$ ye geçmeği sağlıyan işleme diyeceğiz ki bu da bir substitüsyondur. Bunu da

$$(S')^{-1} = \begin{pmatrix} d & b & a & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

şeklinde yazacağız.

Öte yandan,

$$S' \cdot (S')^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

dir ki bu substitüsyona da *identik* substitüsyon adını vereceğiz.

O halde biraz önce ele aldığımız ve dört harfle meydana getirilen substitüsyonlar topluluğunun aşağıki özelikleri vardır :

1. Topluluğa ait iki substitüsyonun çarpımı gene topluluğa ait bir substitüsyondur.

2. Topluluğa ait substitüsyonların tersleri gene topluluğa ait substitüsyonlardır.

Bu özeliklerden, topluluğun, identik substitüsyonu da ihtiva ettiği sonucu çıkarılır.

Şimdi mahiyyet itibariyle biraz farklı olan başka bir örneği ele alalım : Bir düzlemdeki ötelemeler örneği. Bu düzlemdeki bir A şeklini birbirinin ardından iki T, T' ötelemesine tâbi tutalım. İlk öteleme sonucunda A şekli A' ye, ikincisinden sonra da A' den A'' ye gelir. Şurası açıktır ki A dan doğrudan doğruya A'' ye geçmeği sağlıyan bir T'' ötelemesi vardır; bu ötelemenin, T nin T' ile çarpımından ibaret bulunduğunu söyliyeceğiz ve $T'' = T \cdot T'$ yazacağız. Öte yandan, eğer A dan A' ye bir öteleme ile geçiyorsak, karşıt olarak, öncekinin tersi denilen bir öteleme ile de A' den A ya geçeriz.

Böylece görüyoruz ki düzlemdeki ötelemeler topluluğunun iki özeliği vardır :

1. İki ötelemenin çarpımı gene bir ötelemedir.

2. Bir ötelemenin tersi de bir ötelemedir.

Bunlardan da zâten şu sonuç çıkar ki bu topluluk identik ötelemeyi, yâni bir şekli sabit bırakan bir ötelemeyi de ihtiva eder.

Yukarıda örnek olarak ele aldığımız iki işlem topluluğu mahiyyet itibariyle birbirinden çok farklıdır: İlki dört harfi ilgilendiren sınırlı sayıda, kesin olarak yirmi dört, substitüsyondan meydana gelmiştir. İkincisinde ise sonsuz öteleme vardır. Fakat bu iki topluluğun ortak özelikleri vardır ve işlem gruplarını tanımlamada bize yarıyacak olan özelikler de bunlardan ibarettir.

Sonlu ya da sonsuz sayıda bir E işlemler topluluğunu ele alalım. İtibarî olarak, topluluğun iki işleminin çarpımı diye, bu işlemlerin belirli bir sırada birbiri ardından yapılması halinde elde olunan sonuca diyelim.

1. *Topluluğun iki işleminin çarpımı gene topluluğun bir işlemi ise;*

2. *Topluluğun bir işleminin tersi de topluluğun bir işlemi ise, E topluluğu bir gurup vücuda getirir.*

E topluluğunun bir gurup teşkil etmesi halinde, bu topluluk işlemlerinden biriyle bunun tersinin çarpımını, yâni identik işlemi de ihtiva eder.

Dört harfle ilgili substitusyonlar topluluğu ile düzlemdeki ötelemeler topluluğu birer guruptur.

63. Metrik geometrinin asal gurubu. Yeniden metrik geometriye dönelim ve uzayda ötelenmeler, dönmeler ve (bir düzleme veya bir doğruya göre) simetriler topluluğunu ele alalım. Açıkca görüleceği gibi, bu topluluk bir gurup vücuda getirir, zira iki hareketin çarpımı da bir hareket olduğu gibi, bir hareketin tersi de gene bir harekettir. İdentik hareket de, açıkca, bir şekli hareketsiz bırakmakdan ibarettir.

Bu guruba *uzayın G_m hareketler gurubu* denilir. Buna göre, evvelce vardığımız sonuçları yeniden ele almak suretiyle aşağıki ilkeyi ifade edebiliriz:

Metrik geometri, G_m gurubuna ait işlemlerin uygulanması sonucunda şekillerin değişmiyen (invaryant kalan) özeliklerinin incelenmesinden ibarettir.

G_m gurubuna, *metrik geometrinin asal gurubu* denilir.

64. Eukleides geometrisinin asal gurubu. EUKLEIDES geometrisi sadece, üst üste konulduklarında eşit olan şekilleri incelemekle yetinmez, aynı zamanda birbirinin benzeri şekilleri de gözden geçirir. Buna göre bu geometrinin asal gurubu, hareketler gurubundan daha geniş olacaktır, şu anlamda ki bu gurupta başka işlemler de bulunacaktır.

Bu hususta bir fikir edinmek üzere A, B, C tepelerindeki açıları sırasiyle A', B', C' tepelerindeki açılara eşit olan birbirinin benzeri iki ABC, $A'B'C'$ üçgenini ele alalım. Birtakım hareketler yardımiyle, $A'B'C'$ üçgenini öyle bir yeni $AB''C''$ konukonumuna getirebiliriz ki A' noktası A ya, B' noktası AB doğrusunun bir B'' noktasına, ve C' de AC doğrusunun C'' noktasına gelsin. ABC ve $AB''C''$ benzer üçgenlerdir ve BC, $B''C''$ kenarları birbirine paraleldir. Bu takdirde

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC}$$

dir.

Bu oranların ortak değerini k ile gösterecek olursak, düzlemin her M'' noktasına, AM'' doğrusu üzerindeki bir M noktasını

$$AM'' = k \cdot AM$$

olacak şekilde tekabül ettirmek suretiyle, $AB''C''$ üçgeninden ABC üçgenine geçilebileceğini görürüz.

Bu işleme A merkezli *homoteti* denilir. Şurasını da kaydedelim ki verdiğimiz tanım, düzleme olduğu kadar uzaya da uygulanabilir.

Şurası apaçıktır ki uzaydaki hareketler ve homotetiler topluluğu G_s *benzeşim gurubu* denilen bir gurup meydana getirirler.

EUKLEIDES *Geometrisinin asal guruba uzayın* G_s *benzeşim gurubudur. Şekillerin, bu guruba ait dönüştürümlerin uygulanması sonucunda değişmiyen (invariyant kalan) özeliklerinin incelenmesi bu geometrinin konusunu teşkil eder.*

Şurasını da kaydedelim ki G_m hareketler gurubunun bütün işlemleri G_s gurubuna aittir; G_m nin G_s gurubunun bir *alt-gurubu* olduğu söylenir.

65. Hareketler gurubu ve Analitik Geometri. Hareketleri Analitik Geometri diline nasıl çevireceğiz ve G_m gurubunun analitik temsilini nasıl elde edeceğiz?

Bir dik $Oxyz$ üçyüzlüsünü ele alalım. Ötelemeler, döndürmeler ve birtakım düzlemlere göre simetriler bu üçyüzlüye yeni bir $O'x'y'z'$ dik üçyüzlüsünü tekabül ettirir.

Bu yeni dik üçyüzlünün eskisine göre konumunu tanımlamak için, O' noktasının $Oxyz$ e göre x_0, y_0, z_0 koordinatlarını ve $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ eksenlerinden her birinin doğrultu kosinüslerini, yâni bu eksenlerin sırasiyle Ox, Oy, Oz eksenleriyle yaptıkları açıların kosinüslerini bilmek gerekir. $O'x'$ nün doğrultu kosinüslerini l_1, m_1, n_1 le, $O'y'$ nünkileri l_2, m_2, n_2 ile, nihayet $O'z'$ nünkileri de l_3, m_3, n_3 ile gösterelim. Bu sayılar bağımsız değildirler ve birbirlerine

$$(1)\quad \begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0, \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \end{cases}$$

bağıntılariyle bağlıdırlar; son üç bağıntı $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ eksenlerinin ikişer ikişer birbirlerine dik olduklarını ifade eder.

Bir M noktasının $Oxyz$ ye göre x, y, z koordinatları ile $O'x'y'z'$ ye göre x', y', z' koordinatları arasında koordinat dönüştürüm formülleri denilen

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y = y_0 + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z = z_0 + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \end{cases}$$

bağıntıları vardır. Şunu da ilâve edelim ki

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

dir.

$Oxyz$ ye göre koordinatları sırasiyle x_1, y_1, z_1 ve x_2, y_2, z_2 olan iki M_1, M_2 noktasını ele alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklığın karesi

$$\overline{M_1 M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

formülü ile verilmiştir.

Eğer x_1', y_1', z_1' ve x_2', y_2', z_2' de M_1, M_2 noktalarının $O'x'y'z'$ üçyüzlüsüne göre koordinatları ise, çok kolay bir hesapla

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 = \overline{M_1 M_2}^2$$

buluruz.

Öte yandan iki

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

düzlemini ele alalım.

Bu düzlemler arasındaki ω açısının kosinüsü

$$\cos\omega = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

formülü ile verilmiştir.

Düzlemlerin denklemlerindeki x, y, z yerine (I) denklemlerinin ikinci taraflarını koyalım. Bu takdirde, bu düzlemlerin $O'x'y'z'$ ye göre denklemlerinden ibaret olan

$$A_1'x' + B_1'y' + C_1'z' + D_1' = 0, \quad A_2'x' + B_2'y' + C_2'z' + D_2' = 0$$

ı elde ederiz. Kolay bir hesap

$$\cos\omega = \frac{A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2'}{\sqrt{(A_1'^2 + B_1'^2 + C_1'^2)(A_2'^2 + B_2'^2 + C_2'^2)}}$$

verir.

Bu suretle görüyoruz ki (I) substitüsyonları uzaklık ve açıları değiştirmez; başka deyimle, uzaklıklar ve açılar bu substitüsyonların uygulanması neticesinde invariyant kalırlar.

Buradan da açıkca şu çıkar ki şekillerin metrik özelikleri, (I) substitüsyonları ile muhafaza olunurlar. Fakat metrik geometrinin, (I) substitüsyonlarının uygulanması halinde invariyant kalan özelikler topluluğundan ibaret bulunduğunun ispatını tamamlamak için, ayrıca bir dik üçyüzlüden başka bir dik üçyüzlüye birtakım hareketlerle geçilebildiğini ispat etmek gerekir.

Buna göre $Oxyz$, $O'x'y'z'$ herhangi iki dik üçyüzlü olsun. Bir öteleme ile, $Oxyz$ dik üçyüzlüsü $O'x'y'z'$ ile aynı başlangıç noktalı bir $O'XYZ$ dik üçlüsünün konumuna getirilir. Bu takdirde, $O'XY$ ve $O'x'y'$ düzlemlerinin arakesiti d olsun. $O'XYZ$ yi $O'Z$ etrafında, $O'X$ ekseni d üzerine gelinceye kadar çevirelim, böylece $O'XYZ$ üçyüzlüsü bir $O'X_1Y_1Z$ üçyüzlüsü haline gelir. Bu yeni üçyüzlüyü $O'Z$ ekseni $O'z'$ ile çakışıncaya kadar $O'X_1$ etrafında çevirelim, $O'X_1Y_1Z_1$ üçyüzlüsü yeni bir $O'X_1Y_2z'$ ko-

numunu haiz olacaktır. Sonunda bu üçyüzlüyü de, $O'X_1$ ekseni $O'x'$ ile (hem konum hem de yön bakımlarından) çakışıncaya kadar $O'z'$ etrafında çevirelim. Üçyüzlünün son konumu $O'x'Y_2z'$ olsun. $O'y'$ ve $O'Y_2$ eksenleri aynı doğru üzerinde bulunurlar. Eğer bu iki eksenin yönleri de aynı ise, bir öteleme ve üç döndürme sonunda $Oxyz$ yi $O'x'y'z'$ ile çakıştırmış oluruz. Eğer $O'y'$ ve $O'Y_2$ eksenlerinin yönleri aynı değilse, $O'x'z'$ düzlemine göre yapılacak bir simetri $O'x'Y_2z'$ yü $O'x'y'z'$ ile çakıştıracaktır. Ne olursa olsun, görülüyor ki bir dik üçyüzlüden başka bir dik üçyüzlüye G_m gurupuna ait işlemlerle daima geçilebilir.

Yeniden (I) dönüştürümlerine dönelim. Kolaylıkla görülür kü (I) tipinden iki dönüştürümün çarpımı, (1) ve (2) denklemleri sağlanmak üzere, gene aynı tipten bir dönüştürümdür. Zâten bu keyfiyet de geometri bakımından apaçıktır. Üstelik, (I) in tersi de aynı tiptendir; x', y', z' nün katsayıları ile teşkil olunan determinant sıfırdan farklı olduğu için, (I) denklemleri bu x', y', z' ye göre çözülebilirler. Buradan da şu sonuç çıkar ki l_j, m_j, n_j $(j=1, \ldots, 3)$ katsayılarının (1) ve (2) bağıntılarıyle birbirlerine bağlı bulundukları (I) dönüştürümleri topluluğu bir gurup vücuda getirir.

Fazla olarak, eğer x, y, z ve x', y', z' leri aynı $Oxyz$ dik üçyüzlüsüne göre farklı iki noktanın koordinatları şeklinde mânalandırırsak, (I) denklemleri G_m gurubuna ait bir işlemi gösterirler.

Sonuç olarak şunu söyliyebiliriz ki:

(I) *dönüştürümleri gurubu, uzayın G_m hareketler gurubu ile çakışır.*

Metrik geometri, (I) *dönüştürümlerinin uygulanması sonucunda değişmiyen (invariyant kalan) özelikler topluluğudur.*

66. Benzeşimler gurubunun analitik ifadesi. Benzeşimlerin G_s gurubu, (I) dönüştürümler gurubuna uzaydaki homotetileri de katmak suretiyle meydana gelecektir.

O merkezli bir homotetiyi ele alalım. Bir M' noktasına, k bir sabiteyi göstermek üzere

$$OM'' = k \cdot OM'$$

olacak şekilde bir M'' noktası tekabül eder.

O başlangıç noktalı bir dik üçyüzlüye göre M', M'' noktalarının koordinatları sırasiyle x', y', z' ve x'', y'', z'' olsun. Bu takdirde

$$x'' = kx' \qquad y'' = ky', \qquad z'' = kz'$$

olur.

Bu formüllerle (I) denklemlerini terkib edersek,

$$x = x_0 + \frac{1}{k}(l_1 x'' + l_2 y'' + l_3 z''), \ldots$$

olur, ki bunları da

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1 x'' + a_2 y'' + a_3 z'', \\ y = y_0 + b_1 x'' + b_2 y'' + b_3 z'', \\ z = z_0 + c_1 x'' + c_2 y'' + c_3 z'' \end{cases}$$

şeklinde yazacağız.

Bu sefer a_j, b_j, c_j $(j = 1, \ldots, 3)$ sayıları

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

bağıntılariyle birbirine bağlıdır.

Üstelik, x'', y'', z'' nün katsayıları ile belirli olan determinant sıfırdan farklıdır.

(II) tipindeki iki dönüştürümün çarpımı gene bu tipten bir dönüştürümdür ve (II) tipinden bir dönüştürümün tersi için de aynı şey söylenebilir. Şu halde (II) dönüştürümleri, G_s benzeşimler gurubundan başka bir şey olmıyan, bir gurup vücuda getirirler.

Eukleides geometrisi ; a_j, b_j, c_j katsayıları (3) *bağıntıları ile birbirine bağlı olmak üzere,* (II) *dönüştürümlerinin uygulanması sonucunda değişmiyen (invariyant kalan) özeliklerin topluluğudur.*

Bu donüştürümlerin uygulanması halinde uzaklıkların artık muhafaza olunmadıkları, buna karşılık iki düzlem arasındaki açının değişmediği kolaylıkla görülür.

67. Argeziyen Uzay. Analitik geometri, uzayın noktaları ile üç x, y, z sayı gurupları arasında birc-bir bir tekabül kurar. Buna göre denilebilir ki, *karteziyen uzay* (veya DESCARTES uzayı) adı verilebilen, analitik geometri uzayı, daima sonlu farzedilen ve bu suretle iki nokta arasındaki uzaklığın daima sonlu olduğu üç x, y, z sayı gurupları topluluğundan ibarettir. Başka deyimle karteziyen uzay sonsuzdaki noktaları bir yana bırakır.

Sonsuzdaki nokta kavramını, esasen bugün yapılandan çok farklı şekilde, ilk ithal eden DESARGUES olduğundan, karteziyen uzaya sonsuzdaki noktaları katmakla, *argeziyen uzay* (veya DESARGUES uzayı) diyeceğimiz yeni bir uzay elde ederiz.

Bir $Oxyz$ karteziyen koordinat üçyüzlüsüne göre koordinatları sırasiyle x_1, y_1, z_1 ve x_2, y_2, z_2 olan iki A, B noktasını ele alalım. AB doğrusunun bir M noktası

$$k = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$$

kesim oraniyle belirli olduğu gibi, M noktasının karteziyen koordinatları da

$$(1) \qquad x=\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \qquad y=\frac{y_1+ky_2}{1+k}, \qquad z=\frac{z_1+kz_2}{1+k}$$

dır.

Bu formülleri veren hesaplarda k nın -1 den farklı bulunduğu zımnen kabul edilmektedir. Eğer $k=-1$ olsaydı, bu formüllerin bir mânası kalmazdı. Bununla beraber şurasını da kaydedelim ki k nın -1 e yaklaşması halinde, (1) denklemleriyle verilen x, y, z değerleri sınırsız bir şekilde büyürler ve dolayısiyle itibarî olarak AB doğrusunun sonsuzdaki noktası denilen şey, $k=-1$ e tekabül etmelidir.

Sonsuzdaki noktaların bir analitik temsilini elde etmek için, homogen karteziyen koordinatları ithal edeceğiz.

Bir noktanın x, y, z karteziyen koordinatları verildiğine göre, sonuncusu sıfır olmamak üzere,

$$(2) \qquad X=xU, \qquad Y=yU, \qquad Z=zU$$

bağıntılariyle dört X, Y, Z, U sayısını ithal edelim.

Bu dört X, Y, Z, U sayısı bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlanmışlardır, yâni eğer X, Y, Z, U sayıları (2) denklemlerini sağlarlarsa, ϱ sıfırdan farklı bir çarpanı göstermek üzere, ϱX, ϱY, ϱZ, ϱU sayıları için de aynı şey vâriddir.

Tersine, sonuncusu sıfır olmıyan dört X, Y, Z, U sayısı verildiği takdirde, (2) bağıntıları yardımiyle, bunlardan bir noktanın x, y, z karteziyen koordinatları çıkarılır. X, Y, Z, U sayılarına bu noktanın *homogen karteziyen koordinatları* denilir.

Bu noktalar anlaşıldıktan sonra, AB doğrusunu yeniden ele alalım ve A, B noktalarının homogen karteziyen koordinatları sırasiyle X_1, Y_1, Z_1, U_1 ve X_2, Y_2, Z_2, U_2 olsun. (1) denklemleri gösterir ki M noktasının homogen karteziyen koordinatları,

$$h = k\,\frac{U_1}{U_2}$$

olmak üzere

$$X_1 + hX_2, \quad Y_1 + hY_2, \quad Z_1 + hZ_2, \quad U_1 + hU_2$$

dir.

k nın -1 e yaklaşması halinde, M noktasının sonuncu homogen karteziyen koordinatı olan $U_1 + hU_2$ sıfıra yaklaşır. Buna göre, AB doğrusunun sonuncu homogen karteziyen koordinatı sıfır olan noktasına itibarî olarak *sonsuzdaki noktası* diyeceğiz.

Şurasını da kaydedelim ki, homogen karteziyen koordinatlar bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlandıklarından, AB doğrusunun sonsuzdaki noktasının homogen karteziyen koordinatları

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2, \quad 0$$

şeklinde de yazılabilir.

A, B noktaları birbirinden farklı noktalar olduğuna göre, yukarıki koordinatlarda ilk üç sayıdan hiç olmazsa biri sıfır değildir, ve dolayısiyle sonsuzdaki noktanın veya herhangi bir noktanın homogen karteziyen koordinatlarının dördü birden asla sıfır olamaz.

Uzayın sonsuzdaki noktaları $U = 0$ denklemiyle karakterize edilir. Halbuki bir düzlemin, homogen karteziyen koordinatlar cinsinden denklemi de

$$AX + BY + CZ + DU = 0 \tag{4}$$

şeklinde yazılır, yâni bu denklem X, Y, Z, U ya göre linear ve homogendir. Şu halde, $U = 0$ denkleminin bir düzlem gösterdiğini, yâni uzayın sonsuzdaki noktalar topluluğunun bir düzlemden ibaret bulunduğunu söylemek tabiîdir.

Argeziyen uzay, hiç olmazsa birisi sıfırdan farklı olan dört X, Y, Z, U sayı gurupları topluluğudur. Böyle bir sayı gurubuna

nokta denilir, ve orantılı sayılardan teşekkül eden iki gurup aynı noktayı gösterir. Sonuncusu sıfır olan sayı guruplarına da, itibarî olarak, sonsuzda noktalar diyeceğiz.

(4) düzlemine paralel her düzlem bir

$$AX + BY + CZ + D'U = 0$$

denklemiyle gösteriiir.

Bu düzlem, sonsuzdaki düzlemi, (4) düzlemiyle aynı

$$AX + BY + CZ = 0, \qquad U = 0$$

doğrusu boyunca keserler. O halde, birbirine paralel iki düzlem sonsuzdaki düzlemi aynı doğru boyunca keser. Bunun karşıtının doğruluğu açıkca görülmektedir.

