

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 18

A. I. MARKUSCHEWITSCH

# İNDİRGEMELİ DİZİLER

Çevirenler :

A. R. ÖZBEK

M. A. ÖZKAN

İSTANBUL — 1963

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 18

A. I. MARKUSCHEWITSCH

# İNDİRGEMELİ DİZİLER

Çevirenler :

A. R. ÖZBEK

M. A. ÖZKAN

İSTANBUL — 1963

İNGİLİZCE DİZİLER

İSTANBUL MATBAASI

Nuruosmaniye caddesi No. 90 - İstanbul



### Bu Kitap Hakkında

Bu kitapçık, yazarın, önce Moskovada yapılan bir matematik yarışmasına katılan lise dokuz ve onuncu sınıf öğrencileri önünde, daha sonra biraz değişik bir şekilde bir öğretmen okulunda vermiş olduğu bir konferansın yazılarak işlenmiş şeklini ihtiva etmektedir. «İndirgemeli diziler» konusunun, lise müfredatının bir kısmı (aritmetik ve geometrik diziler, tabii sayıların karelerinden meydana gelen dizi ve artan kuvvetlere göre düzenlenmiş iki polinomun bölünmesinden elde edilen bölümün katsayıları dizisi v. s.) ile yakınlığı vardır. Bundan başka önümüzdeki bu küçük matematik teorisi (analize alışıktır olan okuyucu için, bu teorelinin sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemler teorisinin tam bir benzeri olduğuna işaret edelim), bu teoriyi kuran büyük matematik üstadlarının yaptığı her şeyde olduğu gibi, kendi içine kapalı, basit ve açıktır. İndirgemeli dizilerin ana hatları, onsekizinci yüzyılın yirminci yıllarında Fransız matematikçisi MOIVRE [ $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$  formülüne O'nun adı verilmiştir] ile İsviçreli matematikçi DANIEL BERNOULLI, tarafından işlenip yayılmıştır. Onsekizinci yüzyılın en büyük matematikçisi LEONHARD EULER bu teoriyi daha da geliştirmiş ve «Introductio in analysin infinitorum, 1748» adlı meşhur eserinin onüçüncü ayıtını indirgemeli dizilere (serilere) ayırmıştır. İndirgemeli diziler konusunda yapılan daha sonraki çalışmalar arasında özellikle önemli Rus matematikçilerinden P. L. TSCHEBYSCHEFF'in ihtimaller hesabı ve A. A. MARKOFF'un diferanslar hesabı kitaplarını zikredebiliriz.

## Bu Yayınlar Hakkında

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

**Türk Matematik Derneği**



1. İndirgemeli<sup>1)</sup> diziler kavramı aritmetik veya geometrik diziler kavramının geniş ölçüde genelleştirilmiş bir şeklidir. Tabii sayıların kareleri veya küblerinden meydana gelen dizilerle rasyonel sayıların ondalık kesir halinde yazılışlarındaki rakam dizileri (genel olarak herhangi bir periyodik dizi) ve  $x$  in artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş iki polinomun bölünmesinden çıkan bölümün katsayıları dizisi v. s. de özel olarak bu indirgemeli dizilerdendir. Buradan, indirgemeli dizilere lise matematik öğreniminde sık sık rastlanacağı anlaşılmaktadır. İndirgemeli dizilerin teorisi, *diferensler hesabı* adı ile bilinen bir matematik disiplinin özel bir bölümünü teşkil eder. Burada biz bu teoriyi, okuyucuda hiç bir özel bilginin mevcudiyetini kabul etmeden (sadece bir yerde lineer cebirin isbatsız olarak verilen bir teoremine dayanarak) anlatacağız.

## 2. Dizileri

$$(1) \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

veya kısaca  $\{u_n\}$  şeklinde yazacağız. Eğer herhangi bir  $n$  yerinden itibaren bütün terimler için

$$(2) \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq k \geq 1)$$

bağıntısı cari olacak şekilde bir  $n$  tabii sayısı ile  $a_1, a_2, \dots, a_k$  (reel veya kompleks) sayıları mevcut ise, (1) dizisine *k-yıncı mertebeden bir indirgemeli dizi* denir ve (2) bağıntısına da *k-yıncı mertebeden indirgeme denklemi (indirgeme formülü)* adı verilir. Böylece bir indirgemeli dizi, terimlerinden herbirinin (belli bir terimden itibaren) (2) uyarınca kendinden hemen önceki aynı bir  $k$  sayısı kadar terim cinsinden ifade edilebilmesiyle karakterize

<sup>1)</sup> Fransızca «récurrente», almanca «rekursiv» veya «rekurrent».

edilir. Burada, sonraki terimlerin hesaplanması, daha önceki terimlerin bilinmesine indirgendığı için «indirgemeli» deyimini kullanılmıştır.

Misâl 1. Geometrik dizi.

$$(3) \quad u_1 = a, u_2 = a q, u_3 = a q^2, \dots, u_n = a q^{n-1}, \dots,$$

olarak verilen bir geometrik dizi için (2) denklemi

$$(4) \quad u_{n+1} = q u_n$$

şeklini haizdir. Burada  $k=1$  ve  $a_1=q$  olduğuna göre, geometrik dizi birinci mertebeden bir indirgemeli dizidir.

Misâl 2. Aritmetik dizi..

$$u_1 = a, u_2 = a + d, u_3 = a + 2d, \dots, u_n = a + (n-1)d, \dots$$

aritmetik dizisi için

$$u_{n+1} = u_n + d$$

olur; bu bağıntı ise (2) şeklini haiz değildir<sup>2)</sup>. Fakat bu bağıntıyı komşu iki  $n$  değeri için gözönüne alırsak

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{ve} \quad u_{n+1} = u_n + d$$

elde eder ve çıkarma ile buradan

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

veya (2) şeklini haiz olan

$$(5) \quad u_{n+2} = 2 u_{n+1} - u_n$$

<sup>2)</sup> Bunun için, sağ yanda dizinin sadece sabit katsayılı terimlerinin bulunması karakteristiktir.

denklemini buluruz. Burada  $k=2$ ,  $a_1=2$ ,  $a_2=-1$  olduğuna göre, aritmetik dizi ikinci mertebeden bir indirgemeli dizidir.

Misâl 3. FIBONACCI<sup>1)</sup> nin klâsik tavşan problemini gözönüne alalım. Bu problem, ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çifti verdikleri ve yeni doğanların da bir ay zarfında tam erginliğe eriştikleri bilindiğine göre, bir ergin tavşan çiftinden bir yılda ortaya çıkacak bütün ergin tavşan çiftlerinin sayısını bulma probleminden ibarettir. Burada ilgi çekici olan, kolayca bulunabilecek olan sonuçtan ziyade, terimleri, yavrulayabilen tavşan çiftlerinin toplam sayısından ibaret olup, başlangıç anında ( $u_1$ ), bir ay sonra ( $u_2$ ), iki ay sonra ( $u_3$ ) ve genel olarak  $n$  ay sonra ( $u_{n+1}$ ) olan dizidir. Aşikâr olarak  $u_1=1$  dir. Bir ay sonra buna yeni doğmuş bir çift daha katılmakta, fakat ergin tavşan çiftlerinin sayısı yine eskisi gibi  $u_2=1$  olarak kalmaktadır. İki ay sonra genç tavşan çifti erginleşmiş ve yavrulayabilen çiftlerin sayısı 2 ye yükselmiştir:  $u_3=2$ . Şimdi  $n-1$  ay sonraki ergin çiftlerin toplam sayısı  $u_n$  ve  $n$  ay sonrakilerinki de  $u_{n+1}$  olsun. Bu zaman içinde  $u_n$  kadar ergin tavşan çifti  $u_n$  kadar da artış kaydettiğinden  $n+1$  ay sonraki ergin tavşan çiftlerinin toplam sayısı

$$(6) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} u_4 &= u_3 + u_2 = 3, & u_5 &= u_4 + u_3 = 5, & u_6 &= u_5 + u_4 = 8, \\ u_7 &= u_6 + u_5 = 13, \dots \end{aligned}$$

dir. Böylece terimlerinden herbiri kendinden önceki ilk iki terimin toplamına eşit olan

<sup>1)</sup> FIBONACCI veya PISA'lı LEONARDO orta çağın (1200 yılları) bir İtalyan matematikçisi olup, Orta Asya ve Yakındoğu milletlerince biliniyor kullanılan cebir ve aritmetiğe ait geniş ölçüde bir özetlemeyi ihtiva eden «Abakus» adlı eseri bırakmıştır. Kitabın konusu LEONARDO tarafından yeniden gözden geçirilmiş ve tamamlanmıştır.



$$(7) \quad \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, \\ u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, \dots \end{cases}$$

dizisini elde ederiz. Bu diziye FIBONACCI dizisi adı verilir, ve terimlerine de FIBONACCI sayıları denir. (6) denklemi FIBONACCI dizisinin ikinci mertebeden bir indirgemeli dizi olduğunu göstermektedir.

Misâl 4. Başka bir misâl olmak üzere tabii sayıların karelerinden ibaret

$$(8) \quad u_1 = 1^2, u_2 = 2^2, u_3 = 3^2, \dots, u_n = n^2, \dots$$

dizisini gözönüne alalım. Burada

$$u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

ve dolayısıyla

$$(9) \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

dir.  $n$  yi 1 artırırsak

$$(10) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3$$

elde eder ve (9)-u (10) dan çıkarırsak

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2$$

veya

$$(11) \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2$$

buluruz. Şimdi (11) denkleminde  $n$  yi 1 artırırsak

$$(12) \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2$$

ve buradan da ((11)-i (12) den çıkararak)

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

veya

$$(13) \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

elde ederiz.

Böylece üçüncü mertebeden bir indirgeme denklemine gelmiş bulunuyoruz. O halde (8) dizisi üçüncü mertebeden bir indirgemeli dizidir. Benzer şekilde tabii sayıların küblerinden ibaret

$$(14) \quad 1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots$$

dizisinin dördüncü mertebeden bir indirgemeli dizi olduğu gösterilebilir. Bu diziye ait terimlerin

$$(15) \quad u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n$$

denklemini gerçeklediklerinin isbatını okuyucuya bırakıyoruz.

