

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 19

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT I)

Çeviren

Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1963

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 19

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT I)

Çeviren

Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1963

BU KİTAP HAKKINDA

Bu kitap tamamen orta öğretim müfredatına paralel olup müstakbel öğretmenlerin mesleki ihtiyaçlarını karşılamak ve özel olarak matematik kültürlerini genişletmek ve geometri öğretimindeki gerekli tekniği geliştirmek amacıyla hazırlanmıştır.

Önce, cümle teorisine dayanan kavramlar, soyut fonksiyon (LOBACHEVSKI anlamında) kavramının tatbikatı, dönüşüm gurupları kavramı, guruplar teorisinin ana hatları incelenmiştir. Bugün LOBACHEVSKI geometrisinin esaslarını ele almadan geometriyi başarılı bir şekilde öğretmek mümkün değildir.

Kitapta bol sayıda temrin bulunmaktadır. Okuyucuların bu temrinler dışında çalışma yapmaları da kaçınılmaz bir zarurettir. Her bölümde bu gibi çalışmalar için konular verilmiş ve bunlarla ilgili yayınlara atıflar yapılmıştır. Böylece, yeniliğine rağmen bu programa öğretmenin ve öğrencinin hızla intibakı kolaylaştırılmıştır.

Orta öğretim ders kitaplarının bünyesine uygun temrinlere özel önem verilmiştir. Geometrinin sistemli olarak incelenmesinin orta öğretim ileri sınıflarında ele alınması temayülü, buna mukabil ilk iki yıl bunun yerine bir nevi mantık ve «sezgiye dayanan tümünden gelim» in konması savunulacak bir hareket değildir. Mevcut geometri programı çerçevesi içinde öğretmenin, modern ilmin önemli fikirlerini — cümle teorisine dayanan kavramları, soyut fonksiyon kavramını, geometrik dönüşümleri, grup kavramını, aksiyomatik metodu, v.s. — işleme bakımından imkânları artmıştır. Kanaatımızca müfredat programında, meselâ yeteri kadar temel hazırlanmaksızın diferansiyel ve integral hesabın okutulması gibi değişiklikler bugün modası geçmiş görünmektedir.

Bu kitap orta ğretim ders kitapları ile birlikte programın hemen hemen tam olarak incelenmesine imkân verecektir. Yer darlığı dolayısıyla trigonometrinin geometriye tatbikatiyle ilgili iki bölümünden sarfı nazar edilmiştir. Bu noksanlık diğer ders kitaplarından faydalanılarak telafi edilebilir.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematik'in kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çöze-bilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbir-lerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, genç-lerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilim-lerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik lite-ratürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranan özellik-ler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevk-etmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar ol-

mayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

KISIM I GİRİŞ

BÖLÜM I. NOKTA CÜMLEŞİ OLARAK GEOMETRİK ŞEKİLLER

1. Geometride esas kavram ve tarifler.....	1
2. Aksiyom ve teoremler.....	3
3. Nokta cümlesi olarak geometrik şekil kavramı.....	5
4. Şekillerin arakesiti. Misaller, Konik kesitler	19
5. Şekillerin toplamı	33
6. Yapıştırma veya özdeşleştirme	36

BÖLÜM II. GEOMETRİK ÇİZİMLER

7. Geometrik yer	50
8. Çizim problemlerinin çözümünde geometrik yer usulü	66
9. Geometrik çizim problemleri ve çözümlerine dair..	70
10. Cetvelle ve pergelle çizimler	73
11. Çizim problemlerinin çözümünü cetvel ve pergelden gayri usullerle elde etmeğe dair	83
12. Cetvel ve pergelle çözülemiyen problemlere misaller	96

BÖLÜM III. ŞEKİLLERİN DÖNÜŞÜMÜ

13. Bir şeklin diğer bir şekle tasviri.....	119
14. Şekillerin bire bir tasviri.....	125
15. Şekillerin sürekli tasviri.....	130
16. Bir düzlemin kendisine ve bir uzayın kendisine dönüşümü kavramı.....	138
17. Stereografik izdüşüm.....	143
18. Merkezi izdüşüm kavramı.....	152
19. Dönüşüm grubu kavramı.....	154
20. Grup genel kavramı	156

BİRİNCİ KISIM

GİRİŞ

BÖLÜM I

NOKTA CÜMLEŞİ OLARAK GEOMETRİK ŞEKİLLER

Birinci bölümün başlangıcında aksiyom ve teorem esas kavramları kısaca mütalâa edilmiştir. Bu konular, geometrinin kuruluşuna ve Lobachevski geometrisine tahsis edilmiş olan bu kitabın IV. kısmında daha etraflıca ele alınacaktır.

Ana hat olarak 1. bölüm, geometrik şekillerin nokta cümlesi olarak gösterilmesinden ve esas cümle teorisi kavramlarının (şekillerin toplam ve arakesit işlemleri ve bir şeklin elemanlarının özdeşleştirilmesi) geometrideki tatbikatından bahsetmektedir.

1. Geometride esas kavram ve tarifler

Matematik kavramların menşei hakkında iki görüş olamaz, sadece bir görüş vardır.

«Hakikaten sayı ve şekil kavramı, içinde yaşadığımız dünyadan doğmuştur. Sayı kavramı gibi şekil kavramı da sırf düşünce mahsulü olmayıp sadece dış dünyamızdan türemiştir. İnsanların şekil kavramına varmaları için, birbirileriyle mukayese edilebilen muhtelif biçimde maddî eşyanın mevcudiyeti şart olmuştur. Sırf matematikğin konusu, dünyamızdaki eşyanın biçim ve ölçüleri arasındaki bağlantılardır, diğer bir deyimle, konu ta-

mamiyle gerçek muhtevadır. Muhtevanın ziyadesiyle mücerret şekilde görünmesi yine dış dünyadan türeyişini yok edemez. Bu şekil ve bağıntıları mücerret bir şekilde inceleyebilmek için bağılıklarını tamamen bertaraf etmek, bu bağılılığı eldeki maddede yersiz bularak gidermek gerekmektedir. Bu şekilde noktalar, doğrular meydana gelmiştir».

Diğer bütün matematik bilimlerde olduğu gibi, geometride de, diğer kavramlara göre tarif edilen kavramlara rastlarız. O kavramlar da ekseriya daha başka kavramlar cinsinden tarif edilir ve bu böylece devam eder. Bir misal alalım. Çember, verilen bir O noktasına olan uzaklıkları, verilen bir doğru parçasına eşit olan düzlemsel noktaların geometrik yeri olarak tarif edilir.

Bu tarifte «çember» kavramı, «nokta», «uzaklık», «doğru parçası», «eşit», «düzlemsel», «geometrik yer» gibi bir takım kavramlar yardımıyla tarif edilmiştir. Bir çemberi tarif etmek için, diğer kavramları bilinir kabul etmek zarureti vardır. Eğer kavramlar bilinmiyorsa ya başka kavramlarla tarif ederiz, veya bu olmazsa, izah ve resimle yetinerek bunları tarifsiz bırakırız.

«Tarif zinciri» sorusuz olarak devam edemiyeceğinden, tabii, işe tarif edilmeyen kavramlarla başlamak zarureti vardır.

Geometride bazı kavramlar *esas* olarak kabul edilir ve bunların sayısı mümkün mertebe az tutulur. Esas kavramlar tarif edilmmezler ve muhtelif tarzda seçilebilirler.

Seçilenler ekseriya aşağıda gösterilenler olur: «Nokta», «doğru», «düzlem», «ait» veya «üzerinde», «arasında», «eşit».

Geometride rastlanan diğer bütün kavramlar kesinlikle bu esas kavramlar cinsinden tarif edilmelidir.

Meselâ, «doğru parçası» kavramı, verilen A, B noktaları «arasında» ki «nokta» ların cümlesi olarak tarif edilir, A ve B noktalarına da AB doğru parçasının «uc nokta» ları denir.

«Kesin (doğru) olarak tarif etmek» veya «belirli bir özelli-

ği haiz olmak» gibi ifadeler mantık sahasına girer. Geometrinin etüdünde mantığın esaslariyle birlikte aritmetiğin bazı esas kavramları biliniyor kabul edilir.

2. Aksiyom ve Teoremler

Geometride «tarif zinciri» sonsuz olarak devam edemez. Bunun gibi «ispat zinciri» sonlu kalmak zorundadır.

Bilindiği gibi geometrideki herhangi bir ispat, mesela Pythagor teoremi, evvelki ispatlara dayandırılır, onlar da daha evvelkilere, ve böylece devam olunur. «Evvelce ispat edilen» e irca işi sonsuz olarak devam edemez.

Geometriye, matematiksel bir disiplin olarak, ispatsız kabul edilen teoremlerle başlanır. Bu teoremlere *aksiyom* denilmektedir. Geometrinin esas aksiyomları tecrübe ve pratikten doğmuştur.

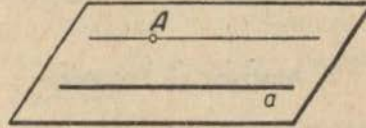
Aksiyomlara misal: «Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır. Bir düzlemde aynı doğru üzerine düşmeyen en az üç nokta vardır.»

«Eğer α ve β düzlemlerinin ortak bir A noktası varsa, ortak olan en az başka bir B noktası daha vardır.

Euklid aksiyomu: « a herhangi bir doğru, A da a doğrusuna ait olmıyan bir nokta ise, a doğrusıyla A noktasının belirttiği düzlemde A dan geçen ve a yı kesmiyen birden fazla doğru yoktur.

Son aksiyomda - paralel aksiyomu - bir A noktasından geçen ve a yı kesmiyen «birden fazla doğru yoktur» şeklindeki doğru mevcudiyetine ait ifadeye işaret edelim (Şekil 1). Aksiyom, hatta bir tek doğrunun bile mevcut olduğunu ifade etmemektedir. a yı kesmiyen hiçbir doğrunun mevcut olmaması halinde bile, ifade edilen aksiyom, ifade edildiği şekilde muteber durumdadır.

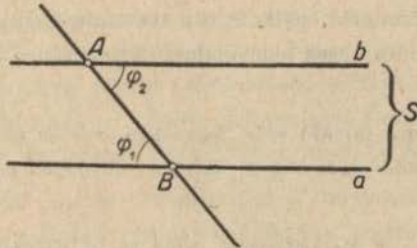
a düzlemiyle A noktasının belirttiği α düzleminde, A dan geçen ve a yı kesmiyen en az bir doğrunun mevcudiyeti ispat



Şek. 1

edilebilir bir şeydir. Bu ifade bir teorem olup basit bir ispatı da bilinmektedir :

B , a üzerinde bir nokta olsun (Şekil 2), AB doğrusuyla B yi A ya birleştirelim ve φ_1 , φ_2 iç-ters açılar eşit olacak şekilde



Şek. 2

b doğrusunu çizelim. b doğrusu a yı kesmez. Hakikaten, eğer a ile b nin S noktasında kesiştiklerini kabul edersek SAB üçgeninde φ_1 dış açısıyla komşu olmayan iç φ_2 açısının eşitliği çıkmış olur. Öyle ise a ve b doğrularının S arakesiti mevcut olmaz.

Euklid aksiyomu ile şimdi ispat edilen teoremi birleştirerek yukardaki şartlar altında a yı kesmiyen bir ve ancak bir doğrunun mevcut olduğu ifade edilebilir.

Aynı düzlemde olup kesişmiyen a ve b doğrularına paralel doğrular diyoruz.

Geometride, aksiyom listesinde bulunmıyan her ifade, basit veya «aşıkâr» olsun, bir *teorem* olup ispatlanması gerekir.

Gayetle «aşıkâr» olduğu halde aksiyom listesinde bulunmıyan ifadelerin teorem olarak ispat edilmeleri de gerekir. Diğer taraftan, hiç de «aşıkâr» olmayıp aksiyom listesinde bulunan ifadeler de vardır, bunlar ispatsız olarak kabul edilirler.

Bir ders kitabında, mantıki bütün tafsilatıyla ispatları verilen ve nihai olarak yalnız aksiyomlara dayanan ancak birkaç ispat örneği vermek mümkündür. Tamamen aksiyomatik olarak yazılacak bir geometri kitabı ise çok hacimli ilmi bir eser hüviyetini alır.

XIX. yüzyılın sonu ile XX. yüzyılın başında tertip edilmiş olan aksiyomların tam listesi bu kitabın IV. kısmında verilecektir. Bundan sonraki bahislerde okuyucunun bildiği lise muhteva-sı nazarı itibare alınacaktır.

3. Nokta cümlesi olarak geometrik şekil kavramı

Herhangi bir nokta cümlesine *şekil* denir. *Cümle* fikri, ancak izah edilebilen fakat tarif edilmeyen ilkel bir kavramdır. «Cümle» kelimesi yerine denk anlamlı diğer kelimeler de kullanılabilir: «topluluk», «sınıf», «koleksiyon», «sistem», vs.

Noktalardan ibaret cümlelere *nokta cümlesi* veya *şekil*, bir cümleye ait noktalara da cümlemin *eleman* ları denir.

Bir doğru parçasının nokta cümlesinden, vs. bahsedilebilir.

Aynı şekilde uzaydaki bütün doğruların cümlesinden, bütün kürelerin cümlesinden, verilen bir küreye teğet olan bütün düzlemlerin cümlesinden, vs. den de bahsedilebilir. Bu son halde cümlelerin elemanları cümlelerden ibarettir.

Sonlu cümle ekseriya elemanları belirtilerek verilir; mese-la, bir bisikletin tekerleklerinin parmaklarının cümlesi gibi.

Sonsuz bir cümle, elemanlarının bir özelliği belirtilerek verilir. Bir cümleinin elemanlarının bu karakteristik özelliği belirtilince, bir şeyin bu cümleye ait olup olmadığı hakkında karar vermek mümkün olur.

Şekillere ait bazı misaller alalım.

Bir nokta, bir doğru, bir düzlem ve uzayın tümü birer şekildir. Nokta bir elemanlı şekil, doğru, düzlem ve uzay ise sonsuz nokta cümleleridir.

Bir doğru parçasından bahsedince, burada üç şekil ayırt etmemiz gerekmektedir.

A ve B noktalarından ibaret cümleye *0-boyutlu doğru parçası* diyeceğiz. A ve B noktalarıyla A ve B noktaları arasındaki noktalardan ibaret cümleye de *1-boyutlu kapalı doğru parçası* veya sadece *doğru parçası* adını vereceğiz.

Buradaki *kapalı* kelimesi, doğru parçasının uçlarının, diğer bir deyimle A ve B noktalarının AB doğru parçasına dahil olduğu anlamında kullanılmıştır.

Yalnız A ve B noktalarının arasında kalan noktalardan ibaret cümleye *1-boyutlu açık doğru parçası* veya *aralık* diyeceğiz.

Buradaki *açık* kelimesi, doğru parçası uçlarının, diğer bir deyimle, A ve B noktalarının aralığa dahil olmadığını ifade etmektedir.

Aralık, uçları atılan doğru parçasıdır, ve 0-boyutlu doğru parçası da aralığın uc noktalarının cümlesidir.

Bunları aşağıda Şekil 3 deki gibi göstermek uygun olur:

Şimdi de aşağıdaki şekiller arasındaki farkları belirtelim :

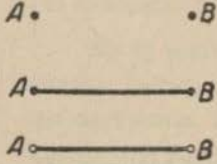
Bir Γ dairesi, bir π düzleminde (Şekil 4), O noktasına olan mesafeleri, verilen bir R doğru parçasına eşit olan noktaların cümlesidir :

$$OM = R = \text{sabit}$$

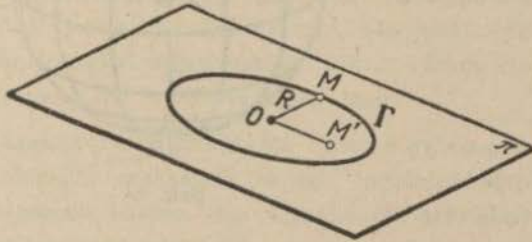
Kapalı disk veya disk, Γ daresinin noktalarıyla birlikte, Γ nın π ye ait M' noktalarının cümlesidir (Şekil 4):

$$OM' \leq R$$

Γ daresine diskin *sınır*'ı denir ve daire bir eğridir.



Şek. 3



Şek. 4

Açık disk, Γ daresinin içindeki M'' noktalarının cümlesidir:

$$OM'' < R.$$

Açık disk, sınırı olmıyan bir disktr.

Küre, verilen bir O noktasından olan uzaklıkları verilen R uzunluğundan büyük olmıyan M' noktalarının cümlesidir:

$$OM' \leq R$$

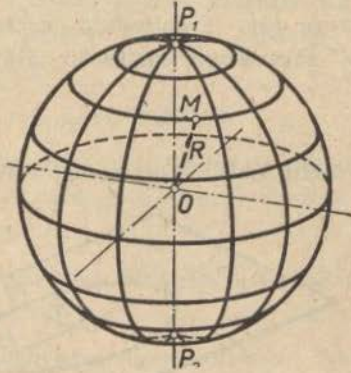
Küre yüzeyi, verilen bir O noktasından uzaklıkları R ye eşit olan M noktalarının cümlesidir (Şekil 5):

$$OM = R$$

Açık küre, sınırı olmıyan bir küredir, diğer bir deyimle,

$$OM'' < R$$

eşitsizliğini sağlayan M'' noktalarının cümlesidir.

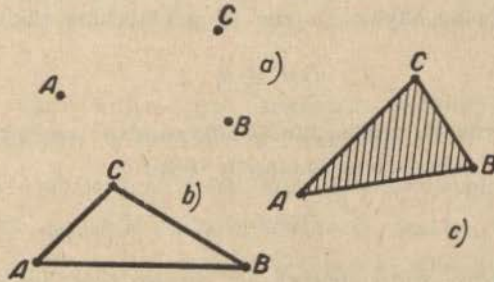


Şek. 5

Verilen bir kürenin dışı, $M'' > R$ eşitsizliğini sağlayan M'' noktalarının cümlesidir

Küre yüzeyi üzerindeki ekvator, paralel ve meridyenler birer şekildir. Bir kürenin P_1, P_2 kutupları kürenin 0-boyutlu çapıdır.

Şimdi üçgen kavramına geçelim. Aşağıdaki şekillerin farklarını belirteceğiz.



Şek. 6

0-boyutlu ABC üçgeni, bir doğru üzerinde olmıyan A, B, C noktalarının cümlesidir (Şekil 6 a).

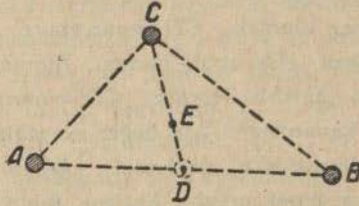
1-boyutlu ABC üçgeni, A, B, C noktaları doğrusal olmamak şartıyla AB, BC, CA doğru parçalarına ait noktaların cümlesidir (Şekil 6 b). Böyle bir üçgene ekseriya *çizgisel* üçgen denir.

2-boyutlu ABC üçgeni, bir boyutlu ABC üçgeninin noktalarıyla, ABC düzleminin çizgisel üçgen içine düşen noktalarının cümlesidir (Şekil 6 c). 1-boyutlu ABC üçgeni, 2-boyutlu ABC üçgeninin *sınır*'ıdır. Çizgisel üçgenin sınırı yoktur. Sınırı atılan 2-boyutlu bir üçgene *açık* 2-boyutlu üçgen denir.

Bu üç şekil arasında fark gözetmenin lüzumu yalnız geometride belirmez. Meselâ, mekanikte bir ABC üçgeninin ağırlık merkezinin bulunması istense, bu üçgenlerden hangisinin kastedildiği açık olarak ifade edilmedikçe meseleye anlam verilemez.

Bu üçgenlerden herbirinin ağırlık merkezini bulalım.

0-boyutlu ABC üçgeninin (Şekil 7) her A, B, C tepe noktasına, eşit m kitlelerinin konulduğunu kabul edelim. A ve B tepe noktalarına konulan kitlelerin D ağırlık merkezi AB doğru



Şek. 7

parçasının ortasıdır. Şimdi her iki kütleyi de D noktasına koyalım. Bu, 0-boyutlu üçgenin ağırlık merkezini değiştirmez. CD kenarortayını E noktasında kitlelerle ters orantılı olarak bölersek

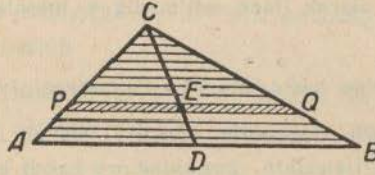
$$\frac{CE}{ED} = \frac{2m}{m} = 2$$

buluruz.

O halde, kenarortayların E arakesit noktası, 0-boyutlu üçgenin ağırlık merkezidir.

Şimdi, iki boyutlu bir üçgeni ele alalım. Burada, homogen bir ABC levhasının ağırlık merkezinin bulunması bahis konusudur. Böyle bir levhanın ağırlık merkezinin limit kavramına başvurmadan matematiksel bir sıhhatle bulunması mümkün değildir. Burada sadece esas fikrin ana hatlarıyla yetineceğiz.

ABC levhasını, AB tabanına paralel çok ince şeritlere bölelim. Her PQ şeridinin (Şekil 8) ağırlık merkezi bu şeridin E ortasında bulunur. Her PQ şeridinin kitesini kendi E ağırlık



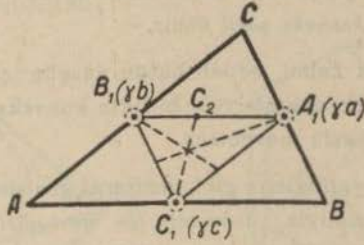
Şek. 8

merkezine koyacak olursak, CD kenarortayı boyunca düzgün olmıyan bir dağılıma elde etmiş oluruz. Bunun neticesi olarak üçgensel levhanın ağırlık merkezi CD kenarortayına düşmüştür. Bu ise her kenarortay için doğru olacağından, *iki-boyutlu bir üçgenin aranılan ağırlık merkezinin, kenarortayların arakesit noktası* olacağı neticesi çıkar. Netice, 0-boyutlu üçgende de aynıdır.

Bir-boyutlu üçgen için netice başkadır.

«Telden yapılmış» homogen bir ABC üçgeni düşünelim (Şekil 9). Üçgenin her bir kenarının ağırlık merkezi kendi ortasıdır ve kenarların uzunluklarıyla orantılı bulunmaktadır.