Aynı şekilde hiçbir zorluğa uğramadan ispat edilir ki birbirine paralel iki doğrunun sonsuzdaki noktaları aynıdır ve karşıt olarak sonsuzdaki noktaları aynı olan iki doğru birbirine paraleldir; bunun gibi, bir düzleme paralel olan bir doğrunun sonsuzdaki noktası bu düzlemin sonsuzdaki doğrusuna aittir ve bunun karşıtı da doğrudur.

Argeziyen uzayda, paralellik kavramı yerine, sonsuzdaki düzleme varma kavramı konulmuştur.

68. Sonsuzda sanal elemanlar. Daha önce de kaydettiğimiz gibi, cebirsel eğri ve yüzeyler geometrisine daha fazla bir birlik sağlamak amaciyle, analitik geometriye sanal noktalar adı verilen ve hiç olmazsa birisi sanal olan üç x, y, z sayısı ile tanımlanmış topluluklardan ibaret bulunan birtakım sun'î noktalar ithal etmek zorunda kalınmıştı. Bu kavram, tabiatiyle, karteziyen uzaydan argeziyen uzaya naklolunabilir, ve bu takdirde bu sonuncu uzaya ait bir sanal noktanın homogen karteziyen koordinatlarından hiç olmazsa birisi sanaldır.

Bu noktalar anlaşıldıktan sonra, uzayı bir $Oxyz$ dik üçyüzlüsüne nispet edelim. Merkezi x_0, y_0, z_0 ve yarıçapı da R olan bir kürenin denklemi

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

veya homogen koordinatlar cinsinden

$$X^2+Y^2+Z^2-2U(x_0X+y_0Y+z_0Z)+U^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0$$

dır.

Bu kürenin sonsuzdaki düzlemle arakesidinin denklemleri

$$X^2+Y^2+Z^2=0, \qquad U=0$$

dır.

Bu, bütün noktaları sanal olan bir eğridir; zira bir kere bu noktaların koordinatlarının hepsi sıfır olamaz, öte yandan yukarıki denklemlerden birincisi, hepsi sıfır olmıyan gerçel sayılarla sağlanamaz. Bu eğriye *sonsuzdaki sanal çember* veya *mutlak çember* adı verilir. Bunun denklemleri x_0, y_0, z_0, R sayılarına bağlı olmadıklarından bu çember uzayın bütün kürelerinde ortaktır.

Karşıt olarak, uzayın bir ikinci derece yüzeyi, yâni X, Y, Z, U cinsinden ikinci dereceden, tam, rasyonel ve homogen bir çokterimlinin sıfıra eşit kılınması suretiyle temsil olunan bir yüzey mutlak çemberden geçtiği takdirde, zahmetsizce görüleceği gibi, zorunlu olarak bir küredir.

Aynı soru, düzlemde ele alındığı takdirde, *siklik* noktalar kavramına varılır. $Z=0$ düzlemine ait bir çemberin homogen denklemi

$$X^2+Y^2-2U(x_0X+y_0Y)+U^2(x_0^2+y_0^2-r^2)=0$$

dır.

Bu çember, sonsuzdaki düzlemi

$$X^2+Y^2=0, \qquad U=0$$

noktalarında, yâni koordinatları $(i, 1, 0)$, $(i, -1, 0)$ olan noktalarda keser. Bunlar $Z=0$ düzleminin *siklik noktaları* dır.

Genel bir şekilde, bir α düzlemi, sonsuzdaki sanal çemberi, bu düzlemin siklik noktalarından ibaret olan iki sanal noktada keser. α düzleminin her çemberi, bu düzlemin siklik noktalarından geçeceği gibi, karşıt olarak α düzleminin siklik noktalarından geçen ve bu düzlem üzerinde bulunan her konik de bir çemberdir.

Uzayın mutlak çembere dayanan doğruları, sanal doğrulardır; bunlara *izotrop doğrular* denilir.

69. Afin geometri. Bir benzeşime tekabül eden (II) denklemlerini yeniden ele alalım ve bunları, ϱ bir orantılılık çarpanını göstermek üzere homogen koordinatlar cinsinden yazalım:

$$(II') \qquad \begin{cases} \varrho X = a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + x_0U', \\ \varrho Y = b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + y_0U', \\ \varrho Z = c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + z_0U', \\ \varrho U = \qquad\qquad\qquad U'. \end{cases}$$

Bu formüller gösterir ki sonsuzdaki düzlem koordinat üçyüzlüsünün seçimine bağlı değildir.

(II') denklemleri, yegâne

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

şartını sağlamak üzere

$$(III) \qquad \begin{cases} \varrho X = a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + a_4U', \\ \varrho Y = b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + b_4U', \\ \varrho Z = c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + c_4U', \\ \varrho U = \qquad\qquad\qquad U', \end{cases}$$

şeklinde yazacağımız daha genel bir tipin özel halidir.

Bir (X', Y', Z', U') noktasına bir tek (X, Y, Z, U) noktası tekabül eder ve bunun karşıtı da doğrudur, zira (III) denklemleri X', Y', Z', U' cinsinden çözülebilir ve böyle bir (X, Y, Z, U) noktasına da bir tek (X', Y', Z', U') noktası tekabül eder.

Bir düzlem, homogen karteziyen koordinatlar cinsinden X, Y, Z, U ya göre linear ve homogen bir denklemle gösterildiğinden, (III) denklemleri ile, düzlemlere düzlemler, ve dolayısiyle doğrulara da doğrular tekabül ettirilir. Özel olarak $U=0$ ile tanımlanan sonsuzdaki düzlem kendi kendisinin homoloğudur; bu düzlemin (III) dönüştürümü için *birleşik* bir düzlem olduğu söylenir.

Argeziyen uzayın (III) şeklindeki bir dönüştürümüne *afinite* denilir. Afinitelerin de G_a ile gösterilen bir gurup meydana getirdikleri açıkca görülmektedir.

Asal gurubu G_a olan geometriye Afin Geometri denilir. Argeziyen uzaydaki geometrik şekillerin, afinitelerin uygulanması sonucunda değişmiyen (invariyant kalan) özeliklerinin topluluğu bu geometriyi meydana getirir.

Afin geometrinin ilk özeliklerinin nelerden ibaret olduğuna bakalım.

Birbirine paralel iki a, b doğrusunu ele alalım; bunlar sonsuzdaki düzlemin bir P noktasında kesişirler. Bir afinite ile a, b doğrularına tekabül ettirilen doğrular a', b' ve P nin homoloğu da P' olsun. Madem ki P noktası $U=0$ la tanımlan sonsuzdaki düzleme aittir, o halde P' noktası da $U'=U=0$ sonsuzdaki düzleminin bir noktasıdır. Buna göre a', b' doğruları birbirine paraleldir.

O halde bir afinitede paralel iki doğruya gene paralel iki doğru tekabül etmektir. Bunun gibi, birbirinin paraleli iki düzleme de gene birbirinin paraleli iki düzlem tekabül eder. Fakat

paralelliğin muhafaza olunmasına mukabil, açılar için aynı şey söylenemez, örneğin, bir üçgen ve afinite ile buna tekabül eden homolog üçgen, genel olarak birbirinin benzeri değildir.

Bir afinitede birbirinin homologu iki doğru a, a' ve a ya ait birtakim noktalar A, B, C, D, ... ve bunların a' üzerindeki homologları da A', B', C', D', ... olsun.

A ve A' noktalarından, ne a yı ne de a' yü ihtiva etmemek üzere herhangi bir α düzlemini geçirelim. α düzlemine paralel olan ve sırasıyle B, C, D, ... noktalarından geçirilen β, γ, δ, ... düzlemleri B', C', D', ... noktalarından geçerler. Paralel düzlemlerin iki doğru üzerinde ayırdıkları doğru parçalariyle ilgili özeliklere göre

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots.$$

olur.

Bu bağıntılardan, özel olarak, $ABCD$ ve $A'B'C'D'$ dörtlülerinin harmonisiz oranlarının eşitliği çıkarılır:

$$(A,\ B,\ C,\ D)=(A',\ B',\ C',\ D')$$

Eğer S noktası a ya ait değilse, ve S' de bunun homologu ise; SA, SB, SC, SD doğrularına sırasiyle $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$ doğruları tekabül eder. Dolayısiyle, dört doğrunun harmonisiz oranı, bir afinite ile bunlara tekabül eden dört homolog doğrunun harmonisiz oranına eşittir.

Bunun gibi, bir demete ait dört düzlemin harmonisiz oranı, homolog dört düzleminkine eşittir.

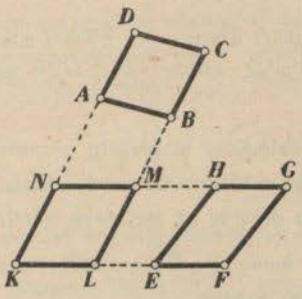
Afinite, birinci cinsten bir formun dört elemanı ile tanımlanan harmonisiz oranı değiştirmez.

Veya :

Bir afinitede birbirinin homologu olan birinci cinsten iki form izdüşeldir.

Bizi bu sonuçlara vardıran özelik, afinitelerin önemli bir özeliğini daha verecektir.

Bir ω düzleminde iki $ABCD$, $EFGH$ paralelkenarını ele alalım (*Şek.* 27). $KLMN$ paralelkenarını teşkil etmek üzere;



Şek. 27

BC, DA, EF, GH kenarlarını uzatalım. İki $ABCD$, $KLMN$ paralelkenarlarının yükseklikleri aynı olduğundan, bunların alanlarının oranı, tabanlarının oranına eşittir ve

$$\frac{ABCD \text{ alanı}}{KLMN \text{ alanı}} = \frac{DA}{NK}$$

dır.

Aynı şekilde

$$\frac{EFGH \text{ alanı}}{KLMN \text{ alanı}} = \frac{EF}{KL}$$

dir.

Bir afinite ile ω ya tekabül eden düzlem ω' olsun. Aynı afinitede A, B, ..., N noktalarının homologları da A', B', ..., N' olsun. Birer paralelkenar olan $A'B'C'D'$, $E'F'G'H'$, $K'L'M'N'$ dörtgenleri, ω düzlemindeki mütekabil paralelkenarların durumunda olduklarından

$$\frac{A'B'C'D' \text{ alanı}}{K'L'M'N' \text{ alanı}} = \frac{D'A'}{N'K'}, \qquad \frac{E'F'G'H' \text{ alanı}}{K'L'M'N' \text{ alanı}} = \frac{E'F'}{L'K'}$$

dür.

Fakat homolog DA, $D'A'$ ve EF, $E'F'$ doğruları üzerinde

$$\frac{DA}{D'A'}=\frac{NK}{N'K'}, \qquad \frac{EF}{E'F'}=\frac{LK}{L'K'}$$

dür ve dolayısiyle

$$\frac{ABCD \text{ alanı}}{A'B'C'D' \text{ alanı}}=\frac{EFGH \text{ alanı}}{E'F'G'H' \text{ alanı}}$$

olur.

Homolog iki düzlemde, birbirinin homoloğu iki paralelkenarın alanlarının oranı sabittir. Homolog ABC, $A'B'C'$ üçgenlerini ele almakla da aynı şekilde şu neticeye varılır:

Bir afinitede, homolog düzlemlerde bulunan homolog üçgenlerin alanlarının oranı sabittir.

Açıkca görüleceği gibi, ω düzleminin değişmesi halinde, bu oranın değeri de değişebilir.

Aynı şekilde ispat edilir ki *bir afinitede, homolog iki dörtyüzlünün hacimlerinin oranı sabittir. Buna afinite oranı denilir.*

70. Afiniteler, benzeşimler ve hareketler arasında bağıntılar. Bir benzeşimin homogen koordinatlar cinsinden yazılan denklemlerinden hareket ederek (III) bağıntılarını ithal ettik. Benzeşimler, ve dolayısiyle hareketler, afinitelerin özel halleridir. Şimdi bunun hangi şartlar altında böyle olduğunu inceleyeceğiz.

Mukayese üçyüzlüsü dik farzedildiğine göre, (III) afinitesi ile

$$X^2+Y^2+Z^2=0, \qquad U=0$$

mutlak çemberine, genel olarak bu çemberden farklı olmak üzere, sonsuzdaki düzlemin bir koniğinin tekabül ettirildiğini kaydedelim. (III) afinitesinin sonsuzdaki sanal çemberi kendi kendisine dönüştürmesini isteyelim. Bu takdirde, λ sayısı (III) denk-

lemlerinin katsayılarına bağlı olmıyan bir çarpanı göstermek üzere

$$X^2+Y^2+Z^2=\lambda(X'^2+Y'^2+Z'^2)$$

olmalıdır. Bu da

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=\lambda\varrho^2,$$

$$a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

olmasını gerektirir.

O halde, (III) afinitesi bir benzeşim olur.

Bir benzeşim, mutlak çemberi muhafaza eden bir afinitedir.

Bundan da şu sonuç çıkarılır ki G_s benzeşimler gurubu, G_a afiniteler gurubunun bir alt-gurubudur.

(III) denklemlerinde, ilk üç denklemin iki tarafını $\varrho U=U'$ ile bölmek suretiyle homogen olmıyan koordinatlara dönelim; bu takdirde bu denklemler

$$\text{(III')}\qquad \begin{cases} x=a_1x'+a_2y'+a_3z'+a_4, \\ y=b_1x'+b_2y'+b_3z'+b_4, \\ z=c_1x'+c_2y'+c_3z'+c_4 \end{cases}$$

şeklini alırlar.

Bu afinitenin, iki nokta arasındaki uzaklığı muhafaza etmesi şartını koşalım. İdentiklemek suretiyle, yukarıda bulunan son üç şarta ek olarak yeni

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$$

şartına varılır.

Böylelikle afinite bir harekete (özel benzeşime) inkilâbeder.

Uzaklıkları muhafaza eden bir afinite bir hareketten ibarettir.

71. Açı ölçümlerine Laguerre tarafından verilen yorum şekli. LAGUERRE (1834-1886) tarafından daha lisede öğrenci iken elde olunan ve açı ölçümlerinin çok hoş bir yorumundan ibaret bulunan bir formülü kullanmak suretiyle bir benzeşimin, açıları muhafaza eden bir afinite olduğu ispat edilebilir.

İki Ox, Oy dik eksenine nispet edilen bir düzlemde iki a, b doğrusunu ele alalım ve bunların meydana getirdiği açıya da V diyelim. Bu açı aynı zamanda O başlangıcından bu iki doğruya çizilen

$$(1) \qquad y = mx, \qquad y = m'x$$

paralelleri arasındaki açıdan ibarettir. Bu takdirde

$$\operatorname{tg} V = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

olduğu bilinen bir keyfiyettir.

O dan iki

$$y = ix, \qquad y = -ix$$

izotrop doğrusu, yâni siklik noktaları ihtiva eden iki doğru geçer.

İki izotrop doğru ve (1) denklemleriyle tanımlanan iki doğrunun α harmonisiz oranı, dört $i, -i, m, m'$ sayısının harmonisiz oranına, yâni

$$\alpha = (i, -i, m, m') = \frac{i - m}{i - m'} : \frac{-i - m}{-i - m'}$$

$$= \frac{1 + mm' + i(m - m')}{1 + mm' - i(m - m')}$$

ye eşittir.

Buna göre

$$\alpha = \frac{\cos V + i \sin V}{\cos V - i \sin V}$$

dir.

Fakat öte yandan

$$e^{iV} = \cos V + i \sin V, \qquad e^{-iV} = \cos V - i \sin V$$

olduğundan,

$$\alpha = \frac{e^{iV}}{e^{-iV}} = e^{2iV}$$

bulunur.

Her iki tarafın neper logaritmasını almak suretiyle de

$$V = \frac{1}{2i} \log_e \alpha$$

sonucu çıkarılır.

Bu, iki doğru arasındaki açının ölçümünü veren LAGUERRE formülüdür.

Şimdi bir T afinitesini ele alalım, ve O da kesişen iki doğru a, b; bunların homologları a', b' ve bu sonuncu doğruların kesim noktası da O' olsun. O noktasından, mutlak çemberi a, b doğrulariyle tanımlanan düzleminin kestiği noktalarda bu çembere dayanan iki t_1, t_2 izotrop doğrusu geçer. Aynı şekilde O' noktasından da, a', b' düzleminde bulunan iki t_1', t_2' izotrop doğrusu geçer.

Eğer T afinitesi açıları muhafaza ediyorsa,

$$(a, b, t_1, t_2) = (a', b', t_1', t_2')$$

olmalıdır.

O halde t_1', t_2' doğruları, belirli bir sırada t_1, t_2 doğrularına tekabül etmelidirler. Bu özeliğin; a, b doğruları hangi doğrular olurlarsa olsunlar, sağlanması gerektiğinden, bundan T nin mutlak çemberi kendi kendisine dönüştürmesinin gerekli olduğu, dolayısiyle bir benzeşimden ibaret bulunduğu sonucu çıkarılır.

Açıların ölçümünü muhafaza eden bir afinite bir benzeşimden ibarettir.

72. İzdüşel uzay. Argeziyen uzayı yeniden ele alalım. Bu uzayda, sonsuzdaki $U=0$ düzlemi imtiyazlı bir rol oynar; izdüşel uzayda aynı şeyin vârid olmadığını daha önce görmüştük. Bu uzay, analitik olarak, aşağıda görüldüğü şekilde ithal olunur:

Katsayılarla teşkil olunan

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

determinantının sıfırdan farklı farzolunduğu

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1=a_1X+a_2Y+a_3Z+a_4U, \\ x_2=b_1X+b_2Y+b_3Z+b_4U, \\ x_3=c_1X+c_2Y+c_3Z+c_4U, \\ x_4=d_1X+d_2Y+d_3Z+d_4U, \end{cases}$$

denklemleriyle dört x_1, x_2, x_3, x_4 sayısını tanımlayalım.

Argeziyen uzayın bir noktasına, yâni X, Y, Z, U nun hepsi birden sıfır almayan bir değer takımına, x_1, x_2, x_3, x_4 ün hepsi birden sıfır olmıyan bu değer takımı tekabül eder. Tersine; x_1, x_2, x_3, x_4 ün hepsi birden sıfır olmıyan bir değer takımına da, Δ sıfır olmadığı için, hepsi birden sıfır olmıyan bir X, Y, Z, U değer takımı, dolayısiyle argeziyen uzayın bir noktası tekabül eder. O halde bir noktanın koordinatları olarak, x_1, x_2, x_3, x_4 sayılarını alabiliriz; bunlara, bahis konusu noktanın *izdüşel koordinatları* denilir.

Bir noktanın homogen karteziyen koordinatları nasıl bir orantılılık çarpanı farkiyle belirli oluyorsa, izdüşel koordinatlar için aynı şey vâriddir.

Bundan önce söylediklerimize göre, izdüşel uzay aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Nokta diye, hepsi birden sıfır olmıyan dört x_1, x_2, x_3, x_4 sayısından meydana gelen topluluğa denilir; bu sayılara noktanın izdüşel koordinatları adı verilir; mütekabil izdüşel koordinatları orantılı olan iki nokta identiktir. İzdüşel uzay, tarif edilegelen noktalar topluluğudur.

İzdüşel uzayı Argeziyen uzaydan ayıran vakıa sonsuzdaki düzlemin hangi düzlemden ibaret bulunduğunun bu uzayda tasrih edilmemiş olması keyfiyetidir. Bu noktayı açıklayalım.

Sonsuzdaki $U=0$ düzlemine, (1) denklemleri yardımiyle, denklemi

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ x_4 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

olan düzlemler tekabül eder.

x_1, x_2, x_3, x_4 izdüşel koordinatlarını tanımlamak için, (1) denklemlerindeki katsayıları keyfî olarak seçebiliriz, elverir ki bu katsayılarla teşkil olunan Δ determinantı sıfır olmasın. Veya aynı şey demek olan şunu da söyliyebiliriz: İzdüşel uzayda, sonsuzdaki düzlemin denklemine giren katsayıları keyfî olarak seçebiliriz, yâni aslında herhangi bir düzlemi sonsuzdaki düzlem olarak alabiliriz.

Şurası açıktır ki herhangi bir düzlem, izdüşel koordinatlar cinsinden linear ve homogen

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{2}$$

denklemiyle gösterilir, ve karşıt olarak böyle bir denklem bir düzlem gösterir.

ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 katsayılarının bilinmesiyle bir düzlem belirlenmiş olur. Bu dört sayının hepsi birden sıfır olamaz, ve öte yandan bunlar bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlanmışlardır,

zira denkleminin iki tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılan bir düzlem değişmez. ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sayılarına *düzlemin koordinatları* veya *teğetsel koordinatlar* denilir.

Uzaydaki düzlemlerin meydana getirdiği topluluk, koordinatları orantılı iki düzlem identik düzlemleri göstermek üzere, hepsi birden sıfır olmıyan dört ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sayı guruplarından teşekkül eden topluluktur.

Nokta geometrik yeri olarak ele alınan izdüşel uzayla, düzlem zarfı şeklinde telâkki olunan aynı uzay arasında burada tam bir paralellik vardır. Düalite ilkesi münasebetiyle bu bahse birazdan tekrar döneceğiz. Şimdilik bir noktayı kaydetmekle yetinelim.

Eğer (2) denkleminde ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 leri verilmiş olarak düşünürsek, bu denklem bir düzlem gösterir. Aksine, eğer x_1, x_2, x_3, x_4 leri verilmiş olarak alırsak, aynı denklem bir noktadan geçen düzlemler topluluğunu, yâni bir düzlem buketini gösterir.

73. İzdüşel geometrinin asal gurubu. Uzayda iki türlü izdüşellik ayırdettik : homografiler veya kolineasyonlar ve karşıtlıklar veya bağlaşımlar.