Misâl 5. Bütün periyodik diziler de indirgemeli dizilere dahildirler. Misâl olarak 761/1332 sayısının ondalık kesir halinde

$$\frac{761}{1332} = 0,57132132132 \dots$$

yazılışındaki rakamlar dizisini gözönüne alacağız. Burada

$$(16) \quad \begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, \\ u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \dots \end{cases}$$

dir. Aşikâr olarak

$$(17) \quad u_{n+3} = u_n \quad (n \geq 3)$$

dir. Bunu (2) şeklinde gösterebilmek için

$$u_{n+3} = 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n$$

yazarsak, bu denklemin üçüncü mertebeden bir indirgeme formülü olduğu görülür, ( $k=3$ ,  $a_1=0$ ,  $a_2=0$ ,  $a_3=1$ ).

Şu halde (16) dizisi üçüncü mertebeden indirgemeli bir dizidir.

Misâl 6. Şimdi  $x$  in artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş iki polinomun bölümünden çıkan bölümün katsayıları dizisini gözönüne alalım:

$$P(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l$$

ve

$$Q(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_k x^k \quad (B_0 \neq 0)$$

olsun.

$P(x)$  polinomunu  $Q(x)$  e «bölelim»<sup>1)</sup>;  $P(x)$  eğer  $Q(x)$  ile kalansız olarak bölünemiyorsa, bölme sınırsız bir şekilde devam ettirilebilir. Böylece bölüm olarak, ard-arda bulunan terimlerle,

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \dots + D_n x^n + \dots$$

elde edilir. Şimdi

$$(18) \quad u_1 = D_0, u_2 = D_1, \dots, u_n = D_{n-1}, \dots$$

dizisini gözönüne alarak, bunun  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgemeli dizi olduğunu göstereceğiz (burada  $k$ -nın bölünenin derecesi olduğunu hatırlatalım). Bu maksatla sadece  $n \geq l - k + 1$  şartını sağlayan herhangi bir  $n$  tabii sayısı alalım ve bölme işlemini, bölümün  $x^{n+k}$  yı ihtiva eden teriminde keselim. Bu takdirde kalan olarak,  $x$  in  $(n+k)$ -yıncıdan daha yüksek kuvvetlerini ihtiva eden bir  $R(x)$  polinomu elde edilir. Bölünen, bölen, bölüm ve kalan arasındaki bağıntıyı gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} A_0 + \dots + A_l x^l &= \\ &= (B_0 + \dots + B_k x^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k} x^{n+k}) + R(x) \end{aligned}$$

identikliğini elde ederiz.

<sup>1)</sup> Burada bahis konusu olan, polinomların bölümünde kullanılagelenden farklı bir metoddur ve kuvvet serilerinde belirsiz katsayılar metodu yardımıyla yapılan bölme işlemine benzer şekilde yürütülür.



Şimdi bu denklemin sağ ve sol yanlarında  $x^{n+k}$  nin katsayılarını arayalım ve bunları birbirine eşit yazalım.  $n+k \geq l+1$  olması yüzünden  $x^{n+k}$  nin sol yandaki katsayısı sıfıra eşittir. O halde sağ yanda da  $x^{n+k}$  nin katsayısı sıfıra eşit olmalıdır;  $x^{n+k}$  li terimler ise yalnız  $(B_0 + \dots + B_k x^k) \cdot (D_0 + \dots + D_{n+k} x^{n+k})$  çarpımından gelir (zira söylendiği üzere  $R(x)$  kalanı  $x$  in daha yüksek kuvvetlerini ihtiva etmektedir). Bu yüzden aranan katsayı

$$(19) \quad D_{n+k} B_0 + D_{n+k-1} B_1 + \dots + D_n B_k$$

dan ibaret olup, yukarda kaydedildiği üzere, sıfıra eşit olmak zorundadır:

$$D_{n+k} B_0 + D_{n+k-1} B_1 + \dots + D_n B_k = 0.$$

Buna göre ( $B_0 \neq 0$  olduğundan)

$$(20) \quad D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0} D_n \quad (n \geq l-k+1)$$

olur. Bu ise  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgeme formülüdür; buradan da (18) dizisinin  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgemeli dizi olduğu sonucuna varılır.

3. Misâl 6, gözönüne alınan misâller arasında en genel karakteri haiz alanıdır. Şimdi

$$(21) \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

gibi,

$$(22) \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq k \geq 1)$$

şeklindeki bir denklemi gerçekliyen  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgemeli dizinin, belli bir  $P(x)$  polinomunun

$$(23) \quad Q(x) = 1 - a_1 x - \dots - a_k x^k$$

polinomu ile bölünmesinden çıkan bölümün katsayıları dizisine idantik olduğunu göstereceğiz.

$n$  sayısı  $n > k + m - 2$  şartını gerçekliyen herhangi bir tabii sayı olsun.  $Q(x)$  polinomunu  $u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots + u_{n+1} x^n$  ile çarpalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
 (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k) (u_1 + u_2 x + \\
 + \dots + u_{k+m-1} x^{k+m-2} + \dots + u_{n+1} x^n) = \\
 = [u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \dots + \\
 + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \dots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}] + \\
 (24) \quad + [(u_{k+m} - a_1 u_{k+m-1} - \dots - a_k u_m) x^{k+m-1} + \\
 + \dots + (u_{n+1} - a_1 u_n - \dots - a_k u_{n-k+1}) x^n] - \\
 - [(a_1 u_{n+1} + \dots + a_k u_{n-k+2}) x^{n+1} + \dots + a_k u_{n+1} x^{n+k}]
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada birinci köşeli parantez içinde: katsayıları, bizce seçilmiş olan  $n$  ye bağlı bulunmayan,  $l = k + m - 2$  -inci dereceden bir polinom bulunmaktadır. Bunu  $P(x)$  ile gösterelim:

$$\begin{aligned}
 P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \dots + \\
 (25) \quad + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \dots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}.
 \end{aligned}$$

İkinci köşeli parantez içinde ise bütün katsayıları (22) denklemi gereğince hep sıfır olan bir polinom vardır. Nihayet sonuncu köşeli parantez, katsayıları  $n$  ye bağlı olan, fakat  $(n+1)$ -inciden daha düşük dereceli hiç bir terim ihtiva etmiyen bir polinom vermektedir. Bunu  $R_n(x)$  ile gösterirsek, (24) idantikliğı

$$\begin{aligned}
 P(x) = (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k) (u_1 + u_2 x + \\
 (26) \quad + \dots + u_{n+1} x^n) + R_n(x)
 \end{aligned}$$

şekline girer. Buradan görüldüğü üzere,  $P(x)$  in

$$Q(x) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k$$

ile bölünmesinde  $u_1 + u_2 x + \dots + u_{n+1} x^n$  bölümü,  $R_n(x)$  ise kalanı teşkil etmektedir, yani

$$u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

dizisi gerçekten (25) in (23) ile bölünmesinden çıkan bölümün katsayıları dizisinden ibarettir.

Misâl olarak

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, \dots$$

FIBONACCI dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin terimleri

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 1)$$

denklemini gerçeklediklerinden, bu hal için  $m = 1, k = 2, a_1 = 1, a_2 = 1$ , ve  $Q(x) = 1 - x - x^2$  dir.  $P(x)$  polinomu,  $k + m - 2 = 1$  den daha yüksek dereceli olmamalıdır. Buna göre (25) uyarınca

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1$$

elde edilir. O halde FIBONACCI sayıları 1 in  $1 - x - x^2$  ile bölünmesinden meydana gelecek bölümün katsayıları dizisi ile çakışmaktadır.

4. Lise öğretiminde aritmetik ve geometrik dizilerle olduğu gibi tabii sayıların kareleri dizisiyle de ilgili olarak çözülmesi gereken problemlerden biri de, bu dizilerden herbirine ait  $n$  terimin toplamını bulmaktır. Genel olarak

$$(27) \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

terimleri

$$(28) \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq m)$$



denklemini gerçekliyen,  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgemeli dizi olsun. Bu defa (27) sayılarının  $s_n$  toplamlarından teşkil edilen yeni

$$(29) \quad s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots$$

dizisini gözönüne alalım. Şimdi bu dizinin de aynı şekilde bir indirgemeli dizi olduğunu, daha açık olarak, terimleri

$$(30) \quad \begin{aligned} s_{n+k+1} &= (1 + a_1) s_{n+k} + \\ &+ (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n \end{aligned}$$

denklemini gerçekliyen  $(k+1)$ -inci mertebeden bir indirgemeli diziden ibaret bulunduğunu göstereceğiz.

İspat için, açıkça görüldüğü üzere,

$$(31) \quad \begin{cases} u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \quad \dots, \\ u_n = s_n - (u_1 + \dots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}, \quad \dots \end{cases}$$

olduğuna işaret edelim.

$s_0 = 0$  koyarak  $u_1 = s_1 - s_0$  yazılır ve (28) denkleminde  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  ler yerine  $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$  cinsinden olan ifadeleri konursa

$$\begin{aligned} s_{n+k} - s_{n+k-1} &= a_1 (s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + \\ &+ a_2 (s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \dots + a_k (s_n - s_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} s_{n+k} &= (1 + a_1) s_{n+k-1} + \\ &+ (a_2 - a_1) s_{n+k-2} + \dots + (a_k - a_{k-1}) s_n - a_k s_{n-1} \quad (n \geq m) \end{aligned}$$

veya,  $n$  yerine  $n+1$  koyarak,

$$\begin{aligned} s_{n+k+1} &= (1 + a_1) s_{n+k} + \\ &+ (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n \quad (n \geq m-1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $(k+1)$ -inci mertebeden bir indirgeme formülüdür.

Birkaç misâl gözönüne alalım :

a) Geometrik dizi. Burada  $u_n = aq^{n-1}$  ve

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$$

dir.  $\{u_n\}$  nin terimleri  $u_{n+1} = qu_n$  şeklindeki bir denklemi gerçeklediklerinden  $\{s_n\}$  nin terimleri

$$(32) \quad s_{n+2} = (1+q)s_{n+1} - qs_n$$

denklemini sağlamak zorundadırlar.

b) Tabiiî sayıların kareleri dizisi. Burada  $u_n = n^2$  ve  $s_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$  dir.  $\{u_n\}$  nin terimleri

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

denklemini gerçekledikleri için (bk. S. 5),  $\{s_n\}$  ninkiler

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

denklemini sağlarlar.

c) FIBONACCI sayıları. Bunlar

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

denklemini gerçeklediklerinden,  $s_n$  toplamları

$$s_{n+3} = 2s_{n+2} - s_n$$

denklemini sağlamak zorundadırlar.