Bir boyutlu üçgenin çizgisel yoğunluğu, diğer bir deyimle, birim uzunluğunun kütlesi γ olsun. Her kenarın kütlesini kendi orta noktasına koyarsak tepe noktalarında γa , γb , γc kitleleri bulunan 0-boyutlu bir $A_1 B_1 C_1$ üçgeni elde ederiz. γa ve γb kit-



Şekil 9

lelerinin C_2 ağırlık merkezi, $A_1 B_1$ doğru parçasını kitlelerle ters orantıda böler :

$$\frac{A_1 C_2}{C_2 B_1} = \frac{\gamma b}{\gamma a} = \frac{b}{a} = \frac{(1/2) b}{(1/2) a} = \frac{A_1 C_1}{C_1 B_1}.$$

Ohalde, C_2 noktası $A_1 B_1 C_1$ üçgeninin $A_1 B_1$ kenarını yan kenarlarla orantılı olarak bölmektedir. Bu ise, $C_1 C_2$ nin $A_1 B_1 C_1$ üçgeninin C_1 açısının açıortayı olduğunu ifade eder. γb ve γc kitlelerini C_2 ağırlık merkezine koyarak, meseleyi, $C_2 C_1$ doğru parçasının uçlarına konulan $\gamma (a + b)$ ve γc kitlelerinin ağırlık merkezini bulma meselesine çevirmiş oluruz. O halde, aranılan ağırlık merkezi $C_1 C_2 C_3$ üçgeninin $C_1 C_2$ açı ortayı üzerinde bulunur. Fakat açıortaylar arasından $C_1 C_2$ yi seçmekte tercih yapılmadığından bir-boyutlu bir üçgenin ağırlık merkezi; tepe noktaları, verilen üçgenin kenarlarının orta noktaları olan üçgenin iç açıortaylarının kesişme noktası olur (Şekil 9).

Yalnız eşkenar üçgen halinde bu üç üçgenin ağırlık merkezleri çakışık durumda olurlar.

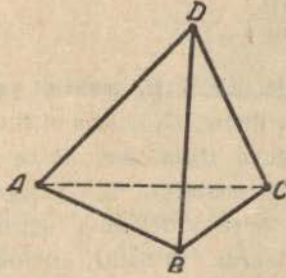
Bazı elemanter geometri ders kitaplarında üçgen kelimesi 1-boyutlu üçgen anlamında kullanılmaktadır. Bu ise, kenar or-

tayların ortak noktasına ağırlık merkezi denildiğinden. yerinde bir tabir değildir.

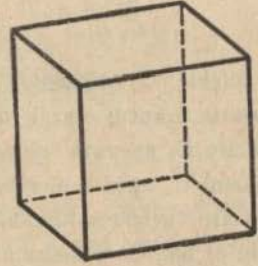
Konveks şekli tarif edelim. Herhangi iki A, B noktasını birleştiren doğru parçasının bütün noktalarını (A ve B de dahil) içine alan şekle *konveks şekil* denir.

Cisim olarak kabul edilen bütün düzgün çokyüzlüler, yüzleri, kenar ve tepe noktalarıyla birlikte konveks şekillerdir. Beş tane düzgün çokyüzlü mevcuttur.

Üçgenlerde yaptığımız gibi tarifimizi genişleterek, meselâ şu şekilleri ayırd etmeliyiz: 0-boyutlu bir dört-yüzlü - düzgün bir dörtyüzlünün A, B, C, D tepe noktalarının cümlesi; 1-boyutlu (veya çizgisel) bir dörtyüzlü - bir dörtyüzlünün tepe noktaları ile kenarlarının cümlesi; 2-boyutlu bir dörtyüzlü - yüz ve kenarlara ait bütün noktalarıyla tepe noktalarının cümlesi; ve niha-



Şek 10



Şek. 11

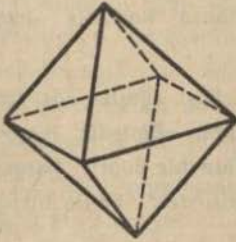
yet 3-boyutlu bir dörtyüzlü - bir dörtyüzlünün bütün iç ve sınır noktalarının cümlesi (Şekil 10).

Böyle bir tefrik küb için (Şekil 11), sekiz yüzlü için (Şekil 12), 12-yüzlü (Şekil 13) ve 20-yüzlü için de (Şekil 14) yapılabilir.

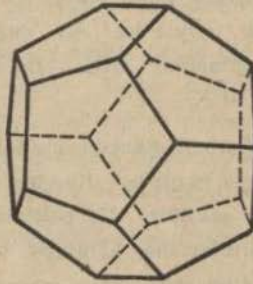
Yukarıda zikredilen üç-boyutlu şekillerden birinde herhan-

gi A ve B noktalarını alacak olursak, AB doğru parçası bütün noktalarıyla şekle ait olur.

2-boyutlu, 1-boyutlu ve 0-boyutlu düzgün çokyüzlüler konveks olmıyan şekillerdir.



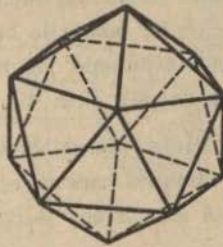
Şek. 12



Şek. 13

Bir düzgün çok yüzlünün her yüzü, her kenar ve her tepe noktası birer konveks şekildir.

Bir disk ve bir küre birer konveks şekil ise de bunların sınırları olan çember ile küre yüzeyi konveks şekil değildir.



Şek. 14

Bir nokta, bir doğru parçası, bir doğru, bir düzlem ve uzayın tümü birer konveks şekildir.

Meselâ bir düzlemde iki nokta alınsa ve bu iki nokta birleştirilse tamamen düzleme ait bir doğru parçası elde edilir ve bu, düzlemin konveksliğini ispatlar.

Burada biraz durarak şu iddiayı ele alalım: «Bir M noktası konveks bir şekildir.» Konvekslik tarifine dayanarak M den ibaret olan şeklin A ve B gibi herhangi iki noktasını alalım. Bunlar M noktasıyla çakışır. AB doğru parçası, çakışan A ve B uc noktalarından ibarettir. Bu doğru parçasının hiçbir iç noktası yoktur. Öyle ise AB doğru parçasının bütün noktaları şekle (M noktasına) aittir. Bu da bir noktanın konveks olduğunu ifade eder.

Formel mantıki mülahazalar bizi «boş cümle» adı verilen cümleye götürür. Bu, hiç elemanı olmayan cümledir. Boş cümle de bir şekildir. Uc noktaları çakışık olan bir doğru parçasının iç noktaları boş cümleye bir misal teşkil eder. Böyle bir doğru parçasına *sıfır-doğru parçası* diyeceğiz.

«0-boyutlu» doğru parçasıyla «sıfır» doğru parçası arasında bir fark gözetmemiz gerekir.

Ekseriya verilen bir özellikte eleman mevcut olmayabilir. Böyle elemanların teşkil ettiği cümle boş bir cümledir.

Boş cümleyi, içinde hiçbir şey olmayan bir torba olarak düşünebiliriz. Bir elemanlı bir cümle ile bu eleman arasında fark gözetilmelidir. Gözlerimizin önünde böyle bir cümlemin «canlı model» ini bulundurmak faydalı olur: Bir şey ihtiva eden torba.

«Bir cümlemin bir bütün olarak düşünülen bir çokluk» olduğunu söyleyebiliriz. Bununla beraber «çokluk» sadece bir şeyden ibaret olabilir, hatta hiç bir şey ihtiva etmiyebilir.

Boş cümle kavramını ihtiva eden ifadeler ekseriya «çift olumsuzluk» şeklinde ifade edilir. Meselâ, «bir M noktasının konveksliğini» şöyle ispatlarız: Verilen şekle ait A ve B gibi iki nokta alalım. AB doğru parçası üzerinde M şekline ait *olmayan* hiçbir nokta *yoktur*. Gösterilmesi istenen de bu idi. Çift olumsuzluk kullanılarak yapılan muhakeme tarzına iyice alışılmadır.

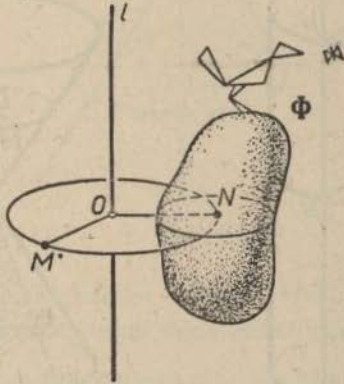
Sınırı olmıyan bir şekil kapalı olarak düşünölmelidir; zira sınırı teşkil eden cümleinin boş olduğunu ve netice olarak şekle ait olmıyan hiçbir sınır uoktasının mevcut olmadığını söyleyebiliriz. Küre yüzeyi ve çember işte bu anlamda kapalı şekillerdir.

Boş cümle konveks bir cümle olarak mütalâa edilmelidir.

Hakikaten, eğer bir doğru parçasının uçları böyle bir şekle ait ise, doğru parçasının şekle ait olmıyan hiçbir noktası olmaz. Daha açık ifade edersek, ne böyle bir doğru parçası vardır, ne de buna ait uc noktaları. Boş cümleinin ithalini zorlıyan sebepler, sıfırın aritmetiğe ithalini zorlıyan sebeplerin aynıdır (36).

Bu bahsi kapatmadan, geniş ve önemli bir sınıf olan dönel şekilleri ele alacağız.

Φ bir şekil, l de bir doğru olsun (Şekil 15).



Şek. 15

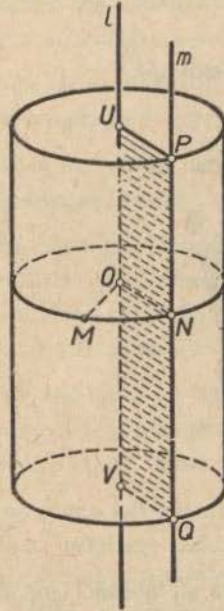
Bir M noktasının dönel Ω yüzeyine ait olması için M nin ve Φ ye ait bir N noktasının l üzerindeki dik izdüşümleri bir O noktasında çakışmalı ve ayrıca

$$OM = ON$$

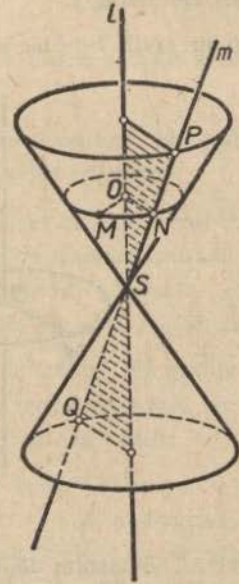
olmalıdır. Diğer bir deyimle, Φ cümlesinin her N noktası, O merkezi l «dönme eksenini» üzerinde bulunan ve yarıçapı ON olan bir daire «çizer». Böyle bütün dairelerin noktaları dönел bir şekil meydana getirirler. Dönел Ω yüzeyini meydana getiren Φ şekline dönел şekil denir (1).

Dönел şekillere dair birkaç misal alalım. Bir m doğrusunu kendisine paralel olan bir l eksenini etrafında döndürsek çembersel dik bir silindir yüzeyini elde ederiz (Şekil 16). Şekilde yüzeyin yalnız m doğrusunun PQ parçasının çizdiği yüzey parçası gösterilmiştir.

Şayet, l ve m doğruları da dahil, bu paralel doğrular ara-



Şek. 16

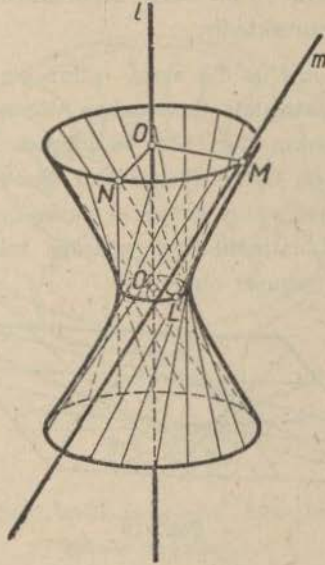


Şek. 17

(1) Şekil 15 de «cisim», «kuş» ve «kelebek» aynı Φ şeklini meydana getiriyorlar.

sındaki *şerit*'in tamamı döndürülecek olursa (Şekil 16), çembersel, dik bir silindir elde etmiş oluruz.

Eğer, l dönme eksenine dik olmıyan ve l yi bir S noktasında kesen bir m doğrusunu döndürürsek (Şekil 17) dönel ve



Şek. 18

konik bir yüzey elde ederiz. Şekilde yüzeyin yalnız, m doğrusunun PQ parçasının çizdiği kısım gösterilmiştir.

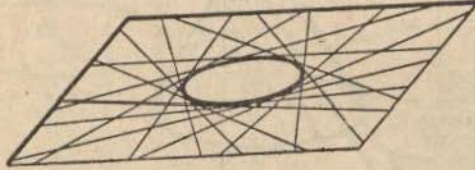
Şayet l ve m doğrularının arasında kalan düzlem parçasını, diğer bir deyimle mSL açısını ve bunun ters açısını döndürürsek, çembersel dik bir koniyi elde ederiz.

l ve m birbirine dik olmayan aykırı doğrular olsun. m yi l etrafında döndürürsek bir *kefeli hiperboloid* denilen yüzeyi elde ederiz (Şekil 18).

OM doğru parçalarının çizdiği disklere ait noktalar cümle-

si, sınırı bir kefeli hiperboloid olan dönel bir cisim teşkil eder. Resimde yüzeyin sadece bir kısmı gösterilmiştir. m nin şekilde ardışık muhtelif durumları belirtilmiştir. l ile m doğruları arasındaki en kısa uzaklık O_1L olmak üzere, O_1L doğru parçasının L ucunun çizdiği daireye bir kefeli hiperboloidin minimal dairesi (boyun dairesi) denilmektedir.

Eğer m doğrusu l ile dik açıya yakın bir açı teşkil ederse, yüzeyin minimal dairesinin iki tarafına düşen kısımları bu dairenin düzlemine yakın olur. Eğer m doğrusu l ye dikse, dönel şekil, açık disk hariç bütün düzlem olur (Şekil 19). l ile m arasındaki açı küçülürse yüzey de yavaş yavaş bir silindire yaklaşmış olur. Minimal dairenin O_1L yarıçapı küçülürse bir kefeli hiperboloid koniye münceer olur.



Şek. 19

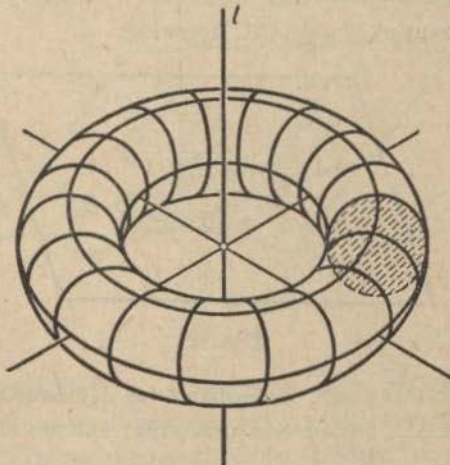
Şimdiye kadar dönel yüzey anadoğrusu olarak hep doğruyu kullandık. Şimdi de doğru etrafında bir daire döndürelim.

Dairemiz, l dönme ekseninden geçen düzlemin içinde kalsın ve eksenini de kesmesin. Bu suretle elde edilen dönel şekle torus denir (Şekil 20). Eğer bir diski döndürecek olursak sınırı torus olan bir cisim elde ederiz.

Uzayın tümü de, kendisinden meydana getirilmiş diyebileceğimiz dönel bir şekildir.

Eğer bir düzlemi, kendisine paralel olan bir l dönme eksenini etrafında döndürecek olursak, husule gelen dönel şekil «içinde bir tüneli olan bir uzay» diğer bir deyimle, eksen l ve yarıçapı

ı l nin düzleme uzaklığı olan açık silindirin atılmasıyla elde edilen tek mil uzay olur. Şekil 19, böyle bir şaklin l eksenine dik bir arakesitini göstermektedir.



Şek. 20

4. Şekillerin arakesiti. Misaller.

Konik kesitler.

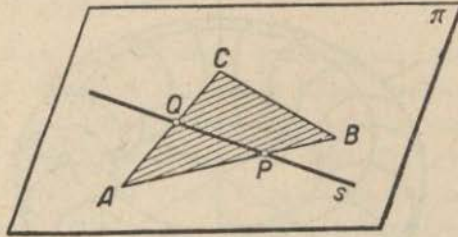
Bir şekil gurupunun arakesit inden, verilen şekillerin ortak noktalarının cümlesi ni anlıyoruz. Demek ki şekillerin arakesiti de bir şekildir.

Birkaç misal alalım. π bir düzlem, ABC de bunun üzerinde bir üçgen olsun. AB kenarı üzerinde bir P noktasiyle AC üzerinde bir Q noktasi alalım. PQ doğrusuna s diyelim (Şekil 21). Eğer verilen şekiller s doğrusu ve 2-boyutlu üçgen ise bunların arakesiti PQ doğru parçasından ibaret olur.

Eğer birinci şeklimiz 1-boyutlu ABC üçgeni ise, arakesit olarak P ve Q noktalarından ibaret olan şekli — 0-boyutlu PQ doğru parçasını — elde ederiz.

s doğrusunun (Şekil 21) π düzlemiyle arakesiti bizzat s doğrusudur.

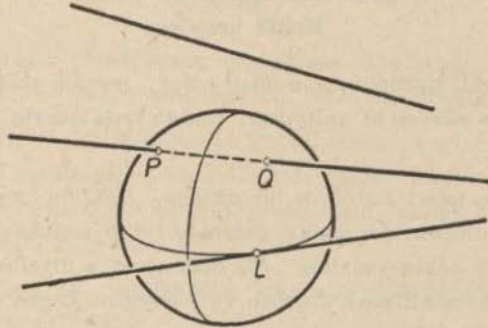
Herhangi boyutlu ABC üçgeninin π düzlemiyle olan arakesiti (aynı boyutlu) bizzat ABC üçgenidir.



Şek. 21

Farklı iki düzlemin arakesiti ya bir doğrudur veya boş cümledir. Boş cümle, düzlemlerin paralelliği halinde elde edilir.

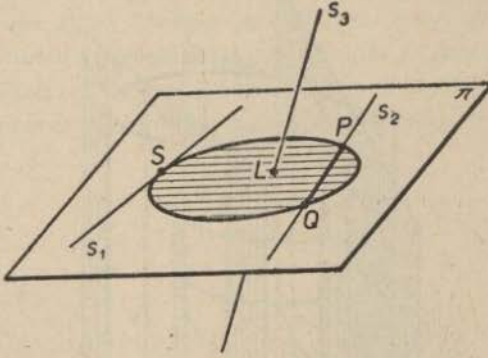
Bir küreyüzeyinin bir doğru ile arakesiti ya bir P ve Q nokta çifti, veya bir L noktası, veyahut da boş cümledir (Şekil 22).



Şek. 22

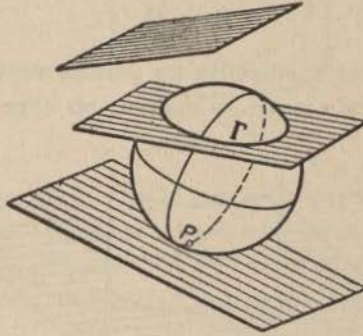
Eğer küreyüzeyi yerine küre alınırsa, aynı doğrularla olan arakesit PQ doğru parçası, L noktası veya boş cümle olur.

π düzlemindeki (Şekil 23) PQ diskinin s_1 , s_2 ve s_3 doğruları ile olan arakesitleri karşıt olarak S noktası, PQ doğru parçası ve L noktasıdır.



Şek. 23

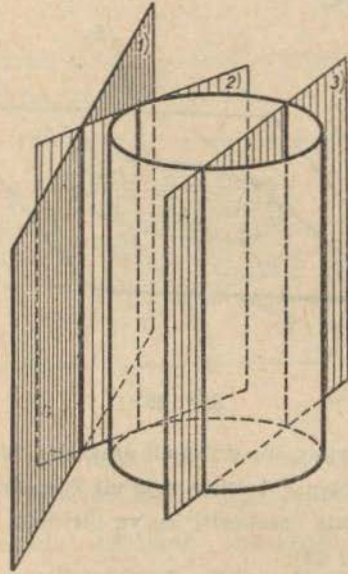
Bir küreyüzeyinin bir düzlemle arakesiti, bildiğimiz gibi, ya bir Γ çemberi, ya bir P noktası veya boş cümledir (Şekil 24). Bir kürenin düzlemle arakesiti ise ya bir disk, bir nokta veya boş cümledir (Şekil 24).



Şek. 24

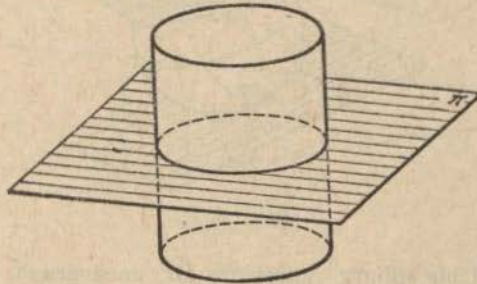
Dairesel bir silindir yüzeyinin bir anadoğruya paralel bir düzlemle arakesiti ya boş cümle veya doğru veya iki doğ-

rudur (Şekil 25); eğer kesen düzlem bu anadoğruya dikse, arakesit bir çemberden ibaret olur (Şekil 26).



Şek. 25

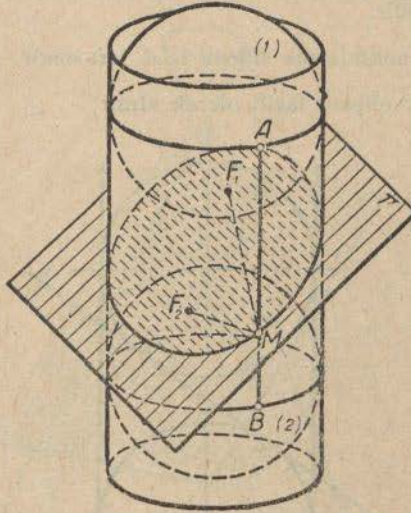
Kesen düzlemin, silindirin bir anadoğrusuna dik olmaması hali özel bir durum arzeder ve arakesit bir elips olur (Şekil 27).



Şek. 26

Elipsin karakteristik bir özelliğini elde edelim :

Bir silindirin içine, ve π düzleminin birer tarafına, yarı çapları silindirin yarıçapına eşit olan ve π düzlemine F_1, F_2 noktalarında değen iki küre yerleştirelim. Şekil 28, π düzlemine dik ve silindirin eksenine paralel olan bir düzlemle olan kesiti göstermektedir. Küreler silindire, A ve B noktalarından geçen birer çember boyunca teğet bulunmaktadır (Şekil 27).