Bir homografi, bir noktaya bir nokta ve bir düzlemin noktalarına da, gene bir düzlemin noktalarını tekabül ettirmek şartlariyle tanımlanmıştır.

Bir karşıtlığa gelince, bu da bir noktaya bir düzlem, ve bir düzlemin noktalarına da bir noktadan geçen düzlemleri tekabül ettirmek şartlariyle tanımlanmıştır.

ϱ nun bir orantılılık çarpanı ve katsayılarla teşkil olunan

$$\Delta = |\, a_{ik} \,|$$

determinantının da sıfırdan farklı bulunduğu

$$(I)\qquad \begin{cases} \varrho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \varrho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \varrho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ \varrho x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases}$$

denklemleri bir homografiyi temsil ederler. Gerçekten, bu denklemler yardımiyle bir $x_j (j=1, \ldots, 4)$ noktasına, bir $x_j' (j=1, \ldots, 4)$ noktası tekabül eder ve bunun karşıtı da doğrudur. Zira Δ sıfırdan farklı olduğuna göre, (1) denklemleri $x_j (j=1, \ldots, 4)$ lere göre çözülebilir. Öte yandan, eğer $x_j (j=1, \ldots, 4)$ veya $x_j' (j=1, \ldots, 4)$ ler bir düzlemin denklemini sağlarlarsa, aynı şey $x_j' (j=1, \ldots, 4)$ veya $x_j (j=1, \ldots, 4)$ ler için de vâriddir.

Esasen her homografinin (I) şeklindeki denklemlerle gösterilebildiği ispat olunur.

Bunun gibi, katsayılar determinantının sıfır olmadığı

$$(II)\qquad \begin{cases} \varrho \xi_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \varrho \xi_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \varrho \xi_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ \varrho \xi_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases}$$

denklemleri de bir karşıtlığı temsil ederler. Esasen her karşıtlık (II) tipindeki denklemlerle gösterilebilir.

Homografilerle karşıtlıkların tanımından, ve esasen (I) ve (II) denklemlerinin şeklinden şu sonuç çıkar ki:

İki homografinin çarpımı gene bir homografidir.

Bir homografinin bir karşıtlıkla, veya bir karşıtlığın bir homografi ile çarpımı bir karşıtlıktır.

İki karşıtlığın çarpımı ise bir homografidir.

Öte yandan, bir homografinin tersi gene bir homografidir, ve bir karşıtlığın tersi de bir karşıtlıktır.

Buradan da şu çıkar ki:

Uzay homografileri bir G_h gurubunu meydana getirirler.

Uzay izdüşellikleri (homografiler ve karşıtlıklar) izdüşel gurup denilen bir G_p gurubunu teşkil ederler.

Bu sonuncu gurup özel bir mahiyyet arzeder; bu gurup, karşıtlıklar dediğimiz öyle işlemleri ihtiva etmektedir ki bunların çarpımı aynı mahiyette bir işlem değildir. Homografilerin bir gurup teşkil etmelerine mukabil, ki bu gurup izdüşel gurubun bir alt-gurubudur, karşıtlıklar bir gurup vücude getirmezler.

Şimdi artık İzdüşel Geometri'yi kesinlikle tanımlayabilecek duruma geldik demektir.

İzdüşel Geometri, izdüşel guruba ait işlemlerin uygulanması sonucunda şekillerin değişmiyen (invariyant kalan) özelikleri topluluğudur.

Başka deyimle:

İzdüşel Geometri'nin asal gurubu G_p gurubudur.

Bu İzdüşel Geometri'nin yanı başında, asal gurubu homografilerin G_h gurubu olan *dar anlamda bir İzdüşel Geometri* düşünülebilir.

74. Afinitelerle homografiler arasında bağıntı. Bir afinitenin denklemleriyle bir homografininkileri karşılaştıracak olursak, birincilere tekabül eden denklemlerin, ikincilerin bir özel hali olduğunu görürüz. Bir afinitede kendi kendisine dönüşen, yâni birleşik bir düzlem vardır.

İzdüşel uzayda, sonsuzdaki düzlem demeği uygun göreceğimiz bir σ düzlemini tespit edelim. Bu düzlemi kendi kendisine dönüştüren homografiler, afinitelerden başka bir şey değildir.

Görülüyor ki afinitelerin G_s gurubu, homografilerin G_h gurubunun bir alt-gurubudur.

75. Düalite ilkesinin yürürlük alanı. İzdüşel uzayda aşağıki uzayların ayırdedilebileceğini söylemiştik:

1. Nokta uzayı, yâni koordinatları, bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlanan ve hepsi birden sıfır olmıyan dört x_1, x_2, x_3, x_4 sayı guruplarından ibaret x noktaları topluluğu.

2. Teğetsel uzay, yâni koordinatları, bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlanan ve hepsi birden sıfır olmıyan dört ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sayı guruplarından ibaret ξ düzlemleri topluluğu.

Bu kusursuz simetri aslında dualite ilkesini ihtiva eder.

Gerçekten, İzdüşel Geometri'ye ait bir önermeyi düşünelim. Bunu kurabilmek için, aralarında birtakım bağlar bulunan $x, y, z, \ldots$ noktalariyle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ düzlemlerini ele almak zorunda kaldık. Bu bağları da denklemlere çevirmek ve bu sonuncular üzerinde birtakım cebirsel işlemler yapmak lûzumunu duyduk.

Biz, noktaları, kullandığımız alfabenin harfleriyle ve düzlemleri de yunan alfabesine ait harflerle göstermeğe alışığız. Farzedelim ki hesaplarımız, bizim yaptıklarımızın tersini yapmağı âdet edinmiş olan bir şahsa teslim edilmiş bulunsun. Bu şahıs, «nokta» ve «düzlem» kelimelerinin değiştokuşu suretiyle, ifadesi bizimkinden çıkarılacak bir önermeye varacaktır. O halde böylelikle düalite ilkesinin yeni bir ispatını elde etmiş oluruz.

İzdüşel uzaya, hesablarımıza giren, imtiyazlı bir σ düzlemini ithal ettiğimiz takdirde, yukarıda elde ettiğimiz sonuçlar artık hiçbir şekilde yürürlükte olmıyacaktır. Şüphesiz, biraz önce bahis konusu edilen kişi hesaplarımızdan gene bir önerme çıkaracaktır, ama bu önermede imtiyazlı bir nokta bahis konusu olacaktır. Buna göre, eğer izdüşel uzaya, sonsuzdaki düzlem demeği uygun bulduğumuz bir σ düzlemini ithal edersek, bu düzlemin bahis konusu olduğu özeliklere düalite ilkesi hiçbir şekilde uygulanamıyacaktır. Dolayısiyle:

Düalite ilkesi, sonsuzdaki düzlemin bahis konusu olduğu met-

rik geometri, Eukleides geometrisi ve afin geometri özeliklerine uygulanamaz.

76. Soyut bir geometrinin yapımı. Bundan önceki kısımlarda dört türlü geometriyi ele aldık: Metrik Geometri, EUKLEIDES Geometrisi, Afin Geometri, İzdüşel Geometri. Her sefer bu geometrilerin uygulanma alanlarını tanımlamakla işe başladık: İlk ikisi için karteziyen uzay, Afin Geometri için argeziyen uzay, ve İzdüşel Geometri için de izdüşel uzay.

Bundan sonra bu geometrilerin her birisi için bir asal gurubu tanımladık: Metrik Geometri için G_m hareketler gurubu, EUKLEIDES Geometrisi için G_s benzeşimler gurubu, Afin Geometri için G_a afiniteler gurubu, ve nihayet İzdüşel Geometri için de G_p izdüşel gurubu.

Bu örneklere dayanarak, soyut bir geometrinin yapımını aşağıda görüleceği gibi düşünebiliriz:

1. *Noktalar demeği uygun göreceğimiz birtakım elemanlardan meydana gelen bir V variyetesini, ve*

2. *Bu noktalara uygulanan ve bir G gurubunu teşkil eden bir işlemler topluluğunu tasavvur edelim.*

V variyetesi ile meydana gelen ve asal gurubu G olan geometri, bu guruba ait işlemlerin uygulanması sonucunda variyetenin değişmiyen (invariyant kalan) özelikleri topluluğudur.

Bir geometri hakkındaki bu çok genel görüşü SOPHUS LIE (1842-1899) ile FELIX KLEIN (1849-1925) ortaya atmışlardır. Bu sonuncusu, 1872 yılında Almanyanın ERLANGEN şehri Üniversitesinde bir kürsü sahibi kılınması vesilesiyle kaleme alıp okuduğu tanınmış ERLANGEN PROGRAMI'nda bu hususu etraflıca geliştirmiştir.

Bu son yıllara kadar, elemanları gittikçe daha genel bir mahiyyet gösteren variyeteler ve çok genel dönüştürüm gurup-

ları ele alındığı halde geometri hakkındaki bu görüş değişmedi. Son zamanlarda, RIEMANN variyeteleri üzerinde yaptığı araştırmalar dolayısile, ÉLIE CARTAN, geometri kavramının dikkat çekici bir teşmiline ulaştı. Burada sadece bu hususu kaydetmekle yetinmek zorundayız.

77. **Bağlı geometriler.** Evvelce gördük ki afiniteler, benzeşimler ve hareketler birtakım özel homografilerden ibarettir. Daha kesin bir şekilde:

Afiniteler, verilen ve sonsuzdaki düzlem denilen bir düzlemi kendi kendisine dönüştüren izdüşelliklerdir. Açıkca görüldüğü gibi, bir karşıtlık yardımiyle bir noktaya bir düzlem tekabül ettirildiğinden, bu izdüşellikler ancak homografilerden ibaret olabilir.

Benzeşimler, açıların ölçümünü muhafaza eden afinitelerdir.

Hareketler de, uzaklık ölçülerini değiştirmeyen benzeşimlerden ibarettir.

Hareketler gurubu, benzeşimler gurubunun bir alt-gurubudur, benzeşimler gurubu ise afineteler gurubunun bir alt-gurubudur, nihayet afiniteler gurubu da izdüşellikler gurubunun bir alt gurubudur.

Metrik Geometrinin EUKLEIDES Geometrisine, bu sonuncusunun Afin Geometriye, nihayet bunun da İzdüşel Geometri'ye bağlı olduğu söylenir.

Yukarıda söylenilenlere dayanmak suretiyle, verilen bir geometriye bağlı bir geometriyi soyut bir şekilde tanımlıyabiliriz.

Asal gurupu G olan ve bir V variyetesi ile tanımlanan bir geometriyi ele alalım. G gurubunun bir alt-gurubu G' olsun. Asal gurubu G' olmak üzere V variyetesi ile tanımlanacak yeni bir geometri, *birinciye bağlı bir geometri* adını alır.

G gurubu geometrisinin özelikleri, tabiatiyle, G' gurubu geometrisinin özeliklerini vereceklerdir. Bu özelikler esasen o tarzda ifade olunabilirler ki bunların G gurubu geometrisine ait bulundukları ilk bakışta pek belli olmaz.

Nitekim, İzdüşel Geometri'nin özelikleri, birçok defalar kaydettiğimiz gibi, çoğu zaman metrik bağıntılar yardımiyle tesis olunmuşlardır. Ve ancak sonsuzdaki düzlem ve sonsuzdaki sanal çemberin ithali sayesindedir ki kesin bir sınıflama bahis konusu olabilmiştir.

78. Bir geometri örneği. Çok basit bir örnek üzerinde, bir geometrinin yapımını gösterelim.

Bu geometriye ait V variyetesini tanımlamak için, bir O noktasını bir tarafa bıraktığımız karteziyen uzayı ele alalım. Bu variyeteye ait her nokta, başlangıç noktası biraz önce bir yana bırakılan noktadan ibaret bulunan $Oxyz$ üçyüzlüsüne göre hepsi birden sıfır olmıyan x, y, z koordinatları yardımiyle tanımlanabilir.

Uzayın başlangıçtan geçmiyen her düzlemi bir

$$ux + vy + wz = 1$$

denklemiyle gösterilebilir.

Bu düzlemi tanımlamak uzere, yâni bu düzlemin koordinatları olarak, aynı zamanda sıfır olmıyan üç u, v, w sayıları alınabilir.

(1) $$au + bv + cw = 1$$

denklemi, üçü birden sıfır olamıyan a, b, c koordinatlarını haiz noktadan geçen düzlemler topluluğunu gösterir. Şu halde (1) denklemi, V variyetimizin bir noktasının denklemidir.

Bu anlaşıldıktan sonra, V variyetesinin bir geometrisi olarak, asal gurubu,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z', \end{cases}$$

denklemleriyle tanımlanan dönüştürümler topluluğu olanı ele alabiliriz.

Bu dönüştürümlerin, bizim örnek olarak aldığımız geometriyi Afin Geometriye bağlı kılacak şekilde, O noktasını değiştirmiyen afinitelerden ibaret bulunduğunun derhal farkına varılır.

Asal gurup olarak, bir yandan (2) dönüştürümleri öte yandan da sonsuzdaki düzlemi başlangıç noktasına ve başlangıç noktasını da sonsuzdaki düzleme tekabül ettiren ve karşıtlıklardan başka bir şey olmıyan

$$(3)\qquad \begin{cases} u = a_1'x' + a_2'y' + a_3'z', \\ v = b_1'x' + b_2'y' + b_3'z', \\ w = c_1'x' + c_2'y' + c_3'z' \end{cases}$$

dönüştürümleri ile teşkil olunan gurubu almak suretiyle başka bir geometri de düşünülebilir.

Bu yeni geometrimiz, İzdüşel Geometriye bağlı bir geometri olacak, fakat Afin Geometriye bağlı bulunmıyacaktır.

79. Eşdeğer geometriler. İki soyut geometri düşünelim: Birincisi, asal gurubu bir G gurubu olan bir V variyetesinin geometrisi olacaktır; ikincisi de G_1 asal guruplu bir V_1 variyetesinin geometrisinden ibaret bulunacaktır.

Farzedelim ki V nin her elemanına V_1 in bir elemanını tekabül ettirmek ve bunun tersini de yapmak üzere V ile V_1 in elemanları arasında bir dönüştürüm mevcuttur.

V_1 in bir elemanı A_1 ve bunun V deki homologu A olsun. G nin belirli bir T dönüştürümü A ya V nin bir B elemanını tekabül ettirir. B nin de V_1 deki homologu B_1 olsun. B_1 noktası, V_1 de T nin homologu olan bir T_1 dönüştürümü ile A_1 noktasına tekabül eder. Farzedelim ki T_1 dönüştürümü G_1 gurubuna ait olsun ve T nin G gurubunu dolanması halinde, T_1 de G_1 gurubunu dolansın. Ayrıca V, V_1 variyetelerinin rollerini aralarında değiştirdiğimiz takdirde aynı sonuçlara vardığımızı da kabul edelim. Başka deyimle, farzedelim ki V ve V_1 variyeteleri arasında düşünegeldiğimiz dönüştürümler, G ve G_1 guruplarının dönüştürümleri arasında bire-bir bir tekabülü gerektirsin, o şekilde ki guruplardan birinin her dönüştürümüne daima ötekinin bir dönüştürümü tekabül etsin.

Bu şartlar altında birinci geometrinin her özeliğine ikincinin bir özeliği tekabül eder ve bunun karşıtı da doğrudur. Bu iki geometri birbirinin *eşdeğeri* dir.

Düalite ilkesi eşdeğer geometrilere dair bir örnek verir. Noktaların geometrik yeri gibi düşünülen uzayın İzdüşel Geometrisi, düzlemlerin zarfı şeklinde telâkki olunan uzayın İzdüşel Geometrisinin eşdeğeridir.

Eşdeğer geometrilere dair çok basit olan başka bir örnek daha vereceğiz.

V variyetesi olarak, bir izdüşel r doğrusunun noktaları topluluğunu alacağız. Uzay için yukarıda takib olunan usulu taklid ederek, r nin bir x noktasının x_1, x_2 izdüşel koordinatlarını r üzerinde ithal edebiliriz. Bu takdirde G gurubu,

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

farzolunan

$$\alpha x_1 x_1' + \beta x_1 x_2' + \gamma x_2 x_1' + \delta x_2 x_2' = 0$$

dönüştürümleri topluluğu olacaktır.

Bu dönüştürümler doğrunun izdüşellikleridir, o şekildeki ilk geometrimiz bir doğru üzerinde izdüşel geometri olacaktır.

$$X_1 : X_2 : X_3 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2$$

diyelim ve $X_j\,(j=1, \ldots, 3)$ leri bir ϱ düzleminin izdüşel koordinatları gibi düşünelim. r doğrusunun bir $x_j\,(j=1,2)$ noktasına, ϱ düzleminin, denklemi

$$X_2^2 - X_1 X_3 = 0$$

olan R koniğinin bir $X_j\,(j=1, \ldots, 3)$ noktası tekabül eder, ve karşıt olarak bu koniğin bir noktasına da r doğrusu üzerinde koordinatları

$$x_1 : x_2 = X_1 : X_2$$

olan nokta tekabül eder.

V_1 variyetesi R koniği olacak ve G_1 gurubu da

$$\varrho X_1' = \beta^2 X_1 + 2\beta\delta X_2 + \delta^2 X_3,$$

$$\varrho X_2' = -\alpha\beta X_1 - (\alpha\delta + \beta\gamma) X_2 - \gamma\delta X_3,$$

$$\varrho X_3' = \alpha^2 X_1 + 2\alpha\gamma X_2 + \gamma^2 X_3$$

dönönüştürümleri topluluğundan, yâni R koniğini kendi kendisine dönüştüren ve ϱ düzlemine ait olan homografilerden meydana gelecektir.

Şu halde bir doğru üzerindeki İzdüşel Geometri, bir konik üzerindeki geometrinin eşdeğeridir, o şekilde ki bu sonuncu geometrinin asal gurubu bahis konusu konik düzleminin bu koniği kendi kendisine dönüştüren homografiler gurubudur.

Şurası apaçıktır ki bir geometrinin bilinmesiyle, bunun eşdeğeri olan her geometri de biliniyor, demektir. Bununla beraber, geometrik özeliklerin araştırılmasında, bir geometriden bunun

eşdeğeri olan bir geometriye geçilmekle çoğuzaman büyük fayda ve kolaylıklar sağlanmış olur.

Üzerinde durduğumuz bu son noktayı daha iyi anlatabilmek için, biraz önceki örneği yeniden ele alalım. r doğrusu üzerinde

$$\lambda_1(a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2) + \lambda_2(b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2) = 0$$

denklemini ele alalım; bu denklem, bahis konusu doğrunun bir çift noktasını gösterir. a_j ve b_j $(j = 1, \ldots, 3)$ lerin tespit edildiğini farzedelim. λ_j $(j = 1, 2)$ lerin değişmesi halinde, r doğrusunun sonsuz nokta çiftinden meydana gelen ve *involüsyon* denilen bir şekil elde ederiz. Bu vesile ile şunu da söyliyelim ki r nin bir noktası, involüsyonun bir ve yalnız bir çiftine aittir.

Yukarıki denklem, ϱ düzlemine nakledildiği takdirde,

$$\lambda_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) + \lambda_2(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) = 0$$

şeklini alır.

R koniği üzerinde, involüsyonun çift noktalarını, bir demetin doğruları verecektir. Ve şurası apaçıktır ki bu şekilde hareket etmekle, involüsyon özeliklerinin araştırılması kolaylaştırılmış olur.

80. Regle geometri. Şimdi eşdeğer geometrilerin yapımı hakkında, daha az basit fakat klâsik bir örneği inceleyeceğiz. Bu örneği de bize uzayda doğru geometrisi verecektir.

Uzaydaki bir doğrunun

$$y = mx + p, \qquad z = nx + q$$

denklemleriyle gösterilebileceğini kaydetmekle işe başlıyalım. Şu halde uzaydaki doğrular dört m, n, p, q parametresine bağlıdırlar.

İzdüşel uzayın bahis konusu olduğunu farzedelim ve iki y, z noktasiyle belirli olan bir p doğrusunu ele alalım. Ve

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \qquad (i, k = 1, \ldots, 4)$$

diyelim.

İki indisi birbirine eşit olan ve identik olarak sıfıra eşit bulunan p_{ik} sayılarını bir yana bırakırsak, bu suretle hepsi birden sıfır olmıyan ve birbirlerine de altı

$$p_{ik} + p_{ki} = 0$$

bağıntısiyle bağlı bulunan oniki sayıyı tanımlamış oluruz.

Buna göre, düşüncelerimizi altı

(1) $$p_{12},\ p_{13},\ p_{14},\ p_{23},\ p_{42},\ p_{34}$$

sayısına inhisar ettirebiliriz.

Esasen bu altı sayı da bağımsız değildir; bunlar birbirine, kolaylıkla gerçeklenebilecek olan

(I) $$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

eşitliğiyle bağlıdırlar.

Şurasına dikkati çekelim ki p doğrusunun farklı fakat herhangi iki noktasını ele alırsak, bu yeni iki nokta yardımiyle teşkil olunacak p_{ik} sayıları; y, z noktaları vasıtasiyle teşkil olunup bir sayı ile çarpılan p_{ik} sayılarına eşittirler. Gerçekten, p doğrusunun farklı iki noktası

$$\alpha y_i + \beta z_i, \quad \gamma y_i + \delta z_i, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

şeklinde koordinatları haizdir.

Bu takdirde

$$(\alpha y_i + \beta z_i)(\gamma y_k + \delta z_k) - (\alpha y_k + \beta z_k)(\gamma y_i + \delta z_i) = (\alpha\delta - \beta\gamma)p_{ik}$$

dır.