5. Meselâ aritmetik veya eometrik diziler, tabiiî sayıların kareleri veya küblerinden ibaret diziler veyahut da periyodik diziler gibi en basit indirgemeli dizilerde, dizinin her terimini,



daha önceki terimleri hesaplamaksızın bulabiliriz. Fakat FIBONACCI sayıları dizisi veya genel olarak iki polinomun bölünmesinden çıkan bölümün katsayıları dizisi için ilk bakışta böyle bir imkân göremiyoruz. Meselâ onüçüncü FIBONACCI sayısı olan  $u_{13}$  ü hesaplamak için, evvelâ ard-arda daha önceki bütün terimleri hesap etmemiz gerekiyor (bunun için  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  denklemini kullanıyoruz) :

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13,$$

$$u_8 = 21, u_9 = 34, u_{10} = 55, u_{11} = 89, u_{12} = 144, u_{13} = 233.$$

Şimdi bir indirgemeli diziye ait terimlerin yapısı hakkında daha esash bir incelemeye geçecek ve neticede, genel halde bile, bir indirgemeli dizinin her terimini, daha önceki terimleri belirtmeye lüzum kalmadan hesaplayabilme imkânını veren formüller elde edeceğiz. Bu türlü formüllere, bir aritmetik veya bir geometrik dizinin genel terimini veren formüllerin çok genelleştirilmiş şekilleri gözüyle bakılabilir.

$$(33) \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

$k$ -yıncı mertebeden bir indirgeme formülü olsun. Bu denklem bütün  $n = 1, 2, 3, \dots$  tabii sayıları için gerçekleşiyorsa,  $n = 1$  koyarak

$$u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1} + \dots + a_k u_1$$

elde edilir. O halde  $u_1, u_2, \dots, u_k$  biliniyorsa,  $u_{k+1}$  de hesaplanabilir. (33) de  $n = 2$  koyalım; bu takdirde

$$u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k + \dots + a_k u_2$$

bulunur. Böylece  $u_{k+2}$  büyüklüğü de bizce biliniyor demektir. Genel olarak  $m$  herhangi bir tabii sayı olduğuna göre, eğer

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{m+k-1}$$



terimleri önceden hesaplanmış ise, (33) denkleminde  $n = m$  koyup buradan  $u_{m+k}$  ardışık terimi bulunabilir.

O halde terimleri (33) denklemini gerçekliyen  $k$ -yıncı mertebeden bir indirgemeli dizinin ilk  $k$  terimi olan  $u_1, u_2, \dots, u_k$  biliniyorsa, diğer terimler bu denklem yardımıyla tek türlü belirtilebilir. Bu terimler mümkün olan bütün tarzlarda seçilecek olursa (bu seçme işi hiç bir sınırlamaya bağlı tutulmamıştır), (33) denklemini gerçekliyen çeşitli dizilerden ibaret sonsuz elemanlı bir cümle elde edebiliriz. Bu cümlenin elemanları olan diziler birbirlerinden, ilk  $k$  terimleri (hiç olmazsa bunlardan biri) bakımından olduğu gibi daha sonraki terimler itibariyle de farkederler. Meselâ birinci mertebeden

$$u_{n+1} = q u_n$$

denklemini  $q$  ortak çarpanlı bütün geometrik diziler gerçeklerler (bunlar birbirlerinden  $u_1$  başlangıç terimi bakımından farkederler). Bunun gibi ikinci mertebeden

$$u_{n+2} = 2 u_{n+1} - u_n$$

(veya  $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ ) indirgeme denklemini, hiç olmazsa  $u_1 = a$  ve  $u_2 = a + d$  terimlerinden biri bakımından birbirinden farkeden bütün aritmetik diziler gerçeklerler. O halde bunlar ya  $a$  başlangıç terimi veya  $d$  ortak farkı veyahut da aynı zamanda her ikisi bakımından birbirinden farklıdırlar.

Bir de ikinci mertebeden

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemi,  $u_1 = u_2 = 1$  ile karakterize edilen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots, \dots$$

FIBONACCI dizisi gerçeklediği gibi,  $u_1$  ile  $u_2$  nin çeşitli seçilişleri ile elde edilen sonsuz sayıda başka başka diziler de gerçeklerler.





$$(37) \quad \begin{cases} t_1 = Ax_1 + By_1 + \dots + Cz_1, \\ t_2 = Ax_2 + By_2 + \dots + Cz_2, \\ \dots\dots\dots \\ t_n = Ax_n + By_n + \dots + Cz_n, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$



sayıları başka türlü de seçilebilir. Meselâ

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = 1, y_1 = 1, \dots, z_1 = 1; \\ x_2 = 0, y_2 = 1, \dots, z_2 = 1; \\ \dots\dots\dots \\ x_k = 0, y_k = 0, \dots, z_k = 1 \end{cases}$$

alınırsa, sistemimiz

$$\begin{cases} A + B + \dots + C = u_1, \\ B + \dots + C = u_2, \\ \dots\dots\dots \\ C = u_k \end{cases}$$

şekline girer ve ard-arda

$$C = u_k, \dots, B = u_2 - u_3, A = u_1 - u_2$$

elde edilir.

Şimdi genel hale geçerek aşağıdaki teoremi ifade edelim :

$u_1, u_2, \dots, u_k$  sağ ganları gelişigüzel verilmiş olan  $k$  bilinmeyenli,  $k$  tane lineer cebrik (40) denklemlerinden müteşekkil bir sistemin tam bir tane çözüm takımının mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart, bu sisteme tekabül eden

$$(40') \quad \begin{cases} A x_1 + B y_1 + \dots + C z_1 = 0, \\ A x_2 + B y_2 + \dots + C z_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ A x_k + B y_k + \dots + C z_k = 0 \end{cases}$$

homogen denklem sisteminin

$$A = B = \dots = C = 0$$

dan ibaret yalnız bir sıfır çözümünü haiz olmasıdır. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Bu teorem, uygulanması bakımından determinantlardan hiç bir şey bilmeye ihtiyac göstermediği için maksada çok elverişlidir. Bu husus-



Okuyucu teoremdaki hipotezin (41) ve (42) özel halleri için sağlandığını kolayca gerçekliyebilir. Aşağıda bu teoremden faydalanılması gereken hallere rastlayacağız. Şimdilik (teoremden bağımsız olarak gösterilen) şu neticeye dayanacağız: Öyle  $x_1, \dots, z_1, \dots, x_k, \dots, z_k$  sayıları ((34) dizisinin başlangıç terimleri) vardır ki,  $u_1, u_2, \dots, u_k$  sağ yanları gelişigüzel verilmişken, (40) sisteminin bir çözümü mevcut olsun. Bu çeşit sayılar (34) dizisinin başlangıç terimleri olarak seçilirse, daha önce söylenilenler gereğince, (33) indirgeme denklemini gerçekliyen her dizi,  $A, B, \dots, C$  sayıları (40) denklem sisteminden belirtilmiş olmak üzere, (39) formülü uyarınca ifade edilebilir. (33) denklemini gerçekliyen her diziye ait terimlerin (39) formülü yardımıyla (yani belli  $A, B, \dots, C$  sayıları ile çarpma ve toplama ile) belirtilmesine yarayan  $k$  dizili (34) sistemine indirgeme denkleminin *tabanı*<sup>2)</sup> denir.

Bu açıklamalardan: her diziye ait, çeşitli tarzlarda seçilebilen, bir tabanın mevcut olduğu neticesi çıkar. Meselâ

---

ta biraz bilgisi olan öğrencilere şunu hatırlatalım ki, sağ yanları gelişigüzel verilmiş olan (40) sisteminin bir çözümü, ancak ve ancak sistemin katsa-

$$A = \begin{vmatrix} x_1 y_1 \cdots z_1 \\ x_2 y_2 \cdots z_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_k y_k \cdots z_k \end{vmatrix}$$

yılar determinantının sıfırdan farklı olması halinde mevcuttur. Bu şart, sağ yanları gelişigüzel (meselâ sıfıra eşit) olan (40) sisteminin çözümünün tek türlü olması için de gerek ve yeterdir. Böylece  $k$  bilinmeyenli  $k$  denklemlili bir sistemde sağ yanların gelişigüzel verilmiş olması halindeki çözümün mevcudiyeti için söylenen şart, sağ yanların sıfır olması halindeki çözümün tek türlü olması şartı ile çakışmaktadır. İşte teoremin metninde tam bu husus ifadesini bulmaktadır.

<sup>2)</sup> Alman literatüründe bunun için «temel diziler sistemi» deyimli de kullanılmaktadır.



$$\left. \begin{array}{l} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(k)}$$

veya

$$\left. \begin{array}{l} 1, 1, \dots, 1 \\ 0, 1, \dots, 1 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(k)}$$

başlangıç terimli sistemler,  $k$ -yüncü mertebeden herhangi bir indirgeme denkleminin bir tabanını teşkil ederler. 5. de söylenenleri bir arada özetliyelim :

*k*-yüncü mertebeden her indirgeme denklemi için, onu gerçekliyen birbirinden farklı sonsuz sayıda dizi vardır. Bu dizilerden herbiri, bu indirgeme denklemini gerçekliyen ve denklemin tabanını teşkil eden  $k$  diziden, bu dizilerden herbirini belli  $A, B, \dots, C$  sayılarıyla çarpıp terim terime toplamak suretiyle inşa edilebilir.

Böylece:  $k$ -yüncü mertebeden bir indirgeme denkleminin tam çözümünü elde etmek için, bu denklemi gerçekliyen ve onun bir tabanını teşkil eden sonlu sayıda, yani  $k$  tane, dizi bulmak yetiştir.

Söylenileni misâllerle açıklayalım :

Misâl 1. İkinci mertebeden bir

$$u_{n+2} = 2 u_{n+1} - u_n$$

indirgeme denklemini verilmiş olsun. Bunun tabanı

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

gibi iki diziden ibaret olmalıdır. Bunları

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \text{ ve } y_1 = 0, y_2 = 1$$

şeklinde seçelim.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

olarak yazılabilen indirgeme denkleminiz, iki komşu terim farkının sabit olduğunu, yani verilen denklemi gerçekliyen dizinin bir aritmetik dizi olmak zorunda bulunduğunu gösterdiğinden  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 1$  başlangıç terimli  $\{x_n\}$  dizisi için ortak farkı sıfır olan bir aritmetik dizi, yani

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots \quad (x_n = 1)$$

dizisi elde edilir.  $y_1 = 0$ , ve  $y_2 = 1$  başlangıç terimli  $\{y_n\}$  dizisi için ise ortak farkı 1 olan bir aritmetik dizi, yani

$$0, 1, 2, \dots, n-1, \dots \quad (y_n = n-1)$$

dizisi bulunur.