Şek. 27

Elipsin herhangi bir M noktasını alalım. Bu noktadan silindirin bir AB anadoğrusunu geçirelim ve ayrıca M yi F_1 ve F_2 noktalarına birleştirelim. MA ve MF_1 doğruları (1) küresine teğet olduklarından MA ve MF_1 birbirine eşit olurlar :

$$MF_1 = MA$$

Bunun gibi (2) küresine ait teğetlerin MB ve MF_2 doğru parçaları da eşittirler :

$$MF_2 = MB$$

Bu eşitliklerden de

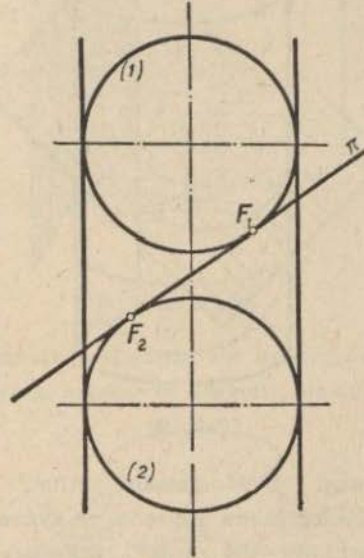
$$MF_1 + MF_2 = MA + MB = AB = \text{Sabit}$$

neticesini elde ederiz.

Elips, sabit F_1 ve F_2 noktalarına olan uzaklıkları toplamı sabit olan, F_1 ve F_2 yi içine alan bir π düzlemine ait M noktalarının cümlesidir.

F_1 ve F_2 noktalarına elipsin *odak* ları denir.

Bu özellik elipsin tarifi olarak alınır.



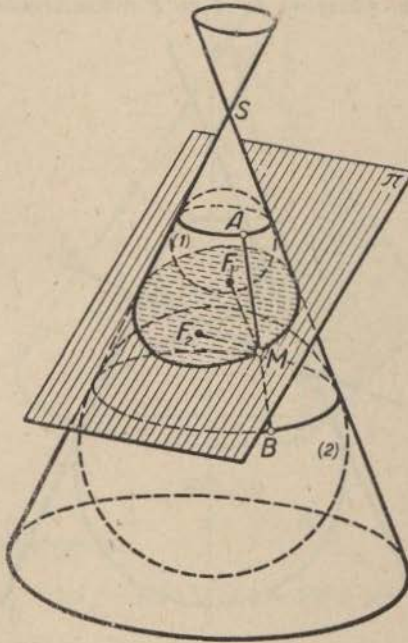
Şek. 28

Eğer π düzlemini silindirin bir anadoğrusuna dik olacak şekilde döndürürsek, (1) ve (2) kürelerinin π düzlemine teğet oldukları F_1 , F_2 noktaları çakışır ve bu takdirde elips bir daire olur (Şekil 26).

F_1, F_2 , sıfır- doğru parçası olduğu takdirde elipsin tarifi hiç değişmeden daireye de uygulanır.

Silindirden sonra en basit dönel yüzey dairesel konidir. Koninin, S tepe noktasından geçemiyen bir düzlemlle olan arakesitini inceliyelim.

Eğer π düzlemi koninin bir kefesinin bütün anadoğrularını keserse arakesit bir elipstir (Şekil 29). İspat ise yukarıda silin-



Şek. 29

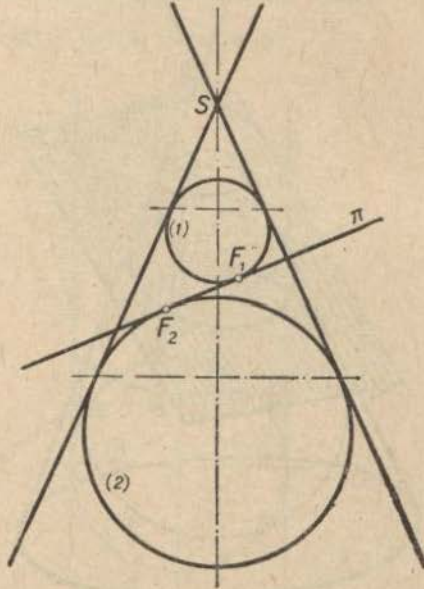
dir için verilenin tekrarıdır. Şekil 29 ve 30 da kullanılan harfler Şekil 27 ve 28 dekilerin aynı olarak alınmıştır.

Eğer kesen düzlem koninin iki kefesini de keserse, diğer bir deyimle, eğer düzlem koninin iki anadoğrusuna paralelse,

arakesit bir hiperboldur. Düzlemin, koninin iki anadoğrusuna paralel olduğu, koninin S tepesinden π düzlemine bir paralel düzlem geçirmekle kolayca görülür. Şekil 31 de π düzleminin bir kısmı taranmıştır.

Elipste olduğu gibi, hiperbolün de karakteristik özelliğini elde edeceğiz :

(1) ve (2) kürelerini, π düzlemine F_1, F_2 noktalarında değecek ve koninin yüzeyine de A ve B noktalarından geçen çem-



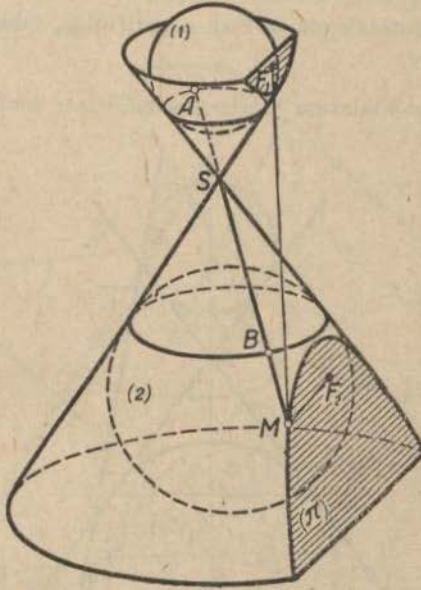
Şek. 30

berler boyunca teğet olacak şekilde (Şekil 31) koninin kefelerine yerleştirelim. Bu kürelerin, S den geçen ve π düzlemine ilk olan düzlem üzerindeki büyük çemberlerini çizmek kolaydır (Şekil 32).

Hiperbol üzerinde (Şekil 31) keyfi bir M noktası alırsak

$$MF_1 = MA \text{ ve } MF_2 = MB \quad ^{1)}$$

buluruz; zira, M den, meselâ (1) küresine çizilen MA ve MF_1 teğetleri birbirine eşit olurlar.



Şek. 31

Bu eşitliklerden ise

$$MF_1 - MF_2 = MA - MB = AB$$

elde edilir.

Halbuki AB nin uzunluğu, hiperbol üzerindeki M noktasına bağlı olmadığından

$$|MF_1 - MF_2| = \text{Sabit}$$

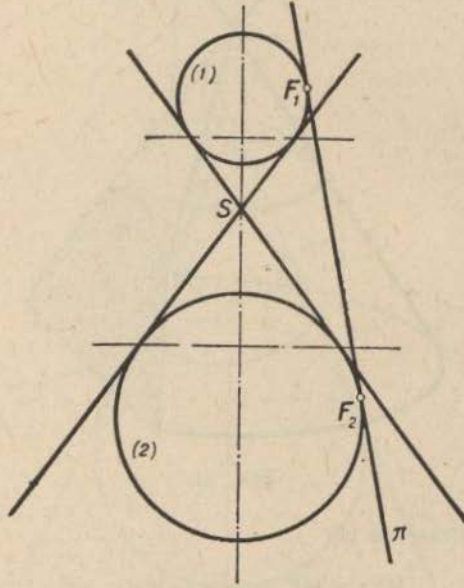
neticesine varırız.

⁽¹⁾ A ve B noktaları, M den geçen anadoğru ile (1) ve (2) kürelerinin teğet daireleriyle olan arakesittir.

Hiperbol, bir π düzlemi üzerinde verilen sabit iki noktaya olan uzaklıklarının farkı mutlak değerce sabit olan π ye ait noktaların cümlesidir.

«Mutlak değerce» diyoruz, zira, M noktası hiperbolün diğer kolunda alınacak olursa fark negatif olur, fakat mutlak değerce aynı kalır.

F_1 ve F_2 noktalarına hiperbolün odakları denir.



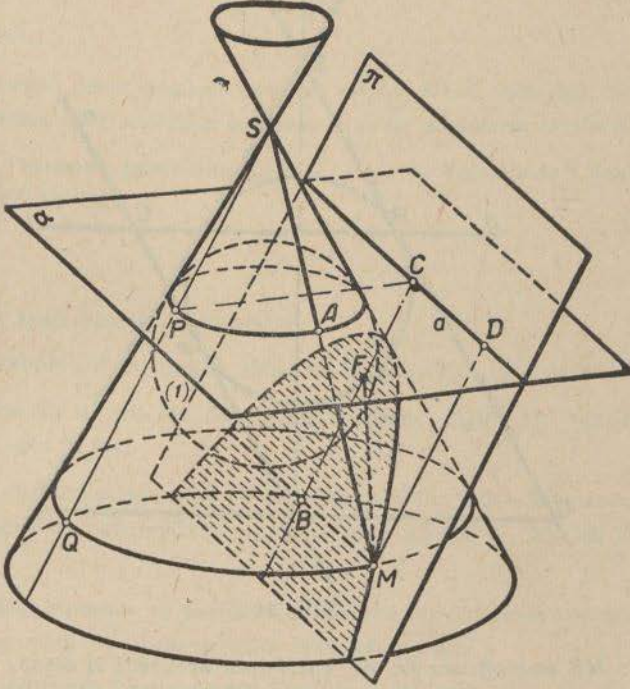
Şek. 32

Koninin, anadoğrularından birine paralel bir düzlemle olan arakesitin mutalâası kalmıştır. Bu halde π düzlemi koninin yalnız bir kefesini keser ve arakesit olarak parabol denilen eğri elde edilir.

Parabolün karakteristik özelliğinin elde edilmesi için elips

ve hiperbol hallerindeki usulü kullanamayacağız; evvelki çizimlere ait ikinci küre artık burada mevcut değildir.

Koninin yalnız bir SQ anadoğrusuna paralel olan bir π düzlemini çizelim (Şekil 33 ve 34). Koniye AP dairesi boyunca



Şek. 33

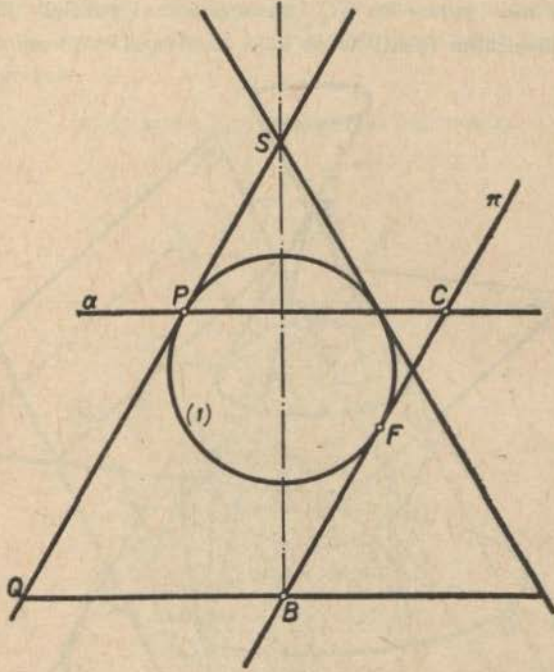
ve π ye F de teğet olan (1) küresini çizelim. $a = CD$, π düzleminin AP dairesinin α düzleminde arakesiti olsun.

Parabola ait keyfi bir M noktasının F ve CD den aynı uzaklıkta olduğunu, veya

$$MF = MD$$

eşitliğini ispatlayacağız.

Bunun için, MS anadoğrusu üzerindeki M noktasından α ya paralel bir MQ düzlemi geçirelim.



Şek. 34

MS anadoğrusu ile AP daresinin arakesiti A olsun.

MF ve MA , aynı M noktasından (1) küresine çizilen teğetler olduğundan

$$MF = MA$$

yazarız. Tabanları α ve MQ olan kesik koninin aradoğruları olmasıyla de

$$MA = QP$$

dir. Ayrıca $QP = BC$. Zira bu doğrular paralel iki düzlem ara-

sında kalan paralel doğrulardır ¹⁾ (Şekil 33 ve 34). Aynı sebeple $BC = MD$ dir. Bu eşitlikleri yan yana yazarsak

$$MF = MA = QP = BC = MD$$

ve böylece

$$MF = MD$$

elde ederiz.

Parabol, bir π düzlemi üzerinde verilen bir F noktasıyla bir a doğrusundan aynı uzaklıkta bulunan, π ye ait noktaların cümlesidir.

F noktasına parabolun odak'ı, a ya da doğrultman'ı denir. $MF = MD$ eşitliği

$$\frac{MF}{MD} = 1$$

şeklinde kesir olarak da yazılabilir.

Parabole ait bu özellik elips ve hiperbol için elde edilebilir.

Elips ve hiperbolün de doğrultmanları vardır ve sayıları her biri için ikidir.

Bu doğrultmanlar (1) ve (2) kürelerinin teğet-dairelerinin düzlemleriyle π düzleminin arakesitleridir (Şekil 27, 28, 29, 30, 31, 32).

Elips, hiperbol ve parabol bir koninin bir düzlemle arakesitleri olduğundan bu eğrilere *konik kesit* adı verilir.

Bu eğrilerin karakteristik ortak özelliği, diğer bir deyimle, tarifleri olarak alınabilecek özelliği aşağıda verilmiştir:

Hepsi bir düzleme ait olup, sabit bir F noktasına olan MF

¹⁾ Açık olarak ifade edilmemesine rağmen, Şekil 33 ve 34 den BC nin F den geçip PQ ye paralel olarak tarif edildiği aşıkardır. Bu nun gibi MD de, M den geçen CD ye dik bir doğru olarak tarif edilir. İspatı tamamlamak için BC nin CD ye dikliği gösterilmelidir. Bu da okuyana bırakılmıştır.

uzaklığının, sabit bir L doğrusuna olan MD uzaklığına oranı sıfırdan farklı bir sabit olan M noktalarının cümlesine konik basit denir.

$$\frac{MF}{MD} = e = \text{sabit}$$

Burada, F odağıyla L doğrultmanı π üzerinde bulunmakta ve L doğrusu F den geçmemektedir.

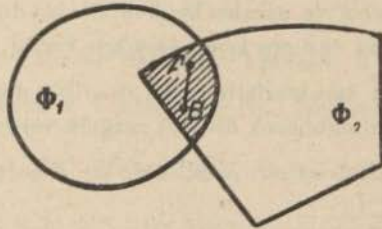
$e < 1$ haline bir elips, $e = 1$ 'e bir parabol ve $e > 1$ haline ise hiperbol tekabül etmektedir.

Yukardaki ispatlarda kullanılan usulle bunları ispatlamak pek güç değildir ve bunu yapmak faideli bir temrin olur.

Konik kesitler, bilimde istisnai olarak önemli bir rol oynarlar. Gördüğümüz gibi bunları anlamak için sadece elemanter geometri kâfi gelmektedir ve elde ettiğimiz bu özelliklerin ilerde önemli tatbikatı olacaktır.

Bu bahsi kapatırken konveks şekillere ait bir teorem ispatliyaacağız.

Konveks şekillerin arakesiti konveks bir şekildir. İspatı iki şekil için yapıyoruz. Hiçbir değişiklik yapmaksızın aynı ispat, ikiden fazla şekil cümlesi için de muteberdir.



Şek. 35

Φ_1 ve Φ_2 konveks her hangi iki şekil olsun (Şekil 35). Bunların taralı olarak gösterilen arakesiti her ikisine de ait olan

noktaların cümlesinden ibarettir. A ve B bu arakesite ait iki nokta olsun. A ve B nin ikisi de ϕ'_1 e ait olduğundan AB doğru parçasının tamamı ϕ'_1 ye de aittir.

AB doğru parçası her iki şekle de ait olduğundan arakesite ait olur ve dolayısıyla arakesitin konveks bir şekil olduğu çıkar.

Konveks şekillerin bir ortak noktası varsa, teoreme göre arakesit - nokta - konveks bir şekil olur.

İspatın tamamen genel olduğu görülmektedir.

Misal: Yarıçapları, azalan

$$R_1 = 1, R_2 = \frac{1}{2}, R_3 = \frac{1}{2^2}, \dots, R_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

dizisini teşkil eden eş merkezli sonsuz küre cümlesini alalım (küre konveks bir şekildir).

Bütün bu kürelerin arakesiti, ortak merkezi teşkil eden noktadır ve nokta konveks bir şekildir.

5. Şekillerin toplamı

Verilen bir grup şekilden en az birine ait olan noktaların cümlesine bu şekillerin *toplamı* denir.

Şekillerin toplamı bir şekildir. Şekillerin toplamına ait misaller verelim :

İki noktanın toplamı, 0-boyutlu doğru parçasıdır.

AB aralığı ile bunun 0-boyutlu AB doğru parçası olan sınırının toplamı kapalı bir doğru parçasıdır veya sadece doğru parçasıdır.

Doğru parçası ile uçlarının toplamı bu doğru parçasıdır.

Bu misal bize, boş-olmayan ortak kısımları bulunan şekil-

lerde toplama işleminin yapılabileceğini göstermektedir (bu ortak kısım tabii toplama aittir).

Açık disk ile sınırının (çember) toplamı bir disktr.

Açık küre ile sınırının (küre yüzeyi) toplamı bir küredir.

Küre ile sınırının (küre yüzeyi) toplamı aynı küredir.

1-boyutlu ABC üçgeniyle 2-boyutlu ABC üçgeninin toplamı 2-boyutlu bu ABC üçgenidir.

Bir kürenin paralellerinin toplamı küreyi verir. Aynı küreyi meridiyenlerinden de elde edebiliriz (Şekil 5).

Bir daireye teğet olan her doğru bir nokta cümlesidir.

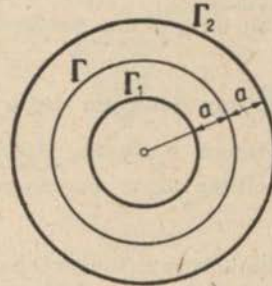
Böyle cümlelerin (daireye teğet olan doğruların) toplamı, açık disk hariç, dairenin bulunduğu düzlemdir (Şekil 19).

Bir silindiri meydana getiren bütün doğruların toplamı verilen silindirdir. Bunun gibi, Şekil 18 deki bütün m doğrularının toplamı bir kefleli bir hiperboloiddir.

Şekil 20 deki dairelerin toplamı torus meydana getirir.

Son verdiklerimiz, şekillerin sonsuz cümlelerinin toplamlarına misal teşkil etmektedir.

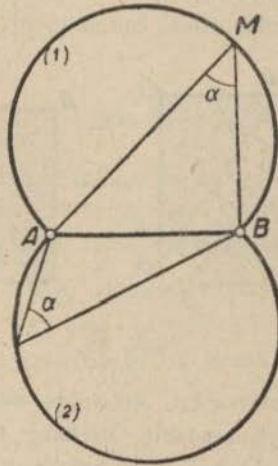
Eşmerkezli Γ_1 ve Γ_2 dairelerinin (Şekil 36) toplamı bir şekildir. Bu toplama bir tek şekil gibi bakılmalıdır. Buna ait şu



Şek. 36

karakteristik özellik verilebilir: Bu toplam, verilen dairelerin düzlemine ait olan ve bu düzlem üzerindeki bir Γ dairesinden (Şekil 36) aynı uzaklıkta bulunan noktaların cümlesidir.

Çizim problemlerinin geometrik yer kullanılarak yapılan çizimlerde iki şeklin toplamından elde edilen böyle şekillere pek sık rastlarız. Meselâ, bir düzlemde bir doğru parçasını aynı α açısı altında gören noktaların cümlesi, A ve B uc noktaları atılan (1) ve (2) daire yaylarından ibarettir (Şekil 37).



Şek. 37

Bir AB doğru parçasını, verilen α açısı altında gören bütün noktaların cümlesi, bu bulduğumuz açık yay çiftinin AB eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel şekildir.

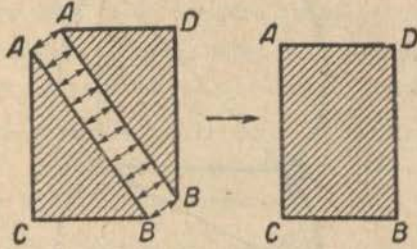
Bu dönel yüzey çizim itibariyle torus'a benzer; burada, dönen daire dönme eksenini kesmekte ve fazla olarak dairenin ikinci AB yayının meydana getirdiği yüzey nazarı itibare alınmamaktadır.

6. Yapıştırma veya Özdeşleştirme

Şimdi, *yapıştırma* veya *özdeşleştirme* diyeceğimiz matematiksel diğer bir işlem üzerinde duracağız.

Birkaç misalle başlayalım :

İki-boyutlu eşit iki dik üçgen alalım (Şekil 38). Bu üçgenlerden, şekilde gösterildiği gibi AB kenarlarını yapıştırarak bir $ABCD$ dikdörtgeni elde etmek mümkündür.

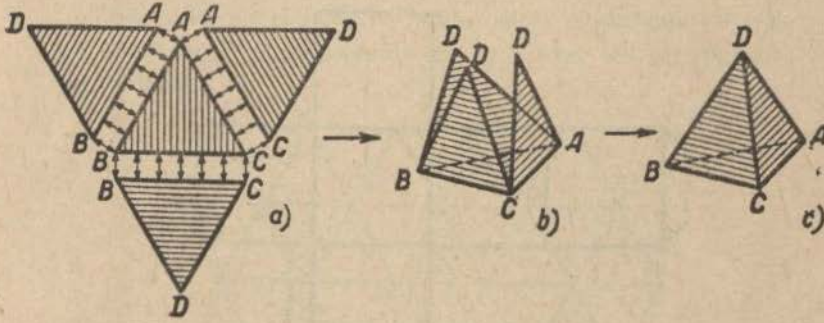


Şek. 38

Matematiksel olarak bu, AB doğru parçalarını iki değil bir olarak düşünmek anlamındadır. Herhangi iki noktayı (meselâ A noktalarını ve B noktalarını ve bunların arasındaki karşıt iç noktaları) yapıştırırken bu iki noktayı birmiş gibi düşünürüz. AB kenarlarının (noktaların) özdeşleştirilmesi yapılırca iki üçgenin toplamı bize $ABCD$ dörtgenini vermiş olur.