Öte yandan, p doğrusu dört

$$(2)\qquad \begin{cases} p_{34}x_2 + p_{42}x_3 + p_{23}x_4 = 0, \\ -p_{14}x_3 + p_{13}x_4 + p_{34}x_1 = 0, \\ -p_{12}x_4 + p_{42}x_1 + p_{14}x_2 = 0, \\ p_{23}x_1 - p_{13}x_2 + p_{12}x_3 = 0 \end{cases}$$

düzleminin ortak arakesitidir.

Buradan da şu sonuç çıkar ki bir yandan İzdüşel Uzayın doğruları öte yandan da (I) bağıntısiyle birbirlerine bağlı bulunan ve bir orantılılık çarpanı farkiyle belirlenen altı (1) sayı gurupları arasında bire bir bir tekabül vardır. O halde bu sayılar doğrunun koordinatları olarak alınabilirler. Bu koordinatlar PLÜCKER (1801-1868) tarafından ithal edilmişlerdir; bunlara doğrunun PLÜCKER koordinatları denilir.

Şurasını kaydedelim ki uzay homografileri ile, bir doğrunun noktalarına gene bir doğrunun noktaları; karşıtlıklarla da bir doğrunun noktalarına, bir doğrudan geçen düzlemler tekabül ettirilir. Başka deyimle, uzay izdüşellikleri ile doğrulara doğrular tekabül eder.

Bunlar bir kere anlaşıldıktan sonra, *uzayda doğrunun izdüşel geometrisi* diye, *asal gurubu izdüşel gurup olan geometriye* diyeceğiz.

Şimdi altı (1) sayısını yeniden ele alalım. Bu altı sayıdan teşekkül eden topluluğa itibarî olarak nokta diyelim, ve bu sayılar da noktanın koordinatları olsun. Bu sayıların hepsinin aynı zamanda sıfır olmadıklarını ve koordinatları orantılı olan iki noktanın da identik bulunduklarını farz ediyoruz. Bu şekilde tanımlanan noktalar topluluğuna beş boyutlu izdüşel uzay adını verelim.

Âdi uzaydaki İzdüşel Geometri'ye benzeterek, beş boyutlu

uzayın noktaları arasında katsayıların A_{ijk} determinantı sıfırdan farklı olmak üzere,

$$(II)\quad \begin{cases} \varrho p'_{12} = A_{112}p_{12} + A_{113}p_{13} + A_{114}p_{14} + A_{123}p_{23} \\ \qquad\qquad + A_{142}p_{42} + A_{134}p_{43}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho p'_{34} = A_{612}p_{12} + A_{613}p_{13} + A_{614}p_{14} + A_{623}p_{23} \\ \qquad\qquad + A_{642}p_{42} + A_{634}p_{43}, \end{cases}$$

denklemleriyle gösterilen bir tekabüle bu uzayda homografi adını vereceğiz. Bu homografilerin bir gurup vücuda getirdikleri çok açıktır.

Daima âdi uzaya benzeterek hareket etmek suretiyle, beş boyutlu uzayın, koordinatları (I) denklemini sağlıyan noktaları topluluğu bir hiperkuvadrik vücuda getirir, diyeceğiz. Bu hiperkuvadriği Q ile göstereceğiz.

Biraz önce verdigimiz tanımlara göre, âdi uzayın bir doğrusuna Q hiperkuvadriğinin bir noktası tekabül eder, ve bunun karşıtı da doğrudur. Bu bire-bir tekabül istisnasız vâki olur.

Kolaylıkla görmek mümkündür ki âdi uzayın doğrulara uygulandığı düşünülen bir homografisine veya bir karşıtlığına, beş boyutlu uzayın (II) şeklinde bir homografisi tekabül eder. Fakat bu herhangi bir homografi değildir; bu homografinin (II) bağıntısını aynen muhafaza etmesi, yâni Q hiperkuvadriğini kendi kendisine dönüştürmesi gereklidir. Tersine, Q hiperkuvadriğini kendi kendisine dönüştüren bir (II) homografisi uzayın bir homografisine veya bir karşıtlığına tekabül eder.

Buna göre görülüyor ki:

Âdi uzayın izdüşel regle geometrisi, beş boyutlu izdüşel uzayın bir hiperkuvadriğinin geometrisi ile eşdeğerlidir; bu geometrinin asal gurubu, izdüşel uzayın bu hiperkuvadriği kendi kendisine dönüştüren homografiler gurubudur.

Regle geometrinin bu şekildeki yorumunu FELIX KLEIN yapmıştır. Kendi kendimize bunun ne gibi bir faydası olduğunu sorabiliriz.

Bir doğrunun doğurduğu bir yüzeye (regle yüzeye) Q üzerine çizilmiş bir eğri tekabül eder. İki parametreye bağlı bir doğru topluluğuna, veya bir doğru kongrüansına, Q üzerine çizilmiş bir yüzey tekabül eder. Nihayet üç parametreye bağlı bir doğru topluluğuna, veya doğru kompleksine de, Q ye ait üç boyutlu bir variyete tekabül eder. Deney gösterir ki genel olarak, hattâ beş boyutlu bir uzaya ait olsa dahi, bir nokta geometrik yeri üzerine muhakeme yürütmek, âdi uzaydaki doğruların bir geometrik yerini incelemekten çok daha kolaydır. İşte KLEIN'ın temsil tarzındaki fayda da bundan ileri gelir.

81. İzdüşel Geometrinin teşmili. Regle Geometrinin beş boyutlu uzaydaki bir geometri yardımiyle yorumlanması keyfiyeti, İzdüşel Geometri'nin de üçten fazla boyutlu uzaylara veya hiperuzaylara teşmili imkânlarını tahmine vesile olur.

Hepsi birden sıfır olmıyan $n+1$ sayıda $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sayılarını ele alalım ve bu sayılar topluluğuna itibarî olarak x noktası diyelim; bu sayılara da x noktasının izdüşel koordinatları adını verelim. Ayrıca izdüşel koordinatları orantılı olan iki noktaya da identik gözü ile bakalım. Bu şekilde tanımlanan x noktaları tokluluğu *izdüşel uzay* veya *n boyutlu linear* S_n *uzayı* dediğimiz şeyi meydana getirir.

S_n nin, koordinatları bir

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0 \tag{1}$$

linear denklemini sağlıyan x noktaları topluluğu, bir ξ *hiperdüzlemi* dediğimiz şeyi vücuda getirir. $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ ile orantılı ve hepsi birden sıfır olmıyan $n+1$ sayının bilinmesi ile (1) denklemi yazılabilir. Koordinatları orantılı iki hiperdüzlem identik

olmak üzere, hepsi birden sıfır olmıyan $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ sayılarının, ξ hiperdüzleminin koordinatları olduğunu söyliyeceğiz.

Eğer (1) denkleminde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sayılarını verilmiş ve $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ sayılarını da değişken farzedersek, x noktasını ihtiva eden bütün hiperdüzlemlerin koordinatlarının sağladığı bir bağıntı elde olunur; bu, x noktasının teğetsel denklemidir.

Görülüyor ki, âdi S_3 uzayı halinde olduğu gibi, S_n ye ait noktalar ve hiperdüzlemlerin temamiyle simetrik rolleri vardır, ve bundan S_n uzayında düalite ilkesi çıkarılır.

$(p+1)$ sayıda bağımsız $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ sayılarını ele alalım, yâni $n+1$ sayıda

$$\lambda_0 y_i^{(0)} + \lambda_1 y_i^{(1)} + \cdots + \lambda_p y_i^{(p)} = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

identikliklerinin gerçeklenmesini sağlıyacak şekilde $p+1$ sayıda ve hepsi birden sıfır olmıyan λ sayıları bulunamasın.

Koordinatları

$$\begin{aligned}
\varrho x_0 &= m_0 y_0^{(0)} + m_1 y_0^{(1)} + \cdots + m_p y_0^{(p)},\\
\varrho x_1 &= m_0 y_1^{(0)} + m_1 y_1^{(1)} + \cdots + m_p y_1^{(p)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho x_n &= m_0 y_n^{(0)} + m_1 y_n^{(1)} + \cdots + m_p y_n^{(p)}.
\end{aligned}$$

şeklinde yazılan noktalar topluluğunu düşünelim.

Bu topluluk, bir izdüşellik çarpanı farkiyle tanımlanan ve hepsi birden sıfır olmıyan $p+1$ sayıda $m_0, m_1, \ldots, m_p$ sayı gurupları topluluğu ile çakışır; dolayısiyle bu topluluk, verilen $p+1$ sayıda y noktalariyle belirli olan, p boyutlu bir S_p linear uzayını vücuda getirir.

Esasen bu S_p uzayı, bağımsız $n-p$ sayıda hiperdüzlemin arakesiti olarak temamiyle belirlidir. Özel olarak, n sayıda noktasiyle belirli olan bir hiperdüzlem, $n-1$ boyutlu bir linear uzaydır.

Kolaylıkla görülür ki, (t den fazla boyutlu bir ortak uzayları olmamak üzere) bir S_t ortak uzayını haiz olan iki linear S_p, S_q uzayı (r den az boyutlu bir uzaya ait olmamak üzere) bir S_r uzayına aitseler,

$$p+q=r+t$$

dir.

Bu nokta anlaşıldıktan sonra, S_n uzayında *homografi* diye, x, x' noktaları arasında, $|a_{ik}|$ katsayılar determinantının sıfır olmadığı

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \varrho x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n, \\ \varrho x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho x_n' = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

denklemleriyle tanımlanan tekabüle diyeceğiz.

Bir ξ hiperdüzleminin noktalarına bir homografi sonucunda bir ξ' hiperdüzleminin noktaları tekabül eder ve daha genel olarak, p boyutlu linear bir uzayın noktalarına da, gene p boyutlu linear bir uzayın noktaları tekabül eder.

S_n uzayının bir *karşıtlığı*, $|a_{ik}|$ katsayılar determinantının sıfırdan farklı olduğu

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \varrho \xi_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n, \\ \varrho \xi_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho \xi_n' = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

denklemleriyle tanımlanır.

Bir noktaya bir hiperdüzlem, ve p boyutlu linear bir uzayın noktalarına da $n-p-1$ boyutlu linear bir uzaydan geçen hiperdüzlemler tekabül eder.

S_n e ait karşıtlıklar ve homografiler topluluğu, *izdüşellikler guruba* denilen bir gurup meydana getirir.

S_n nin İzdüşel Geometrisi, asal gurubu G_p olan geometridir.

Karşıtlıklar bir gurup vücuda getirmezler, ama homografiler bir G_h gurubunu teşkil ederler. *S_n nin dar anlamdaki İzdüşel Geometrisi, asal gurubu G_h olan geometridir.*

S_3 âdi uzayına benzetmek işine devamla, n boyutlu uzayın afinitelerini, benzeşimlerini ve hareketlerini tanımlıyabiliriz.

Hasolmıyan bir hiperdüzlem veya *sonsuzdaki hiperdüzlem* adını vereceğimiz imtiyazlı bir σ hiperdüzlemini ithal edelim. S_n nin bu hiperplanı birleşik bir hiperplan olarak haiz olan, yâni σ nın bir noktasına gene σ nın bir noktasını tekabül ettiren homografilerine *afiniteler* denilir. Afiniteler, S_n nin *Afin Geometrisinin asal gurubundan* ibaret olan bir G_a gurubu vücuda getirirler.

Eğer, fikirleri tespit amaciyle, σ hiperdüzleminin denklemi $x_0 = 0$, ise, a_{00} sıfırdan farklı olmak üzere, afiniteler

$$a_{01} = a_{02} = \cdots = a_{0n} = 0$$

yazılan (I) formülleriyle gösterileceklerdir.

S_n uzayından, $x_0 = 0$ la tanımlanan σ hiperdüzleminin noktalarını çıkarmakla, *n boyutlu karteziyen uzay* adını vereceğimiz ve S_n' le göstereceğimiz yeni bir uzay elde ederiz. Bu yeni uzayın bir noktası,

$$X_1 = \frac{x_1}{x_0}, \qquad X_2 = \frac{x_2}{x_0}, \qquad \cdots, \qquad X_n = \frac{x_n}{x_0}$$

sonlu sayıları ile temamiyle belirli olacaktır, bunlar bu X noktasının hamogen olmıyan koordinatlarıdır.

Bir afinitenin denklemleri

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} X_1' = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n, \\ X_2' = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n' = A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \cdots + A_{nn}X_n \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $x_0 = 0$ hiperdüzleminde sanal bir Q hiperkuvadriğini, yâni bu hiperdüzlemin, koordinatları, bütün çözümleri sanal olan ikinci dereceden bir

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

denklemini sağlıyan noktaları topluluğunu verelim. Esasen daima o şekilde tedbir alınabilir ki Q nün denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

şeklini, veya homogen olmıyan koordinatlar cinsinden

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = 0$$

şeklini alsın.

Bu anlaşıldıktan sonra, Q hiperkuvadriğini kendi kendisine dönüştüren bir afiniteye *benzeşim* denilecektir. Bu da (III) denklerinin

$$(2) \qquad X_1'^2 + X_2'^2 + \cdots + X_n'^2 = \lambda(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$$

verdiklerini farzetmekle birdir.

Benzeşimler, S_n' *karteziyen uzayının Eukleides Geometrisinin asal gurubundan* ibaret bulunan bir G_s gurubunu teşkil ederler. Nihayet, uzaklıkları muhafaza etmesi halinde bir benzeşime *hareket* adı verilir; bu da (2) denkleminde $\lambda = 1$ farzetmek demektir. Hareketler, S_n' *karteziyen uzayının metrik geometrisinin asal gurubundan* ibaret bulunan bir G_m gurubunu teşkil ederler.

Şurasını da kaydedelim ki daha önce $n = 3$ halinde yaptığımız gibi, S_n' karteziyen uzayından ve bu uzayın hareketlerinden başlıyarak sıra ile benzeşimlere, afinitelere ve izdüşelliklere de geçebilirdik.

82. Cebirsel Geometri. İzdüşel Geometri, homografi kavramını genişletmek suretiyle elde olunan, temamiyle farklı bir teşmile de elverişlidir.

Daha çok kolaylığı temin amaciyle âdi S_3 uzayına dönelim. Eğer iki x, x' noktası bir homografide birbirinin homoloğu ise, birinin koordinatları, diğerinin koordinatlariyle teşkil olunan birinci dereceden çokterimlilerle orantılıdırlar. Çokterimlilere yüklenilen birinci dereceden olma şartını bir tarafa bırakmak suretiyle, homografilerin cebirsel ve bire-bir karakterini haiz tekabüller elde edebilir miyiz? Basit bir örnek, bu sorunun olumlu bir şekilde cevaplandırılabileceğini bize gösterecektir.

Her ikisi verilmiş bir O noktası ile bir R sayısını ele alalım. Aşağıki şartların sağlanması halinde iki noktaya homolog diyeceğiz:

a) MM' doğrusu O dan geçmektedir.

b) OM, OM' doğru parçaları

$$OM \cdot OM' = R^2$$

şartını sağlarlar.

Bu, *evirtim* diye adlandırılan dönüştürümden ibarettir.

O başlangıç noktalı üç dik koordinat ekseni seçelim ve M nin koordinatları x, y, z ve M' noktasınınkiler de x', y', z', olsun. Bu takdirde hiçbir güçlüğe uğramadan

$$x' = R^2 \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad y' = R^2 \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad z' = R^2 \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

bağıntıları elde edilir ve aynı şekildeki bağıntılar x, y, z yi x', y', z' cinsinden verir.

Bu örnek gösterir ki izdüşsel uzayda x, x' noktaları arasında, f_1, f_2, f_3, f_4 dereceleri m olan çokterimlileri ve φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 de dereceleri n olan çokterimlileri göstermek, ve m ile n de birden büyük almak üzere öyle bire-bir tekabüller vardır ki

$$\frac{x_1'}{f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{x_2'}{f_2} = \frac{x_3'}{f_3} = \frac{x_4'}{f_4} \tag{1}$$

ve

$$(2) \qquad \frac{x_1}{\varphi_1(x_1', x_2', x_3', x_4')} = \frac{x_2}{\varphi_2} = \frac{x_3}{\varphi_3} = \frac{x_4}{\varphi_4}$$

olsun. (2) denklemleri (1) denklemlerini x lere göre çözmek suretiyle elde olundukları gibi, tersine (1) denklemleri de (2) denklemlerini x' lere göre çözerek bulunur.

Bu tekabüllere *birasyonel dönüştürümler*, ya da bunları en genel şeklinde ilk defa ele alan italyan geometricisi CREMONA (1830-1903) nın adına izafetle *kremoniyen dönüştürümler* denilir.

Açıkca görüleceği gibi birasyonel dönüştürümler topluluğu, G_c kremoniyen gurubu adı verilen bir gurup teşkil ederler. *Cebirsel Geometri diye, asal guruba G_c kremaniyen gurubundan ibaret olan geometriye denilir.*

Bu geometri ile ilk defa (1877) uğraşan BERTINI (1846-1933) olmuştur; bu tarihten sonra Cebirsel Geometriye büyük bir teşmil imkânı sağlanmıştır.

Boyut sayısı ne olursa olsun, her izdüşel uzayda aşikâr bir şekilde bir Cebirsel Geometri vardır.

Bu kitabı yazmak için kendi kendimize çizdiğimiz sınırı aşmadan, Cebirsel Geometride bahis konusu olan problemler ve Cebirsel Geometrinin kendisi hakkında tafsilâta girişemeyiz. Bu hususta okuru ya evvelce de bahsi geçen «**La Géométrie**» adındaki eserimize, ya da **Mémorial des Sciences Mathématiques**' ın bu sorulara tahsis ettiğimiz iki sayısına başvurmasını tavsiye ederiz [1]). Burada sadece bir noktaya değinmekle yetineceğiz.

(1) formüllerini yeniden ele alalım. Bir düzlemin x' noktalarına, denklemi

$$(3) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

olan n ninci dereceden bir yüzeye ait x noktaları tekabül eder.

[1]) **Les transformations birationnelles du plan** (PARIS, GAUTHIER-VILLARS, 1927), **Les transformations birationnelles de l'espace** (idem, 1934).

λ ların değişmesi, yâni düzlemin degişmesi halinde, (3) yüzeyi linear bir sistem doğurur. Tekabül bire-bir olduğuna göre, bu sistemin üç yüzeyi, ortak doğruları bulunmıyan üç düzleme tekabül edeceğinden, yüzeylerle birlikte değişen bir tek ortak x noktasını haiz olmalıdır. Bu da (3) yüzeylerinin ortak olarak birkaç eğri ile sabit noktaları haiz bulunmalarını gerektirir. Halbuki, (1) formüllerine (3) yüzeylerinin hepsine birden ait bir x noktasının koordinatlarını ithal edersek, paydalar sıfır olur ve x' noktası belirsizleşir. Şu halde burada yeni bir vakıa ile karşılaşıyoruz, demektir : *Bir birasyonel dönüştürüm*, bir homografinin aksine, *istisnasız bire-bir bir dönüştürüm değildir*. Dönüştürümün, temel noktalar adı verilen tekil noktaları vardır.

ALTINCI BÖLÜM

TOPOLOGİ

83. Eğriler üzerine sezgiye dayanan düşünceler. Maddî olarak gâyetle ince tellerden yapıldıklarını farzettiğimiz eğrileri ele alalım. Bu eğrilerin yapımında kullanılan madde hakkında üç hipotezi ileriye sürebiliriz:

1. Kullanılan madde serttir; eğrileri temsil eden teller şekillerini değiştiremezler.

2. Kullanılan madde şeklini değiştirilebilir ama uzayamaz; eğrileri temsil eden tellerin şekli değiştirilebilir. fakat tellerin mâruz kaldıkları şekil değişimlerinde, iki nokta arasında tel boyunca hesaplanan uzaklık sâbit kalır. Meselâ mâdeni tellerin bahis konusu olduğu farzedilebilir.

3. Kullanılan madde hem şeklini değiştirilebilir hem de uzayabilir. Bu takdirde ele alınan tellerin, tıpkı kavuçuktan tellerle yapıldığı gibi, hem şekli değiştirilebilir, hem de boyu uzaltılıp kısaltılabilir.

Bu hipotezlerin her birinde, eğrileri nasıl bir sınıflandırmaya tâbi tutabiliriz ?

Birinci hipotez halinde, eğrilerimizin ancak yerlerini değiştirebiliriz. Bu yer değişimlerinde bir doğru gene bir doğru olarak kalır, ve iki nokta arasındaki uzaklık değişmez. Yer değişimleriyle üst üste konulabilen, ve teşmil yolu ile, bir düzleme göre simetrik olan iki eğriyi aynı kategoriye sokabiliriz. Görüldüğü gibi bu, elementer metrik geometrinin, bundan önceki bölümde de ele alınan, görüş tarzıdır.

İkinci hipotezi ele alalım ve birincisi iki A, B noktası ikincisi de iki A', B' noktasiyle sınırlanmış iki eğri parçasını düşünelim. İkinci eğri parçasının yerini o şekilde değiştirelim ki A' noktası A ya gelsin ; ve sonra şeklini değiştirerek bunu birinci eğri parçası üzerine tatbik edelim. Eğer bu şekil değişiminden sonra, B' noktası B ile çakışırsa, ele alınan eğri parçalarının eşit olduğunu, ya da AB, $A'B'$ eğrisel uzaklıklarının (eğriler üzerinde hesaplanan uzaklıkların) eşit bulunduklarını söyliyeceğiz.

Bu hipotez altında artık doğruları özel bir şekilde ele almaya lüzum yoktur ve içlerinden birisinin şekli değiştirilerek ötekine tatbik olunabilen iki eğri aynı kategoriye sokulabilir. Burada değişmiyen şey, iki noktanın eğrisel uzaklığıdır.