(39) formülüne göre, verilen denklemi gerçekliyen her indirgemeli dizinin terimleri

$$u_n = A x_n + B y_n = A + B (n-1)$$

şeklinde gösterilebilir; buradaki  $A$  ve  $B$

$$u_1 = A + B (1-1),$$

$$u_2 = A + B (2-1)$$

yani

$$u_1 = A,$$

$$u_2 = A + B$$

denklemlerinden

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1$$

olarak belirtilebilir. Buradan

$$u_n = u_1 + (n-1)(u_2 - u_1)$$

çıkar. Bu ise

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

denklemini gerçekliyen her dizinin genel teriminden ibarettir. Bu genel terimi,  $u_1 = a$ ,  $u_2 - u_1 = d$  kabul ederek

$$u_n = a + (n-1)d$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu da bir aritmetik dizinin genel terimi için bilinen formülden başka bir şey değildir.

Misâl 2. İkinci mertebeden başka bir

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

indirgeme denklemini gözönüne alalım.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  koyarsak, daha önceleri bahsi geçen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

FIBONACCI dizisini elde ederiz. Taban için gerekli ikinci bir  $\{y_n\}$  dizisi olarak  $y_1 = 0$  ve  $y_2 = 1$  den elde edileni alalım. Bu takdirde

$$y_3 = y_2 + y_1 = 1, \quad y_4 = y_3 + y_2 = 2, \quad y_5 = y_4 + y_3 = 3, \dots$$

olur. Burada  $y_2 = x_1$ ,  $y_3 = x_2$ ,  $y_4 = x_3$ ,  $y_5 = x_4$ , ... ve genel olarak  $y_n = x_{n-1}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) olur. Gerçekten bu denklemleri bütün  $n \leq m+1$  için yazdığımızı ve özellikle  $y_{m+1} = x_m$ ,  $y_m = x_{m-1}$  olduğunu düşünersek,  $y_{m+2}$  için

$$y_{m+2} = y_{m+1} + y_m = x_m + x_{m-1} = x_{m+1}$$



bulunur, yani isbat edilecek olan denklem  $n = m + 2$  için de cari olur. O halde

$$y_n = x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

dir. Böylece daha önce söylenilenlere göre ((39) formülü):

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

denklemini gerçekliyen her dizi için,

$$u_n = A x_n + B y_n$$

bağıntısı bulunur; burada  $A$  ve  $B$

$$u_1 = A x_1 + B y_1 = A,$$

$$u_2 = A x_2 + B y_2 = A + B$$

denklemlerinden belirtilecektir. Buradan

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1$$

ve dolayısıyla

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) y_n$$

çıkar.  $n \geq 2$  için  $y_n$  yerine  $x_{n-1}$  konabilir. Bu takdirde

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1) x_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

veya

$$u_n = u_1 (x_n - x_{n-1}) + u_2 x_{n-1}$$

olur;  $n \geq 3$  için

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

yani

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$$

olduğundan

$$u_n = u_1 x_{n-2} + u_2 x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

denklemini gerçekliyen her dizinin terimleri, FIBONACCI sayıları yardımıyla, son olarak bulduğumuz formül uyarınca ifade edilebilirler. Özel olarak  $u_1 = -3$ ,  $u_2 = 1$  için (bk. S. 13-14)

$$u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

olur.

6. Şimdi, çok genel olan bazı şartlar altında (33)

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

indirgeme denklemi için, farklı ortak çarpanları haiz  $k$  tane geometrik diziden ibaret bir taban bulunabileceğini göstereceğiz. Bu maksatla

$$x_1 = 1, x_2 = q, \dots, x_n = q^{n-1}, \dots \quad (q \neq 0)$$

şeklindeki bir geometrik dizinin hangi şartlar altında (33) denklemini gerçeklediğini tesbit edelim.

$$x_{n+k} = q^{n+k-1}, x_{n+k-1} = q^{n+k-2}, \dots, x_n = q^{n-1}$$

olduğuna dikkat ederek bu büyüklükleri (33) denkleminde ( $u_{n+k}$ ,  $u_{n+k-1}$ , ...,  $u_n$  yerine) yerlerine koyalım; böylece

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \dots + a_n q^{n-1}$$

elde eder ve buradan

$$(43) \quad q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_k$$

buluruz. O halde

*Bir geometrik dizi, k-yıncı mertebelen bir (33) indirgeme denklemini, ancak dizinin q ortak çarpanının (43) şeklinde, k-yıncı dereceden ve (33) deki aynı katsayılarla teşkil edilen, bir cebrik denklemi gerçeklemesi halinde gerçekliyebilir.*







$$M(x) = \mu(x - \beta) \dots (x - \gamma)$$

klini haiz olmalıdır.  $x = z$  konulduğunda  $M(z) = 1$  elde edilmeli, dolayısıyla

$$1 = \mu(z - \beta) \dots (z - \gamma)$$

ve

$$\mu = \frac{1}{(z - \beta) \dots (z - \gamma)}$$

olmalıdır. Böylece

$$M(x) = \frac{(x - \beta) \dots (x - \gamma)}{(z - \beta) \dots (z - \gamma)}$$

olur. Bu polinomun koşulan şartları gerçeklemede olduğu açıktır. Çarpımlar yapılır ve düzenlenirse, polinom

$$M(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_{k-1} x^{k-1}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (48) denklemlerini sırasıyla  $m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$  ile çarpıp toplarsak,

$$\begin{aligned} & A(m_0 + m_1 z + \dots + m_{k-1} z^{k-1}) + \\ & + B(m_0 + m_1 \beta + \dots + m_{k-1} \beta^{k-1}) + \dots + \\ & + C(m_0 + m_1 \gamma + \dots + m_{k-1} \gamma^{k-1}) = 0 \end{aligned}$$

veya

$$A M(z) + B M(\beta) + \dots + C M(\gamma) = 0$$

buluruz. Halbuki  $M(z) = 1, M(\beta) = 0, \dots, M(\gamma) = 0$  dir; buradan

$$A = 0$$

çıkar ki, bu da kabul edilenle çelişir.

O halde (48) sistemi yalnız sıfır-çözümünü haizdir ve dolayısıyla (47) sisteminin gelişigüzel  $u_1, u_2, \dots, u_k$  lar için tek türlü bir çözümü vardır. Bu da (45) sisteminin (33) denklemi için ir taban teşkil ettiğini ifade eder. Böylece her

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n$$

indirgeme denklemi için, buna ait

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_k$$

karakteristik denkleminin birbirinden farklı  $q=z, q=\beta, \dots, q=\gamma$  köklerini haiz olması halinde,  $z, \beta, \dots, \gamma$  ortak çarpanlı  $k$  tane geometrik diziden ibaret bir taban bulmuş oluruz. Diğer bir deyimle, (33) denklemini gerçekliyen her  $\{u_n\}$  dizisinin terimleri için, (47) denklem sisteminden elde edilecek  $k$  tane öyle  $A, B, \dots, C$  sayıları mevcuttur ki,

$$u_n = A z^{n-1} + B \beta^{n-1} + \dots + C \gamma^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

olsun.

Bölüm 6. da söylenenleri bir arada özetliyelim :

*k*-güncü mertebeden bir indirgeme denklemine, aynı katsayılarla teşkil edilmiş *k*-güncü dereceden bir cebrik denklem tekabül eder; buna indirgeme denkleminin karakteristik denklemi denir. Karakteristik denklemin her kökü, verilen indirgeme denklemini gerçekliyen bir geometrik dizinin ortak çarpıcıdır. Eğer karakteristik denklemin bütün kökleri birbirinden farklı iseler, birbirinden farklı  $k$  tane geometrik dizi elde edilir ve bunlar indirgeme denkleminin bir tabanını teşkil ederler. Netice olarak bu halde, indirgeme denklemini gerçekliyen her dizinin terimleri, belli bazı geometrik dizilerin ( $k$  tane), (belli  $A, B, \dots, C$  sayılarıyla çarpılarak) terim terime toplanmasıyla elde edilebilir.

7. Şimdi bulduğumuz neticelerin uygulamalarına geçelim; bunun için de işe FIBONACCI dizisi ile başlayalım. Burada indirgeme denklemi

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

olup, (43) karakteristik denklemi

$$q^2 = q + 1$$



şeklindedir. Bu denklemin

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

den ibaret olan farklı iki kökü vardır. Bu yüzden FIBONACCI dizisinin genel terimi

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmiyen  $A$  ve  $B$  büyüklüklerini bulmak için  $n=1$  ve  $n=2$  koyalım. Böylece

$$\begin{cases} u_1 = 1 = A + B, \\ u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) \end{cases}$$

elde ederiz. Bu sistemi çözersek

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

ve dolayısıyla

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

veya

$$(49) \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

buluruz. İşte bu da FIBONACCI sayılarının genel ifadesidir. Bulduğumuz formül ilk bakışta karışık ve hesaba elverişsiz görünüyor. Fakat bu formül yardımıyla ilgi çekici birtakım sonuçlar elde edilebilir. Meselâ komşu iki FIBONACCI sayısının kareleri toplamının yine bir FIBONACCI sayısı olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$u_n^2 = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 2(-1)^n \right],$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1} \right]$$

den

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 + u_n^2 &= \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n+1} \right\} = u_{2n+1} \end{aligned}$$

çıkar. O halde

$$(50) \quad u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}$$

dir. Meselâ

$$u_{10} = u_7^2 + u_3^2 = 13^2 + 8^2 = 233$$

dür.

FIBONACCI sayıları için cari olan

$$(51) \quad u_n u_m + u_{n+1} u_{m+1} = u_{n+m+1}$$

genel bağıntısının isbatını ise okuyucuya bırakıyoruz.

(49) formülünün başka bir uygulaması olarak şu teoremi isbat edeceğiz:

*a ve b iki tabii sayı olsun:  $a < b$  olduğuna göre a ile b nin en büyük ortak bölenini (kısaca e.b.o.b.) belirtmek için Euclid algoritmasında yapılması gerekli bölme işlemlerinin sayısı, a nın ondalık sisteme göre yazılışındaki rakam sayısının en çok beş katı kadardır.*

a ve b sayılarının e.b.o. bölenini belirtmek üzere Euclid algoritmasını uygularsak:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad b = a x' + y', \\ 2) \quad a = y' x'' + y'', \\ 3) \quad y' = y'' x''' + y''', \\ \dots\dots\dots \\ k) \quad y^{(k-2)} = y^{(k-1)} x^{(k)} + y^{(k)}, \\ k+1) \quad y^{(k-1)} = y^{(k)} x^{(k+1)} \end{array} \right.$$

elde ederiz. Burada ardışık kalanlar

$$a > y' > y'' > y''' > \dots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geq 1$$

eşitsizliklerini gerçeklerler.