Şimdi dört tane eşkenar üçgen veya basit bir deyimle 2-boyutlu dört eşit üçgen alalım (Şekil 39). Toplam yaparak bu dört üçgeni bir şekil gibi düşünelim. Şekil 39 da, tepe noktaları karşıt olarak harflendirilmiş olan her kenar çiftinin karşıt bütün noktalarının yapıştırılmış veya özdeşleştirilmiş olduğunu göstermekteyiz. Bunun neticesi olarak toplam ve yapıştırma ile 2-boyutlu bir dörtyüzlü elde ediyoruz.

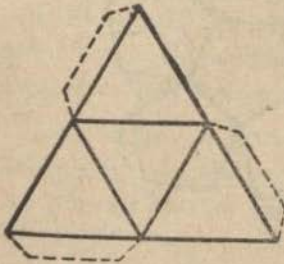
Burada, üç D noktasının özdeşleştirildiğine, diğer bir deyimle *birmiş* gibi alındığına dikkat edilmelidir.



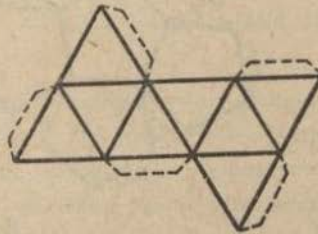
Şek. 39

Şekil 39a da ayrı olarak çizilmiş olan taralı üçgenler bir *şe'*il gibi düşünülmüş ve iki taraflı oklarla da AB , BC ve CA kenarlarının yapıştırılacağı ifade edilmiştir (Şek. 39c).

Düzgün çokyüzlülerin düzleme açılmış şekillerine bakarak (Şekil 40, 41, 42, 43, 44) esas çokyüzlünün elde edilmesi için hangi kenarlarının yapıştırılacağını anlamak kolaydır.



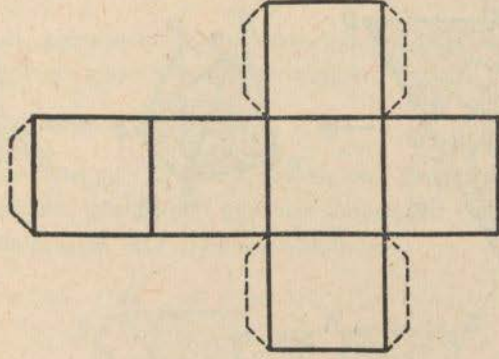
Şek. 40



Şek. 41

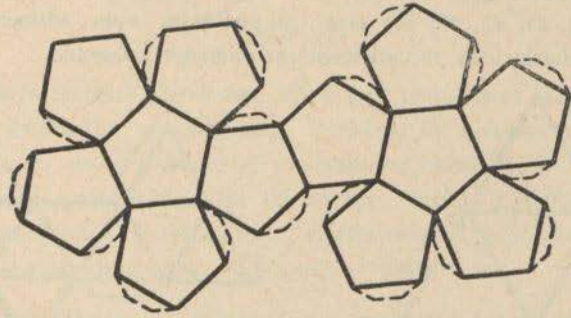
Bir kartona bir ölçü altında hassas olarak açınımları çizip yapıştırma ile bütün düzgün çokyüzlüleri elde etmek faydalı olur.

Bu açınımlar bir bakıma çok yüzlü yüzeylerin tasvirleridir. Çokyüzlülerin uzaydaki durumundan sarfı nazar ederek sadece



Şek. 42

yüzeyin bünyesini tetkik edecek olursak, özdeşleştirme ile birlikte bu açınımlar, yüzeyin tam etüdü için her şeyi verir.

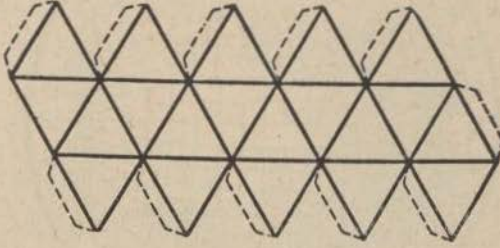


Şek. 43

Bir şeklin noktalarının özdeşleştirilmesi veya yapıştırılmasına coğrafya haritalarında rastlanır. Şekil 45 de $20^\circ W$ meridyeninin iki resminin özdeş noktalarının özdeşleştirilmesiyle, $160^\circ E$ meridyeninin aynı meselesi bahis konusudur. Yer yüzü-

nün aynı noktalarını temsil eden noktalar özdeş olarak kabul edilir.

Her özdeş nokta çifti bir nokta olarak düşünülür. İki «yarım küre» uygun yapıştırma ile birleştirilerek tek bir şekil haline getirilir.



Şek. 44

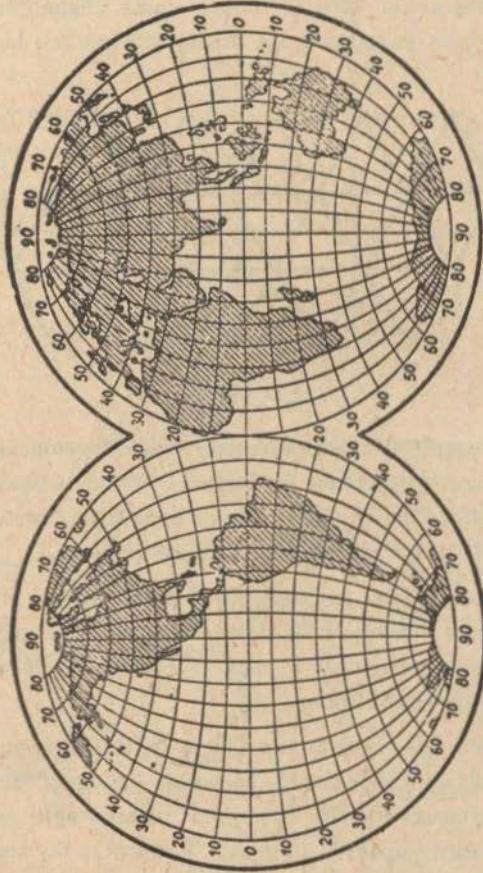
Büyük coğrafya harita paftaları, kenar kısımlarında da tam bölgeleri ihtiva ettiğinden, anladığımız anlamda özdeşleştirme yapılması, diğer bir deyimle, farklı paftalarda rastlanan aynı noktaların bir nokta olarak düşünülmesi gerekir.

Konuşma dilinde hartanın yer yüzünü temsil ettiğini söyleriz. Bir harita üzerinde bir yarım küreden (bir paftadan) diğerine özdeş noktalardan geçmek suretiyle devam ederek bir devri alem yolu çizebiliriz.

Bu usulle, çok yüzlünün sadece tasvirini veya modelini kullanarak, yüzeyin üzerindeki herhangi bir eğriyi etüd edebiliriz. Bununla beraber harita üzerinde mesela eğri uzunluğunu bulmak gibi ölçü yapacak olursak, haritanın her noktasındaki ve bu noktadan ayrılan her doğrultudaki ölçeği bilmemiz icap eder (14 ü gör).

Temrin olarak okuyucunun, bir çokyüzlünün tasvirini ele alarak özdeş olanlara aynı numarayı vererek bütün tepe noktalarını numaralaması ve çok yüzlünün herhangi bir noktasından

başlıyarak bütün yüzlerden geçen bir yol çizmesi ve bu yolu tasvirde göstermesi faideli olur.



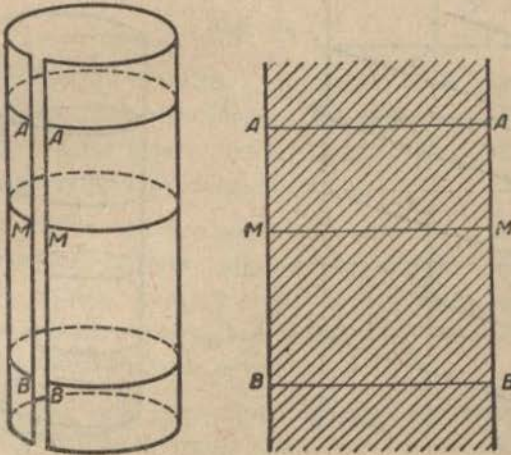
Şek. 45

Bunun gibi, iki dairenin toplamı ve yapıştırılmasıyla bir küre yüzeyini temsil, ve kapalı bir şeridin paralel iki kenarını yapıştırarak ve kenarların ortak dikme üzerine rastlayan nokta-

larını özdeş alarak bir silindir yüzeyini teşkil edebiliriz (Şekil 46).

Dairesel silindir yüzeyinde, bütün anadoğruları aynı α açısı ile kesen bir eğriyi incelemek istersek, bunu, silindiri tasvir eden iki paralel arasındaki şeritte yapmak kolay olur.

$\alpha = \pi/2$ halinde eğri, AA , MM , BB vesaire gibi çemberler olur. Bu çemberler, şeritte, şeridin özdeşleştirilmiş kenarına dik olan AA , MM , BB dik doğrularıyla gösterilmiştir (Şekil 46).



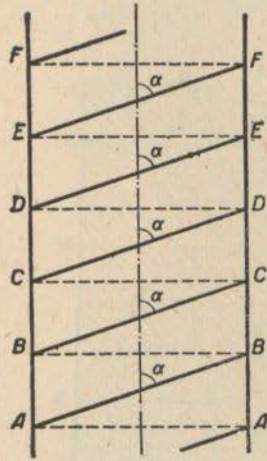
Şek. 46

α 'nın dar veya geniş açı olması halinde ise dairese silindir üzerinde, pratik tatbikatı önemli olan *helezon* eğrisi elde edilir.

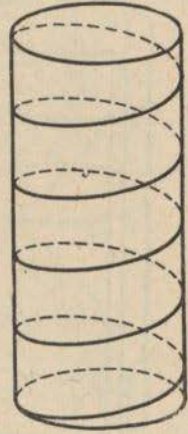
Tasvirde bütün çizgisel anadoğrular, birbirine özdeş olan doğru çiftine paralel doğrularla gösterilmiş olup, açık olarak, helezonun tasvirdeki resmi, anadoğruyu α açısı ile kesen AB , BC , CD , DE vesaire paralel doğru parçalarından ibaret olur (Şekil 47).

Şekil 46 da gösterildiği gibi şeridin kenarlarını birbirine yapıştırırsak silindirde kolayca helezon eğrisini husule getirmiş oluruz.

Özdeşleştirme veya yapıştırma işleminin tam tarifi şudur: Bir şekilde, herhangi bir kaide ile hangi noktaların birbiriyle özdeş olduğu tesbit edildiği vakit bütün özdeş noktalara bir nokta gibi bakılır.



Şek. 16



Şek. 17

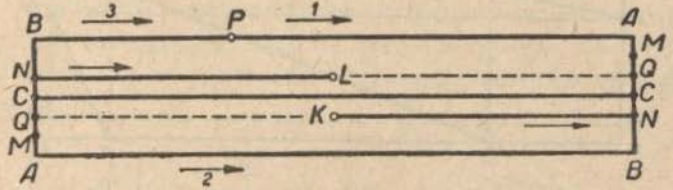
Yapıştırma yoluyla özdeşleştirme, bazen parçaların yapıştırılmadan önce lastikten yapılmış gibi bükülmesini gerektirmesine rağmen, elde edilecek şeklin netliği bakımından kazanç ise de bunları zihnen yapıştırılmış gibi kabul etmek de kâfidir.

Bir olarak aldığımız özdeş noktalar sonsuz cümle teşkil ettikleri zaman yapıştırmayı fiili olarak yapamayız.

Bu bahsi bitirirken, noktaları özdeşleştirilmiş olan bir dik-dörtgenle ilgili iki hal ele alalım.

lip uzatılması icap etmiştir. Kesik çizgili BB çizgisi Şekil 50 de gösterilmemiştir.

İkinci dörtgende (Şekil 51), karşıt bir çift kenarın merkeze

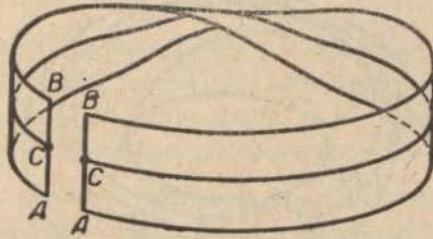


Şek. 51

göre simetrik durumda olan noktaları özdeş olarak kabul edilmiş ve aynı harflerle gösterilmiştir. Özdeş olan bu noktaların özdeşleştirilmesi yapılacak ve bu suretle şekil meydana çıkacaktır.

Bu şeklin önemli bazı özelliklerini inceliyelim.

Şeklin yalnız bir tane kapalı bir sınırı olduğunu görüyoruz. Diğer bir deyimle, sınırdaki bir P noktasından başlayıp 1 numaralı ok yönünde gidilirse A noktasına, ve sınırdaki kesiksiz yolu 2 numaralı okla takip ederek B noktasına varırız. 3 numaralı ok ise sınır boyunca ilk P noktasına geri dönüşü göstermektedir.



Şek. 52

Bundan başka kapalı CC eğrisinin bir kanal olduğunu dü-

şünelim. Kendimizi kanalın bir tarafında K noktasında farzedip KN eğrisi üzerinde kanal boyunca ilerliyelim. NL eğrisinde kanal boyunca kesiksiz yolumuza devam edersek kanalı *geçmeden* kanalın *diğer* kenarındaki L noktasına varmış oluruz.

Yer yüzündeki kapalı bir kanal için böyle bir şey imkânsızdır.

Açıkça gördüğümüz veçhile, şeklimizde CC kanalının *öbür* tarafı yoktur.

Mezkûr şekli, fiili yapıştırma ile uzaya gömebiliriz (¹). Bunun için, şeklimizin AB doğru parçasını (Şekil 51) 180 derece döndürmek ve şekil 52 de görüldüğü gibi soldaki doğru parçasıyla yapıştırmak kâfidir.

Yapıştırılarak elde edilen önemli yüzeylerden biri olan bu şekle *Moebius şeridi* denir.

Yukarıda anlatılan tarzda yapıştırma ile elde edilecek bir model üzerinde şeklin özelliklerini sağlamak çok öğretici fiil olur.

Moebius şeridi *bir taraflı* bir yüzeydir ve bu, bir modelini bir fırça ile boyıyarak kolayca görülebilir. Moebius şeridi bir cismin sınırının bir kısmı olamaz.

Moebius şeridinin bir C noktasında «ayakta» durarak şeritte CC eğrisi boyunca yürüyecek olursak, C noktasına tekrar geldiğimizde kendimizi «başşağı» buluruz.

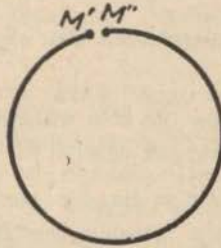
Moebius şeridini CC , $KNLQK$, vs. boyunca «kesmek» ve bu kesimleri evvela tasvirde (Şekil 51), sonra kâğıttan model üzerinde sağlamak faydalı bir alıştırma olur. Birinci kesimden sonrakı ikinci vs. kesimlerinin neticelerini görmek de aynı şekilde faydalıdır.

¹) Uzaya gömmek, «to imbed in space» karşılığında alınmış olup iki boyutlu uzayda özdeşleştirme ile elde edilmiş bir şekil üç veya daha fazla boyutlu uzaya gösterme olarak ifade edilmiştir.

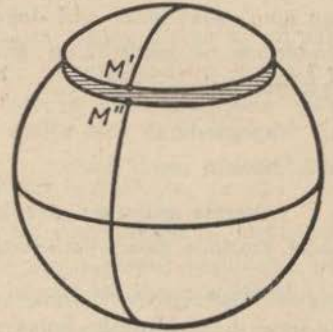
Üzerindeki bir eğri boyunca *kesilmiş yüzey*'den, bu eğrinin her noktasını farklı iki veya daha çok nokta itibar ederek elde edilmiş yüzeyi anlıyoruz.

Bir şekli *kesme* işlemi, bir bakıma, yapıştırma işleminin tersidir.

Meselâ, bir çember şöyle kesilebilir: Çemberin bir M noktası M' ve M'' olarak iki nokta imiş gibi düşünülür (Şekil 53); bir küre yüzeyi de, bir paralelinin her noktası iki nokta olarak düşünülerek bu paralel boyunca kesilebilir (Şekil 54).



Şek. 53



Şek. 54

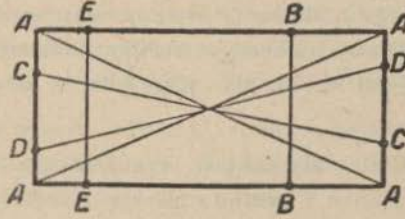
Bir küre ekvator boyunca kesilerek iki yarım küre yapılabilir ve herbiri birer daire ilâvesiyle kapatılabilir.

Okuyucuya Şekil 55 ve Şekil 56 da gösterilen kapalı kesimleri incelemesi tavsiye olunur. Şekil 56 daki şekli fiili yapıştırma ile elde etmek imkânsız olup kendi kendini kesmeden uzaya gömülmesi mümkün değildir.

Bir dikdörtgenin dört kenarının bütün noktaları özdeş olarak alınıp bir nokta gibi düşünülürse basit bir şekil elde edilir.

Buna mukabil dörtgenin karşıt bir kenar çiftinin bütün noktaları bir nokta gibi alınırsa basit bir şekil elde edilmez.

Gösterilen usullerle, meselâ bir kübün karşıt yüzleri yapıştırılıp elde edilen şekilde muhtelif tip kesim ve eğriler incelenebilir [6] [7] [16].

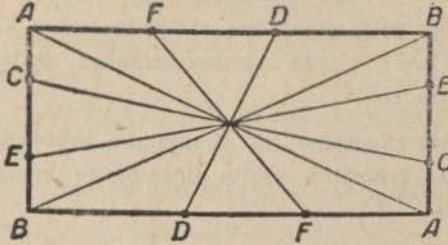


Şek. 55

Esas işaretler. Bir A noktasının bir ϕ şekline ait olduğunu göstermek üzere $A \in \phi$ işaretini kullanırız ve sözle A noktası ϕ ye aittir veya A noktası ϕ nin bir noktasıdır deriz.

Bazen de $\phi \ni A$ yazar ve ϕ şekli A yı içine alıyor deriz.

Her iki sembol de A nın ϕ cümlesine ait olduğunu ifade eder.



Şek. 56

Adet olarak, herhangi bir M cümlesinin x elemanları küçük harflerle, cümlenin kendisi ise büyük harfle gösterilir. $x \in M$ işareti x 'in M cümlesinin bir elemanı olduğunu ifade eder. M cümlesi herhangi cinsten bir cümle olabilip şekil olması icap etmez.

Bir şekle, ekseriya, ikinci bir şeklin bir kısmı olarak bakmak icap eder.

Mesela, iki boyutlu üçgenin sınırı (bir boyutlu üçgen) üçgenin bir kısmıdır. Bir konik kesitin noktalarının cümlesi bu konik kesitin içinde bulunduğu koninin noktalarının cümlesinin bir kısmıdır (Şekil 29, 30, 31). Küre yüzeyi, sınırladığı kürenin bir kısmıdır.

Bir Φ şeklinin her noktası aynı zamanda bir Ψ şeklinin noktası ise Φ şekline Ψ şeklinin bir kısmı denir.

Φ şekline Ψ şeklinin içindedir de denir.

Φ şekli Ψ şekliyle tamamen çakışabilir ve bu halde de Φ şekline Ψ şeklinin bir kısmı olarak bakılır, çünkü Φ şeklinin her noktası Ψ şeklinin de bir noktasıdır.

Bir şeklin kısım kavramını tarif ederken buna denk başka bir ifade kullanabiliriz: Φ şeklinin Ψ şekline ait olmıyan hiçbir noktası yoksa Φ şekline Ψ şeklinin kısmıdır denir.

Boş cümleye her şeklin bir kısmı olarak bakılabileceği açıktır. Bu böyledir, çünkü boş cümlemin esasen hiç elemanı olmadığı için, boş cümlemin verilen herhangi şekle ait olmıyan hiç bir elemanı yoktur.

Boş nokta cümlesine ve Φ şeklinin kendisine Φ şeklinin *has* ⁽¹⁾ *olmıyan* kısımları, şeklin diğer bütün kısımlarına da *has* kısımlar deriz.

A şekli B şeklinin bir kısmı ise $A \subseteq B$ yazar ve A şekline B nin bir kısmı veya A şekli B ye dahildir deriz.

A şekli B şeklinin yalnız *has* bir kısmı ise bunu $A \subset B$ diye gösteririz.

¹⁾ «Has alt cümle» tabiri, «proper subset» karşılığı olarak alınmıştır.

$\subseteq$, $\subset$ işaretlerine «dahil olma» veya «alt cümle olma» işaretleri denir.

Genel olarak, herhangi neviden M ve N cümleleri verilirse ve M cümlesinin her elemanı N cümlesine aitse $M \subseteq N$ işaretini, M boş değilse ve N ile çakışmıyorsa $M \subset N$ işaretini kullanırız. Eğer $M \subseteq N$ ise M cümlesi N nin bir alt cümlesi dir.

Verilen şekillerin arakesiti; verilen şekillerin hepsine ait olan noktaların cümlesidir. A , B şekillerinin arakesiti $\cap$ arakesit işareti ile gösterilir ve $A \cap B$ yazılır.

$\cap$ sembolü, verilen şekillerin ortak kısmını belirtir.

Meselâ eğer A , koni'ye ait noktaların cümlesi, B de π düzleminin noktalarının cümlesi ise (Şekil 33), $A \cap B$ sembolü konik kesitin noktalarının cümlesini gösterir.

Cümlelerin arakesitine ekseriya cümlelerin çarpımı denir.

Şekillerin arakesiti 4 de etraflı olarak incelenmişti.

Verilen şekillerin toplamı, verilen şekillerin en az birine ait bütün M noktalarının teşkil ettiği şekildir.

A ve B şekillerinin toplamı $\cup$ işareti ile gösterilir ve $A \cup B$ olarak gösterilir.

Meselâ A açık küreyi, B de bunun sınırlıyan küresi ise $A \cup B$ küreyi gösterir.

Cümlelerin toplamı 3 de etraflı olarak incelenmişti.

Şimdi şekillerin çıkarma işlemini ele alalım. A ve B cümlelerinin farkından B cümlesine ait olmayıp A cümlesine ait elemanları anlıyoruz. A ve B cümlelerinin farkı $A - B$ ile gösterilir.

Meselâ A bir daire ve B bunun çemberi ise $A - B$ açık daire olur; A bir küre ve bunun B bir boyutlu kapalı PQ çapı ise $A - B$, P ve Q noktalarında delinmiş küre olur. B nin, A nın tamamen içinde olması şart değildir. Meselâ şekil 35 deki $\phi_1 - \phi_2$ farkı, taranmış kısmı atılan ϕ_1 şeklidir.