Üçüncü hipotezde, iki AB, $A'B'$ eğri parçasını, A' noktası A ya ve B' de B ye gelecek şekilde, ve gerektiğinde eğri parçalarından birisini uzatarak birbiri üzerine tatbik etmek daima mümkün olacaktır. İhtiyaç halinde birinin veya ötekinin bazı kısımlarını uzatmak suretiyle birbiri üzerine temamiyle tatbik olunabilen iki eğriyi, üçüncü hipotez altında, artık aynı kategoriye sokacağız. Yapılması bize yasak edilen şey, bir eğrinin koparılması veya iki eğrinin birbirine birer noktalarından eklenmesidir. İki nokta arasındaki eğrisel uzaklık artık muhafaza olunmamaktadır.

Basit bir örnek alalım. Bir C çemberi ile bir E elipsini düşünelim.

Birinci hipoteze göre bu iki eğri ayrı kategorilere girecekler dir.

Eğer bu iki eğrinin uzunlukları eşitse, ikinci hipoteze göre, bu iki eğri aynı kategoriye ait olacaklardır. Aksi takdirde, çember ve elips farklı kategorilere aittirler.

Üçüncü hipoteze göre, çember ve elips daima aynı kategoriye ait olacaklardır. Gerçekten, C çemberini daima genişletmek

veya daraltmak suretiyle bunun uzunluğu elipsinkine eşit kılınabilir.

Bundan sonraki kısımlarda, son iki hipoteze tekabül eden soyut geometrileri meydana çıkarmağa çalışacağız. İkinci hipoteze tekabül eden geometriye *Genel Metrik* adı verilir, üçüncü hipoteze dayanan geometriye de *Topologi* denilir.

Bu geometrilerde bahis konusu olan eğrilerle yüzeyleri tanımlamakla işe başlıyacağız.

84. Eğri kavramı. Eğrilere atfedeceğimiz özelikler hakkında fikir edinmek üzere, maddî olarak yapılmış bir doğruyu ele alalım ve üçüncü hipotezin yürürlükte olduğunu farzedelim. Bu doğruyu vücuda getiren maddeyi çekiştirerek veya sıkıştırarak doğrunun şeklini değiştirdiğimiz vakit, üzerinde noktaların dağılımının ve sürekliliğinin muhafaza olunduğu bir eğri elde ederiz. Buna göre ele alacağımız eğrilerin, doğrular için kabul edilmiş olan sıra ve süreklilik postulâtlarına benzer postulâtları sağladıklarını farzetmek zorunda kalırız.

Fakat burada bir güçlük baş gösterir. Evvelce ele aldığımız geometrilerde iki türlü doğruya rastladık: Eukleides doğrusu ile izdüşel doğru. Bu doğrulardan her birini bir nokta iki yönde dolanabilir, ama bir Eukleides doğrusunu belirli bir yönde dolanan bir nokta, kalkış noktasına asla dönemez, buna mukabil bir nokta belirli bir yönde bir izdüşel doğru üzerinde dolanırsa, harekete başladığı noktaya daima döner. Eukleides anlamındaki doğru her iki yönünde sınırsızdır, buna karşılık izdüşel doğru bir nevi kapalı bir eğridir.

Şimdiye kadar ele alınan geometrilerde bu iki türlü doğruya hiçbir vakit aynı zamanda rastlanmıyordu; buna mukabil, bundan sonraki kısımlarda, hem Eukleides anlamındaki doğruları andıran eğrileri, hem de izdüşel doğrulara benziyen kapalı eğrileri ele almak zorunda kalacağız. Böylece, Elementer Geo-

metri uzayını kaale alırsak, EUKLEIDES anlamındaki doğrulara, yâni sınırlanmamış eğrilere rastlıyacağımız gibi, kapalı eğrilerden ibaret olan çemberlerle de karşılaşacağız.

Şu halde eğrileri o şekilde bir postulât sistemiyle tanımlamalıyız ki bu postulâtlar sınırsız bir eğri üzerinde, noktaların bir EUKLEIDES doğrusu üzerindeki dağılım postulâtlarına, ve bir kapalı eğri üzerinde de, noktaların bir izdüşel doğru üzerindeki dağılım postulâtlarına tekabül etsinler.

Eğrileri tanımlamak için, F. ENRIQUES'in **(Encyclopédie des Sciences Mathématiques)** de yazdığı ve daha önce de bahsi geçen *Geometrinin İlkeleri* adlı makalesinde kullandığı yolu takib edeceğiz.

Kendimizi, bütün noktaları gerçel olan bir uzayda farzedeceğiz, ve bu uzay da ya Elementer Geometri uzayı (EUKLEIDES uzayı), ya da ilk uzaya, hasolmıyan noktaların katılması ile bulunan (§ 35) izdüşel uzay olacaktır.

Her iki yönde sınırsız olan, sonsuz noktası bulunan ve çokkat noktaları olmıyan, yâni kendi kendisini kesmiyen bir eğriyi ele almakla işe başlıyalım.

Farzediyoruz ki bu eğri HILBERT tarafından ifadesi verilen dağılım aksiyomlarını (§ 53) sağlamaktadır. Şöyle ki:

I. Eğer A, B, C bir eğrinin üç noktası ise, ve eğer B noktası A ile C arasında ise, aynı zamanda C ile A arasındadır.

II. Eğer A ve C bir eğrinin iki noktası ise, bu eğrinin A ile C arasında bulunan hiç olmazsa bir B noktası bulunduğu gibi, hiç olmazsa öyle bir D noktası vardır ki C noktası A ve D arasında bulunsun.

III. Bir eğri üzerinde bulunan üç A, B, C noktası arasında öyle bir ve yalnız bir tanesi vardır ki diğer ikisi arasında bulunsun.

IV. Bir eğri üzerinde bulunan dört A, B, C, D noktası daima o şekilde dağıtılabilir ki B noktası hem A ve C, hem de A ve D arasında bulunsun, ve C de hem A ve D, hem de B ve D arasında olsun.

Bu aksiyomlardan şu sonuç çıkar ki eğriyi bir nokta, birbirinin karşıtı iki yönde dolanabilir.

Bir eğrinin iki A, B noktası, bu noktalar arasındaki bütün noktalarla bunların kendilerini de ihtiva eden bir eğri parçası belirler.

Eğrinin sürekliliği kavramını ithal etmek için, DEDEKIND'in birinci cinsten izdüşel formlar hakkındaki (§ 55) postulâtını kabul edeceğiz. Bunun için, ifadedeki «birinci cinsten form» tâbiri yerine «eğri» kelimesini koymak yetecektir.

V. Eğer AB bir eğri parçası ise, ve bu parça iki kısma bölünürse, o şekilde ki:

1. Parçanın noktalarından her biri, kısımlardan birine ait olsun.

2. A noktası birinci kısma, B noktası da ikinci kısma ait olsun.

3. A dan B ye giden dolanım yönünde birinci kısmın herhangi bir noktası, ikinci kısmın herhangi bir noktasından önce gelsin.

Bu takdirde, AB parçasının (kısımlardan birine ait olabilen) öyle bir C noktası vardır ki parçanın C den önce gelen her noktası birinci kısma ve parçanın C den sonra gelen her noktası da ikinci kısma ait olsun.

Şimdi sınırlı bir MN eğrisini, yâni eğrinin uçlarından ibaret alan iki M, N noktasiyle sınırlanmış bir eğriyi ele alalım. M ve N noktalarını bir yana bırakacak olursak, sınırsız bir eğri elde ederiz, zira A eğrinin herhangi bir noktası ise, A ile M ya

da A ile N arasında daima bir nokta vardır. Farzediyoruz ki bu sınırsız eğri biraz önce ifadeleri verilen postulâtları sağlamaktadır. Özel olarak bundan şu sonuç çıkar ki MN eğrisi üzerinde, biri M den N ye doğru giden, öteki de N den M ye doğru giden birbirinin karşıtı iki dolanım yönü vardır.

Bunlar anlaşıldıktan sonra, P noktası N ile, Q noktası da M ile çakışmak üzere, sınırlı iki MN, PQ eğrisini ele alalım. Bu iki eğrinin vücuda getirdiği topluluğa *kapalı eğri* denilecektir.

Bu kapalı eğri üzerinde, birbirinin karşıtı iki dolanım yönü vardır; bu iki dolanım yönü şu şekilde elde olunur: bir yandan, MN nin M den N ye götüren dolanım yönü, PQ nün P den Q ye götüren dolanım yönüne eklenir; öte yandan da MN nin N den M ye götüren dolanım yönü, PQ nün Q den P ye götüren dolanım yönüne eklenir. Bu kapalı eğri, birinci cinsten izdüşel formlara ait VII ve VIII inci postulâtları (§ 55) aşikâr bir şekilde sağlar.

Şu halde üç türlü eğri ithal ettik: (açık eğriler de diyebileceğimiz) sınırsız eğriler, sınırlı eğriler ve kapalı eğriler. Bu eğrilerin her biri üzerinde birbirinin karşıtı ve sürekli iki dolanım yönü vardır.

Bilhassa şurasını da kaydedelim ki bu eğrilerden her biri üzerinde, birinci cinsten izdüşel formlarda olduğu gibi, birbirini ayıran iki nokta çifti düşünülebilir.

85. Yüzey kavramı. Bir yüzeyi tarif etmek için, bunun, şeklini değiştirerek hareket eden bir çizgi tarafından meydana getirilmesi halinde bahis konusu olan sezgisel kavramı kullanacağız.

Bu noktayı tavzih etmek maksadiyle, önce izdüşel düzlemin bir doğru tarafından meydana getirilmesi keyfiyetini ele alalım. Bir σ izdüşel düzlemiyle, bu düzlemde A tepeli bir doğru demetini düşünelim. σ düzlemini, ya demetin doğrularının noktaları

topluluğu olarak, ya da daha iyi bir şekilde, taşıyıcıları demetin doğrularından ibaret doğrusal nokta cümleleri gibi tasavvur edebiliriz. Şimdi şurasını kaydedelim ki, birinci cinsten bir form olarak, demet de doğrusal nokta cümlesi gibi sıralanma ve süreklilik postulâtlarını sağlar. Bu suretle görüyoruz ki σ düzlemi, birinci cinsten izdüşel formların (doğrusal nokta cümlelerinin) elemanlarından ibaret olan noktalar topluluğudur, bu sonuncular da gene birinci cinsten bir izdüşel formun (doğru demetlerinin) elemanlarıdır.

Şimdi yüzeylere dönelim. Elemanları, bir eğriye ait noktaların sağlıdığı postulâtları, aynı ailede sağlıyan, bir eğri ailesini ele alalım. Bu aileye ait eğrilerin noktaları topluluğu, tanım gereğince, bir yüzey vücuda getirirler.

İzdüşel Geometri'de yapılanlara benzeterek, ele alınan eğri ailesine, yüzeyi doğuran anlamında, eğri demeti diyebiliriz.

Bununla beraber, yüzey için verilen bu tanım çok genel bir mahiyyet taşır. Bu itibarla yüzey üzerinde, birinci demetin eğrilerini birer noktada kesen eğrilerden müteşekkil ikinci bir doğurucu demetin bulunabileceğini farzedeceğiz. O halde, bir yüzeyin tanımı olarak aşağıdakini alacağız:

Bir yüzey, iki F, F' demetini teşkil eden eğrilerin aşağıdaki şartları sağlıyan ortak noktaları topluluğudur:

1. Yüzeyin bir noktası F nin bir eğrisiyle F' nün bir eğrisine aittir.

2. F nin bir eğrisiyle F' nün bir eğrisinin, yüzeye ait olmak üzere, bir ve yalnız bir ortak noktası vardır.

3. F nin (ya da F' nün) herhangi iki eğrisini, F' nün (ya da F nin) eğrileri, birbirlerini belirli dolanım yönlerinde takib eden birtakım noktalarda keserler.

Bu sonuncu şart dolayısiyle, C_1 ve C_2 eğer F nin herhangi

iki eğrisi ise, F' nün C' eğrisi C_1 i bir P_1 noktasında, C_2 yi de bir P_2 noktasında keser; P_1, P_2 noktaları bire-bir bir dönüştürümde birbirlerine tekabül ederler, ve P_1 in C_1 i belirli bir yönde dolanması halinde, P_2 de C_2 yi belirli bir yönde dolanır.

F, F' demetleri topluluğu, *şebeke* denilen şeyi vücuda getirirler. F ve F' ye ait eğriler, yüzey üzerinde bir çeşit ağ kurarlar. Bu tıpkı parametreli temsili ile tanımlanan bir yüzey üzerindeki koordinat çizgilerinin vücuda getirdikleri ağı andırır.

86. Topologi. Artık topologi'nin nelerden bahsettiğini anlatabilecek hale geldik, demektir. Bunu da, bu geometrinin asal gurubunu ithal etmek suretiyle yapacağız.

Uzayın noktaları arasında, aşağıki şartları sağlıyan bir T dönüştürümünü ele alalım:

1. Bu dönüştürüm istisnasız bire-bir dir, yâni bu dönüştürüm her noktaya bir nokta tekabül ettirir, ve bunun tersi de vârittir.

2. Bu dönüştürüm, bir eğrinin noktalarına, gene bir eğrinin noktalarını tekabül ettirir.

3. Bir eğri üzerinde birbirini ayıran iki M, N ve P, Q nokta çiftine, homolog eğri üzerinde gene birbirini ayıran iki M', N' ve P', Q' nokta çiftini tekabül ettirir.

Bu son şarttan şu çıkar ki eğer bir C eğrisine T dönüştümü bir C' eğrisini tekabül ettiriyorsa, C üzerindeki bir dolanım yönüne, C' üzerindeki bir dolanım yönü tekabül eder. Bu özeliği, tekabülün sıralanmış olduğunu söylemekle ifadelendireceğiz.

C nin iki M, N noktasını ele alalım ve bu eğri üzerinde, meselâ M nin N den önce geldiği bir dolanım yönünü tespit edelim. MN eğri parçasının noktalarını o şekilde iki kategoriye ayıralım ki:

1. MN parçasının noktalarından her biri kategorilerden birine ait olsun.

2. M noktası birinci kategoriye, N noktası da ikinci kategoriye ait bulunsun.

3. Birinci kategoriye ait her nokta ikinciye ait her noktadan evvel gelsin.

DEDEKIND postulâtına göre, MN parçasının öyle bir P noktası vardır ki parçanın P den evvel gelen her noktası birinci kategoriye, ve P den sonra gelen her noktası da ikinci kategoriye aittir.

C nin homoloğu olan C' eğrisi üzerinde M, N, P noktalarının homologları M', N', P' olsun. C üzerindeki MPN dolanım yönüne, C' nün $M'P'N'$ dolanım yönü tekabül eder. MP parçasının her noktasına $M'P'$ parçasının bir noktası tekabül ettiği gibi, PN parçasının her noktasına da $P'N'$ nün bir noktası tekabül eder. Üstelik, $M'N'$ parçasının her noktası, MN parçasının bir noktasının mütekabilidir. Bundan da şu netice çıkar ki $M'N'$ parçasının noktaları da, MN parçasında ele alınan kategorilerin haiz oldukları özeliklerin aynı özeliklere sâhib iki kategoriye ayrılır. Bu iki kategoriyi P' noktası ayırır. Dolayısiyle, T dönüştürümü, eğrilerin sürekliliğini muhafaza eder; bu dönüştürümün sürekli olduğu söylenir.

T dönüştürümü bir yüzeye, açıkca görüldüğü gibi, gene bir yüzey tekabül ettirir.

Öte yandan, bir T dönüştürümünün tersi de bu dönüştürümün haiz olduğu özeliklerin aynına sahiptir. Nihayet, T şeklindeki iki dönüştürümün çarpımı da aynı mahiyette bir dönüştürümdür. Şu halde T dönüştürümleri bir gurup vucuda getirirler.

T dönüştürümlerine *homeomorfi* adı verilir. Bir T dönüştürümüne göre birbirinin homoloğu olan iki eğriye, ya da iki yüzeye *homeomorf* denilir.

Topologi, asal gurubu homeomorfiler gurubu olan geometridir.

Sezgi bakımından, topologi, elâstikî yüzeylerin ve eğrilerin incelenmesidir, diyebiliriz; yırtmaya ve örtmeye lüzum kalmadan üst üste getirilebilen iki yüzey ya da iki eğri homeomorftur.

87. Genel metrik. Bu bölümün başında sezgimize dayanarak öne sürdüğümüz düşünceler arasında yer alan ikinci hipoteze dönelim.

Topologi'deki uzayı, İzdüşel Geometri ya da Elementer Geometri'de bahis konusu olan uzayın aynı gibi ele alabilmemize mukabil, Genel Metrik'deki uzayın Elementer Geometri uzayının aynı olduğunu farzedeceğiz. Bu takdirde eğrisel parçaların ölçümünü tanımlamalıyız.

Bir AB eğri parçasını ele alalım. Bunu uzatmadan ne de kısaltmadan, bir $A'B'$ doğru parçası üzerine tatbik edecek tarzda bir şekil değişikliğine uğratalım. Böylece AB eğri parçasını doğrulamış oluruz; $A'B'$ doğru parçasının uzunluğuna, AB eğri parçasının uzunluğu demeği uygun bulacağız.

Netice itibariyle, AB eğri parçasını doğrulamak demek, AB eğrisel uzaklığını ölçen bir gerçel sayıyı buna atfetmek demektir. Fakat tabiatiyle, kullanılan yol keyfî olamaz: Eğer A, B, C bir eğri üzerinde bir yönde birbiri ardı sıra gelen üç nokta ise, AC nin ölçümü, AB ve BC parçalarının ölçümleri toplamına eşit olmalıdır. Bu şartlar üzerinde daha fazla ısrar etmeden, farzedeceğiz ki her eğri parçasını doğrulamayı olumlu kılan bir yol bilmekteyiz.

Burası anlaşıldıktan sonra, sadece mütekabil eğri yaylarının uzunluklarını muhafaza eden homeomorfileri ele alalım. Bu özel homeomorfiler, açıkca görüleceği gibi, Topologi'nin asal gurubunun bir alt-gurubundan ibaret olan, bir gurup teşkil ederler. Bu alt-gurubu G' ile göstereceğiz.

Şimdi genel metriği, asal gurubu G' olan geometri şeklinde tanımlıyabilirdik. Fakat, bizim elementer metrikten EUKLEIDES Geometrisine geçmemizi sağlıyan yolu kullanmak suretiyle daha da ilerilere gitmek mümkündür.

Bir T homeomorfisini ele alalım ve C bir eğri, C' de bunun mütekabili olan eğri olsun. Eğer C eğrisine ait bir parça AB ve bunun C' eğrisindeki mütekabili olan parça da $A'B'$ ise, k sayısı T dönüştürümüne bağlanmış bir gerçel sabiteyi göstermek üzere

$$A'B' \text{ nün ölçümü} = k \cdot AB \text{ nin ölçümü}$$

olduğunu farzedeceğiz. C eğrisi hangi eğri olursa olsun, ve AB de bu eğri üzerinde hangi parçadan ibaret bulunursa bulunsun, bu bağıntı câridir. (k sâbitesi homeomorfi ile değişebilmek kaydiyle) bu özeliği haiz olan homeomorfiler, G ile göstereceğimiz bir gurup teşkil ederler, ve G' bunun bir alt-gurubudur.

Asal gurubu G olan geometriye A genel metriği, ve asal gurubu G' olan geometriye de A' genel metriği diyeceğiz.

İki S, S' yüzeyini ele alalım. Bu yüzeylerin birinden diğerine geçmeği mümkün kılmak üzere, genel bir metriğin asal gurubunun bir dönüştürümü varsa, bu iki yüzeye itibarî olarak bu genel metriğe göre eşdeğer diyelim.

A' metriğini kaale alırsak, yırtma ve örtme bahis konusu olmadan, uzunlukların muhafazası şartiyle, S yüzeyini eşdeğeri olan S' yüzeyi üzerine tatbik etmek mümkün olur.

A metriğinin câri olduğu bir geometriyi ele alırsak, iki eşdeğer yüzeyden birisi bütün kısımlarında bir nevi darlaşmaya mâruz kalmadan, bu iki yüzey artık birbiri üzerine tatbik edilemez.

Bu sorular üzerinde daha fazla ısrar etmiyeceğiz. Bununla

beraber şunu da söyliyelim ki, biraz önceki metriklerle, yüzeylerin birbiri üzerine tatbiki ve konform tasviri ile ilgili bazı diferensiyel geometri sorularını birbirine karıştırmamak gerekir. Her iki hale tekabül eden görüş açıları farklı olmakla beraber, ilişkisiz değildir.

Biraz evvel ele alınan metriklerden çok daha genel mahiyette bir metriğin ithalini B. RIEMANN'a borçluyuz; esasen burada uyguladığımız görüş açısından hareket etmek suretiyle bu metriğe varmamız imkânsızdı. Daha yukarıda, LIE ve KLEIN tarafından ileri sürülen geometri kavramının, ELIE CARTAN'a borçlu olduğumuz bir teşmiline işaret etmiştik. Bu geometrici, RIEMANN'ın genel metrikleri üzerinde yaptığı derin araştırmalar sayesinde bu teşmile varmıştır.

88. Topologi ve Elementer Geometri. Önce doğru kavramını bir tarafa bırakmak suretiyle, Elementer Geometri'den Topologi'ye geçtik, bu da bizi A' genel metriğine ulaştırdı, sonra da uzaklık kavramını bir yana bıraktık.

Tersine, Topologi'ye uzaklık kavramını ithal etmek suretiyle A veya A' genel metriğine geçtik. Bu metriklere de doğru kavramını sokmakla, Elementer Geometri'ye dönmüş oluruz.