(52) nin sonuncu denkleminde kalan sıfıra eşit olacağından, son  $y^{(k)}$  kalanı  $a$  ve  $b$  sayılarının aranan *e.b.o.* bölenidir. Bu yüzden  $k$ , en büyük ortak bölenin belirtilmesi için gerekli işlemlerin sayısını göstermektedir. O halde problemimiz  $k$  sayısı için bir sınırlama yapmaktan ibarettir. Bu maksatla  $y^{(k)}$ ,  $y^{(k-1)}$ , ...,  $y'$  leri  $u_1, u_2, u_3, \dots$  FIBONACCI sayıları ile karşılaştıralım.  $y^{(k)} \geq 1 = u_2$  ve bir önceki  $y^{(k-1)}$  kalanının  $y^{(k)}$  dan daha büyük olması yüzünden  $y^{(k-1)} \geq 2 = u_3$  olduğuna dikkat ederek  $k$ -yüncü denklemden

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)} x^{(k)} + y^{(k)} \geq y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geq u_3 + u_2 = u_4$$

hükmüne varırız. Böylece

$$y^{(k)} \geq u_2, \quad y^{(k-1)} \geq u_3, \quad y^{(k-2)} \geq u_4$$

eşitsizlikleri cari olur.

$$y^{(k)} \geq u_2, \dots, y^{(m)} \geq u_{k-m+2}, \quad y^{(m-1)} \geq u_{k-m+3} \quad (m-1 \geq 2)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu göstermiş bulunduğumuzu kabul edelim. Bu takdirde  $y^{(m-2)} = y^{(m-1)} x^{(m)} + y^{(m)}$  denkleminde

$$y^{(m-2)} \geq y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geq u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}$$



bağıntısını elde ederiz. Düşüncelerimizi böylece devam ettirsek

$$y'' \geq u_k, \quad y' \geq u_{k+1}$$

eşitsizliklerine ve (52) deki 2) bağıntısından da

$$a = y' x'' + y'' \geq y' \cdot 1 + y'' \geq u_{k+1} + u_k = u_{k+2}$$

ye geliriz. Halbuki (49) formülüne göre  $u_{k+2}$  sayısı

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]$$

şeklindedir. O halde

$$(53) \quad \begin{aligned} a &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right] > \\ &> \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - 1 \right] \end{aligned}$$

dir, (zira  $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$  ve bunun neticesi olarak da  $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|^{k+2} < 1$  dir). (53) den

$$\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} < a\sqrt{5} + 1 < \sqrt{5}(a+1) < \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 (a+1)$$

bulunur (zira  $\sqrt{5} < 3$  den ötürü

$$\sqrt{5} < \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{dir})$$

Böylece

$$(54) \quad \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k < a+1$$

dir. Halbuki

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^5 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^5 \right] < \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^5 + 1 \right]$$

eşitsizliği gereğince

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 > 5\sqrt{5} - 1 > 10$$

olduğundan

$$(55) \quad 10^k < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a+1)^5$$

neticesi caridir.

Ondalık sistemde  $a$  sayısının  $n$  tane rakamı varsa (diğer bir deyimle  $a$  sayısı  $n$  rakamlı bir sayı ise)

$$10^{n-1} \leq a < 10^n$$

dolayısıyla

$$a+1 \leq 10^n$$

olacağı açıktır. O halde (55) eşitsizliğine göre

$$10^k < (a+1)^5 \leq 10^{5n}$$

veya

$$k < 5n$$

dir. Bu ise istediğimiz neticeden ibarettir: Euclid algoritmasında ardışık bölme işlemlerinin  $k$  sayısı,  $a$  ve  $b$  sayılarından küçüğü-nün ondalık sisteme göre yazılmış rakamlarının sayısının beş katından daha küçüktür. Bu isbattan görüldüğü üzere, Euclid algoritmasının uygulanmasında en kötü durum (yani işlem sayı-sının teoremden verilen sınıra yaklaşması)  $a$  ile  $b$  nin komşu FI-BONACCI sayıları olması halinde ortaya çıkar. Bunu bir misalde açıklayalım:  $b = u_{20} = 6765$  ve  $a = u_{19} = 4181$  olsun. Burada  $a$  dört rakamlı bir sayı olduğu için, teoreme göre, Euclid algo-ritmasındaki işlemlerin sayısı  $5 \cdot 4 = 20$  den küçük olmalıdır. Gerçekten burada  $k = 17$  tane işlem yapmak icabeder:

- |                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. $6765 = 4181 \cdot 1 + 2584$ , | 10. $89 = 55 \cdot 1 + 34$ , |
| 2. $4181 = 2584 \cdot 1 + 1597$ , | 11. $55 = 34 \cdot 1 + 21$ , |
| 3. $2584 = 1597 \cdot 1 + 987$ ,  | 12. $34 = 21 \cdot 1 + 13$ , |
| 4. $1597 = 987 \cdot 1 + 610$ ,   | 13. $21 = 13 \cdot 1 + 8$ ,  |
| 5. $987 = 610 \cdot 1 + 377$ ,    | 14. $13 = 8 \cdot 1 + 5$ ,   |
| 6. $610 = 377 \cdot 1 + 233$ ,    | 15. $8 = 5 \cdot 1 + 3$ ,    |
| 7. $377 = 233 \cdot 1 + 144$ ,    | 16. $5 = 3 \cdot 1 + 2$ ,    |
| 8. $233 = 144 \cdot 1 + 89$ ,     | 17. $3 = 2 \cdot 1 + 1$ ,    |
| 9. $144 = 89 \cdot 1 + 55$ ,      | 18. $2 = 1 \cdot 2 + 0$ .    |

Görülüyorki kalanlar olarak, ard-arda azalarak sıralanmış FIBONACCI sayıları elde edilir. Sonuncusu hariç bütün bölümlerin bire eşit oluşu, işlem sayısının büyük olmasını izaha yeter. Bütün komşu FIBONACCI sayıları için önceden beklendiği gibi, burada da *e.b.o.b.* bire eşittir (17. denklem): gerçekten  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  denkleminden görüldüğü üzere  $u_{n+2}$  ile  $u_{n+1}$  in *e.b.o.* bölüneni  $u_{n+1}$  ile  $u_n$  nin *e.b.o.* bölüneni ile çıkarılır. O halde birbirine komşu olan her FIBONACCI sayı çifti için *e.b.o.b.* hep aynidir. Bu ortak *e.b.o.* bölüneni bulmak için  $u_2 = u_1 = 1$  çiftini gözönüne almak yetişirki, buradan onun bire eşit olduğu çıkar.

8. Daha başka bir misâl olmak üzere (16) daki

$$u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \dots$$

periyodik dizisini gözönüne alalım. Burada indirgeme denklemi

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geq 3)$$

şeklinde. O halde karakteristik denklem

$$q^3 = 1$$

dir. Bu denklemin kökleri ise



$$\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \gamma = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

dir. Bu yüzden dizinin genel terimini

$$\begin{aligned} u_n &= A \alpha^{n-1} + B \beta^{n-1} + C \gamma^{n-1} = \\ &= A + B \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} + C \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde aramak icabeder (bk. (46) formülü). Bu formülün, indirgeme denkleminin gerçekleştiği bütün  $n$  değerleri ( $n=3,4,5,\dots$ ) için cari olmasını istiyebiliriz. Burada

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

bağıntılarını hatırlatalım. Böylece MOIREE teoremine göre

$$\begin{aligned} u_n &= A + B \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} + C \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \\ &= A + (-1)^{n-1} B \left[ \cos \frac{\pi}{3} (n-1) - i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] + \\ &\quad + (-1)^{n-1} C \left[ \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + i \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \right] \\ &= A + (B + C) (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + \\ &\quad + i(-B + C) (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \end{aligned}$$

olur.

$B + C = A_1$  ve  $i(-B + C) = A_2$  konursa, formülümüz şu şekilde yazılabilir:

$$u_n = A + A_1 (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3} (n-1) + A_2 (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{3} (n-1) \\ (n \geq 3).$$

Artık sadece  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  bilinmeyen katsayılarını belirtmek zorundayız.  $n=3$ ,  $n=4$ ,  $n=5$  koyarsak üç bilinmeyenli şu üç denklemi elde ederiz :

$$u_3 = 1 = A + A_1 \cos \frac{2\pi}{3} + A_2 \sin \frac{2\pi}{3} = A - \frac{1}{2} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_2,$$

$$u_4 = 3 = A - A_1 \cos \frac{3\pi}{3} - A_2 \sin \frac{3\pi}{3} = A + A_1,$$

$$u_5 = 2 = A + A_1 \cos \frac{4\pi}{3} + A_2 \sin \frac{4\pi}{3} = A - \frac{1}{2} A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_2.$$

Buradan

$$A = 2, \quad A_1 = 1 \quad \text{ve} \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

bulunur. O halde

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1} \left[ \cos (n-1) \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin (n-1) \frac{\pi}{3} \right]$$

$$= 2 + (-1)^n \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin (n-2) \frac{\pi}{3} \quad (n \geq 3)$$

dür.

Görülüyor ki, tamamen dizinin periyodikliğine uygun olarak, bu misâldeki dizinin genel terimi trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilmektedir.