BÖLÜM II

GEOMETRİK ÇİZİMLER

Bu bölümde en önemli geometrik yerleri, problem çözümünde geometrik yer usulünü, cetvel ve pergeli ve diğer aletler kullanarak geometrik çizim teorisini ve bu çizimlerin matematiksel esaslarını inceliyeceğiz. Çözümleri, bazı aletler kullanılarak yapılamayan problemlerle bazı çözümlerin yapılamayacağını ispatı verilecek ve ayrıca cebirsel usullerle çizim problemleri ele alınacaktır.

7. Geometrik yer

Noktaların geometrik yeri, noktalar cümlesi demek olup, her nokta cümlesi bir şekil olduğundan, noktaların geometrik yeri kavramı ile şekil kavramı aynı anlamdadır.

Mesela bir noktaya olan uzaklığı, verilen bir R uzunluğuna eşit olan noktaların geometrik yerinden (küre), veya verilen bir noktaya uzaklığı R den küçük olmayan noktaların geometrik yerinden (bütün uzay - açık küre) bahsedebiliriz.

Verilen bir dairenin bütün noktalarından aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, verilen dairenin merkezinden geçip daire düzlemine dik olan doğrudur.

Verilen bir kürenin bütün noktalarından aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri kürenin merkezidir.

Verilen bir düzlemin bütün noktalarından aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri boş cümledir.

Verilen bir AB doğru parçasını dik açı altında gören uza-

ya ait noktaların geometrik yeri *A ve B noktaları atılan AB* çaplı bir küredir.

Bir cümleyi belirtmek için *elemanlarının karakteristik bir özeliği* ni vermek lâzımdır. Bu özeliği haiz olan herşey mezkûr cümlelerin elemanıdır, bu özeliği haiz olmıyan ise bu cümlelerin elemanı değildir.

Bir geometrik yeri belirtmek için de noktalarının haiz olacağı özeliği belirtmek gerekir. Geometrik yere ait olan noktalar ancak verilen özeliği haiz olan noktalardır.

Elemanter geometri çember, doğru, küre, düzlem, vesaire gibi geometrik yerlerle, bu şekillerin kısımları ve bunların terkiinden teşkil edilen şekillerle meşgul olur.

Analitik geometride geometrik yer *koordinatları bir veya daha fazla denklem veya eşitsizliği sağlayan* noktaların cümlesi olarak tarif olunur; bu ise, noktaları cümle halinde toplayan karakteristik özeliği teşkil eder.

Bu nokta cümlesinin, bildiğimiz eğri ve yüzeylere benzeyip benzememesi veya başka türlü nokta koleksiyonu olup olmaması önemli değildir.

Geometrik yeri temin için sadece noktaları cümle teşkil edecek bir özeliğin verilmesi kâfidir.

1. Sabit *A ve B* noktalarına olan uzaklıkları arasındaki

$$\frac{a}{b} (\neq 1)$$

oranı sabit olan noktaların geometrik yerini bulmak.

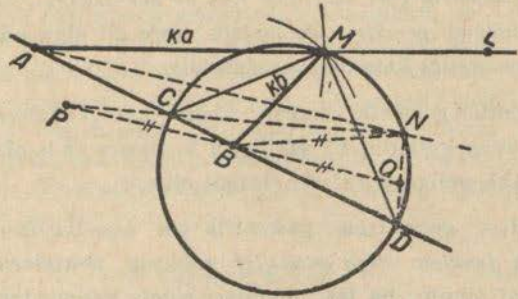
a/b oranı 1 olduğu takdirde geometrik yer *AB* doğru parçasının orta dikmesinden ibarettir.

Yarı çapları *a* ve *b* ye eşit veya bunlarla orantılı olan *A* ve *B* merkezli iki daire çizelim. *M* bu dairelerin arakesit nokta-

larından biri olsun (Şekil 57). AMB ve BML bütünlük açılarının MC ve MD açı ortaylarını çizerek

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}$$

eşitliklerinden bu açı ortayların AB doğrusunu kestiği C ve D noktalarının geometrik yere ait olduğunu görürüz.



Şek. 57

CMP açısı dik olduğundan M noktası CD çaplı çember üzerindedir. O halde geometrik yerin her noktası bu daire üzerindedir.

Şimdi, bu dairenin her N noktasının

$$\frac{AN}{NB} = \frac{a}{b}$$

özellikli haiz olduğunu, diğer bir deyimle, daire üzerindeki her hangi bir noktanın geometrik yer şartını sağladığını göstereceğiz. B den geçip AN ye paralel olan doğruyu çizip bunun NC ve ND doğrularını kestiği noktalara P ve Q diyelim.

ANC ve BCP üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{AN}{BP} = \frac{AC}{CB} = \left(\frac{a}{b}\right),$$

ve AND ile BQD benzer üçgenlerinden

$$\frac{AN}{BQ} = \frac{AD}{DB} = \left(\frac{a}{b}\right)$$

ve bunlardan da

$$BP = BQ$$

elde ederiz.

PNQ üçgeni, N açısı dik olan bir dik üçgen olduğundan B noktası PQ hipotenüsünün ortası olur ve bunun neticesi

$$BP = BQ = BN$$

olup PNB nin ikizkenar olduğu görülür.

Bundan dolayı $\angle BPN = \angle BNP$ ve ayrıca PN nin AN ve PB paralel doğrularını kesmesi ile meydana gelen iç ters açılardan $\angle BPN = \angle PNA$ elde edilir.

BNP ve PNA açılarının eşitliğinden NP nin ANP açısının açısı ortayı olduğu veya

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CB} = \frac{a}{b}$$

bulunur.

Bu daireye (Şekil 57) Apollonius dairesi denir.

2. Bir S noktasından geçen doğruların bir daire içine düşen kısımlarının orta noktalarının geometrik yerini bulmak.

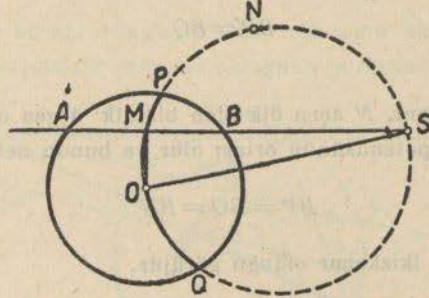
Kesenlerden birinin daire ile arakesiti A ve B , ve AB kirisinin orta noktası M olsun (Şekil 58). M noktası dairenin O merkezi ile birleştirilirse OMS dik açısı elde edilir.

O halde aranılan geometrik yerin her M noktası OS çaplı daire üzerinde bulunur.

Bu daireye ait N noktasının, SN doğrusu ancak daireyi kestiği takdirde, geometrik yere ait olduğu ispatlanabilir.

S noktası dairenin dışında ise S merkezli demetin bütün doğruları daireyi kesmez.

OS çaplı dairenin, verilen dairenin üzerinde ve içinde kalan bütün N noktaları aranılan geometrik yere ait olup bu geomet-



Şek. 58

rik yer, S noktası, verilen dairenin dışında olması halinde çizimi yapılan dairenin POQ yayından ibarettir.

Bu misal bize, aranılan geometrik yerin her hangi noktasının belirli bir eğriye ait olduğu ispatlandıktan sonra, bu eğrinin her noktasının geometrik yere ait olup olmadığını, eğer değilse eğrinin hangi noktalarının katiyetle geometrik yere ait olduğunu açıklamak gerektiğini tebarüz ettirmektedir.

3. Verilen bir AB doğru parçasını dik açı altında gören M noktalarının geometrik yeri, A ve B noktaları atılan AB çaplı bir dairedir.

Bu geometrik yeri yukarıda 1 ve 2 misallerinde kullanmıştık. Her iki halde de çapın uç noktalarının geometrik yere ait olup olmadığını incelemek icap eder.

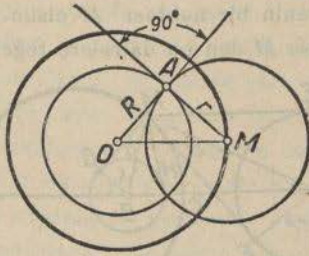
4. Sabit bir AB doğru parçasını aynı açı altında gören noktaların geometrik yeri A ve B noktaları atılan iki daire yayından ibarettir (Şekil 37).

Uclardan birinin meselâ A nın AB yi hangi açı altında gör-
düğü meselesi anlamsızdır.

Sık rasladığımız bir problemi inceliyelim :

5. Verilen bir daireye dik olan r yarı çaplı dairelerin merkez-
lerinin geometrik yerini bulmak.

Verilen dairenin merkezi O , yarı çapı R olsun (Şekil 59).
Verilen dairenin keyfi A noktasındaki teğetini çizelim ve bunun



Şek. 59

üzerinde $AM = r$ doğru parçasını alalım. M noktası verilen dai-
reyi dik olarak kesen r yarı çaplı dairenin merkezidir. Diğer
tarafтан

$$OM = \sqrt{R^2 + r^2} = \text{sabit}$$

olduğundan aranılan geometrik yer O merkezli ve $\sqrt{R^2 + r^2}$ yarı
çaplı daire olur.

6. Verilen iki daireyi aynı açı altında gören noktaların geo-
metrik yerini bulmak.

A ve B bu dairelerin merkezleri, R ve r de yarı çapları
olsun (Şekil 60).

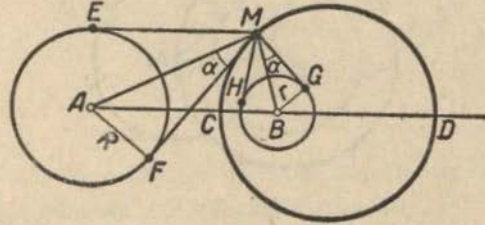
M , aranılan geometrik yere ait bir nokta, bu noktadan bi-
rinci daireye çizilen teğetler ME ve MF , ikinci daireye çizilen
teğetler MC ve MH ise $\angle EMF = \angle CMH$ caridir. Elde olunan

dik üçgenler, görüş açısının yarısı olan α ya eşit dar açıları ihtiva etmeleri dolayısıyla, benzerdirler. Bu da

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AF}{BG} = \frac{R}{r} = \text{sabit}$$

verir ki aranılan geometrik yerin bütün M noktalarının $R \neq r$ halinde Appolونیus dairelerine, $R = r$ halinde de bir doğruya ait olduğu anlaşılır.

Bulunan dairenin bir noktası M olsun. M noktası verilen dairelerin dışında ise M den bu dairelere teğetler çizilebilir. MF



Şek. 60

ve MG teğetlerini çizersek Appolونیus dairelerinin özeliğinden MAF ve MGB dik üçgenlerinden

$$\frac{AM}{MB} = \frac{R}{r}$$

olduğu görülür.

Hipotenüsleri kenarlarla orantılı olan iki dik üçgen benzer olduklarından

$$\angle AMF = \angle BMG (= \alpha)$$

bulunur. Verilen dairelerin bunların dışında bulunan iç ve dış benzerlik merkezleri C ve D ise aranılan geometrik yer CD çaplı dairenin noktalarından ibarettir.

Verilen daireler kesişiyorlarsa geometrik yer arakesit nok-

talarından geçer. Dairelerden biri diğerinin içinde ise geometrik yer boş cümledir. Verilen daireler içten teğetse geometrik yer bir noktadan ibarettir. Verilen dairelerin çakışması halinde geometrik yer, sınırı, verilen daire olan açık disk hariç bütün düzlemdir.

İhtar. Noktalara ait her geometrik yer, elemanlarının belirli bazı özeliği ile karakterize edilir. Böyle herhangi bir şeklin meselâ dairenin, şekli tamamen belirten diğer birçok karakteristik özellikleri vardır. Bu ifadeyi bir kaç misalle izah edelim. Bir daireyi, verilen bir noktaya uzaklığı aynı olan noktaların geometrik yeri (düzlemde), veya bir doğru parçasını aynı açı altında gören noktaların geometrik yeri (bu halde doğru parçasının uçları daireye dahil değildir), veyahut da verilen iki noktaya uzaklıkları oranı sabit olan ($\neq 1$) noktaların geometrik yeri, vesaire olarak tarif etmek mümkündür. Bir şeklin ne kadar fazla karakteristik özeliği bilinirse muhtelif problemlerde raslandıkça şekli tanıma imkânı artar; meselâ iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit

$$\left(\frac{AM}{MB} = \frac{a}{b} \neq 1 \right)$$

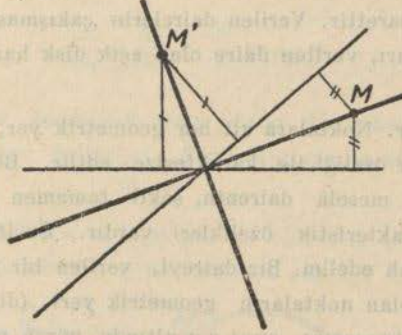
olan noktaların geometrik yerini bulurken dairenin, çapı dik açı altında gören noktaların geometrik yeri olma özeliğini kullandık. Verilen iki daireyi aynı açı altında gören noktaların geometrik yerini ararken de Apollonius dairesisinin özeliğinden istifade ettik.

Şimdi doğru ile ilgili birkaç geometrik yer inceliyelim.

7. *Verilen iki doğrudan aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulmak.*

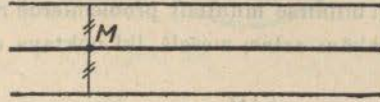
Verilen doğrular kesiştiği takdirde geometrik yer, verilen doğruların teşkil ettiği açılarının birbirine dik olan açı ortaylarından ibarettir (Şekil 61).

Bu geometrik yer lise derslerinde incelenirken iki doğru yerine bir açının kenarları alınmaktadır; bu usulü doğru bulmuyoruz.



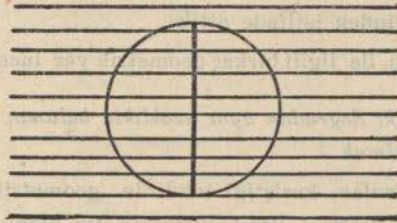
Şek. 61

Verilen doğrular paralelse geometrik yer verilen doğrulara paralel olan bir doğrudur (Şekil 62).



Şek. 62

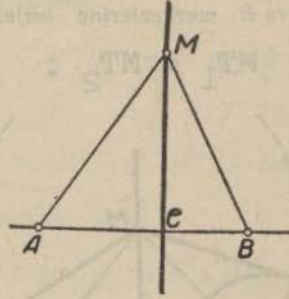
8. Bir dairenin paralel doğrular demetinden ayırdığı paralel kirislerin orta noktalarının geometrik yeri bu kirislere dik çaptır (Şekil 63).



Şek. 63

9. İki noktaya olan uzaklıkların kareleri farkı sabit olan noktaların geometrik yerini bulmak.

A ve B verilen noktalar, M de aranılan geometrik yerin bir noktası olsun (Şekil 64).



Şek. 64

M den AB ye MC dikmesini indirirsek

$$AM^2 = MC^2 + AC^2, \quad BM^2 = MC^2 + BC^2$$

bulunur ve taraf tarafa çıkarılması ile

$$AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2$$

elde edilir ki bu, verilen sabite eşittir.

Aranılan geometrik yerin M noktası AB ye dik olan ve bunun belirli C noktasından geçen bir doğru üzerinde bulunur.

Bu CM dikmesinin her noktasının aranılan geometrik yere ait olma karşıt özeliği kolayca ispatlanabilir.

O halde aranılan geometrik yer belirli bir doğru olup A ve B noktalarını birleştiren AB doğrusuna diktir.

10. Merkezleri farklı olan iki daireye çizilen teğet uzunlukları eşit olan noktaların geometrik yerini bulmak.

A ve B verilen dairelerin merkezleri, R ve r yarı çapları,

Şimdi MC doğrusunun hangi noktalarının aranılan geometrik yere ait olduğunu açıklayacağız. M , verilen dairelerin dışındaki MC dikmesinin bir noktası olsun. Bu noktadan MT_1 , MT_2 teğetleri çizilebilir. M ve T_1 noktalarını A ya, M ve T_2 noktalarını ise B ye birleştirelim.

$$AT_1M \quad \text{ve} \quad MT_2B$$

dik üçgenlerinden

$$MT_1^2 = AM^2 - R^2, \quad MT_2^2 = BM^2 - R^2$$

eşitlikleri ve farklarından da

$$MT_1^2 - MT_2^2 = (AM^2 - BM^2) - (R^2 - r^2) = 0$$

elde olunur ki bu, $MT_1 = MT_2$ verir; bundan da evvelce bulunan daireler dışındaki MC doğrusunun her noktasının aranılan geometrik yere ait olduğu neticesi çıkar.

CM doğrusunun bütününe bu iki dairenin kuvvet eksenini denir.

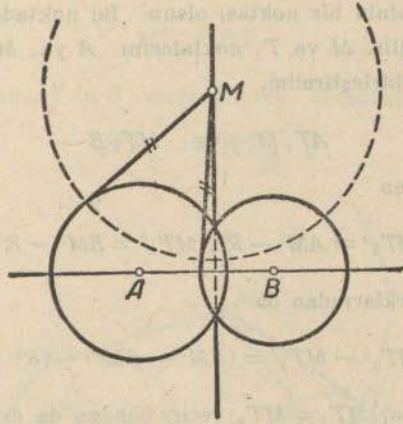
Merkezleri farklı olan iki daireye çizilen teğet uzunlukları eşit olan noktaların geometrik yeri bu dairelerin kuvvet ekseninin daireler dışında kalan noktalarından ibarettir.

Dairelerin kesişmesi halinde kuvvet eksenini ortak noktalarından geçer ve aranılan geometrik yer bu doğrunun iki ışınından ibaret olur (Şekil 66). Daireler teğetse geometrik yer kuvvet eksenini ile çakışır (Şekil 67 a ve b). Daireler eş merkezli ise mezkûr geometrik yer boş cümle olur.

11. Verilen iki daireyi dik olarak kesen dairelerin merkezlerinin geometrik yeri kuvvet ekseninin daireler dışındaki noktalarından ibarettir (Şekil 65, 66, 67).

Şimdi daha zor geometrik yerlere geçiyoruz.

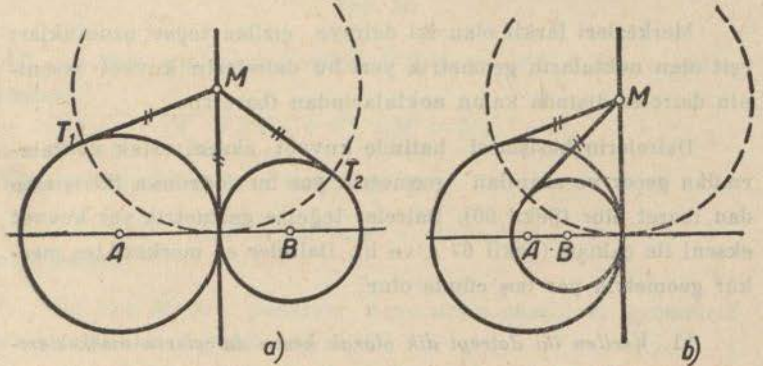
12. İki noktadan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri bir elipstir.



Şek. 66

$$MF_1 + MF_2 = \text{sabit}$$

(Şekil 27 ve 29).



Şek. 67

13. Verilen iki noktaya olan uzaklıkları farkı mutlak değerce sabit olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldur:

$$MF_1 - MF_2 = \text{sabit}$$

(Şekil 31).

14. Verilen bir nokta ve bir doğrudan uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri bir paraboldur.

$$MF = MD$$

(Şekil 33).

Konik kesitler in aşağıdaki genel tarifini biliyoruz.

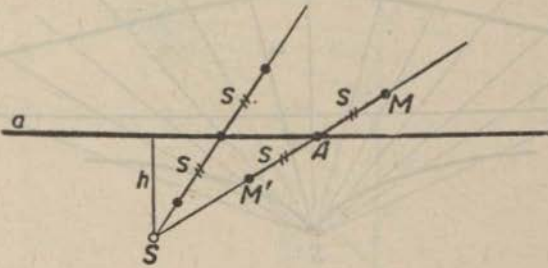
15. Verilen bir nokta ve bir doğruya olan uzaklıkları arasındaki oranı sabit olan noktaların geometrik yeri bir konik kesittir.

$$\frac{MF}{MD} = e = \text{sabit}$$

Geometrik yer $e < 1$ halinde elips, $e = 1$ halinde parabol, $e > 1$ halinde ise hiperboldur.

Netice olarak matematiğin inkişaf tarihinde önemli rol oynamış olan bir kaç geometrik yeri kısaca gözden geçirelim.

16. a bir doğru, S bir ışın demetinin merkezi olsun (Şekil 68). Uzaklıklar ışınlar üzerinde ölçülmek şartıyla, a doğrusundan s eşit



Şek. 68

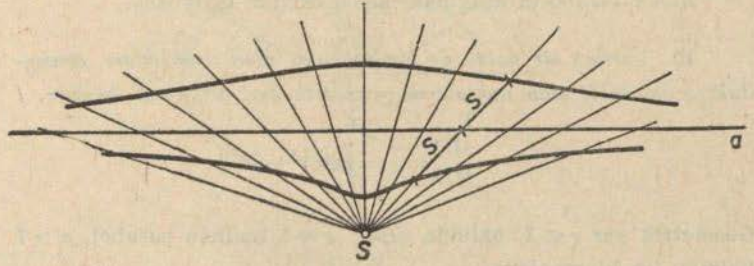
uzaklığında bulunan noktaların geometrik yeri Nikomed konkoidi adı verilen bir eğridir.

S noktasına konkoidin *kutpu* a doğrusuna *tabanı* ve $s = AM$ sabit doğru parçasına *aralık*'ı denir.

Konkoide ait istenilen sayıda noktanın çizimini yapmak mümkündür. S noktasının a tabanına uzaklığını h ile gösterirsek

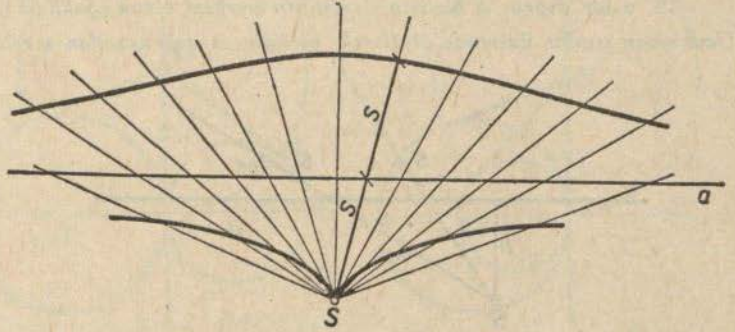
$$s < h, \quad s = h, \quad s > h$$

hallerine göre üç nevi konkoid düşünmek kabildir (Şekil 69, 70, 71).