Daha kesin bir şekilde, eğer A' metriğine doğru kavramını sokarsak, asal gurubun dönüştürümleri, bir doğrudan diğer bir doğruya geçmeği sağlamak zorunda olduklarından, hareketlerden ibaret bulunurlar ve böylelikle elementer metriği elde ederiz.

Yok eğer A metriğinden hareket edersek, asal gurubun dönüştürümleri benzeşimlerden ibaret bulunurlar, ve bu suretle EUKLEIDES Geometrisini elde ederiz.

Topologiye dönelim ve doğru kavramını ithal edelim. Her doğruya bir doğru tekabül ettirmek zorunda bulunan bir homeomorfi, bir izdüşellikten ibarettir ve bu suretle topologiye bağlı bir geometri şeklinde İzdüşel Geometri'yi elde etmiş oluruz.

Şurası bilinmektedir ki uzaklık kavramının İzdüşel Geometri'ye ithali, Elementer Geometri'ye geçilmesini sağlar.

Şu halde, F. ENRIQUES ile birlikte, aşağıki taslağı inşa edebiliriz:

F. ENRIQUES şurasını kaydetti ki bu çeşitli geometriler birtakım duyu guruplarına tekabül etmektedir. Onun görüş tarzını aşağıdaki şekilde özetliyebiliriz:

Normal insan Elementer Geometri'yi vücuda getirdi.

Böyle bir insanın elleri yokedilirse, uzaklıkları ölçmesine engel olunmuş olur ve bu suretle İzdüşel Geometri'ye sevkedilmiş bulunur. Eğer bunun aksine, elleri yerine, görme iktidarı ortadan kaldırılırsa, uzaklıkları ölçme imkânını muhafaza eder ama artık doğru kavramına sahib değildir. Böyle bir insan da Genel Metrik'e sevkedilmiş olur.

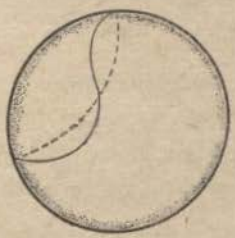
Nihayet aynı zamanda hem elleri hem de görme iktidarı yokedilen bir adam, Topologi'ye yöneltilmiş olur. Doğru ve uzaklık kavramları, onun için erişilmesi imkânsız şeylerdir.

89. Riemann yüzeyleri. Topologi'de bahis konusu edilen problemlere dair iki örnek vereceğiz.

RIEMANN, bir kompleks değişkenin fonksiyonlarını incelemek için, birtakım gerçel yüzeyler ithal etti, ve bunlara sonradan onun adı verildi. Burada bu yüzeylerin fonksiyonlar teorisine ne şekilde sokulduğunu bildiremeyiz ama bu yüzeylerin nelerden ibaret bulunduklarını ve bunlar vesilesiyle bahis konusu olan temel problemin ne mahiyyette bir şey olduğunu anlatabiliriz.

Her şeyden önce bir küreyi ele alalım ve dikkatimizi bu kürenin S dış yüzü üzerinde teksif edelim. S yüzü üzerine, kapalı ve kendi kendisini kesmiyen bir C eğrisini çizelim. S yüzünün dışına çıkmadan, bir ekleme ve koparma bahis konusu olmadan, bir noktaya irca edecek tarzda bu eğrinin şeklini değiştirebiliriz. Bunu daha kesin bir şekilde açıklamak için, ilk önce kürenin bir C' çemberine irca edecek tarzda C eğrisinin şeklini değiştirelim. C' çemberinin düzlemi α, ve kürenin α ya paralel bir teğet düzlemi de α' olsun. α düzlemini kendisine paralel olarak α' düzlemiyle çakışıncaya kadar, hareket ettirelim. C' çemberi de bu hareket esnasında şeklini değiştirir ve nihayet α' düzleminin küreye değdiği noktaya müncer olur.

Şimdi şurasını kaydedelim ki iki yüzlü düzlem bir D diskinin yüzüne irca edecek şekilde, yırtma ve örtme bahis konusu olmadan, S yüzünün şeklini değiştirebiliriz. Bu şekil değişikliği hakkında bir fikir sahibi olmak maksadiyle, kürenin yumuşak bir hamurdan, örneğin ekmekci hamurundan yapılmış olduğunu farzedebiliriz. Böyle bir küre, bir diske irca edilecek şekilde düzleştirilebilir. C eğrisi, D diski üzerine çizilmiş, kendi kendisini kesmiyen kapalı bir eğri halini alacaktır. Genel olarak, bu eğrinin, diskin her bir yüzü üzerine çizilmiş birer parçası bulunacaktır, ve bir parçadan ötekine geçiş de diskin kenarını aşmak suretiyle mümkün olacaktır. (*Şek.* 28) bir diskin üst yüzünü ve bu disk üzerine çizilmiş bir eğriyi göstermektedir; C eğ-

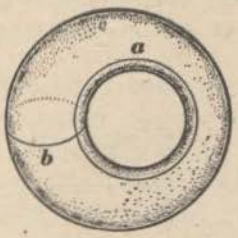


Şek. 28

risinin, diskin alt yüzü üzerinde bulunan parçası noktalı olarak çizilmiştir.

S küresi üzerine çizilmiş C eğrisine ait özelik, D diski üzerine çizilmiş C eğrisi için de aşikâr bir şekilde câridir. Koparma ve ekleme bahis konusu olmadan, sürekli bir şekil değişimiyle bu eğri bir noktaya irca olunabilir.

D diskinde bir T deliğini açalım ve bu suretle elde olunan şeklin dış yüzüne D_1 diyelim (*Şek.* 29). D_1 yüzü üzerine, kendi



Şek. 29

kendisi kesmiyen kapalı bir C eğrisini çizelim. Her zaman, sürekli bir şekil değişimiyle, C eğrisini artık bir noktaya irca edemeyiz. Eğer meselâ C eğrisi, T deliğini çevreleyen a eğrisi ise, ya da bu deliğin kenarını keserek bir yüzden ötekine giden b eğrisi ise, bir noktaya irca işi artık hiç bir şekilde mümkün olamaz.

Dış yüzeyine D_1 dediğimiz ortası delikli diskin, bir torla çakışacak tarzda şekli değiştirilebilir; başka deyimle, D_1 yüzeyi, bir torun dış yüzü ile homeomorftur. a eğrisi, torun dış yüzü üzerinde bir enlem çemberi, b eğrisi de bir boylam çemberi şeklini alır.

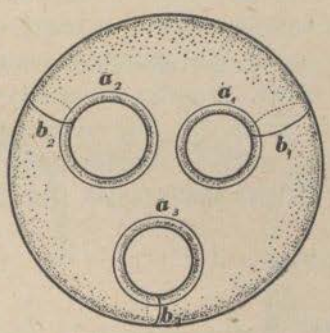
Ortası delikli disk üzerine, ya da tor üzerine çizilen her C

eğrisi, sürekli şekil değişimiyle, birkaç defa a eğrisinden, birkaç defa da b eğrisinden teşekkül eden bir eğriye irca olunabilir.

Cinsi p olan RIEMANN *yüzeyi* diye, p kere delinmiş bir düzlem diskin D_p dış yüzüne, ya da bunun homeomorfu olan her yüzeye denilir.

D_p yüzeyinin homeomorfu olan bir yüzey, meselâ p sayıda kulpu bulunan bir kürenin dış yüzü, veya arzu edildiği takdirde, p sayıda kulpu olan bir vazonun dış yüzüdür.

Bir D_p RIEMANN yüzeyi üzerine, sürekli şekil değişimiyle bir noktaya irca olunamıyan $2p$ sayıda kapalı eğri çizilebilir. Bunlar, her biri p sayıdaki deliklerden her birini çevreliyen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ eğrileri ile her biri p sayıdaki deliklerden her birinin kenarını keserek bir tarafından öteki tarafına geçen $b_1, b_2, \ldots, b_p$ eğrileridir. Nitekim, $p = 3$ halinde, (*Şek.* 30) da görülen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 eğrileri elde olunur.



Şek. 30

D_p RIEMANN yüzeyi üzerine çizilmiş bulunan kapalı her C eğrisi, sürekli bir şekil değişimiyle birkaç defa $a_1, a_2, \ldots, a_p$ eğrilerinin her birinden, ve birkaç defa da $b_1, b_2, \ldots, b_p$ eğrilerinin her birinden teşekkül eden bir eğriye irca olunur. Bu şekilde bir eğri, μ ve λ lar tam sayıları göstermek üzere

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_p b_p$$

sembolü ile temsil olunabilir. Eğer bütün bu tam sayılar sıfırsa, sürekli şekil değişimiyle C eğrisi bir noktaya irca olunabilir.

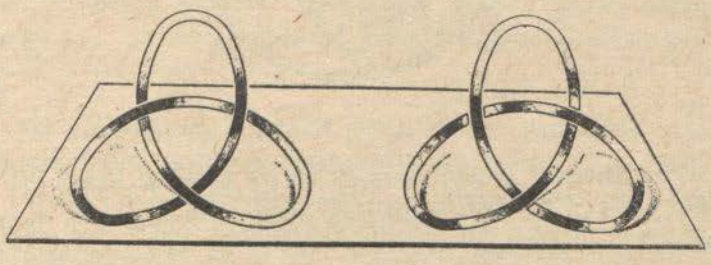
p sayısı bir RIEMANN yüzeyinin bir topologi karakteridir. Cinsleri farklı iki RIEMANN yüzeyi, aşikâr bir şekilde homeomorf değildir.

90. Düğümler teorisi. Topologide ele alınan problemlere dair ikinci bir örneği düğümler teorisi verecektir.

Elementer Geometri uzayında olduğumuzu farzedelim ve sadece çokkat naktasız, yâni kendi kendisini kesmiyen kapalı eğrileri ele alalım. Bu türlü eğrilere *düğüm* adı verilir.

Bu düğümler arasında en basiti, meselâ bir çemberin, ya da konveks bir çokgenin homeomorfu olan ovaldır.

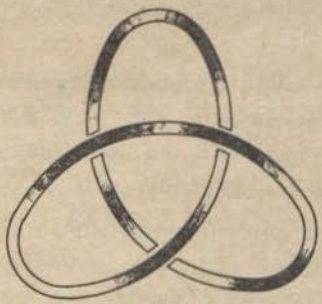
Bahis konusu eğrilerin mahiyyeti hakkında bir fikir edinmek üzere, bir sicim parçası alalım, bununla bir düğüm yaptıktan sonra iki ucunu birleştirmek üzere yapıştıralım. Böylelikle ya (*Şek.* 31), ya da (*Şek.* 32) ile gösterilen eğri elde olunur (Şeklin birbirine rastlıyan iki kısmından alttan geçeni kesik olarak gösterdik). Bu düğümlerden birincisine sola yonca,



Şek. 31 *Şek.* 32

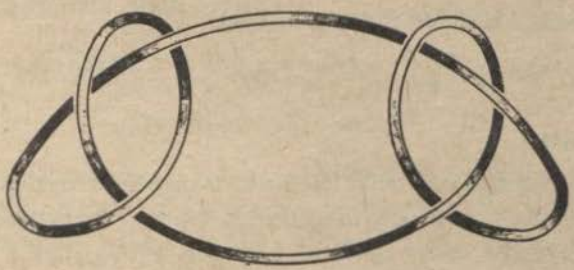
ikincisine de sağa yonca adları verilir. Bu iki düğüm aşikâr bir surette çemberin homeomorfu olmadıkları gibi, hattâ kendi aralarında dahi böyle değildirler.

Buna mukabil, (*Şek.* 33) ile gösterilen düğüm bir çemberin homeomorfudur.



Şek. 33

Daha karışık düğümler elde etmek üzere, yonca şeklindeki düğümler terkib olunabilir. Örneğin, (*Şek.* 34) de gösterilen düğüm, sola ve sağa yonca şeklindeki iki düğümün terkibi suretiyle elde olunmuştur.



Şek. 34

Karteziyen koordinatlarda

$$x = (3\cos t + 2)\cos t, \qquad y = 5\cos t \sin t$$
$$z = (25\cos^2 t - 1)\sin t$$

parametreli denklemleriyle gösterilen HOPPE (1816-1900) eğrisi, sola yonca biçiminde bir düğümün şeklini haizdir (*Şek.* 31).

Düğümler teorisinin gâyesi öyle birtakım topologi karakterlerinin belirlenmesidir ki meselâ aynı karakteri haiz olan iki düğüm homeomorf olsun. Esasen düğümleri bu şekilde karakterize etme problemi henüz çözülmemiştir.

91. Eğrilerin analitik olarak gösterilmesi. Jordan eğrileri. Üç Ox, Oy, Oz eksenine nispet edilen bir EUKLEIDES uzayında olduğumuzu farzedelim ve topologide bahis konusu olan eğri kavramını yeniden ele alalım.

İlkönce sınırlı bir eğriyi düşünelim. Bu eğri bir doğru parçasının homeomorfudur, yâni noktaların sırasını ve sürekliliği muhafaza etmek kaydiyle, bu eğriyi doğru parçası üzerine tatbik edebiliriz.

Bir doğru parçasına ait noktaların koordinatları, t_0, $\bar{t}_0$ gibi birtakım limitler arasında değişen bir t parametresinin linear fonksiyonları şeklinde ifade olunabilir. O halde sınırlı bir eğriye ait noktaların koordinatlarını bir t parametresinin gerçel fonksiyonları şeklinde göstermeli, yâni

$$(1) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

yazmalıyız.

Bu fonksiyonlar tabiatiyle keyfî fonksiyonlar değildir. Bunlar hakkında, yukarıda hatırlatılagelen topologi karakterlerini tebaruz ettirmek üzere, birtakım hipotezler yürütmeliyiz:

1. $(t_0, \bar{t}_0)$ aralığının bir t değerine eğrinin bir ve yalnız bir noktası tekabül eder.

2. Eğrinin bir noktasına, ele alınan aralığın bir tek t değeri tekabül eder.

3. φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır.

Eğri üzerindeki iki dolanım yönü, t nin $(t_0, \bar{t}_0)$ aralığındaki iki değişme şekline tekabül eder. Eğer, fikirleri tespit maksadiyle, t_0 ı $\bar{t}_0$ den küçük farzedersek, t parametresi t_0 dan $\bar{t}_0$ a mütemadiyen artarak, ve $\bar{t}_0$ dan t_0 a da mütemadiyen eksilerek geçebilir.

φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonlarına yüklenen üçüncü şart, bahis konusu eğrinin sürekliliğine tekabül eder. Bu şart, aşağıki şekilde ifade olunabilir: t nin iki değeri t_1, t_2 ve mütekabil noktaların koordinatları da x_1, y_1, z_1 ve x_2, y_2, z_2 olsun. Eğer ε, istenildiği kadar küçük ve keyfî olarak seçilmiş bir pozitif sayı ise, $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ farklarının $-\varepsilon$ ile $+\varepsilon$ arasında bulunmalarını temin edecek şekilde, t_2 daima t_1 e yeter derecede yakın seçilebilir.

Sayageldiğimiz üç şarta tâbi tutulan (1) denklemleriyle yapılan gösterim, şimdiye kadar ele aldığımız bütün egrilere teşmil olunabilir. Özel olarak, ele alınan aralığın t_0, $\bar{t}_0$ uç değerlerine aynı bir nokta tekabül ettiği takdirde, yâni t nin aralık içindeki diğer değerlerinin daima farklı noktalar vermeleri kaydiyle,

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_1(\bar{t}_0), \qquad \varphi_2(t_0) = \varphi_2(\bar{t}_0), \qquad \varphi_3(t_0) = \varphi_3(\bar{t}_0)$$

olması halinde, bir kapalı eğri elde olunur.

Eğer istisnaî olarak, $(t_0, \bar{t}_0)$ aralığında, eğrinin aynı noktasını vermek üzere, t nin n sayıda değeri varsa, bu şekilde bir nokta eğrinin *n ninci mertebeden bir çokkat noktası* olacaktır.

(1) denklemleriyle gösterilen eğrilere C. JORDAN (1838-1922) *eğrileri* denilir.

JORDAN eğrilerinin, bu geometrik şekiller hakkında sezgiye dayanan anlamamıza temamiyle tekabül ettiklerini gösteren önemli bir teoremi bu geometriciye borçluyuz.

Kapalı ve ikikat noktasız bir JORDAN düzlem eğrisi düzlemi öyle iki bölgeye ayırır ki:

1. Aynı bir bölgenin iki noktası, eğriyi kesmiyen bir kırık çizgi ile daima birleştirilebilir.

2. Aynı bölgeye ait olmıyan iki nokta, eğriyi kesmiyen sürekli bir eğri ile birleştirilemez.

92. Peano eğrisi. Kendi kendimize şunu sorabiliriz: φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonlarına yüklenilen şartlar, eğriler hakkında sezgiye dayanan anlamamıza uyan bir eğri elde etmek için mutlaka gerekli midir? PEANO (1858-1932) tarafından inşa olunan eğri örneğinin de gösterdiği gibi, bu şartlar mutlaka gereklidir. Aksi takdirde, noktalarının koordinatları bir t parametresinin sürekli fonksiyonları olan ve bütün bir kareyi dolduran bir düzlem eğriden bahsolunabilir.

Bir yandan, bir Ot ekseni üzerinde, birim uzunlukta (OA) doğru parçasını, öte yandan da kenarı birim uzunluğuna eşit $OABC$ karesini ele alalım (*Şek.* 35). (OA) doğru parçasını, 1 den 9 a kadar numaralanan dokuz eşit parçaya bölelim ve kareyi de, şekilde gösterildiği gibi, gene 1 den 9 a kadar sıralanan dokuz eşit kareye ayıralım. Birbirinin peşi sıra gelen karelerin ortak birer kenarı vardır.

Bir kısmî karede, aşağıdaki şartlarla, bir ilk bir de son tepeyi tanımlıyalım:

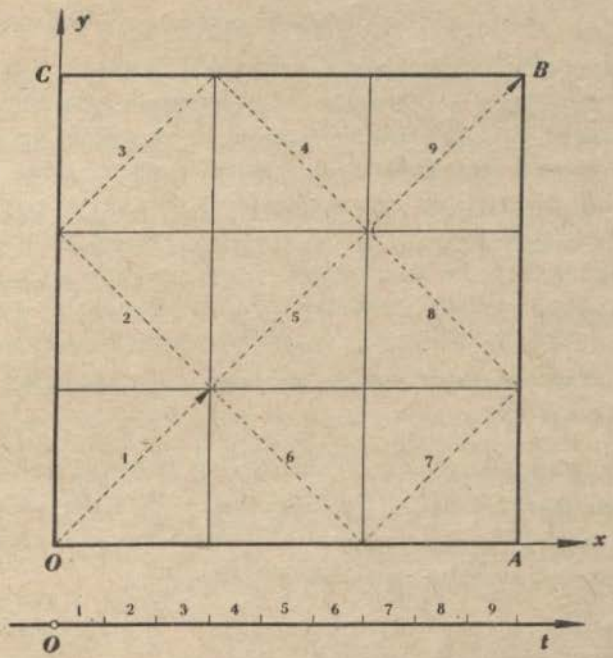
1. İlk ve son tepeler karşıttır.

2. Bir karenin ilk tepesi, ondan önce gelen karenin son tepesiyle çakışır.

3. Birinci kısmî karenin ilk tepesi O noktasıdır.

Kısmî karelerden her birinde, bu karenin ilk tepesini son tepesine birleştiren köşegenini çizelim. Bu suretle, (*Şek.* 35) de

gösterilen ve O noktasında başlıyarak B noktasında sona eren bir kesik çizgi elde ederiz. Bu kesik çizginin bir parçasını, (OA) aralığının bir parçasına tekabül ettireceğiz, o şekilde ki kesik çizginin parçası kaç numaralı karenin köşegeni ise, (OA) aralığında buna tekabül edecek parçanın sıra numarası da aynı olsun.



Şek. 35

(OA) aralığı ile $OABC$ karesini artık dokuz değil de 9^2 eşit parçaya, sonra 9^3 eşit parçaya, ve ilâ. bölmek suretiyle bu işlemlere yeniden başlıyalım. Birbiri peşi sıra, 9^2, 9^3, ... doğru parçasını ihtiva eden kesik çizgiler elde ederiz. Kareyi 9^k eşit kareye bölmek suretiyle bulunan kesik çizginin doğru parçaların-

dan birine ait olan bir x, y noktasına, (OA) aralığının bir parçasını tekabül ettireceğiz, o şekilde ki x, y noktası kaç numaralı karenin köşegeni üzerinde ise, bu parça da aynı numarayı haiz olsun.

Bu işlemin sınırsız bir şekilde tekrarlanması halinde ispat edilir ki x, y, (OA) aralığında değişen t nin

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t)$$

şeklinde sürekli fonksiyonlarıdır. t nin, bahis konusu aralığı dolanması halinde, x, y noktası da $OABC$ karesinin temamını çizer. Çizim gösterir ki t nin bir değerine bir ve yalnız bir x, y noktası tekabül eder. Fakat buna mukabil, t nin iki ya da dört farklı değeri yardımiyle bulunan sonsuz x, y noktası vardır. t nin değerleri ile PEANO eğrisinin noktaları arasındaki tekabül artık bire-bir değildir, yâni bundan önceki paragrafta φ_j fonksiyonlarına yüklediğimiz şartlardan ikincisi artık kaale alınmamaktadır. Bu da gösterir ki sezgiye dayanan kavramlarımıza uyan bir eğrinin bahis konusu olabilmesi için, ikinci şart temel bir rol oynar.