Nihayet polinomların bölünmeleri ile ilgili olarak bir misâl daha verelim. İki tane

$$P(x) = 3 + x^2 - x^5 \quad \text{ve} \quad Q(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$$

polinomları verilmiş olsun. Problemimiz,  $P(x)$  in  $Q(x)$  ile bö-

lünmesinde elde edilecek bölüme âit katsayıların yapısını belirtme problemidir. Bölümün

$$a_1 = D_0, \quad a_2 = D_1, \quad \dots, \quad a_n = D_{n-1}, \quad \dots$$

katsayıları dizisi, 2. de görülmüş olduğu üzere, terimleri (20)

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0} D_n \quad (n \geq l - k + 1)$$

denklemini gerçekliyen bir indirgemeli dizidir. Burada  $k$  sayısı  $Q(x)$  in derecesini,  $B_0, B_1, \dots, B_k$  lar  $Q(x)$  in katsayılarını  $l$  ise  $P(x)$  in derecesini göstermektedir. Misalimizde

$$k=3, \quad B_0=2, \quad B_1=-1, \quad B_2=-2, \quad B_3=1, \quad l=5$$

olduğuna göre

$$D_{n+3} = \frac{1}{2} D_{n+2} + \frac{2}{2} D_{n+1} - \frac{1}{2} D_n \quad (n \geq 5 - 3 + 1 = 3),$$

yani

$$D_{n+3} = \frac{1}{2} D_{n+2} + D_{n+1} - \frac{1}{2} D_n \quad (n \geq 3)$$

dür. karakteristik denklem

$$q^3 = \frac{1}{2} q^2 + q - \frac{1}{2}$$

veya

$$q^3 - q - \frac{1}{2} (q^2 - 1) = \left( q - \frac{1}{2} \right) (q - 1) (q + 1) = 0$$

dır. Bunun kökleri

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$$

olduğundan,  $D_n$  için



$$D_n = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \cdot 1^n + C(-1)^n \quad (n \geq 3)$$

elde edilir.  $n=3$ ,  $n=4$  ve  $n=5$  alırsak

$$D_3 = \frac{1}{8}A + B - C,$$

$$D_4 = \frac{1}{16}A + B + C,$$

$$D_5 = \frac{1}{32}A + B - C$$

olur.

Burada yalnız  $A$ ,  $B$  ve  $C$  katsayıları değil,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  sayıları da bilinmemektedir. Bunları belirtmek için  $P(x)$  i  $Q(x)$  ile bölme işlemini fiilen yapıp bölümde beşinci kuvvete kadar olan (beşinci kuvvet dahil) terimleri bulalım :

$$\begin{array}{r} 3 + x^2 - x^5 \quad : 2 - x - 2x^2 + x^3 \\ \hline 3 - \frac{3}{2}x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 \quad \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{16}x^3 + 2\frac{19}{32}x^4 \\ \hline \frac{3}{2}x + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 - x^5 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4 \\ \hline 4\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^4 - x^5 \\ 4\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{3}{8}x^3 - 4\frac{3}{4}x^4 + 2\frac{3}{8}x^5 \\ \hline 2\frac{3}{8}x^3 + 4x^4 - 3\frac{3}{8}x^5 \\ 2\frac{3}{8}x^3 - 1\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{3}{8}x^5 + 1\frac{3}{16}x^6 \\ \hline 5\frac{3}{16}x^4 - x^6 - 1\frac{3}{16}x^6 \\ 5\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{19}{32}x^5 - 5\frac{3}{16}x^6 + 2\frac{19}{32}x^7 \\ \hline 1\frac{19}{32}x^5 + 4x^6 - 2\frac{19}{32}x^7 \end{array}$$

Buradan

$$D_0 = \frac{3}{2}, D_1 = \frac{3}{4}, D_2 = 2\frac{3}{8}, D_3 = 1\frac{3}{16}, D_4 = 2\frac{19}{32},$$

$$D_5 = \frac{51}{64}$$

çıkar. O halde yukarıda elde edilen denklem sistemi

$$\frac{1}{8}A + B - C = 1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A + B + C = 2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A + B - C = \frac{51}{64}$$

den ibarettir. Buradan

$$A = 4\frac{1}{6}, B = \frac{3}{2}, C = \frac{5}{6}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$D_n = 4\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(-1)^n \quad (n \geq 3)$$

olur.

Problemimiz çözülmüştür; son olarak bulunan formülden

$$D_6 = 2\frac{51}{128}, D_7 = \frac{179}{256}, D_8 = 2\frac{179}{512}, \dots$$

elde edilir.

9. Yukarıda incelenen bütün misâllerde karakteristik denklem yalnız basit kökleri haizdi. Bu defa da 4. de bahsi geçen, tabii sayıların kareleri toplamından ibaret diziyi gözönüne alalım. Bu diziye ait indirgeme denklemi

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

olduğundan, karakteristik denklem

$$q^4 = 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1$$

veya

$$q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 4q + 1 = (q - 1)^4 = 0$$

şeklinde. Bu denklemin sadece  $q = 1$  den ibaret dört katlı bir kökü vardır. Bu yüzden burada, terimleri indirgeme denklemini gerçekliyen ve ortak çarpanı 1 olan bir tanecik bir geometrik dizi elde ederiz.

Bu ve benzeri hallerde, belirtilen geometrik dizi ile birlikte mütetekabil indirgemeli denklemin bir tabanını teşkil edebilecek daha başka temel indirgemeli dizilerin aranıp bulunması icabeder. Misâlimiz için (okuyucu tarafından kolayca gerçekleştirileceği üzere)

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-1, \dots;$$

$$0, 1, 4, 9, \dots, (n-1)^2, \dots;$$

$$0, 1, 8, 27, \dots, (n-1)^3, \dots$$

dizileri aranan dizilerdir. Biz — geniş bir çalışmayı gerektirecek olan — en genel hali incelemek istemiyor, sadece şu tipik misâlle yetiniyoruz :

$$\binom{k}{k-1}, \binom{k}{k-2}, \dots, \binom{k}{0},$$

$k$ -yıncı mertebeden binom katsayılarını göstermek üzere,

$$(57) \quad u_{n+k} =$$

$$= \binom{k}{k-1} \alpha u_{n+k-1} - \binom{k}{k-2} \alpha^2 u_{n+k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{0} \alpha^k u_n$$



indirgeme denklemi verilmiş olsun. Buna ait

$$q^k = \binom{k}{k-1} \alpha q^{k-1} - \binom{k}{k-2} \alpha^2 q^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{0} \alpha^k$$

karakteristik denklemi

$$(q - \alpha)^k = 0$$

şeklinde yazılabileceğinden, denklemin  $q = \alpha$  dan ibaret  $k$  katlı bir tek kökü vardır;

$$(58) \quad (\alpha - \alpha)^k = \alpha^k - \binom{k}{k-1} \alpha^k + \\ + \binom{k}{k-2} \alpha^k - \dots + (-1)^k \binom{k}{0} \alpha^k = 0$$

olduğu açıktır.

Bir de  $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$  olmak üzere

$$(\alpha - \alpha)^{k-m} = \alpha^{k-m} - \binom{k-m}{k-m-1} \alpha^{k-m} + \\ + \binom{k-m}{k-m-2} \alpha^{k-m} - \dots + (-1)^{k-m} \binom{k-m}{0} \alpha^{k-m} = 0$$

veya

$$(59) \quad (1-1)^{k-m} = \binom{k-m}{k-m} - \binom{k-m}{k-m-1} + \binom{k-m}{k-m-2} - \dots + \\ + (-1)^\mu \binom{k-m}{k-m-\mu} + \dots + (-1)^{k-m} \binom{k-m}{0} = 0$$

bağıntısını gözönüne alalım. (59) denklemi  $m = 0$  için

$$(59') \quad \binom{k}{k} - \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k-2} - \dots + (-1)^\mu \binom{k}{k-\mu} + \\ + \dots + (-1)^k \binom{k}{0} = 0$$

şekline girer. Burada

$$\binom{k}{k-\mu} = \frac{k(k-1) \dots (\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-\mu)} = \frac{k(k-1) \dots (k-m+1)}{(k-m-\mu+1) \dots (k-\mu)} \binom{-m}{k-m-\mu} \\ (m=1, 2, \dots, k-1; 0 \leq \mu \leq k-m)$$

veya

$$(60) \quad k(k-1) \dots (k-m+1) \binom{k-m}{k-m-\mu} = \\ = (k-m-\mu+1) \dots (k-\mu) \binom{k}{k-\mu}$$

olduğuna işaret edelim.  $m=1, 2, \dots, k-1$  için elde edilen (59) denklemlerinden herbirini, müteakıl  $k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1)$  çarpanı ile çarpıp (60) bağıntısını kullanırsak, (59) yerine

$$(59'') \quad (k-m+1) \dots k \binom{k}{k} - (k-m) \dots (k-1) \binom{k}{k-1} + \dots + \\ + (-1)^\mu (k-m-\mu+1) \dots (k-\mu) \binom{k}{k-\mu} + \\ + \dots + (-1)^{k-m} 1 \cdot 2 \dots m \binom{k}{m} = 0$$

$$(m=1, 2, \dots, k-1)$$

yazabiliriz. Şimdi  $m=0, 1, 2, \dots, k-1$  için

$$\begin{aligned}
 & k^m \binom{k}{k} - (k-1)^m \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu (k-\mu)^m \binom{k}{k-\mu} + \\
 (61) \quad & + \dots + (-1)^k \cdot 0^m \binom{k}{0} = 0
 \end{aligned}$$

bağıntısının cari olduğunu göstermek istiyoruz.

Gerçekten bu denklem  $m=0$  için (59') nün aynı olup <sup>(1)</sup>  $m$  nin bu değeri için doğrudur. (61) denkleminin  $m=0, 1, 2, \dots, j$  ( $j \leq k-2$ ) için doğru olduğunu isbatladığımızı kabul edelim ve bu denklemin  $m=j+1$  için de doğru olacağını gösterelim Bu maksatla  $(j+1)$ -inci dereceden

$$\begin{aligned}
 (62) \quad & f(x) = (x-j)(x-j+1) \dots (x-1)x = \\
 & = x^{j+1} - \beta_j x^j - \dots - \beta_1 x
 \end{aligned}$$

polinomunu ithal edelim. (61) denklemini  $m=1, 2, \dots, j$  için müttekabilen  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$  sayıları ile çarparsak,

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta_1 k \binom{k}{k} - \beta_2 (k-1) \binom{k}{k-1} + \\ & + \dots + \beta_1 (-1)^\mu (k-\mu) \binom{k}{k-\mu} + \\ & + \dots + \beta_1 (-1)^k \cdot 0 \cdot \binom{k}{0} = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

<sup>(1)</sup> Burada âdet olduğu üzere  $0^0=1$  alınacaktır; bu kabul, «permananz» esaslı sebebiyle yapılmaktadır.



$$(63) \quad \left| \begin{aligned} & \beta_j k^j \binom{k}{k} - \beta_j (k-1)^j \binom{k}{k-1} + \\ & + \dots + \beta_j (-1)^\mu (k-\mu)^j \binom{k}{k-\mu} + \\ & + \dots + \beta_j (-1)^k \cdot 0 \cdot \binom{k}{0} = 0 \end{aligned} \right.$$

elde ederiz.