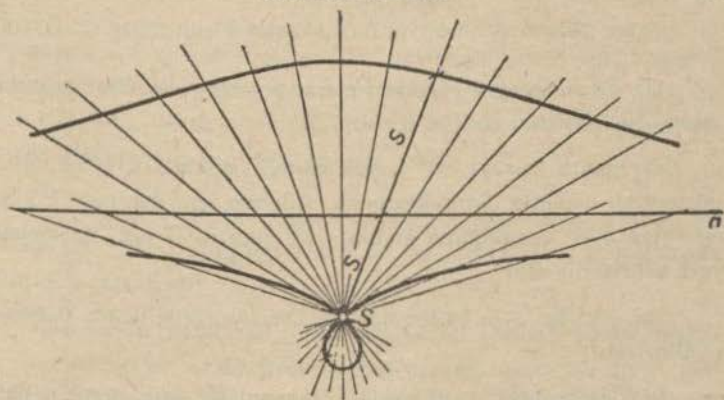
Şek. 69

Konkoid çizmeye yarayan aletler kullanarak üçüncü derece denklemlerin köklerini çizimle bulmak ve bunun neticesi bir açıyı

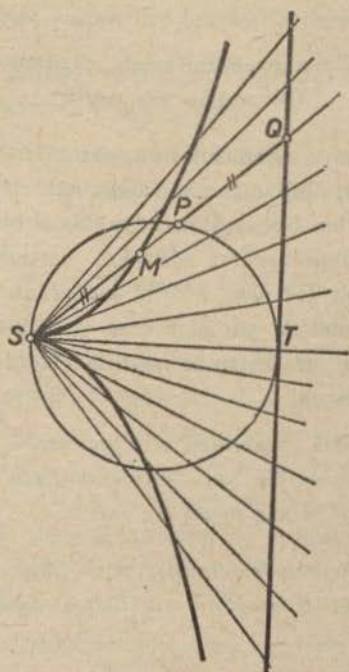


Şek. 70

üç eşit parçaya bölmek ve bir kübün iki katını bulma problemlerini çözmek kabil olmaktadır.



Şek. 71



Şek. 72

Zaten Nikomed bu eğriyi bu maksatla düşünmüştü (M.Ö. 150)

17. Bir daire alıp çapının bir ucundaki teğetiyle diğer ucundan geçen ışın demetini çizelim (Şekil 72).

Bir ışının daireyi ve teğeti kestiği noktaları P ve Q ile göstererek demetin S merkezinden itibaren ışın üzerinde PQ ye eşit olan SM uzunluğunu alalım. Bu suretle M nin geometrik yeri belirtilmiş olur.

Bu şekilde elde edilen eğriye Diocles eğrisi denir (Cissoid of Diocles).

Diocles bu eğri yardımıyla her hangi bir açıyı üç eşit parçaya bölmüş ve kübün iki katını elde etmiştir.

8. Çizim problemlerinin çözümünde

Geometrik yer usulü

Geometrik çizim problemlerinin çözümünde kullanılan geometrik yer usulü, bilindiği gibi, aşağıdaki usulden ibarettir: Eğer problem verilen birçok şartları sağlayan bir veya daha fazla noktanın belirtilmesine irca edilmişse şartlardan birini kaldırarak geometrik bir yer elde ederiz, şartlardan bir değerini atarak ikinci bir geometrik yer elde eder ve böylece devam ile bu geometrik yerlerin arakesitinde istenilen nokta veya noktalar gurupu bulmuş oluruz.

Bazen geometrik yerlerden biri problemin ifadesinde verilmiş de olabilir. Geometrik yer usulü problemin irdelenmesini de kolaylaştırır. Şimdi birkaç misal ele alalım.

Problem: Biribirinden farklı a, b, c , doğruları verilmişken a doğrusu üzerinde b ve c ye uzaklıkları aynı olan bir nokta bulmak.

Verilen a doğrusu geometrik yerlerden birini teşkil eder.

Noktanın a üzerinde olma şartını kaldırırsak, nokta b , c doğrularına uzaklıkları aynı olan noktaların geometrik yeri üzerinde her hangi bir yerde olabilir. Aranılan nokta bu iki geometrik yerin arakesitinde bulunur. İki hal vardır:

1. b ve c doğruları kesişirler. İkinci geometrik yer iki açı ortay çifti olup aranılan nokta bu açı ortayların a doğrusunu kestiği noktalardır.

Bu halde problemin genel olarak iki çözümü vardır. Fakat a doğrusu bu açı ortaylardan birine paralel olursa bir çizim vardır. a doğrusunun açı ortaylardan biriyle çıkışması halinde sonsuz sayıda çözüm vardır. a doğrusunun açı ortayların ortak noktasından geçmesi halinde ise problemin bir çözümü mevcuttur.

2. b ve c doğruları paraleldir. İkinci geometrik yer b ve c doğrularına paralel olan g doğrusudur.

Problemin, a doğrusunun g doğrusunu kesmesi halinde bir çözümü vardır, paralel olması halinde çözümü yoktur, çakışma halinde ise sonsuz sayıda çözümü vardır.

Problem: Verilen iki daireye teğet olan a yarıçaplı bir daire çizmek.

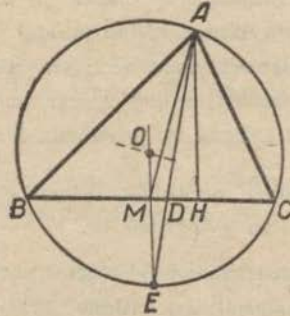
Verilen dairelerin merkezleri O_1 ve O_2 , yarı çapları R_1 , R_2 olsun. Aranılan dairenin merkezini bulmak yeter. Aranılan dairenin verilen dairelerden ikincisine teğet olma şartını kaldırırsak birinci geometrik yer olarak O_1 merkezli ve $R_1 + a$, $R_1 - a$ yarı çaplı eş merkezli daire çiftini elde ederiz, birinci daireye teğetlik şartını kaldırırsak bu sefer O_2 merkezli, $R_2 + a$, $R_2 - a$ yarı çaplı eş merkezli daire çiftinden ibaret geometrik yeri buluruz.

Aranılan merkezler bu geometrik yerlerin arakesit noktalarıdır. Sekizden fazla çözüm olamaz. Şeklin çizilip irdeleme yapılmasını okuyana bırakıyoruz.

Geometrik yer usulü bazen bu kadar açık olarak kullanılamaz.

Problem : Bir tepe noktasına ait $AH = h$ yüksekliği, $AM = m$ kenar ortayı ve $AD = d$ açı ortayı verilen bir üçgen çizmek.

ADH ve AMH üçgenleri hemen çizilebilir (Şekil 73). İstenilen ABC üçgeninin çevrel daresinin çizildiğini kabul edelim. M ve E noktaları ile çevrel dairenin O merkezi BC kenarının M orta noktasından çıkan dikme üzerinde bulunur. M deki bu MH



Şek. 73

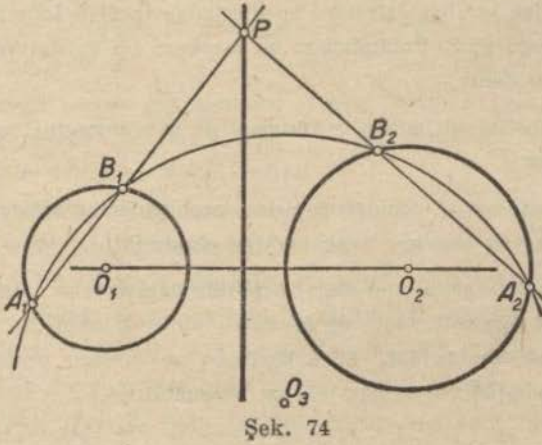
dikmesinin çizimi ile bunun AD açı ortayını kestiği E noktasının çizimi yapılabilir. Çevrel dairenin O merkezi, A ve E noktalarından eşit uzaklıkta olduğundan A ve E noktalarından aynı uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri ile evvelce çizimi yapılan EM doğrusunun arakesiti olur. Bu suretle O merkezi bulunmuş olur. O merkezli OA yarı çaplı daireyi çizersek bunun MH doğrusu ile arakesiti, aranan üçgenin B ve C tepe noktaları olur. Çizimin mümkün olabilmesi için $m > d$ eşitsizliği şarttır, çünkü açı ortay daima kenar ortayla yükseklik arasında bulunur.

Şimdi yardımcı bir problem çözelim.

Problem : İki dairenin kuvvet eksenini bulmak.

Daireler kesişirlerse kuvvet eksenini arakesit noktalarından geçer ve dairelerin TS kuvvet eksenini DM noktasından merkezler doğrusuna çizilen dik doğrudur.

Geriye, dairelerin kesişmemesi hali kalır. Verilen dairelerin merkezleri O_1 ve O olsun (Şekil 74).



Şek. 74

Bu iki daireyi kesen keyfi merkez ve çaplı daire çizelim. Birini kestiği noktalar A_1, B_1 diğerini kestiği noktalar A_2, B_2 olsun. $A_1 B_1$ ve $A_2 B_2$ doğrularının P arakesit noktası kuvvet eksenine aittir. Bunun ispatı için P den O_1 ve O_2 dairelerine çizilen teğet uzunluklarının eşitliğini görmek kâfidir. P den O_1 ve O_2 dairelerine çizilen teğetler de eşit olduğundan P den O_1 ve O_2 ye çizilen teğetler eşit olur.

P den O_1, O_2 merkezler doğrusuna bir dikme indirerek veya benzer şekilde ikinci bir P' olarak kuvvet eksenini bulunmuş olur.

Problem : Verilen üç daireye dik bir daire çizmek.

Verilen dairelerin merkezleri O_1, O_2 ve O_3 olsun. Aranılan dairenin O_3 dairesine diklik şartı kaldırılırsa verilen iki daireyi dik olarak kesen dairelerin merkezlerinin, kuvvet eksenlerinin

dış noktalarının cümlesinden ibaret geometrik yeri buluruz. Bu sefer O_2 dairesine olan diklik şartını kaldırırsak O_1 ve O_2 dairelerini dik olarak kesen dairelerin merkezlerinin geometrik yerini elde ederiz.

Aranılan dairenin merkezi bu geometrik yerlerin arakesiti, yarı çapı ise verilen dairelere bu noktadan çizilen teğetlerin ortak uzunluğu olur. Bulduğumuz bu merkeze bu üç dairenin *kuvvet merkezi* denir.

Problemın çiziminin yapılması ile irdelenmesini okuyana bırakıyoruz.

Alexandrov'un geometrik çizim problemlerine ait fevkalâde koleksiyonu ek temrin olarak tavsiye olunur [3].

Geometrik çizim metotları, özellikle öğretmenler için yazılmış, fakat öğrenciler için de faydalı olabilecek olan D. I. Perepiolkin'in kitabında [43], P. S. Modenov'un meşhur problem koleksiyonunda [38] ve ayrıca [35] de bulunabilir.

9. Geometrik çizim problemleri ve çözümlerine dair

«Problem» teriminin en genel tarifi şudur: Problem, «verilen» şeylere dayanılarak, aralarında ve verilenlerle belirli bağın-tıları bulunan diğer «istenilen» şeyleri «bulma» isteğinin bir ifadesidir.

Ohalde her problem, verilen şeylerin *sınıfı* ile bulunacak şeylerin *sınıfını* ihtiva etmektedir (her sınıf nokta, doğru, doğru parçası, üçgen, daire vesairelerinden ibarettir). Bundan başka, *bulunacak şeylerin bulunmuş sayılması için, tatbiki gereken kaide, usul ve şartların belirtilmesi gerekmektedir*. Bunsuz, problem belirsiz olur ve «bulma»nın anlamı kalmaz. Hangi çizim işlemi icra edilirse edilsin, aranılan şeyin bulunmuş olduğu, başka bir

deyimle, bu şeyin aranılan şeyler sınıfından verilen şeyler sınıfına aktarılmış olduğu hakkında birşey söylenemez.

Aranılanın bilinmeyenler sınıfından bilinenler sınıfına aktarılması için gerçekleşmesi lüzumlu olan şartlar kesin olarak açıklanmadıkça problem den ve çözüm den bahsedilemez.

Meselâ bir daire içine düzgün bir 17 - genin çizilmesi problemi verilmiş olsun.

Burada verilen şey dairedir. Daire verilince herkes zımnen dairenin merkez ve yarıçapının verilmiş olduğunu kabul eder. Halbuki bu tamamen doğru değildir.

Verilen dairenin ne merkez ne de çapı verilmişse, ve eğer bunlar problemin çözümü için lüzumlu ise bunları bulmak icap edecektir. Bu takdirde, merkez ve yarıçap bulunacak şeyler arasındadır. Ohalde verilenlerin neler olduğunun kesin olarak belirlenmesi şartı aşîkârdır. Aksi halde bir problem yerine başka bir problem ile karşıkârşıya olma durumu hasıl olur.

Ayrıca aranılan şeyin, düzgün bir 17-gen veya kenarlarının (ve açılarının) eşitliği şartı verilen bir çokgen olduğunu bilmekteyiz. Aranılan bu çokgenin verilen daire ile ilgisi tepe noktalarının bu daire üzerinde olmasıdır. Problem ohalde daire üzerinde belirli iki nokta — iki tepe noktası — veya belirli bir giriş bulmaya irca edilmiş bulunmaktadır.

Aranılan çokgenin bulunmuş sayılması için gerekli şartlar esaslı rol oynamaktadır. Meselâ, cetvel kullanmaksızın, yalnız pergeli kullanmak suretiyle çizimin yapılacağını kabul edebiliriz. «Yalnız pergel kullanarak» ifadesinden ne kastettiğimizi kesin olarak belirtmemiz gereklidir. Bu ifade, aranılan çokgenin bir kenarının çiziminin yapılmış sayılması için bu kenarın uçlarının verilen daireyi pergelin ayaklarını istediğimiz gibi mi yoksa belirli olarak mı açarak çizilecek bir daire ile kesiştirerek bulmak demektir? Son halde *çizim, pergelin ayarı bozulmadan yapılacaktır* demektir.

Kullanılan aleti değiştirmekle problemin farklı çözümleri olur. Hatta belirtilen usulle problemin çözümü mümkün bile olmayabilir. Bir problemin yalnız cetvel kullanarak, pergelsiz çözümünü düşünmek de mümkündür. Cetvel ise üzerinde taksimat olmıyan sırf doğru çizecek neviden olabilir. Bu halde çokgenin tepe noktaları dairenin doğru ile arakesit noktaları belirtilmekle elde edilir. Cetvel iki taraflı da olabilir. Nihayet cetvel üzerinde taksimat bulunur ve bundan çizimde istifade edilebilir.

Bu hallerin herbirinde çokgenin çiziminin yapılmış sayılabilmesi için *farklı* şartlar alınmıştır.

Verilen şartların tatbiki halinde çizimin icrası için çok sayıda doğru çizmek icap edebilir ve çizim teorik olarak doğru olduğu halde, *pratik* olarak imkânsız olur.

Diğer taraftan sayısı çok olmıyan deneme ile düzgün 17-genin kenarını büyük bir yakınlıkla bulmak kabilse de çizime teorik olarak doğru gözüyle bakamayız.

Ayrıca bazen de çizimler zinciri kullanılabilir ve bir çizimden ardışık çizime geçtikçe aranılan şekle daha da yaklaşımış olur. Teorik olarak, verilen noktaya istenilen yakınlıkla noktalar bulmak suretiyle matematiksel olarak probleme çözülmüş gözü ile bakmak da caizdir.

Nihayet, istenilen şekle yakınsayan çizim zinciri üzerinde durmayarak, verilen aletlerle yaklaşık netice veren çizim aramak da mümkündür. Bu halde de probleme matematiksel problem gözü ile bakılmalıdır.

Lise geometrisinde, tarihsel bir gelişimin verdiği alışkanlıkla, çözüm, pergel kullanarak, veya herhangi merkez ve yarıçaplı *daireler çizerek* ve bir kenarlı cetvel kullanarak, veya *doğrular çizerek* elde edildiğinde, probleme çözülmüş gözüyle bakılmaktadır. Bu münasebetle, verilen iki noktadan geçen bir doğrunun, merkezli verilen, istenilen yarıçapta bir dairenin tam olarak çizilebileceğini kabul ediyoruz.

Burada, problem çözümlerinde matematiksel diğer aletlerin kullanılabileceğini ve elde edilen çözümlerin muteber addedileceğini belirtiyoruz.

Bu hallerde de problem ve çözüm, sanki çözüm cetvel ve pergelle çözülmüş gibi muteberdir. Kesin olarak istenilen şey şudur: aranılan şeyin bulunmuş sayılması için kullanılacak usul ve aletlerin kesinlikle belirtilmesi. Meselâ, elipsograf kullanarak odakları F_1 , F_2 ve bir noktasının F_1 ve F_2 den uzaklıkları toplamı verilmiş olan elipsin çiziminin mümkün olabileceği gibi.

10. Cetvel ve pergelle çizimler.

Düzlem geometriye ait bir çizim problemi, aşağıdaki esas (en basit) beş problemten sonlu sayıda probleme irca edildiği takdirde, çözülmüş sayılır :

1. Verilen iki noktadan geçen bir doğru veya doğru parçası çizmek.
2. Merkezi ve yarıçapı verilen bir daire veya uc noktaları ve merkezi verilen bir daire yayı çizmek.
3. Verilen iki doğrunun arakesit noktasını bulmak.
4. Verilen bir doğru ve bir dairenin arakesit noktalarını bulmak.
5. Verilen iki dairenin arakesit noktalarını bulmak.

Bu en basit problemlerin çözümlerinin bilindiğini kabul ediyoruz.

Çizimlerde ekseriya keyfi elemanlar kullanılır.

Verilen veya çizimi evvelden yapılan noktalar dışında noktalar alınması hususunda aşağıdaki prensipler uygulanır.

Prensip A. Bir düzlemde, bir doğru dışında her hangi bir noktanın çizimi yapılabilir.

Prensip B. Bir doğru üzerinde evvelce alınan noktalardan başka bir noktanın çizimi yapılabilir.

Bu *A* ve *B* prensiplerini birçok problemin çözümünde kullanacağız. Meselâ, bir *a* doğrusunu dik olarak kesen bir dairenin çizimi bahis konusu olsun. Eğer elimizde yalnız *a* doğrusu varsa ve bunun üzerinde bir nokta verilmemiş veya çizimi yapılmamışsa 1-5 problemlerini kullanmamız imkân dışındadır. Yine *A* ve *B* prensipleri olmadan verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan bir paralel çizemeyiz. Bunun gibi, bir nokta ve bir doğru verilmişken hiç bir daire ve hiç bir doğru çizemeyiz (çünkü, meselâ bir daire çizmek için yarıçapını verecek iki noktaya ihtiyaç vardır).

Bir çizimin doğruluğunu *keyfi elemanları kullanarak* ispatlar-ken tabii bu elemanlara *keyfi gözü* ile bakmak ve özel özelliklerini kullanmamak zorundayız.

Bir şeklin her kısmı *A* ve *B* prensipleri ve 1-5 problemlerinin uygun bir sırasının tatbiki sonunda elde edildiğinde şekle «çizilmiştir» diyebileceğiz.

Çizimler sadece lafzen veya cetvel ve pergel kullanılarak bizzat kâğıt üzerinde yapılabilir. Hangi yolu seçeceğimiz önemli değildir. Meselâ, merkez ve yarıçapı verilen bir küreyi çizmek için hiç bir alet mevcut bulunmamaktadır.

Çözümlerden en basitini, en kısasını ve en iyi doğru netice verenini bulmalıdır. Zor ve karışık çizimler kaide olarak en az doğru netice verenlerdir.

Cetvel ve pergelin başka tarzda kullanılması veya diğer aletlerden istifade edilme halinde, en basit 1-5 problemleri yerine basit başka problemler alınmalıdır.

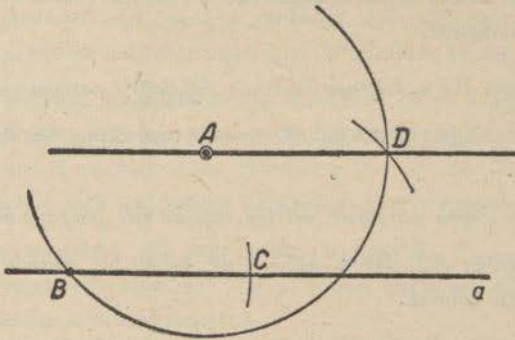
1-5 problemleriyle A, B prensiplerine *cetvel ve pergelin serbest olarak* kullanılmasına dair şartlar adı verilir.

Her problemin bu 1-5 problemlerine irca edilme işi gayet yorucu olduğundan, bu irca işi oldukça zor bazı problemler için yapılır ve diğer bütün problemler bu son problemlere döndürülür.

«Bir defaya mahsus» olmak üzere çözülecek bu problemlerden bazıları şunlardır :

Problem 1. a doğrusu üzerinde bulunmayan bir A noktasından a doğrusuna paralel bir doğru çizmek.

Çözüm. a doğrusu üzerinde, A dan çizilen dikmenin ayağından farklı olan bir B noktası alalım (Şekil 75).



Şek. 75

B nin bu şekilde seçilmesi tatbikatta pergelin ayakları arasındaki açıklığı A nın a ya uzaklığından büyük tutmak suretiyle, bir ayağı A ya değerini B ye koyarak yapılır.

Pergelin bu şekilde ayarlanması hiçbir teorik düşünceye dayanmayıp sırf daha doğru netice elde etmek içindir.

A merkez ve AB yarıçaplı dairenin çizimi 2 nolu problem dolayısıyla mümkündür.

Yine 2 nolu problemi kullanarak B merkez ve AB yarıçaplı bir daire çizebiliriz. Tatbikatta a yı kesecek kadar küçük bir yay çizmek kâfidir. 4 no. lu problemden dolayı bu daire ile a nın C arakesitini bulmuş oluruz. Aynı yarıçaplı C merkezli bir daire çizer ve 5 no. lu probleme dayanarak bu daire ile, çizilen ilk dairenin D arakesitini elde ederiz. 1 nolu probleme göre A ile D yi birleştirmek mümkündür. Çizimi yapılan AD doğrusu aranılan doğrudan ibarettir.

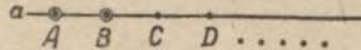
Çizimin doğruluğu liseden bilinmektedir.