93. Homeomorfilerin analitik olarak gösterilmesi. Bir T homeomorfisini ele alalım. Bu, tanım gereğince, istisnasız, bire-bir bir tekabüldür. Eğer uzayı bir $Oxyz$ üçyüzlüsüne nispet edersek, bir x, y, z noktasına T homeomorfisi,

$$(1) \qquad x' = F_1(x, y, z), \qquad y' = F_2(x, y, z), \qquad z' = F_3(x, y, z)$$

bağıntılariyle verilen x', y', z' noktasını tekabül ettirir.

Bir x, y, z noktasına bu denklemler bir tek x', y', z' noktasını tekabül ettirirler ve bunun tersi de doğrudur. Dolayısiyle, (1) denklemlerinden, aynı karakterleri haiz

$$(2) \qquad x = F_1'(x', y', z'), \quad y = F_2'(x', y', z'), \quad z = F_3'(x', y', z')$$

bağıntıları çıkarılabilmelidir.

T homeomorfisinin tanımı gereğince, denklemeleri

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

olan bir C JORDAN eğrisine (1) denklemeleri bir C' JORDAN eğrisini tekabül ettirmelidirler. Buradan şu sonuç çıkar ki

(3) $x' = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad y' = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad z' = F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

denklemeleri bir JORDAN eğrisini göstermelidirler.

F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarına yüklenen şartlar şunu tazammun eder ki t nin bir (t_0, t_1) aralığında bulunan değerleriyle x', y', z' noktaları arasında bire-bir bir tekabül vardır. Bundan başka F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarına öyle şartlar yüklemeliyiz ki (3) denklemlerinin ikinci tarafları t nin sürekli fonksiyonları olsun. Şu halde, F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarının x, y, z ye göre sürekli olduklarını farzetmek gerekir.

Bu şart, aşağıda görüldüğü şekilde ifade olunabilir:

Herhangi iki x_1, y_1, z_1 ve x_2, y_2, z_2 noktasını ele alalım. (1) homeomorfisinde bunların homologları x_1', y_1', z_1' ve x_2', y_2', z_2' olsun. Bundan başka, keyfî şekilde küçük ve pozitif bir ε sayısı verilmiş bulunsun. Bu sayı hangi sayı olursa olsun, ilk iki noktayı daima o şekilde seçmek mümkündür ki $x_1' - x_2'$, $y_1' - y_2'$, $z_1' - z_2'$ farklarının $-\varepsilon$ ile $+\varepsilon$ arasında bulunmalarını sağlıyacak tarzda, $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ farkları yeter derecede küçük olsun.

Daha kesin bir şekilde, keyfî şekilde seçilen ve istenildiği kadar küçük olabilen her pozitif ε sayısına öyle bir pozitif η sayısı tekabül eder ki $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ farklarının $-\eta$ ile $+\eta$ arasında bulunmaları halinde, $x_1' - x_2'$, $y_1' - y_2'$, $z_1' - z_2'$ farkları da $-\varepsilon$ ile $+\varepsilon$ arasında bulunurlar.

Bu şartlar altında, (2) denklemlerinin ikinci taraflarının da aynı özelikleri haiz bulundukları esasen ispat olunur.

Analitik yoldan hemeomorfileri, ve dolayısiyle homeomorfiler gurubunu, yâni Topologinin asal gurubunu tanımlamış olduk.

94. Teğetler problemi. Bir C JORDAN eğrisini ele alalım ve buna ait noktalardan ikisi M, M' olsun. C eğrisine M noktasında teğet doğru diye M' noktasının eğri üzerinde M noktasına yaklaşması halinde, *eğer varsa*, MM' doğrusunun limit durumuna denilir. O halde teğetler problemi, aşağıda görüldüğü şekilde ortaya konulabilir: Bir JORDAN eğrisinin her noktasında bir teğet var mıdır ve olmadığı takdirde, bir JORDAN eğrisinin teğetleri haiz bulunması için buna yüklenecek tamamlayıcı şartlar nelerden ibarettir?

Sorunun birinci kısmına verilecek karşılığın menfi olacağı muhakkaktır. Zira teğetsiz sürekli eğriler vardır; bu şekildeki eğrilerden bir tanesi VON KOCH (1870-1924) tarafından inşa edilmiştir; VON KOCH eğrisinin inşa şekli hakkında kısaca bilgi vereceğiz.

Önce bir noktayı kaydetmekle işe başlıyalım. Bir eğrinin, kırık bir çizginin limiti şeklinde ele alınması fikri çok eskidir ve bir çember çevresinin uzunluğunun hesabı vesilesiyle eski yunanlılar tarafından dahi düşünülmüştür.

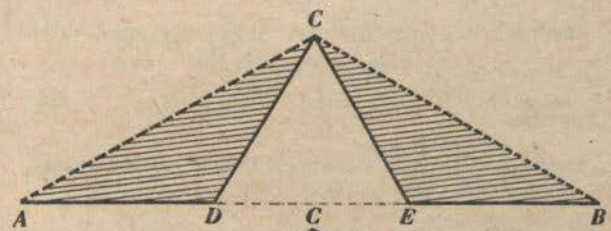
Bir C çemberini ele alalım. Tepeleri bu C çemberi üzerinde bulunan bir A_0 karesi ile, kenarları A_0 inkilerine paralel ve C çemberine teğet olan bir B_0 karesini çizelim. A_0 karesinin her kenarının C çemberinde ayırdığı iki yaydan küçüğünün orta noktasını, bu kenarın iki ucuna birleştirelim. Bu suretle, bir A_1 konveks sekizgenini elde ederiz. Kenarları A_1 sekizgenininkilerine paralel ve C çemberine teğet olan konveks sekizgene B_1 diyelim. Aynı işlemi, A_1 sekizgeninden hareket etmek suretiyle tekrarlayalım, ve buna böylece devam edelim. k sayıda işlemden sonra, tepeleri C çemberi üzerinde bulunan, kenar sayısı $4 \cdot 2^k$ olan ve A_k ile gösterilen konveks bir çokgenle, aynı sayıda kenarı haiz,

kenarları C çemberine teğet ve A_k çokgeninin kilerine paralel bir B_k konveks çokgenini elde ederiz. C çemberi, düzlemin A_k ve B_k çokgenleriyle sınırlanmış bölgesinin temamiyle içindedir. Bu şekildeki çizimlerimize sınırsız bir surette devam etmekle, düzlemin gittikçe inceleşen ve C çemberini ihtiva eden bölgelerini elde ederiz, ve çember de A_k ve B_k çokgenlerinin ortak limiti şeklinde tezahür eder.

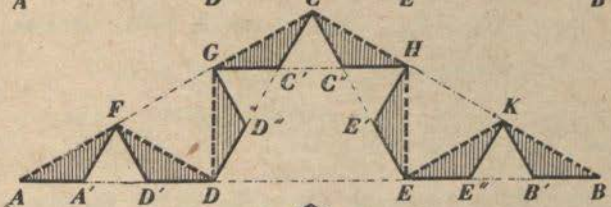
Şimdi VON KOCH eğrisinin çizimine gelelim.

Uçları A, B olan bir L_0 doğru parçasını ele alalım (*Şek.* 36). AB doğru parçasını üç eşit parçaya bölelim ve DE orta parçası üzerine CDE eşkenar üçgenini inşa edelim. $ADCEB$ kırık çizgisine L_2, ve ACB kırık çizgisine de L_1 diyelim.

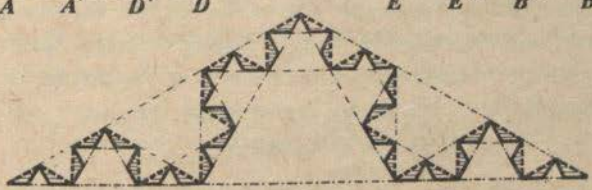
L_2 kırık çizgisine ait doğru parçalarından her birini üç eşit



Şek. 36 (L_1, L_2)



Şek. 37 (L_3, L_4)



Şek. 38 (L_5, L_6)

parçaya bölelim ve her sefer ortadaki parça üzerine bir eşkenar üçgen inşa edelim (*Şek.* 37). Bu suretle L_4 ile göstereceğimiz

$$AA'FD'DD''GC'CC''HE'EE''KB'B$$

kırık çizgisini elde ederiz.

Öte yandan, L_1 kırık çizgisine ait doğru parçalarından her birini üç eşit parçaya bölelim ve ortalardaki doğru parçaları üzerine *FGD*, *HKE* eşkenar üçgenlerini inşa edelim (*Şek.* 37). *AFDGCHEKB* kırık çizgisine de L_3 diyelim. (*Şek.* 38) L_2, L_6 haline tekabül etmektedir.

Bu çizimlere sınırsız bir şekilde devam edelim; böylece, şu iki kırık çizgi dizisini buluruz:

1. Bir, dört, onaltı, ..., 2^{2k}, ... doğru parçasını ihtiva eden L_0, L_2, L_4, ..., L_{2k}, ... kırık çizgileri.

2. İki, sekiz, otuziki, ..., 2^{2k-1}, ... doğru parçasını ihtiva eden L_1, L_3, L_5, ..., L_{2k-1}, ... kırık çizgileri.

Şurasını kaydedelim ki:

a) L_{2k+2} kırık çizgisi, L_{2k} kırık çizgisinin daima üstündedir.

b) L_{2k+1} kırık çizgisi, L_{2k-1} kırık çizgisinin daima altında bulunur.

c) L_0, L_2, ..., L_{2k}, ... kırık çizgileri daima L_1, L_3, ..., L_{2k-1}, ... kırık çizgilerinin altında bulunur.

Dikkatimizi, düzlemin sırasiyle L_1 ve L_2, L_3 ve L_4, L_{2k-1} ve L_{2k}, ... kırık çizgileri arasında kalan bölgeleri üzerine tespit edelim. Düzlemin bu bölgeleri gittikçe inceleşir ve ele alınan iki kırık çizgi dizisinin bir L eğrisinden ibaret ortak bir limiti vardır ki bu da VON KOCH eğrisinin ta kendisidir.

L VON KOCH eğrisinin bir noktasının x, y koordinatlarının,

bir t parametresinin sürekli fonksiyonları oldukları ispat edilir. Fakat M ve M' eğer L eğrisinin iki noktası ise, M' nün M ye sınırsız bir şekilde yaklaşması halinde, MM' doğrusunun limiti belirsizdir ve teğet mevcut değildir.

L VON KOCH eğrisi teğeti olmıyan sürekli bir eğridir.

Bu L eğrisi, her kısmında kendi kendisinin benzeri olmak özeliğini haizdir; başka deyimle, eğrinin herhangi bir parçası, eğrinin bütününün benzeridir. Eğriye ait her parçanın uzunluğu sonsuzdur.

95. Teğetlerin varlık şartları. Hangi şartlar altında, bir

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t) \tag{1}$$

JORDAN eğrisinin bir M noktasında bir teğeti haiz olabileceğini araştıralım. M noktasının koordinatları x_0, y_0, z_0 ve t nin mütekabil değeri de t_0 olsun. t nin bir t_1 değerine tekabül etmek üzere eğrinin ikinci bir M' noktasını alalım ve bunun koordinatları da x_1, y_1, z_1 olsun. MM' doğrusunun denklemleri

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \tag{2}$$

dır.

O halde bu doğrunun doğrultu parametreleri

$$x_1 - x_0 = \varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0), \qquad y_1 - y_0 = \varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0),$$
$$z_1 - z_0 = \varphi_3(t_1) - \varphi_3(t_0)$$

veya, bu parametreler bir orantılılık çarpanı farkiyle tanımlandıklarına göre,

$$\frac{\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_0)}{t_1-t_0}, \qquad \frac{\varphi_2(t_1)-\varphi_2(t_0)}{t_1-t_0}, \qquad \frac{\varphi_3(t_1)-\varphi_3(t_0)}{t_1-t_0} \tag{3}$$

dır.

(1) çizgisinin M noktasındaki teğeti, eğer varsa, M' nün eğri üzerinde M ye yaklaşması, yâni t_1 in t_0 a yaklaşması halinde, MM' doğrusunun limitidir. Bu teğetin denklemleri, bu limite geçişten sonra, (2) denklemlerinden çıkarılacak denklemlerdir. t_1 in t_0 a yaklaşması halinde, (2) denklemlerinde değişen şey, paydalar yâni doğrunun doğrultu parametreleridir. Teğetin M noktasında varolabilmesi için, t_1 in t_0 a yaklaşması halinde (3) fonksiyonlarının limitlerinin varlığı gereklidir. Halbuki bu limitler, tanım gereğince, φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonlarının t_0 noktasındaki $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ türevlerinin ta kendilerinden ibarettir. Bununla beraber, sonlu farzedilen bu türevlerin varlığı da teğetin varolmasına yetmez. Zira bir doğrunun doğrultu parametrelerinin hepsi birden sıfır olamaz, dolayısiyle ayrıca $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ türevlerinin hepsinin birden sıfır olmamaları lâzımdır.

Özet olarak, (1) JORDAN eğrisinin M noktasındaki teğetinin varlığı için:

1. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ fonksiyonlarının bu noktadaki $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ türevlerinin varlığı,

2. Bu türevlerden de hiç olmazsa birinin sıfırdan farklı bulunması gereklidir.

Bunlar, açıkca görüldüğü gibi, yeter şartlardır.

(1) JORDAN eğrisinin her noktasında bir teğetin varolabilmesi için, t nin itibara alınan bütün değerleri için $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ fonksiyonlarının türevlerinin varlığı (bu takdirde bahis konusu fonksiyonların türetilebilir, ya da diferensiyelleri alınabilir fonksiyonlar olduklarını söyliyeceğiz) ve bu türevlerin aynı zamanda sıfır olmamaları gereklidir.

Zâten bu son şartı bir yana bırakabiliriz, zira φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonları, ele alınan (t_0, t_1) aralığında sürekli fonksiyonlarsa, bunların türevlerinin ancak istisnaî hallerde aynı zamanda

sıfır olacakları aşikârdır. Bu da, eğri üzerinde teğetin varolmadığı bazı noktaların mevcudiyyeti ihtimalini farzetmekle birdir. Aynı şekilde, φ_1, φ_2, φ_3 fonksiyonlarından birinin türevinin varolmadığı birtakım noktaların mevcudiyyetini de kabul edebilir ve bu suretle «genel olarak» her noktasında bir teğeti haiz bir JORDAN eğrisine sâhib oluruz.

Yeniden

$$x' = F_1(x, y, z), \qquad y' = F_2(x, y, z), \qquad z' = F_3(x, y, z)$$

homeomorfisini ele alalım. Eğer teğetleri haiz JORDAN eğrileri için bir geometri vücuda getirmek istersek, bu geometrinin asal gurubu olarak, teğetleri haiz bir JORDAN eğrisine gene teğetleri haiz bir JORDAN eğrisini tekabül ettiren homeomorfilerden teşekkül eden bir gurubu almalıyız.

Başka deyimle,

$$x' = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \qquad y' = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \qquad z' = F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

eğrisinin teğetleri olmalı ve ikinci tarafların da türevleri mevcud bulunmalıdır. Bu da, aşikâr bir şekilde, F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarının $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial F_3}{\partial z}$ kısmî türevlerini haiz olmalarını gerektirir ve bu şart yeter. Bu şekildeki F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarının türetilebilir fonksiyonlar olduklarını söyliyeceğiz.

Bu suretle vücuda getirilen geometri şu şekilde karakterize edilebilir: bu, kullanılan bütün fonksiyonların türetilebilir oldukları bir topologidir.

96. Türlü mertebelerden dar anlamlı topologiler. Klâsik Analitik Geometri'de bir

(1) $$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

eğrisi incelendiği zaman, genellikle f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının sınırsız bir şekilde türetilebileceği kabul olunur. Bu takdirde bu eğrilere, bahis konusu fonksiyonların birtakım mertebelere kadar türevlerini hesaba kattıran türlü elemanlar bağlanır. Bunlar meselâ şu elemanlar olabilir:

1. Birinci mertebeden türevlerin hesaba katılmasını gerektiren teğet.

2. Birinci ve ikinci mertebeden türevlerin hesaba katılmasını gerektiren oskülâtör düzlem ve oskülâtör çember.

3. İlk üç mertebeden türevlerin hesaba katılmasını gerektiren oskülâtör küre, v.s.

Halbuki, eğrileri tanımlamağa yarıyan fonksiyonların ikinci mertebeden türevlerinin varlığı üzerine hiç bir hipotez yürütmeden de teğetleri haiz eğriler pekalâ incelenebilir. Bunun gibi, üçüncü mertebeden türevler üzerine hiçbir hipotezi ileri sürmeden oskülâtör düzlem ve çemberler gözden geçirilebilir. Ve bu görüş böylece devam edip gider.

Sadece, ikinci tarafları ilk n mertebeden türevleri haiz olup $(n+1)$ inci mertebeden türevleri bulunmıyan (1) eğrilerini ele almağı uygun bulalım.

Eğer bu eğrilerin bir geometrisini inşa etmek istersek, bu eğrilerden her birini, aynı özelikleri haiz bir eğriye dönüştüren homeomorfileri ele almakla yetinmeliyiz. Bu takdirde kolaylıkla görmek mümkündür ki bu da, homeomorfilerin analitik ifadelelerinde bahis konusu fonksiyonların ilk n mertebeden kısmî türevlerinin varlığını tazammun eder, ve buna mukabil $(n+1)$ inci mertebeden kısmî türevler hakkında hiçbir hipotezi gerektirmez.

İlk n mertebeden kısmî türevi haiz bir fonksiyona n kere türetilebir diyelim. İnşa edegeldiğimiz geometri, kullanılan bü-

tün fonksiyonların n kere türetilebildiği bir topologidir. Buna *n ninci mertebeden dar anlamlı topolojı* adı verilebilir.

Bu düşünce tarzına göre, bundan önceki paragrafta bahis konusu olan teğetleri haiz JORDAN eğrileri geometrisi, birinci mertebeden dar anlamlı bir topologidir.

Oskülâtör düzlem ve oskülâtör çemberleri haiz JORDAN eğrileri geometrisi, ikinci mertebeden dar anlamlı topologidir.

Bu türlü düşünceler son zamanlarda G. BOULIGAND'ın dikkatini çekti ; dar anlamlı topologiler hakkında daha kesin bir inceleme için, onun yayınlarına başvurulmasını tavsiye ederiz.

97. Dolaysız İnfinitezimal Geometri. Şimdi, G. BOULIGAND tarafından Dolaysız İnfinitezimal Geometri adı verilen bir geometri hakkında bazı bilgiler vereceğiz.

Elementer Geometri uzayında bulduğumuzu farzedelim ve bu uzayın gerçel noktalarından müteşekkil bir E cümlesini ele alalım. Bu cümlenin sonsuz noktayı hâvi bulunduğunu farzedeceğiz: örneğin, bunlar bir eğrinin noktalarından, ya da bir yüzeyin noktalarından, veyahut verilen bir kürenin iç noktalarından müteşekkil cümleler olabilir (sonuncusu küreye ait noktaları ihtiva edebilir veya etmiyebilir).

Yarıçapı ne kadar küçük olursa olsun, O merkezli bir küre içinde E cümlesinin hiç olmazsa bir noktası varsa, bu O noktasına E cümlesinin bir *yığılma noktası* ya da bir *limit noktası* denilir. Esasen şurası da ispat edilir ki eğer O noktası E cümlesinin bir yığılma noktası ise, ele alınan O merkezli kürelerden her biri cümlenin sonsuz sayıda noktasını ihtiva eder.

Bir E cümlesinin bir O yığılma noktasına, *kontenjan* ve *paratenjan* denilen iki doğru cümlesi bağlanabilir.

Cümlenin bir M noktasiyle, (O noktasında son bulan) OM yarım-doğrusunu ele alalım. M nin O ya yaklaşması halinde,

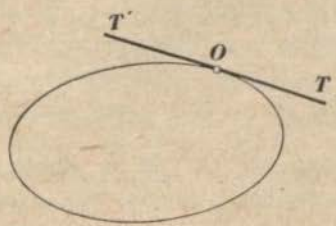
OM yarım-doğrusu, O noktasındaki yarım-teğet adı verilen bir OT limit durumunu haiz olabilir. Yarım-teğetler cümlesi, O noktasındaki kontenjanı vücuda getirirler.

OT eksenli ve O tepeli her dönel koninin tepe açısı ve (OT ye dik ve O dan geçmiyen bir düzlemle sınırlanan) yüksekliği ne kadar küçük olursa olsun, bu koni E cümlesinin O dan farklı hiç olmazsa bir noktasını ihtiva eder, demekle OT yarım-teğeti daha kesin bir şekilde tanımlanmış olur.

Şimdi E cümlesinin O dan farklı iki noktası M, M' olsun. M, M' noktalarının sınırsız bir şekilde ve aynı zamanda O noktasına yaklaşmaları halinde, MM' doğrusunun, O dan geçen bir d limit durumunu haiz olduğunu farzedelim, d doğrusuna, E cümlesinin O noktasındaki paratenjantı denilir. O noktasındaki paratenjantlar cümlesi bu noktadaki paratenjanı vücuda getirir. Aşikâr bir şekilde, bu paratenjan, O noktasındaki contenjanı ihtiva eder ve bazı hallerde onunla da çakışabilir.

Bu tanımları aydınlatmak maksadiyle iki basit örnek verelim.

İlkönce bir eğri yayını, örneğin bir konik kesit yayını ele alalım ve O da bu eğrinin bir noktası olsun (*Şek.* 39). Yayın O noktasında, $T'T$ teğetinin taşıdığı iki OT, OT' yarım-teğeti vardır. Kontenjanı teşkil eden bir tek $T'T$ doğrusu olacaktır.