$$(k-j) \dots k = f(k), \quad (k-j-1) \dots (k-1) = f(k-1), \dots,$$

$$(k-j-\mu) \dots (k-\mu) = f(k-\mu), \dots$$

bağıntılarını kullanarak (59") denklemini bir de  $m = j+1$  için yazalım :

$$(64) \quad \begin{aligned} & f(k) \binom{k}{k} - f(k-1) \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^\mu f(k-\mu) \binom{k}{k-\mu} + \\ & + \dots + (-1)^k f(0) \binom{k}{0} = 0. \end{aligned}$$

(63) ile (64) terim terime toplanırsa,

$$\begin{aligned} & [\beta_1 k + \dots + \beta_j k^j + f(k)] \binom{k}{k} - \\ & - [\beta_1 (k-1) + \dots + \beta_j (k-1)^j + f(k-1)] \binom{k}{k-1} + \dots + \\ & + (-1)^\mu [\beta_1 (k-\mu) + \dots + \beta_j (k-\mu)^j + f(k-\mu)] \binom{k}{k-\mu} + \\ & + \dots + (-1)^k [\beta_1 \cdot 0 + \dots + \beta_j \cdot 0^j + f(0)] \binom{k}{0} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Halbuki (62) ye göre



elde edilir. Toplama ile buradan

$$\begin{aligned}
 & (A_0 + A_1 k + \dots + A_{k-1} k^{k-1}) \binom{k}{k} - \\
 & - [A_0 + A_1 (k-1) + \dots + A_{k-1} (k-1)^{k-1}] \binom{k}{k-1} + \dots + \\
 & + (-1)^\mu [A_0 + A_1 (k-\mu) + \dots + A_{k-1} (k-\mu)^{k-1}] \binom{k}{k-\mu} + \\
 & + \dots + (-1)^k [A_0 + A_1 \cdot 0 + \dots + A_{k-1} \cdot 0^{k-1}] \binom{k}{0} = 0
 \end{aligned}$$

veya

$$(66) \quad P(k) \cdot \binom{k}{k} - P(k-1) \cdot \binom{k}{k-1} + \dots + (-1)^k P(0) \cdot \binom{k}{0} = 0$$

çıkar. O halde en çok  $(k-1)$ -inci dereceden olan her polinom (66) bağıntısını gerçekler.

$n$  herhangi bir tabii sayıyı  $m$  de  $0 \leq m \leq k-1$  eşitsizliğine uygun bir tam sayıyı göstermek üzere  $P(x) = (x+n-1)^m$  korsa (66) denklemi

$$\begin{aligned}
 & (k+n-1)^m \binom{k}{k} - (k+n-2)^m \binom{k}{k-1} + \dots + \\
 & + (-1)^k (n-1)^m \binom{k}{0} = 0
 \end{aligned}$$

şekline girer; veya bunu  $a^{k+n-1}$  ile çarpıp  $\binom{k}{k}$  yerine 1 koyarak



$$\begin{aligned}
 (k+n-1)^m \alpha^{k+n-1} &= \binom{k}{k-1} \alpha (k+n-2)^m \alpha^{k+n-2} - \\
 (67) \quad &- \binom{k}{k-2} \alpha^2 (k+n-3)^m \alpha^{k+n-3} + \dots + \\
 &+ (-1)^{k-1} \binom{k}{0} \alpha^k (n-1)^m \alpha^{n-1}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(67) yi (57) ile karşılaştırsak, buradan şu neticeye varılır:  
 $k$  tane

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots, & (m=0) \\ 0, \alpha, 2\alpha^2, \dots, (n-1)\alpha^{n-1}, \dots, & (m=1) \\ 0, \alpha, 2^2\alpha^2, \dots, (n-1)^2\alpha^{n-1}, \dots, & (m=2) \\ \dots & \dots \\ 0, \alpha, 2^{k-1}\alpha^2, \dots, (n-1)^{k-1}\alpha^{n-1}, \dots, & (m=k-1) \end{array} \right.$$

dizilerinden herbiri (57) indirgeme denklemini gerçekler. Eğer bunların bir taban teşkil ettiklerini tesbit edebilirsek, buradan (57) denklemini gerçekliyen her dizinin genel teriminin,

$$Q(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_{k-1} x^{k-1}$$

katsayıları keyfî ve derecesi en çok  $k-1$  olan bir polinomu göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
 (69) \quad u_n &= [B_0 + B_1(n-1) + \dots + B_{k-1}(n-1)^{k-1}] \alpha^{n-1} = \\
 &= Q(n-1) \alpha^{n-1}
 \end{aligned}$$

şeklini haiz olacağı neticesine varırız. (68) dizilerinin bir taban teşkil ettiğini göstermek için ise,  $k$  lineer denklemden müteşkil

$$B_0 + B_1 \cdot 0 + \dots + B_{k-1} \cdot 0^{k-1} = u_1,$$

$$B_0 + B_1 \cdot 1 + \dots + B_{k-1} \cdot 1^{k-1} = u_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_0 + B_1 (k-1) + \dots + B_{k-1} (k-1)^{k-1} = u_k$$

sisteminin  $u_1, u_2, \dots, u_k$  sağ yanlarının gelişi güzel olmaları halinde  $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$  bilinmeyenlerine göre çözülebildiğini, yani (S. 17'deki teorem gereğince)

$$B_0 = 0,$$

$$B_0 + B_1 + \dots + B_{k-1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_0 + (k-1)B_1 + \dots + (k-1)^{k-1}B_{k-1} = 0$$

homogen sisteminin yalnız sıfır-çözümünü haiz olduğunu göstermek yetiştir. Bu sistemdeki denklemler ise

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(k-1) = 0$$

olduğunu, yani en çok  $(k-1)$ -inci dereceden

$$B_0 + B_1 x + \dots + B_{k-1} x^{k-1} = 0$$

denkleminin 0, 1, 2, ...,  $k-1$  den ibaret, birbirinden farklı en az  $k$  tane kökü bulunduğunu ifade eder, buradan

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{k-1} = 0$$

çıkar; bu suretle de (68) dizilerinin (57) denklemini gerçekliyen indirgemeli dizilerin bir tabanını teşkil ettikleri tamamen isbat edilmiş olur.

$$(70) \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (a_k \neq 0)$$

genel denklemini gerçekliyen her indirgemeli dizi için

$$(71) \quad q^k = a_1 q^{k-1} + \dots + a_k$$

karakteristik denklemini  $a + b + \dots + c = k$  olmak üzere  $a$  katlı herhangi bir  $\alpha$  kökünü,  $b$  katlı bir  $\beta$ , ...,  $c$  katlı bir  $\gamma$  kökünü haiz olabilir. Bu en genel halde  $k$  tane olan

$$\begin{aligned} &1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ &0, \alpha, 2^{a-1} \alpha^2, \dots, (n-1)^{a-1} \alpha^{n-1}, \dots; \\ &1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}, \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ &0, \beta, 2^{b-1} \beta^2, \dots, (n-1)^{b-1} \beta^{n-1}, \dots; \\ &\dots \dots \dots \\ &1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ &0, \gamma, 2^{c-1} \gamma^2, \dots, (n-1)^{c-1} \gamma^{n-1}, \dots \end{aligned}$$

dizilerinin bir taban teşkil ettiği gösterilebilir. Buna göre

$$(72) \quad \begin{aligned} u_n &= Q(n-1) \alpha^{n-1} + \\ &+ R(n-1) \beta^{n-1} + \dots + S(n-1) \gamma^{n-1} \end{aligned}$$

olup, burada  $Q(x)$ ,  $R(x)$ , ...,  $S(x)$  sırasıyla en çok  $(a-1)$ ,  $(b-1)$ , ...,  $(c-1)$ -inci dereceden olan belli polinomları göstermektedirler.

Böylece şu netice cari olur: *Her indirgemeli dizinin  $u_n$  genel terimi  $(n-1)$  in (veya aynı şey demek olmak üzere  $n$  nin) polinomlarıyla, ortak çarpanı (71) karakteristik denkleminin köklerinden ibaret bulunan geometrik dizilerin genel terimlerinin çarpımları toplamına eşittir.*



Karakteristik denklemin kökleri hep basit ise, bahsi geçen polinomlar sabitlerden ibaret olur ve indirgemeli dizinin genel terimi, geometrik dizilerin terimlerinden teşkil edilmiş toplama eşit olur.

Hatta şu ters teoremin doğruluğu da isbat edilebilir: *Genel terimi (72) formülü ile ifade edilebilen her  $\{a_n\}$  dizisi bir indirgemeli dizidir.* Mütakabil (71) karakteristik denklemi  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  kökleri ile bunların  $a, b, \dots, c$  katlılıklarından (bunlar  $Q, R, \dots, S$  polinomlarının derecelerinin 1 fazlalarını göstermektedirler) elde edilir. Bundan, kolaylıkla (70) indirgeme denklemine geçilebilir. Misâl olarak

$$a_n = (n-1)^2 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

dizisini gözönüne alalım. Bunu (72) ile karşılaştırsak, karakteristik denklemin köklerinin  $\alpha = 2, \beta = 3$  olduğu ve  $\alpha$  nın katlılığının  $2 + 1 = 3$  e eşit bulunduğu hükmüne varırız. O halde karakteristik denklem

$$(q-2)^3(q-3) = q^4 - 9q^3 + 30q^2 - 44q + 24 = 0$$

şeklinde olmalı ve indirgeme denklemi

$$a_{n+4} = 9a_{n+3} - 30a_{n+2} + 44a_{n+1} - 24a_n$$

şeklinde yazılabilmelidir.

Verilen dizinin bu denklemi sağlamakta olduğunun isbatını okuyucuya bırakıyoruz.

10. Geçen bölümün neticelerini misâllerle açıklamak istiyoruz. Bölüm 2 de bir aritmetik diziye ait terimlerin

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

şeklindeki bir denklemi, tabii sayıların karelerinin

şeklini alır. (73) sistemi de

$$B_0 = u_1,$$

$$B_0 + B_1 = u_2$$

haline gelir. Buradan derhal görüldüğü üzere  $B_0 = u_1$  dizinin ilk teriminden,  $B_1 = u_2 - u_1 = d$  ise ortak farktan ibarettir. O halde

$$u_n = u_1 + d(n-1)$$

bağıntısı caridir. Böylece malûm formülde elde etmiş oluyoruz. Tabii sayıların kareleri veya küblerinden ibaret diziler için benzer düşünceleri yürütmekten sarfınazar ediyoruz; zira daha baştan  $u_n = n^2$  veya  $u_n = n^3$  olduğunu biliyoruz. Fakat (69') ve (73) bağıntılarını, bir aritmetik dizinin veyahut tabii sayıların kareleri veya küblerinden ibaret dizilerin terimleri toplamını elde etmek maksadiyle kullanmak ilgi çekicidir.