Bir defaya mahsus olmak üzere a ya paralel AD doğrusunun çizimi cetvel ve pergelle yapılmış olup ileride bu çizim, tatbikatta olduğu gibi, gönye ve cetvelle yapılabilecektir. Burada mühim olan nokta paralel doğrunun çiziminin cetvel ve pergelle yapılmış olmasıdır.

Problem II. a doğrusu üzerinde AB doğru parçası verilmişken

- (a) Uzunluğu AB nin belirli bir katı olan ikinci bir doğru parçası bulmak.
- (b) AB doğru parçasını verilen sayıda eşit parçaya bölmek.
- (c) Verilen AB doğru parçası ile belirli bir oranda olan bir doğru parçası bulmak.

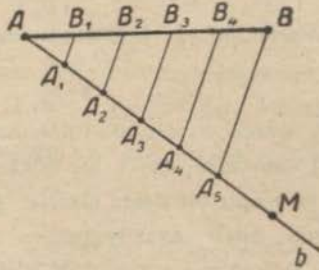
Çözüm. (a) B merkez ve BA yarıçaplı bir daire çizip (problem 2) bu dairenin a doğrusunu kestiği C noktası (A dan farklı) alınarak aynı yarıçaplı bir daire ile D noktası ve böylece devam olunarak istenilen doğru parçası elde edilir (Şekil 76).



Şek. 76

Bu çözüm kısaca pergelin ayaklarını doğru üzerinde yürütmekle elde edilir.

(b) AB dışında bir M noktasını alıp A ya birleştirelim ve bu doğruya b diyelim (Şekil 77).



Şek. 77

Cetvel ve pergelle yapılan çizimlerde böyle keyfi elemanlar yerine ekseri hallerde çizimi yapılmış olanlar alınabilir. Misalimizde A merkezli AB çaplı, B merkezli BA çaplı daireler çizerek bunların arakesit noktalarından biri M noktası olarak alınabilir.

AM doğrusu üzerinde A dan itibaren AB yi böleceğimiz sayıda eşit doğru parçaları alırsak (a) kısmında anlatıldığı gibi son A_n noktasını B ye birleştirir (Problem 1) ve $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ noktalarından $A_n B$ doğrusuna paraleller çizeriz (problem 1).

Bu paralellerin AB doğrusunun kestiği $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ arakesit noktaları (problem 4) AB yi n eşit parçaya bölen noktalardır (şekilde $n = 5$ alınmıştır).

Bu çözümün doğruluğu herkes tarafından bilinmekte olup netice, M noktasına bağlı değildir.

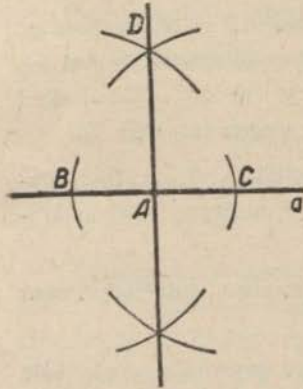
Bir doğru parçasını iki eşit parçaya veya çift sayıda eşit parçaya bölmek için lisede görüldüğü gibi diğer çizimler kullanılır.

(c) m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere AB ye oranı m nin n ye oranına eşit olan CD doğru parçasını bulalım. Oranın tarifinden $n \cdot CD = m \cdot AB$ yazılır ve CD nin çizimi elde edilir.

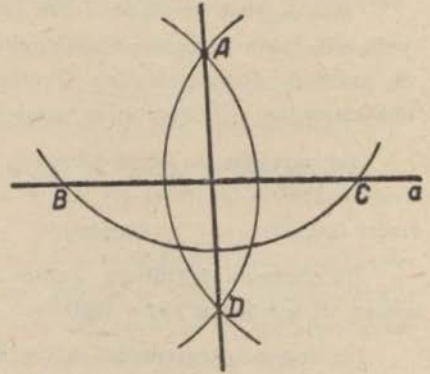
Bunun için de (a) maddesine göre mAB doğru parçasını almak ve bunu (b) maddesi gereğince n eşit parçaya bölmek yeter.

Problem III. Verilen bir A noktasından bir a doğruya dik bir doğru çizmek.

Çözüm. 1. A noktası a doğrusu üzerindedir (Şekil 78). a doğrusu üzerinde A dan farklı keyfi bir nokta seçer (prensip B) ve A merkez AB yarıçaplı bir daire çizeriz (problem 2), diğer bir deyimle, pergeli keyfi ayarlıyarak a doğrusu üzerinde «noktalar alırız». Dairenin a yı kestiği B den farklı noktayı (problem 4) C ile gösterelim ve BC yarıçaplı B ve C merkezli daireler çizelim (problem 2). Son iki dairenin arakesit noktalarından birine D diyelim (problem 5) ve A ile D yi birleştirerek AD doğrusunu elde edelim (problem 1). Bu şekilde elde edilen AD doğrusu A dan a ya çizilmesi istenilen dikmeden ibarettir.



Şek. 78



Şek. 79

Çizimin doğruluğunun ispatı lise kitaplarında mevcuttur.

2. A noktası a doğrusunun dışındadır (Şekil 79). a doğrusu üzerinde, A nın a üzerindeki ayağından farklı olan bir B nokta-

şı seçelim (prensip B). A merkez ve AB yarıçaplı daireyi çizerek (problem 2) bunun a ile olan ikinci C arakesit noktasını alalım (problem 4).

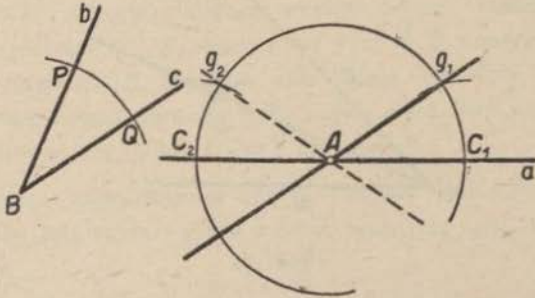
B ve C merkez olmak üzere aynı yarıçaplı daireler çizip (problem 2) bunların A ve D arakesit noktalarını birleştirelim (problem 5). AD , A dan a ya çizilmesi istenilen doğru olur.

Çizimin doğruluğunun okuyan tarafından bilindiğini kabul ediyoruz.

Problem IV. Verilen bir A noktasından geçmek ve verilen bir a doğrusu ile verilen bir açı yapan bir doğru çizmek.

Çözüm. 1. A . noktası a doğrusu üzerindedir (Şekil 80).

bBc verilen açı olsun. Bu açının bir kenarında keyfi bir P noktası alıp (prensip B) BP yarıçap ve B merkezli daireyi çizelim (problem 2). Aynı yarıçap ve A merkezli daire çizerek (problem 2) bunun a doğrusu ile olan arakesitlerini C_1 ve C_2 ile gös-



Şek. 80

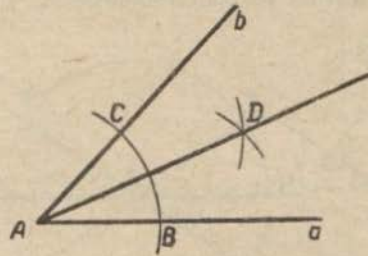
terelim (problem 4). Şimdi C_1 ve C_2 merkez olmak üzere aynı PQ yarıçaplı daireleri çizip (problem 2) bunların A merkezli daire ile arakesitlerini g_1 ve g_2 ile gösterelim. Bu takdirde, çizilen Ag_1 , Ag_2 doğruları (problem 1) aranılan doğrular olur.

İki çözüm vardır. Çizimin doğruluğu, eşit dairelerde eşit yayları gören merkez açıların eşitliğine dayanmaktadır.

2. A noktası a doğrusunun dışındadır. a doğrusu üzerinde keyfi bir A_1 noktası alıp (prensip B) yukardaki 1 şıkında olduğu gibi A_1 den geçip a ile verilen açıyı teşkil eden doğruyu, ve sonra A dan bu doğruya paralel doğruyu çizeriz (problem 1). Çizimi yapılan bu doğru aranan doğrudur. Bu halde de iki çözüm mevcuttur. Çizimin doğruluğunun ispatı basittir.

Problem V. (a) Bir açıyı iki eşit parçaya bölmek; (b) bir açının belirli katını bulmak.

Çözüm : (a) aAb verilen açı olsun (Şekil 81). a doğrusu üzerinde keyfi bir B noktası alıp (prensip B) A merkez ve AB yarıçaplı daireyi çizelim (problem 2). Tatbıkatta bu daire, B yi seçmeden hemen çizilebilir. Bu dairenin b doğrusu ile olan ara-



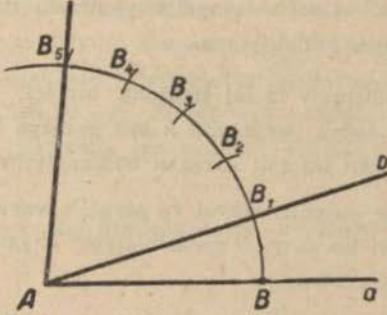
Şek. 81

kesitini C ile gösterelim (problem 4) ve aynı AB yarıçapı ile B ve C merkezli daireler çizelim (problem 2). Bu dairelerin A dan farklı olan arakesit noktasına D diyelim (problem 5) ve A ile D yi birleştirelim (problem 1).

Bu suretle elde edilen AD doğrusu verilen açının aranan açıortayıdır.

Çözümün doğruluğunun ispatı karşıt kenarları eşit olan ADC ve ADB üçgenlerinin eşitliğine dayanmaktadır.

(b) aAb verilen açı olsun (Şekil 82).



Şek. 82

a doğrusu üzerinde keyfi bir B noktası alalım (prensip B) ve A merkez ve AB yarıçaplı daireyi çizelim (problem 2). Bu dairenin b yi kestiği noktayı B_1 ile gösterip (problem 4) B_1 merkez ve B_1B yarıçaplı dairenin evvelki daireyi kestiği yere B_2 diyelim (problem 5). B_2 merkez ve aynı B_1B yarıçaplı daireyi çizip (problem 2) B_3 noktasını elde edelim (problem 5). Bu suretle devam ederek verilen açının n katı olan BAB_n açısının çizimi yapılmış olur. Şekilde $n=5$ alınmıştır.

Çizimin doğruluğunun ispatı, kirisleri eşit olan yayların eşitliği ile, eşit yayları gören merkez açılarının eşitliğine dayanmaktadır.

Bununla, cetvel ve pergelle kullanarak çizimi «bir defaya mahsus» olmak üzere yapılan problemlerin listesini tamamlamış bulunuyoruz. Tabii bu liste, genişletilerek «Temel çizimler» adı altında çok sayıda problemden ibaret liste haline de getirilebilir.

Bir çizim problemini cetvel ve pergelle çözerken, bu I-V problemlerini tıpkı en basit 1-5 problemleri gibi kullanabilece-

giz. Meselâ, bir doğruya dik bir doğru çizmek istersek problem III teki çizimleri tekrar da edebiliriz veya bunun yerine çizimi sadece bir gönye ile yaparız. Gönyeyi, yeni bir alet ilâvesi olarak gözetmiyerek cetvel ve pergelle yapılan çizimler zincirini tekrarlamamak için kullanıyoruz.

İhtar. Problem V'in (a) şıkında bir açı, problem II nin (b) şıkında bir doğru parçasının n eşit parçaya bölünmesi gibi, n eşit parçaya değil iki eşit parçaya bölünmüştür.

Bu, bizi her çizimin cetvel ve pergelle veya daha doğrusu 1—5 problemleri ile A ve B prensiplerine dayanarak yapılması-yacağı hususuna götürür.

Meselâ, *herhangi bir açıyı* cetvel ve pergelle kullanarak üç eşit parçaya bölmek imkânsızdır. Bu da sadece, doğru ve daireler çizmenin herhangi bir açıyı üç eşit parçaya bölen doğruların elde edilmesine kâfi gelmemesi demektir. Halbuki aslında bir açının üçte biri mevcuttur. Bunun gibi, verilen bir açıyı *herhangi* sayıda eşit parçaya bölen doğrular da mevcuttur, fakat ($n=3$ gibi) bazı sayılar için bu doğruları aranılan elemanlar sınıfından, 1—5 problemleriyle A , B prensiplerini veya cetvel ve pergelle kullanarak elde edilen elemanlar sınıfına aktarmak imkânsızdır. Bu aletler böyle çizimler için yetersizdir.

Diğer bazı aletler kullanmak, veya diğer esas problemlere başvurarak bir açıyı üç eşit parçaya bölmek güçlük arzetmez. Ayrıca, tatbikatta bu çizimler ekseriya cetvel ve pergelle yapılan çizimlere nazaran daha sıhhatli neticeler vermektedir.

Burada, bazı açıların cetvel ve pergelle üç eşit parçaya bölünebileceğine işaret edelim. Böyle açılardan meselâ dik açıyı zikredebiliriz.

Şimdi ortaya, cetvel ve pergelle üç eşit parçaya bölünebilecek açılarının cümlesinin kesin olarak belirtilmesi ile (özel olarak 60° yi içine alan) diğer açılarının cetvel ve pergelle veya esas

problemleri kullanarak üç eşit parçaya bölünemeyeceğinin ispatının yapılması çıkmaktadır.

Bu nevi imkânsızlığın ispatı matematiğin güç problemleri arasında olup bir çok hallerde elemanter metodların dışında kalmaktadır. 19 uncu yüzyılın sonlarında çizim problemlerinin çözümünün cetvel ve pergelle yapılabilmesi problemi tam olarak incelenmiştir. Çözülebilir ve çözülmeiyen problemler kesin olarak belirtilmiş olup problemin tam çözümünü analiz ve yüksek cebirde yer almaktadır.

Çözüm imkânsızlığının elementer bir ispatını 12. de göreceğiz.

11. Çizim problemlerinin çözümünü cetvel ve pergelden gayrı usullerle elde etmeğe dair.

Cetvel ve pergeli kullanma matematiksel olarak temel 1 — 5 problemleri ve A , B prensipleriyle ifade edilir. Bu da, geometrik bir elemanın aranılan şeyler sınıfından, adı geçen prensip ve temel problemlere irca edilebilen yollarla bulunan şeyler sınıfına aktarılmış sayılacağı anlamındadır. Bunlara çözümü veren *mantiki ve teorik* alet göziyle bakılabilir.

Geometrik aletlerin başka terkiplerine de temel problemler eînsinden ifade edilen diğeri mantiki çözüm yolları tekabül eder. Birkaç misal alalım.

Çizimde sadece serbest olarak pergeli kullanalım, diğeri bir deyimle, pergeli keyfi daire çizecek alet olsun. Bu sadece pergeli kullanarak çizim elde etme hali olup matematiksel olarak 1,2 ve 5 no. lu temel problemlerinin kullanılması demektir.

Problem 1 in tatbiki, bir doğruyun iki noktasiyle belirli olması demek olup doğru üzerinde bu doğruyu belirten iki noktadan farklı bir nokta alınacaksa bu, ancak iki daireyi kesiştirmekle elde edilmelidir. Sırf 1, 2 ve 5 problemlerinin kullanılması

sı halinde cetvelle doğru çizilebilir, fakat iki doğruyu veya bir doğru ile bir daireyi kesiştirerek bir doğru üzerinde nokta bulmak caiz değildir. Eğer doğrular zihnen düşünülmüş olmaktan ziyade fiilen çizilmişse 1, 2 ve 5 problemleri, bu doğruların arakesit noktalarının aranılan şeyler sınıfına geçmiş olduğunu kabul etmemizi gerektirmez. Çizilmiş doğruların arakesit noktası aranılan şeyler sınıfında kalmakta devam eder. Eğer böyle bir nokta, verilen veya çizimi yapılan dairelerin arakesit noktası olarak elde edilmişse verilen şeyler sınıfına girmiş olur.

Yalnız pergel kullanılan çizimlerde *A* prensibine ihtiyacımız yoktur. Zira bu halde doğruyu belirten ve verilen şeyler sınıfından olan iki nokta mevcuttur.

Yalnız pergel kullanılması bir doğrunun verilme şeklini değiştirir. Bir doğru evvelden (cetvelle çizilmiş olarak) verilebilir, fakat üzerinde, belirlenen hiç bir noktası yoktur.

Bir daire de, evvelce olduğu gibi, üzerinde belirlenen nokta verilmemiş olduğu halde, «merkez ve kendisi çizilmişken» verilmiş olarak kabul edilir. Diğer bir deyimle, daire merkeziyle birlikte verilen şeyler sınıfına dahildir, fakat üzerindeki hiç bir nokta bu sınıfa ait değildir. Bunun, cetvel ve pergelle yapılan çizimlerde doğru ile benzerliği vardır.

Şimdi, 1, 2 ve 5 problemlerine aşağıdaki prensibi katıyoruz.

Prensip B*. Bir daire üzerinde, evvelce çizimi yapılan noktalardan başka bir noktanın çizimi yapılabilir.

A prensibi için böyle bir şeye ihtiyaç yoktur, zira çizimi yapılan dairenin dışında, meselâ merkezde bir nokta esasen mevcuttur.

B prensibini koymamasının lüzumu aşağıdaki problemden dolayı açıktır.

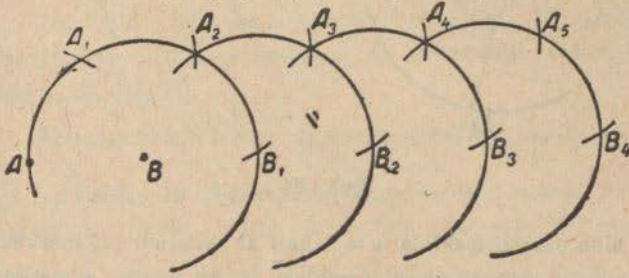
Yalnız 1, 2 ve 5 temel problemlerini kullanarak verilen bir daire içine (merkezi de verilmiştir) düzgün bir 6-gen çizmek.

Dairenin merkezinden başka elimizde bir nokta olmadığından pergeli yarıçap kadar açmağa ve dolayısıyla hiç bir çizim yapmağa imkân yoktur.

Halbuki B prensibini kullanırsak daire üzerinde bir nokta alabilir ve merkezden de faydalanarak yarıçapı bulur ve düzgün altıgeni çizebiliriz.

Yalnız pergelle yapılan bütün çizimleri etraflica ele alalım. Yavaş yavaş sadece bir kaç misalle yetineceğiz.

(a) Bir AB doğru parçası verilmişken bunun herhangi bir katı olan ikinci bir doğru parçası çizmek (Şekil 83).



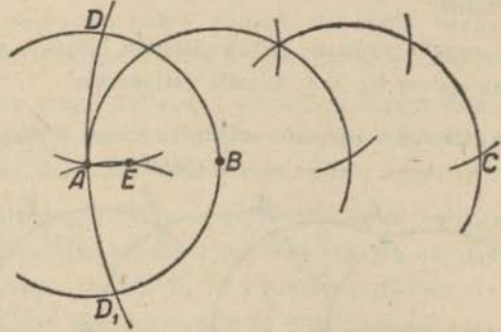
Şek. 83

Çözüm. B merkez ve BA çaplı daireyi çizelim (problem 2). Aynı BA yarıçaplı ve merkezleri A, A_1, A_2 olan daireleri çizip (problem 2 ve 5) B_1 noktasını elde edelim. AB_1 doğru parçası (problem 1) verilen doğru parçasının iki katıdır. Bu sefer B_1 merkez ve aynı AB yarıçaplı bir daire ile (problem 2) aynı yarıçaplı A_2 merkezli daireyi çizelim (problem 2) ve sonra A_3 merkezli daire ile arakesit olarak B_2 noktasını elde edelim. AB_2 doğru parçası (problem 1) AB nin üç katıdır. Bu suretle devam ederek AB nin istenilen katı elde olunmuş olur.

Çözümün doğruluğu açıktır. Çizimden de anlaşılacağı veçhile cetvel ve pergelden başka aletler kullanıldığı takdirde çözümün başka yola başvurularak yapılması gerektiği aşikârdır.

(b) Bir AB doğru parçasını verilen sayıda eşit kısımlara bölmek (Şekil 84).

Çözüm. AB doğru parçasını, kendisini böleceğimiz sayı ile çarpıp (yukarıdaki (a) problemi) ve $AC = n \cdot AB$ doğru par-



Şek. 84

çasını elde ederiz (şekilde $n=3$ hali alınmıştır). C merkez ve CA yarıçaplı daireyi çizer (problem 2) ve bunun A merkez ve AB yarıçaplı daire ile olan D, D_1 arakesit noktalarını buluruz (problem 5). Adı geçen beriki daire AC yi bulmada kullanılan daireden ibarettir. D ve D_1 merkez ve $DA = D_1A$ yarıçaplı daireleri çizerek (problem 2) E arakesit noktasını buluruz (problem 5). Elde edilen AE doğru parçası AB nin istenilen parçasından ibarettir.

İspatı. Şeklin simetrisinden E noktası A, B, C doğrusu üzerinde bulunur. İkizkenar DAC ve AED üçgenleri A taban açılarının eşitliğinden dolayı benzerdirler. Bu benzerlikten

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

yazar ve $AD = AB$ yi kullanarak

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{n},$$

ve netice olarak $AE = 1/n AB$ elde ederiz.

Özel olarak $n = 2$ alabiliriz, diğer bir deyimle, bir doğru parçasını sırf pergeli kullanarak iki eşit parçaya bölebiliriz. Sadece pergeli kullanarak elde edilen işlemler cümlesi cetvel ve pergeli işlemleri cümlesinin bir kısmını teşkil eder. Bununla beraber şu teorem doğrudur: *Cetvel ve pergelle çözülebilen her problem sadece pergeli kullanılarak çözülebilir.*

Bu teoremi ilerde ispatlıyacağız (Bölüm VIII).

Onsekizinci yüzyılın sonunda matematikçi Masqueroni pergeli yapılan çizimlerle uğraşmış ve yukarıdaki teoremi elde etmiştir [13], [1], [3].

Masqueroni'nin incelediği problemlerden şu ikisini zikrederim.

(1) *Verilen bir doğrunun bir daire ile olan arakesit noktalarını bulmak.*

(2) *Verilen iki dairenin arakesit noktalarını bulmak.*

Cetvel tek başına pergeli kadar yeterli geometrik bir alet değildir. Cetvel ve pergeli kullanarak veya aynı şey demek olan sadece pergelle çözülen problemler, sadece cetvelle yapılamamakta, diğer bir deyimle sadece 1 ve 3 problemleri ve A, B prensipleri kullanılarak yapılamamaktadır. Gelecek bahiste bu çizimlerden birine rastlıyacağız.