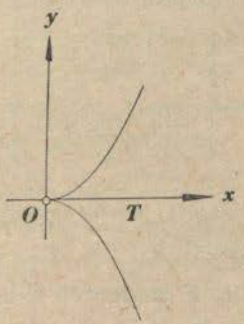
Şek. 39

Şurası açıktır ki O noktasındaki yegâne paratenjant bu doğrudan ibarettir. Kontenjanla paratenjan çakışırlar.

İkinci olarak, koordinatların O başlangıç noktasında bir *dönüm* noktasını haiz olan

$$y^2 = x^3$$

eğrisini ele alalım (*Şek.* 40). Kontenjan, yegâne OT yarım-doğ-



Şek. 40

rusundan müteşekkildir. Buna karşılık, paratenjan ise, O tepeli doğru demetinin bütün doğrularından meydana gelir.

Dolaysız İnfinitezimal Geometrinin asal gurubuna gelelim.

Bir homeomorfi bir cümleyi başka bir cümleye dönüştürür ve bir cümlenin bir yığılma noktasına, homolog cümlenin bir yığılma noktasını tekabül ettirir. Dolaysız İnfinitezimal Geometri'nin asal gurubunun homeomorfilerine, kontenjanları muhafaza etme şartını yükliyeceğiz. Daha kesin bir şekilde, bir cümle E, bunun yığılma noktalarından birisi O, bir T homeomorfisinin E ye tekabül ettirdiği cümle E', O nun E' deki homologu olan yığılma noktası da O' olsun. T homeomorfisi o şekilde olmalıdır ki E cümlesi O noktasında bir kontenjanı haizse, E' nün de O' noktasında bir kontenjanı bulunsun.

Bu şekildeki bir homeomorfinin denklemleri

$$x' = F_1(x, y, z), \qquad y' = F_2(x, y, z), \qquad z' = F_3(x, y, z)$$

ise, yukarıda söylediklerimiz F_1, F_2, F_3 fonksiyonlarının birinci mertebeden sürekli kısmî türevleri bulunmasını, ve üstelik bu üç fonksiyonun

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

fonksiyonel determinantının, ya da jakobiyenin pozitif ve sıfırdan farklı olmasını gerektirir.

Bu şartlar altında, E cümlesinin O noktasında bir paratenjanı varsa, E' cümlesinin de O' noktasında bir paratenjanı vardır.

Dolaysız İnfinitezimal Geometri, G. BOULIGAND ve onun yetiştirdiği bir araştırma ekibi tarafından geliştirilmiştir; bu geometri yardımiyle önemli sonuçlara varıldı. Bu geometri, incelenen varlıklar hakkında en az hipotez yürütmek suretiyle geometrik özelikler elde etmek. veya başka deyimle, bu özeliklerin gerçek nedenini tanımak isteğinden doğmuştur.

Paratenjan kavramı, daha önce, cebirsel eğrilerle ilgili ve temamiyle başka mahiyetteki bir problem münasebetiyle B. LEVI tarafından kullanılmıştı; bu geometrici, hasolmıyan kirişlere paratenjant adını veriyordu. G. BOULIGAND değerli araştırmalarına başladığı sıralarda, F. SEVERI, doğruların topologi yolu ile dönüştürülmesi suretiyle elde olunan ve sezgisel eğri adını verdiği eğrilere, hasolmıyan kiriş kavramını teşmil etti.

98. Sonlu Geometri. Bir elipsi ele alalım. Bunun düzleminde bulunan bir doğru, bu elipsi gerçel veya sanal, farklı veya çakışık iki noktada kestiği gibi, gene bunun düzleminde bulunan bir noktadan bu elipse gerçel veya sanal, farklı veya çakışık iki teğet çizilebilir. Eğer sadece gerçel olan doğru ve noktalarla yetinirsek, bir doğrunun bir elipsi iki noktada, veya bir noktada kestiğini veyahut hiçbir noktada kesmediğini; ve bir noktadan da bu elipse iki veya bir teğet çizilebileceğini veyahut hiçbir teğet çizilemiyeceğini yazmalıyız. Başka deyimle, bir doğru bir elipsi en çok iki noktada keser, ve bir noktadan bu elipse en fazla iki teğet çizilebilir. Bu özelikleri haiz olan yegâne eğriler elipsler değildir; bunlar ovallere, yâni kapalı konveks düzlem eğrilere de ait özeliklerdir.

Bu neviden düşünceler, geometricileri, G. DARBOUX (1842-1916) nun *Sonlu Geometri* adını verdiği geometriye sevketmiştir; düzlem geometri ile yetinerek, bu geometri hakkında bazı bilgiler vereceğiz.

Aşağıki şartları sağlıyan bir C düzlem JORDAN eğrisini ele alalım:

1. Genel olarak bu eğrinin her noktasında bir teğeti vardır.

2. Teğet, değme noktasiyle birlikte, sürekli bir şekilde değişmektedir.

3. Düzlemin her doğrusu bu eğriyi sonlu sayıda noktada kesmektedir.

4. Düzlemin bir noktasından eğrinin sonlu sayıda teğeti geçmektedir.

Eğer bir doğrunun C eğrisiyle kesim noktalarının maksimum sayısı n ise, bu eğriye n ninci mertebedendir diyeceğiz. Eğer bir noktadan eğriye çizilebilen teğetlerin maksimum sayısı m ise, eğrinin m ninci sınıfdan olduğunu söyliyeceğiz.

C nin düalite ile dönüştürülmüşü aynı mahiyyette bir eğridir.

Gerçel cebirsel eğriler, C eğrilerine yüklenilen şartları sağlarlar, fakat eğrinin cebirsel olması keyfiyeti bir yana bırakılırsa, bazı özelikler bâkî kalır ve bu türlü özeliklerin araştırılması, Sonlu Geometri'nin temel problemlerinden birini teşkil eder.

Bu problemleri inceleyen geometriciler arasında, bu eğrilerin bir teorisini kuran ve birçok araştırmalarını bu uğurda yapan C. JUEL (1855-1935) i zikretmek yerinde olur.

JUEL'in bu eğrileri incelemek için hareket noktası, *ilkel yay* kavramıdır. Ucları A, B olan öyle bir sürekli eğri yayını ele alalım ki bu yay, AB kirişi ile birlikte konveks bir bölgeyi sınırlasın. Üstelik, yayın her noktasında, değme noktası ile birlikte sürekli bir şekilde değişen bir tek teğetin varlığını farzedelim.

Bir doğru, ilkel bir yayı en çok iki noktada keser, ve bir noktadan bu yaya en fazla iki teğet çizilebilir. Düalite ile, ilkel bir yay, gene ilkel bir yaya dönüştürülür.

JUEL tarafından tasavvur olunan eğriler, bir yayın her ucu. bir başka yayın bir ucundan ibaret olmak üzere, sonlu sayıda ilkel yayların birleştirilmesinden meydana gelmişlerdir. Bu eğriler, yukarıda koşulan şartları sağlarlar.

JUEL'in bu araştırmalarının fevkalâde bir izahı, birkaç sene evvel, P. MONTEL tarafından yapılmıştır. Bir JORDAN eğrisinden bir JUEL eğrisine geçilmesini sağlıyan yolu MONTEL'den alalım:

Gerçel bir izdüşel düzlemde olduğumuzu farzedelim ve bu düzlemde kapalı bir JORDAN eğrisini ele alalım.

1. İlkönce her noktada bir teğetin varlığı farzolunacaktır; belki sonlu sayıda noktada bu olmıyabilir.

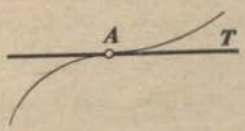
2. Bundan sonra teğetin değme noktasiyle birlikte sürekli bir şekilde değiştiği farzedilecektir; belki bu keyfiyet sonlu sayıda noktada vaki olmıyabilir.

3. Nihayet, eğrinin her noktasının, eğri üzerine ve bu noktanın iki tarafına yerleştirilmiş iki ilkel yayın başlangıç noktalarından ibaret bulunduğu kabul edilecekiir.

Bunlardan da eğrinin, sonlu sayıda ilkel yaylardan teşekkül ettiği sonucu çıkarılır.

Cebirsel eğrilerin, JUEL eğrileri için de doğru olan özelikleri arasında aşağıdakini zikredelim:

Bir eğrinin bir A noktasındaki AT teğeti bir tane ise ve eğri bu noktada teğetin bir tarafından öteki tarafına geçerse, A noktasına eğrinin bir *büküm noktası* denilir (*Şek.* 41). Üçüncü dereceden bir cebirsel eğrinin, üçü gerçel ve altısı sanal olmak üzere, dokuz büküm noktası vardır. Bunun gibi, üçüncü mertebeden bir JUEL eğrisinin üç büküm noktası vardır.



Şek. 41

JUEL, araştırmalarını yüzeylere ve özel olarak regle yüzeylerle uzayın yüzeye ait olmıyan her doğrusu tarafından en çok üç noktada kesilen üçüncü dereceden yüzeylere teşmil etti.

Hâlen Sonlu Geometri ile uğraşan geometriciler arasında A. MARCHAUD ve O. HAUPT'ı zikredeceğiz. Birincisi bilhassa mertebesi sınırlı, sürekli nokta cümlelerini, yâni doğrular tarafından sonlu sayıda noktada kesilen cümleleri incelemiştir.

Sonlu Geometri'nin asal gurubu, şimdiye kadar, kesin bir şekilde karakterize edilememiştir.

99. Topologinin gelişimi. Bundan önceki satırlarda, Elementer Geometriden hareket etmek ve çokca sezgimize dayanmak suretiyle, topologinin neden ibaret olduğunu anlatmağa çalıştık. Topologi üzerine dikkati çeken şey, 1857 yılında RIEMANN tarafından bilime sokulan RIEMANN yüzeyleri olmuştur. Bu yüzeylerin, bilhassa cebirsel eğrilerin incelenmesinde kullanılması keyfiyeti fevkalâde verimli gözüktüğü için, bunlar birçok araştırmalara konu teşkil etmişlerdir.

Bununla beraber başlangıçta, topologi araştırmalarında sezgiye başvurma keyfiyyeti oldukça sıkça vaki oldu, ama yavaş yavaş geometriciler bunun ilkelerini ortaya çıkarmaya ve bu disipline sağlam bir dayanak bulmağa çalıştılar. Esasen topologi, matematiğin başlıca dallarında yavaş yavaş vazgeçilmez bir unsur olarak meydana çıkınca, bunu yapmak ta o derece zorunlu oldu.

Topologi üzerine temel sonuçları H. POINCARÉ'ye borçluyuz; bu teoriye tahsis ettiği beş muhtıra, birçok araştırmaların hareket noktası oldu. Tanınmış geometricinin, topologi üzerindeki modern araştırmaların yol göstericisi olduğu söylenebilir.

Topologi ile ilgili son araştırmalar hakkında bu kadar elementer bir kitapta bilgi veremeyiz. Kitabımızı bitirirken sadece, geometrinin bu kısmı ile ilgili ve elementer görünüşlü iki problemi kaydetmekle yetineceğiz.

Bu problemlerden birincisi, coğrafiya haritalarının renklendirilmesi ile ilgilidir. Bir coğrafiya haritasını ele alalım ve ortak sınırlı iki memleketin farklı renkli olmalarını, ve mümkün olduğu kadar az sayıda renk kullanılmasını isteyelim. Bu iş için acaba kaç çeşit renge ihtiyaç vardır ?

Daha kesin bir şekilde, bir kürenin yüzü üzerine, (tıpkı yer yüzünün, türlü memleketlerin sınırları ve deniz kenarları ile bölgelere bölünmesi gibi) bu yüzü birtakım bölgelere bölmek üzere, (JORDAN) eğrilerinden müteşekkil bir şebeke çizelim. Ortak bir sınırı bulunan iki bölgenin farklı renkleri olmak üzere, bu bölgelerden her birine bir renk verelim. Buna mukabil, sonlu sayıda ortak noktası bulunan iki bölge aynı rengi haiz olabilsin. Bu renklendirmenin yapılması için zorunlu olan renklerin minimum sayısı aranmaktadır. Bu sayının en az dörde, en çok da beşe eşit olduğu ispat olunmuştur. Beş rengi gerektiren hiç bir örnek bilinmediği için, dört rengin daima yettiği, şimdiye kadar hiçbir neticeye varılamadan, ispat edilmeğe çalışılmıştır. İşte bu, dört renk problemi adı altında bilinen problemdir.

İkinci problem çokyüzlülerle ilgilidir. Elementer Geometri kitaplarında, bir çokyüzlünün S sayıda tepesi, A sayıda ayrıtı ve F sayıda yüzü varsa, bu sayılar arasında

$$F+S=A+2$$

bağıntısının bulunduğu ispat olunur.

Yukarıki bağıntı DESCARTES tarafından da bilinmekle beraber, bu, EULER teoremi adı altında tanınan bir teoremdir.

Ayrıtların doğru parçaları ve yüzlerin de düzlem kısımlarından ibaret olmaları keyfiyeti ispatta hiçbir rol oynamadığından, tam mânasiyle bir topologi özeliği bahis konusudur. Bir küre yüzeyi üzerine, ya da sıfır cinsinden bir RIEMANN yüzeyi üzerine çizilmiş JORDAN eğrilerinden müteşekkil bir şebeke için bu bağıntı doğrudur. Zâten, p cinsinden bir RIEMANN yüzeyi üzerine çizilmiş şebekeler için de buna benzer bir bağıntı vardır.

KISA BİBLİYOGRAFYA

BİRİNCİ BÖLÜM

ENRIQUES, F. ve SANTILLANA, G. : Storia del pensiero scientifico, I, Il mondo antico. BOLOGNA (1932).

ENRIQUES, F. : Questioni riguardanti le matematiche elema tari, 3 üncü baskı, 4. BOLOGNA (1925-1927).

» » : Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, ROMA (1925).

MILHAUD, G. : Les philosophes géomètres de la Grèce, PARIS (1900).

PERES, J. : Les Sciences exactes, (E. CAVAIGNAC'ın idaresi altında Histoire du Monde adı altında yayınlanan eserin 13 üncü cildinin 3 üncü cüzü) PARIS (1930).

TANNERY, P. : La géométrie grecque, PARIS (1887).

VER EECKE, P. : Oeuvres d'Archimède, PARIS ve BRUXELLES (1921).

» » : Les coniques d'Apollonius de Perge, PARIS ve BRUXELLES (1924).

ZEUTHEN, H. G. : Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age, PARIS (1902).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

CHASLES, M. : Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie. PARIS ve BRUXELLES (1837); ikinci baskı, PARIS (1875).

CHASLES, M. : **Rapport sur le progrès de la Géométrie,** PARIS (1870).

ENRIQUES, F. : **Leçons de Géométrie projective,** PARIS (1930).

GODEAUX, L. : **Leçons de Géométrie projective,** PARIS ve LIEGE (1933).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BARBARIN, P. : **La géométrie non euclidienne,** Üçüncü baskı. A. BUHL tarafından kitabın sonuna eklenen notlarla birlikte. PARIS (1928).

ENRIQUES, F. : *Principe de la géométrie*, Encyclopédie des Sciences mathématiques. PARIS (1909).

FANO, G. : **Geometria non euclidea,** BOLOGNA (1935).

POINCARE, H. : **Les fondements de la géométrie,** Bibliothèque de synthèse scienfique. PARIS, (1921).

ROUCHE, E. VE CAMBEROUSSE, CH. DE : **Traité de Géométrie,** Cilt II. H. POINCARE tarafından yazılan II numaralı not. PARIS (1900).

BEŞİNCİ BÖLÜM

BOULIGAND, G. : **Premières leçons sur la théorie générale des groupes,** PARIS (1935).

CARTAN, E. : *Quelques aperçus sur la thérie des groupes de Sophus Lie dans le développement de la géométrie moderne.* OSLO da Milletlerarası Matematikciler Kongresinde verilen konferans (1936).

ESTEVE, R. VE MITAULT, M. : **Cours de géométrie** (3 cilt). PARIS (1935-1936).

GODEAUX, L. : **La géométrie,** PARIS ve LIEGE (1931).

ALTINCI BÖLÜM

ALEXANDROFF, A. VE HOPF, H. : **Topologie**, Berlin (1935).

BOULIGAND, G. : **Introduction à la géométrie infinitésimale directe**, PARIS (1932).

CARTAN, E. : **La géométrie des espace de Riemann**, Mémorial des Sciences Mathématiques. PARIS (1925).

» » : **Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann**, PARIS (1928).

» » : **La théorie des groupes finis et continus et l'analysis-situs.** Mémorial des Sciences Mathématiques. PARIS (1930).

» » : **Leçons sur la thérie des espaces à connexion projective**, PARIS (1937).

KEREKJARTO, B.M. DE : **Vorlesungen über Topologie**, BERLIN (1923).

LEFSCHETZ, S. : **Topology**, NEW YORK (1930).

MONTEL, P. : *Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel.* Bulletin des Science Mathématiques, 109—128 (1924).

SEVERI, F. : *Conferenze di geometria algebrica.* ROMA (1927).

(Eserde adı geçen kimseler için)

ALFABETİK İNDEKS

A

Ahmes, 2
Akilleus, 4
Apollonios, 16, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 57
Arkhimedes, 13, 14, 16, 24, 116, 117, 118
Arkhytas, 12

B

Beaugrand, de, 58
Bertini, E., 174
Bezout, E., 43, 45
Bolyai, J., 106
Bouligand, G., 207, 209, 210
Bradwardine, T., 25
Buridan, J., 25

C

Cantor, G., 117
Carnot, L., 64, 68, 104
Cartan, E., 159, 187
Cataldi, P.—A., 103
Cayley, A., 54
Ceva, G., 81, 91
Chasles, M., 70, 72, 93, 95, 96, 100
Commandi, F., 25
Crammer, G., 45, 46
Cremona, L., 174
Cues, N. de, 25

D

Dandelin, G. P., 22
Darboux, G., 210
Dedekind, R., 117, 118, 120, 180
Desargues, G., 21, 27, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 70, 78, 116, 118, 139
Descartes, R., 13, 21, 57, 139, 214

E

Eisenlohr, A., 2
Enriques, F., 112, 119, 179, 188
Eukleides, 3, 4, 5, 6, 7, 19, 24, 25, 102, 103, 104, 106, 107, 110, 111, 112, 115, 116, 133, 134, 158, 159, 178, 179, 187, 194
Euler, L., 214

F

Fermat, P. de, 21, 27
Fibonacci, L., 24
Fourier, J., 104
Fuchs, I. L., 108

G

Galois, É., 130
Gauss, K. F., 106

H

Haupt, O., 213
Henry, C., 27
Hermite, C., 14
Hilbert, D., 112, 115, 116, 117, 179
Hippasos, 3
Hippokrates, 11, 12, 13
Hoppe, R., 194

J

Jordan, C., 194, 195, 199, 200, 203, 204, 205, 207, 210, 212, 214
Juel, C., 211, 212, 213, 215

K

Klein, F., 158, 187
Koch, H. von, 200, 201, 202, 203

L

Lagrange, J. L. de, 104
Laguerre, E. N., 150
La Hire, P. de, 60, 61, 62, 63, 68, 78
Lambert, J. H., 104
Lamé, G., 46
Laplace, P. S. de, 104
Legendre, A. M., 102, 104, 106
Leibniz, G. W., 60
Lemoine, E. M. A., 15, 16
Le Poivre, 60, 61, 63, 78
Levi, B., 210
Lie, M. Sophus, 158, 187
Lindeman, F. von, 14
Lobaçevski, N. I., 106, 108, 109, 110

M

Mac-Laurin, C., 46
Marchaud, A., 213
Memus, J.-M., 55
Menechme, 13
Menelaus, 81
Möbius, A. F., 72, 91
Monge, G., 63, 64, 68, 70

N

Nasiruddin, T., 103
Nemore, J. de, 25
Ney, M., 65
Nikomedes, 9

O

Oresme, N., 25, 26, 27

P

Pappos, 10, 24, 72
Parmenides, 4
Pascal, B., 21, 58, 60, 61, 64, 78
Peano, G., 196, 198
Périer, E., 60
Plücker, J., 166
Poincare, H., 108, 109, 112, 213
Poncelet, J. V., 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 78, 79, 83, 87, 97, 100
Proklos, 4, 24, 102, 103
Pythagoras, 2, 3, 4

Q

Quetelet, A., 22

R

Rhind, A. H., 2
Riemann, B., 110, 111, 159, 187, 188, 191, 192, 213, 215

S

Saccheri, G., 103, 104
Saxe, A. de, 25
Schweikart, F. K., 106
Severi, F., 210
Steiner, J., 91, 100
Soto, D., 25

STAUDT, VON, 82, 83, 88, 91, 118, 123
STRUVE, F. G. G., 2

T

TANNERY, P., 3, 4, 27
TAURINUS, 106
THALES, 2
TUREAU-DANGIN, F., 2

V

VERONESE, C., 116, 118
VITALE, G., 103

W

WALLIS, J., 103

Z

ZENON, 4, 5
ZEUTHEN, H.-G., 5

İstanbul Üniversitesi — Matematik Enstitüsü Matbaası

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatâlar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
16 — Rasyonel ve İrrasyonel sayılar (600 Krş.)
17 — Çeşitli Geometriler (750 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş)
21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
22 — Algoritmalar ve otomatik hesap makinaları (400 Krş.)
23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
24 — Matematiksel sonsuz (100 Krş.)
25 — Sayılar ve şekiller (850 Krş.)
26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen şekiller (300 Krş).

Türk Matematik Derneğinin adresi:
Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü
Vezneciler—İstanbul

Fiatı 750 Krş.