Bölüm 4 de, terimleri

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

denklemini gerçekliyen bir  $\{u_n\}$  dizisinin terimlerinin  $\{s_n\}$  toplamlarının

$$(s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots)$$

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} +$$

$$+ (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n$$

şeklindeki bir denklemi sağladıkları gösterilmişti. (57') denklemi için

$$a_1 = \binom{k}{1}, \quad a_2 = -\binom{k}{2}, \quad \dots, \quad a_k = (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

olduğu açıktır. O halde



$$1 + a_1 = 1 + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{1},$$

$$a_2 - a_1 = - \left[ \binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right] = - \binom{k+1}{2},$$

$$a_3 - a_2 = \binom{k}{3} + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{3},$$

$$a_k - a_{k-1} = (-1)^{k-1} \left[ \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] = (-1)^{k-1} \binom{k+1}{k},$$

.....

$$-a_k = (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k \binom{k+1}{k+1}$$

olup,  $\{s_n\}$  ye ait denklemler

$$s_{n+k+1} = \binom{k+1}{1} s_{n+k} - \binom{k+1}{2} s_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} s_n$$

veya

$$s_{n+k+1} - \binom{k+1}{1} s_{n+k} + \binom{k+1}{2} s_{n+k-1} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} s_n = 0$$

şeklinde yazılabilirler.

O halde bir  $\{a_n\}$  dizisi  $k$ -yıncı mertebeden bir (57') denklemini gerçekliyorsa, terimlerin  $\{s_n\}$  toplamaları dizisi, aynı şekli haiz bulunan fakat  $(k+1)$ -inci mertebeden olan bir denklemi sağlarlar. Bir aritmetik dizi için özel olarak  $k=2$ , tabii sayıların karelerinden ibaret dizi için  $k=3$ , ve kübler dizisi için de  $k=4$  tür; buna göre mütekabil toplam dizileri için yukarıki (57'), (69'), (73) denklemlerinde  $k$ -yı her seferinde bir fazla yani 3, 4 ve 5 olarak almak gerektir.

a) Aritmetik dizinin terimlerinin toplamı  
Söylediklerimize göre  $s_n$  toplamı  $k=3$  için (69') formülü ile ifade edilebilir (burada  $u_n$  yerine  $s_n$  konmalıdır). Böylece

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2$$

olur.  $B_0, B_1, B_2$  katsayıları (73) sisteminden belirtilebilir (burada  $u_n$  yerine yine  $s_n$  ve  $k=3$  alınmalıdır):

$$B_0 = s_1 = u_1,$$

$$B_0 + B_1 + B_2 = s_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d,$$

$$B_0 + 2 \cdot B_1 + 2^2 B_2 = s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3d.$$

Çözüm olarak buradan

$$B_0 = u_1, \quad B_1 = u_1 + \frac{1}{2}d, \quad B_2 = \frac{1}{2}d$$

elde edileceğinden

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2}d\right)(n-1) + \frac{1}{2}d(n-1)^2 \\ &= nu_1 + \frac{1}{2}d(n-1)n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} \\ &= \frac{n[u_1 + u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \end{aligned}$$

dir.

b) Tabiiî sayıların kareleri Toplamı. (69')  
ve (73) denklemlerinde  $k=4$  alır ve  $u_n$  yerine  $s_n$  koyarsak

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2 + B_3(n-1)^3$$

ve

$$B_0 = s_1 = 1$$

$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = s_2 = 1 + 2^2 = 5$$

$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = s_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$B_0 + 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = s_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

elde ederiz.

Bu sistemden

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2 \frac{1}{6}, \quad B_2 = 1 \frac{1}{2}, \quad B_3 = \frac{1}{3}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{13}{6}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n-1)^3 = \\ &= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(1+3n+2n^2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

olup, bilinen formülü yeniden elde etmiş oluruz.

c) Tabii sayıların ükbleri toplamı. Bunun için

$$s_n = \frac{n^2(n+1)}{4}$$

bulunur. Bu formülün çıkarılmasını bir ekzersiz olarak okuyucu ya bırakıyoruz.

Son misâl olarak

$$\alpha, 2\alpha^2, 3\alpha^3, \dots, n\alpha^n, \dots \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

dizisini gözönüne alalım. Burada

$$u_n = n\alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

olup



$$u_{n+2} = 2x u_{n+1} - x^2 u_n$$

bağıntısının cari olduğu derhal görülür. Gerçekten

$$\begin{aligned} 2x u_{n+1} - x^2 u_n &= 2x (n+1) x^{n+1} - x^2 n x^n = \\ &= (n+2) x^{n+2} = u_{n+2} \end{aligned}$$

dir.  $k=2$ ,  $a_1=2x$  ve  $a_2=-x^2$  olduğuna göre  $\{s_n\}$  toplamalar dizisi ( $s_1=x$ ,  $s_2=x+2x^2$ ,  $s_3=x+2x^2+3x^3$ , ...)

$$\begin{aligned} s_{n+3} &= (a_1+1) s_{n+2} + (a_2-a_1) s_{n+1} - a_2 s_n = \\ &= (2x+1) s_{n+2} - (x^2+2x) s_{n+1} + x^2 s_n \end{aligned}$$

denklemini sağlamalıdır. (bk. (30)). Mütakabil karakteristik denklemin

$$q^3 = (2x+1)q^2 - (x^2+2x)q + x^2$$

olup, bunun  $q=x$  için gerçekleştiği kolayca görülür.

$$q^3 - (2x+1)q^2 + (x^2+2x)q - x^2$$

polinomu  $q-x$  ile bölününce

$$q^2 - (x+1)q + x$$

bölümü elde edileceğinden, geri kalan diğer iki kök

$$q^2 - (x+1)q + x = 0$$

denklemini sağlamalıdır; bunun kökleri ise  $x$  ve  $1$  dir. O halde karakteristik denklem, ikikat  $x$  kökü ile  $\beta=1$  basit kökünü haizdir. Bu yüzden  $s_n$  için

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)] x^{n-1} + C_0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

elde edilir; [(69) formülüne bakınız; bu formülde  $u_n$  yerine  $s_n$  ko-

nulacaktır; bundan başka  $x = z$ ,  $Q(x) = B_0 + B_1 x$  bir birinci derece polinomu,  $\beta = 1$  ve  $R(x) = C_0$  bir sabittir].  $B_0$ ,  $B_1$  ve  $C_0$  katsayıları  $n = 1, 2, 3$  için elde edilecek

$$B_0 + C_0 = s_1 = z,$$

$$(B_0 + B_1)z + C_0 = s_2 = z + 2z^2,$$

$$(B_0 + 2B_1)z^2 + C_0 = s_3 = z + 2z^2 + 3z^3$$

denklemlerinden bulunur. Buradan

$$B_0 = \frac{z^3 - 2z^2}{(z-1)^2}, \quad B_1 = \frac{z^2}{z-1}, \quad C_0 = \frac{z}{(z-1)^2}$$

elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned} s_n &= [B_0 + B_1(n-1)]z^{n-1} + C_0 = \frac{n z^{n+2} - (n+1) z^{n+1} + z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{u_n z^2 - (u_{n+1} - u_1)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

olur.

## SON DÜŞÜNCELER

Bu kitabın amacı, indirgemeli dizilerin çeşitliliği ve matematikteki rolü hakkında okuyucuya bir fikir verebilmektir. Bu arada indirgemeli dizilerin, kendileri arasında bulunan geometrik diziden ve bir aritmetik dizi teşkil eden tabii sayıların bizzat kendileri ile bunların kuvvetlerinden meydana gelen diziler gibi basit dizilerden kolayca bulunabileceği ve bu ilkel diziler yardımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir. Maamafih elemanter matematikte bile çok kere indirgemeli olmayan dizilere rastlanır. Meselâ bütün matematiğin en önemli dizilerinden biri olan

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$$

asal sayılar dizisi böyle bir dizidir. Bu dizi ile ve bunun derinliğine giden karışık özellikleri ile sayılar teorisinde meşgul olunur. Bir çok elemanter fonksiyonlardan elde edilen değer dizileri de indirgemeli değildir, meselâ :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

( $y = \frac{1}{x}$  in  $x = 1, 2, 3, \dots$  için alacağı değerler dizisi) veya

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots$$

$$\log 1, \log 2, \log 3, \log 4, \dots, \log n, \dots$$

( $\sqrt{x}$  ve  $\log x$  in  $x = 1, 2, 3, \dots$  için alacağı değer dizileri) v.s. gibi. Bu ve benzeri dizilerin (burada bahis konusu olan diziler, en basit örnekleri elemanter fonksiyonlar olan analitik fonksiyonların değerlerinden meydana gelen dizilerdir) ve ayrıca indirgemeli di-



zilerin incelenmesi diferanslar hesabı dediğimiz bir matematik disiplinde yapılır.

Nihayet yakınsak, yani sonlu bir limit değerini haiz olan diziler elemanter matematik ve özellikle yüksek okullarda okutulan analiz derslerinde büyük rol oynarlar. Bunların incelenmesi her şeyden önce limitler teorisinin bir konusu olup, analizin temelini ilgilendirir. Burada ayrı ayrı dizi terimlerinin özellikleri ikinci derecede rol oynarlar; asıl önemli olan dizinin bir limitinin mevcudiyeti ve değeridir.

Bu açıklamaları yapmak zorunda kalışımız, kanaatımızca okuyucuya, gerek konu ve gerekse bulunmuş olan kanunlara uygunluk bakımından indirgemeli diziler hakkında alettiklerimizin diziler teorisinin çok özel ve mütevazi bir bölümünü teşkil ettiğini göstermek içindir.

---

**Yayınlanmış olan eserler :**

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız pergel ile yapılan çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
- 11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
- 18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)

**Yayınlanmak üzere olan eserler :**

- 14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler
- 15 — İhtimaller hesabına giriş
- 16 — Sayı sistemi
- 17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi :

Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü

Vezneciler — İstanbul

**Fiatı 200 Krş.**