Cetvel ve pergeli serbest olarak kullanarak yapılabilen bütün çizimleri iera edebileceğimizi bir tarafa bırakarak bazı şartlar koşabiliriz. Meselâ, pergeli belirli bir miktar kadar açmağa veya aynı sabit yarıçaplı daireler çizmeğe, hatta merkezi verilen yalnız bir daire çizmeğe ve pergeli bir tarafa bırakarak geri kalan çizimleri yalnız cetvelle elde etmeğe müsaade edebiliriz [53].

Bu çizimler tabii temel 1 ve 3 problemleriyle A , B ve B^* prensipleri ve aşağıdaki iki prensiple karakterize edilmiş olurlar.

4'. Merkezi ile birlikte bir daire çizmek mümkündür.

5'. Prensip 4' de verilen dairenin, verilen veya çizimleri yapılan doğrularla olan arakesit noktalarını bulmak mümkündür.

Bu tek daire merkezsiz verilmiş olduğu takdirde, bu daire bir cetvel ile birlikte, cetvel ve pergelle yapılan bütün çizimleri vermeğe yeterli olmamaktadır. Bunun ispatı ilerdeki bahiste verilecektir.

Şimdi iki kenarlı cetvelle yapılan çizimlere, diğer bir deyimle, aralarındaki uzaklığı sabit a miktarı olan paralel iki doğru yardımıyla yapılan çizimlere geçelim. Bu çizimler temel 1, 2 ve 3 problemleriyle A , B prensiplerine dayanmaktadır. 4 ve 5 problemleri yerine aşağıdakileri alıyoruz.

4". Verilen veya çizimi yapılan bir doğruya, buna uzaklığı a olan paralel iki doğru çizmek mümkündür.

Bu prensip, cetvelin bir kenarını bir doğru üzerine getirip öteki kenarıyla bir doğru çizilebileceği anlamına gelir.

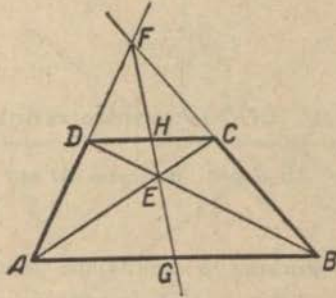
5". Aralarındaki uzaklık a dan küçük olmıyan iki noktadan geçmek üzere uzaklıkları a olan paralel iki doğru çizmek mümkündür.

Bu ise, cetvelin bir tarafının bir noktaya diğerinin diğer noktaya getirilebilmesi demektir.

Yalnız pergel kullanıldığında doğrular için söylediğimiz hususlar temel problem 2 için de caridir. Keyfi daireler de çizebiliriz, fakat bu dairelerin noktalarını, verilen veya çizimi yapılan doğruların arakesiti olarak elde etmedikçe çizimlerde kullanamayız.

İki kenarlı cetvelle yapılan çizimlere geçmeden evvel bir yardımcı teorem ispatlayalım.

Bir yamukta, köşegenlerin arakesit noktasını paralel olmıyan kenarların arakesit noktasına birleştiren doğru yamuğun tabanını iki eşit parçaya böler (Şekil 85).



Şek. 85

İspatı. $ABCD$ yamuğunda AC , BD köşegenlerinin arakesit noktasını E ve paralel olmıyan AD , BC kenarlarının arakesit noktasını da F ile gösterelim. Bu EF doğrusunun paralel AB , DC kenarlarını kestiği noktalar karşılıklı olarak G , H olsun. Benzer AGF ve DHF üçgenlerinden

$$\frac{AG}{GF} = \frac{DH}{HF},$$

benzer BGF , CHF üçgenlerinden ise

$$\frac{GF}{GB} = \frac{HF}{HC}$$

yazar ve bunların taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\frac{AG}{GB} = \frac{DH}{HC}$$

elde ederiz.

Bunun gibi, AGE , CHE ve BGE , DHE üçgenlerinin benzerliklerinden de

$$\frac{AG}{GB} = \frac{HC}{DH}$$

yazar ve son iki eşitliğin taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\left(\frac{AG}{GB}\right)^2 = 1$$

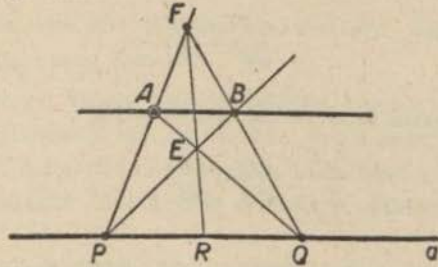
veya $AG = GB$ ve $DH = HC$ neticelerine varırız.

Problem. Bir AB doğru parçasını iki eşit parçaya bölmek (Şekil 86).

Çözüm. AB doğrusuna a uzaklığında paralel bir doğru çizelim (problem 4"). Çizilen bu doğru üzerinde keyfi C ve D noktalarını alıp (prensip B) AD ve BC doğrularını çizerek (problem 1) $ABCD$ yamuğunu teşkil edelim. Yamuğun AC ve BD köşegenleri çizildiğinde (problem 1) E arakesit noktası (problem 3) ve paralel olmıyan kenarlardan da F noktası (problem 3) elde edilir ve bu iki nokta birleştirilir (problem 1). EF ve AB doğrularının G arakesit noktası (problem 3) AB nin aranılan orta noktasıdır.

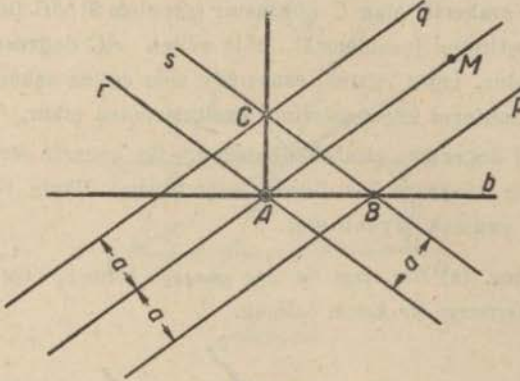
İspat, yukarıdaki yardımcı teoremin bir neticesidir.

Problem. Bir a doğrusuna, bunun dışındaki keyfi bir noktadan paralel doğru çizmek.



Şek. 86

Bu problemi cetvel ve pergel kullanarak çözmüştük. Şimdi, çözümü iki kenarlı cetvel kullanarak elde edeceğiz.



Şek. 87

Çözüm. a doğrusu üzerinde (Şekil 86) keyfi P ve Q noktalarını seçerek (prensip B) PQ nün R ortasını alalım (evvelki probleme göre). PA nın uzantısında olmak üzere AP üzerinde keyfi bir F noktası seçip (problem 1; prensip B) Q noktasını QA ve QF doğrularıyla A ve F noktalarına birleştirelim (problem 1). QA ve RF doğrularının E arakesit noktasını (problem 1 ve 3) P ye birleştirip (problem 1) PE ve QF nin arakesitini B ile gösterelim (problem 3). AB doğrusu (problem 1) aranılan paralel doğrudur.

Yamağa ait yardımcı teoremi kullanarak ispatın yapılmasını okuyana bırakıyoruz.

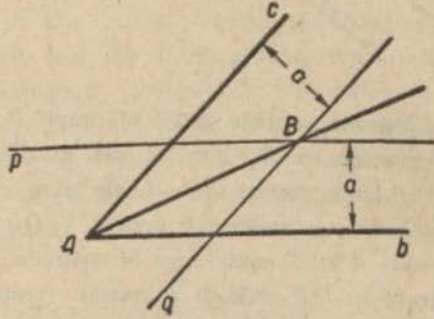
Problem. Bir b doğrusunun bir A noktasından b doğrusuna dik doğru çizmek (Şekil 87).

Çözüm. Şekilde keyfi bir M noktası alıp (prensip A) bunu A noktasına birleştirelim (problem 1). AM ye paralel ve bundan a uzaklığında olan p ve q doğrularını çizelim (problem 4"). p ile b nin arakesitine B diyelim (problem 3) (çizim $AB > a$ olacak

şekilde yapılmıştır). Sonra aralarındaki uzaklık a olmak üzere A dan geçen r doğrusuyla B den geçen s doğrusunu çizelim ve q ile s nin arakesiti olan C noktasını (problem 3) AC ile A noktasına birleştirelim (problem 1). Elde edilen AC doğrusu aranılan doğru olur. İspat, çizim esnasında elde edilen eşkenar dörtgenler ile bunların köşegenlerinin özelliklerinden çıkar.

Paralel doğrular çizebildiğimizden, iki kenarlı cetvelle bir noktadan bir doğruya bir dikme indirebiliriz. Böyle bir çizimi fiili olarak yapmak faydalı olur.

Problem. (a) Bir açığı iki eşit parçaya bölmek, (b) verilen bir açının herhangi bir katını bulmak.

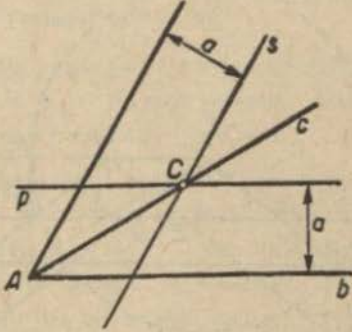


Şek. 88

Çözüm. (a) Verilen açı bAc olsun (Şekil 88). Açının b ve c kenarlarına paralel olan ve bunlara uzaklığı a olan p ve q doğrularını çizip (problem 4") bu suretle teşkil edilen eşkenar dörtgenin AB köşegenini çizelim (problem 3 ve 1). Çizimin doğruluğunun ispatı eşkenar dörtgeninin köşegeninin özelliklerinden çıkar.

(b) Verilen açının iki katını bulmak yeter. bAc , verilen açı olsun (Şekil 89). b den a uzaklığında olan b' ye paralel p doğrusunu çizip (problem 4") p ile c nin arakesitine C diyelim (problem 3). A ve C noktalarından geçmek üzere uzaklıkları a olan r ve s doğru çiftini çizelim (problem 5").

Bu suretle elde edilen $\angle Ab$ açısı, $\angle Ac$ açısının iki katı olur. İspat eşkenar dörtgenin özelliklerinden çıkar.



Şek. 89

Paralel doğrular çizebilmemiz aşağıdaki problemin çözümünü de verir :

Problem. Verilen bir noktadan geçen ve bir doğru ile verilen bir açı yapan bir doğru çizmek.

Çizimin yapılmasını bir temrin olarak okuyana bırakıyoruz.

İki kenarlı cetvel kullanma üzerine son misal olarak, daire çizimi imkânsız olan veya çizilmiş dairelerin noktalarının kullanılmasına müsaade edilmeyen hallere ait çok tipik bir problemin çözümünü ele alıyoruz.

Problem. Bir b doğrusunun, C merkez ve CM yarıçapı ile verilen bir daire ile arakesit noktalarını bulmak (Şekil 90).

Çözüm. CM yarıçapının b ye paralel olduğunu kabul edebiliriz. Eğer değilse evvelki çizimlerle paralel hale getirilebilir (bu, temrin olarak yapılmalıdır).

CM ye paralel ve bundan a uzaklığında olan c doğrusunu çizelim (problem 4"). b üzerinde keyfi bir B noktası alalım (pren-

$$CP = CQ = CM$$

buluruz. Bu ise P ve Q noktalarının CM yarıçaplı daireye ait olduğunu gösterir ve ispat sabit olur.

Öyle ise verilen veya çizimi yapılan bir doğrunun verilen veya çizimi yapılan bir daire ile olan arakesit noktalarının çiziminin evvelden yapılmış olduğunu kabul edebiliriz.

Bu işlemi daha evvel, problem 4' ye dayanarak cetvel ve pergelle yapmıştık. Şimdi aynı şeyin iki kenarlı cetvelle yapılabildiğini görüyoruz. Aynı çizim aletini kullanarak iki dairenin arakesit noktalarını da bulmak mümkündür. (Bu çizimi temrin olarak yapınız). Bu da, bir nokta, verilen veya çizimi yapılan iki dairenin arakesiti olduğu takdirde, çiziminin yapılmış olduğunu kabul etmek anlamındadır. Diğer bir deyimle bu, problem 5' nün iki kenarlı cetvelle çözülebileceği demektir. O halde temel 1-5 problemleri iki kenarlı cetvel kullanılarak çözülebilir.

Bundan da şu neticeyi çıkarırız: Cetvel ve pergelle yapılabilen bütün çizimler sadece iki kenarlı cetvelle yapılabilir.

Öğrenci bu çok önemli çizimler üzerinde tecrübe kazanmak için, merkezi verilmiyerek çizilmiş bir dairenin, sadece iki kenarlı bir cetvelle ve çizilmiş dairenin noktalarını kullanılmıyarak merkezini bulmalıdır. Öğrenciye ayrıca bir temrin olarak şu problemi incelemesi tavsiye olunur: Karşıt olarak, iki kenarlı cetvelle yapılabilen bütün çizimleri cetvel ve pergelle elde etmek kabil midir?

Benzer tarzda, çizimleri dik açı ile yapmayı ve bu alete uygun temel problemler seçmeyi düşünebiliriz. Bu halde de evvelki neticelere benzer neticeler elde edilir.

Cetvel ve pergelle mümkün olan her çizim sadece serbest hareket edilebilen dik açı ile yapılabilir.

Serbest iki dik açı, cetvel ve pergelden daha kudretlidir.

İki dik açı kullanarak yalnız cetvel ve pergelle yapılabilen çizimleri değil, bunlarla yapılamıyan çizimleri de elde edebiliriz [2], [51].

Cetvel ve pergelle, iki kenarlı cetvel, vs. gibi aletlerle çizimlerde tecrübe kazanıldıktan sonra öğrencinin bu aletlerin her biriyle lise kitaplarında rastlanan bütün çizim problemlerini çözmesi hararetle tavsiye olunur.

Bu bahiste verdiğimiz geometrik aletlere ait misaller bizi bazı genel neticelere götürür :

Geometrik aletlerin seçimi muhtelif şekilde olabilir.

Geometrik bir çizimde kullanılan aletin muadili bir temel problemler sistemidir. Her aletin kendine has esas problemleri vardır; bunlar bulununca ve listesi yapılnca bütün çizimlerin yapılabilceğı düşünülebilir.

Hangi alet (veya alet sistemi) seçilirse seçilsin bunlarla yapılan çizim matematiksel olarak doğrudur, yeterki uygun temel problem sistemi kurulmuş ve bütün çizimler mantıki olarak bu problemlere irca edilmiş olsun.

Şu hususu bir defa daha belirtelim ki, problem kavramı, bir şeyin aranılan şeyler sınıfından verilen şeyler sınıfına aktarılmış olması için gereken şartları içine alır. Bunun neticesi, bu şartları değiştirirsek başka bir probleme geçmiş oluruz.

12. Cetvel ve pergelle çözülemiyen problemlere misaller.

Evvelâ, belirli aletler kullanarak bazı çizim problemlerinin çözülemediğı kavramını ele alalım. Evvelce de söylediğimiz gibi, bir problemin belirli aletlerle çözülemediğinin ispatı hiç de kolay değildir.

Geometrik çizimlere dair zor problemler 19. yüzyılın ikinci yarısında çözülmüş olup bu da ancak analiz ve yüksek cebirin elemanter olmıyan kısımlarının kullanılmasıyla yapılabilmektedir.

Aşağıdaki misalde çözümün yapılamıyacağının elemanter bir ispatını göreceğiz.

Teorem. *Sadece cetvel kullanarak verilen bir dairenin merkezini bulmak imkânsızdır.*

Tabii dairenin merkezinin verilmediğini kabul ediyoruz.

İspat. İspata geçmeden evvel, merkezi izdüşümünün ispatta kullanılacak özelliklerini verelim ⁽¹⁾.

Merkezi izdüşümde (Şekil 125), bir π düzlemine ait doğruların bir π' düzlemi üzerindeki izdüşümleri doğrulardan ibarettir. Ancak, π' düzleminde izdüşümü bulunmıyan π ye ait bir a doğrusu ile, π nin hiç bir doğrusunun izdüşümü olmıyan π' ye ait bir c' doğrusu mevcuttur. Bu a ve c' doğruları π ve π' düzlemlerinin p arakesitine paraleldir.

Her iki düzlemin p ye paralel olmıyan her doğrusu üzerinde de özel bir nokta mevcut olup bu noktalar adı geçen doğruların özel doğrularla veya π nin a ve π' nün c' doğrusuyla arakesit noktalarıdır.

Diğer taraftan, π düzlemi üzerindeki bir a dairesinin (Şekil 124) π' üzerindeki izdüşümü bir a' dairesi olacak şekilde S izdüşüm merkezi ve π' düzlemi uygun şekilde seçilebilir (bu, problemimiz için önemlidir). Ayrıca, a dairesinin K merkezi a' nün merkezine düşmiyecek şekilde S izdüşüm merkezi ve π' düzlemi sonsuz şekilde seçilebilir. Bu, ispatımızda kullanacağımız esas özelliktir.

⁽¹⁾ Merkezi izdüşüm kavramı ile bu özelliklerin elemanter ispatı 13. te verilcektir.

İspatı, olmayana ergi yolu ile yapacağız.

Verilen dairenin K merkezinin cetvelle çizilerek bulunmuş olduğunu kabul edelim.

Çizimin bu suretle yapılması demek, çizimi yapılmış bazı noktalardan sonlu sayıda doğruların çiziminin yapılmış olması, bu noktaların da bazı doğruların ya kendi aralarında veya verilen a dairesiyle arakesit olarak alınmış olmaları ve nihayet K merkezinin, bulunmuş olan p ve q gibi iki doğrunun arakesiti olarak belirtilmiş olması demektir.

Çizimle, bu suretle, doğru çizmeye yarayan sonlu sayıda nokta ile, arakesitleriyle noktalar veren sonlu sayıda doğrular belirtmiş oluyoruz.

Çizdiğimiz hiç bir nokta özel nokta olmamak ve hiç bir doğru özel doğru olmamak üzere, verilen a dairesini bir S izdüşüm merkeziyle bir π' düzlemi üzerine bir a' dairesi olarak düşürelim.

S izdüşüm merkezi ile π' düzleminin seçimi sonsuz şekilde mümkün olduğundan ve çizimi yapılan noktalar ile doğruların sayısı sonlu olduğundan S ve π' nün bu şekilde seçimi daima mümkündür. Bu merkezî izdüşümde, π düzlemindeki özel doğrunun dairemizden ve çizimi yapılmış olan noktalardan kâfi derecede uzakta olduğunu kabul edebiliriz.

Çizilmiş nokta ve doğrular şebekesini dairemizle birlikte S merkeziyle π' düzlemine düşürecek olursak π' üzerinde a' dairesiyle, benzer bir noktalar ve doğrular şebekesini elde ederiz.

Şimdi p ve q doğrularıyla bunların arakesit noktaları olarak a dairesinin K merkezini veren çizimi tamamlayalım.

Çizimini yaptığımız her doğru ve her noktanın π' düzlemi üzerinde bir karşıtı bulunmakta ve bu suretle π deki çizim, olduğu gibi π' ye kopye edilmiş bulunmaktadır.

Nihayet, π de nihai p ve q doğruları çizilmiş ve bunların π

deki p' ve q' karşılıkları elde edilmiş ve π deki mantıki esas ve çizimin bütün safhaları π' de aynen tekrarlanmışlardır. p ve q doğruları a dairesinin K merkezinde kesiştiğinden netice olarak p' ve q' de a' nün K' merkezinde (K nin karşısında) kesişeceklerdir. Halbuki bu doğru değildir, zira K' noktası a' dairesinin merkezi bulunmamaktadır.

Bir cetvelle bir dairenin merkezinin bulunabildiği faraziyesi bir çelişmezlik yarattığından böyle bir çizimin imkânsız olduğu neticesine varmış oluruz.

İhtar. Öğrenciler ekseriya, matematiksel bir şeyin *varlığı* ile bu şeyin fiili olarak *bulunmasının* veya özel bir yolla çiziminin yapılmasını karıştırmaktadırlar. Bunların ayrı iki problem olduğu hiç bir zaman hatırdan çıkarılmamalıdır. Evvelki teorem buna bir misal teşkil etmektedir.

Okuyucu, bir temrin olmak üzere, bir a doğrusuna bunun dışındaki bir A noktasından yalnız cetvel kullanarak paralel doğru çizilemeyeceğini ispat etmelidir.

İmkânsızlığı gösteren bu verilen ispattan, önemli diğer bir netice çıkarabiliriz: Cetvel ve pergelle yapılabilen çizimleri cetvel ve *merkezi verilmeyen* sabit bir daireyi kullanarak elde etmek imkânsızdır. Bunu meselâ, şimdi gördüğümüz veçhile, verilen bir dairenin merkezinin yalnız cetvelle bulunamamasından görmek mümkündür. Halbuki merkezi cetvel ve pergelle bulmak kabil olmaktadır. Evvelce de söylenildiği gibi, cetvel ve pergelle yapılabilen bütün çizimler *merkezi verilen* sabit bir daire ve bir cetvel yardımıyla veya Steiner çizimleri denilen çizimlerle bulmak mümkündür [53], [2].

Cetvel ve pergelle çözülebilen veya çözülemiyen bazı problemleri kısaca gözden geçirelim. Geometrik olarak ifade edilen bu problemler cebir diline çevrilir ve esas çözümlerini orada bulur.

Çizim problemlerinin cebirsel metotla çözümlerinin esasları liseden bilinmektedir [17]. $a, b, c, \dots$ verilen doğru parçaları ise

$$a + b; a - b (a > b); \sqrt{ab}; \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b)$$

gibi doğru parçalarının cetvel ve pergelle nasıl çizileceğini bilmekteyiz.

Yine cetvel ve pergelle kullanarak ikinci derece denkleminin köklerini muhtelif tarzda bulmasını da bilmekteyiz; bu halde denklemin katsayıları genel olarak sayı yerine doğru parçası olarak verilir ve denklem, p, q doğru parçaları olmak üzere

$$x^2 + px + q_1^2 = 0; \quad x^2 + px - q_1^2 = 0$$

şeklinde homogen olarak alınır.

Tabii bu ikinci derece denklemlerinin kökleri, yukarıda verilen ifadelere tekabül eden çizimlerle de bulunabilir. Eğer bir çizim problemi bir doğru parçasının çizimine çevrilirse ve bu doğru parçası derecesi ikiden yüksek olmıyan bir denklemin kökü olarak alınabilirse problemin cetvel ve pergelle çözülebileceği neticesine varılmış olur. Fakat bu adi bir netice olup cetvel ve pergelle *çözülemeyen* problemlerin ufak da olsa bir sınıfını vermekten uzaktır.

Problemin tümünü «şekil uzayı» ndan «sayı uzayı» na tasvir etmeden önce aşağıdaki hususa işaret edelim. Çizimdeki her problem şu şekle irca edilebilir: Sonlu sayıda $a, b, c, \dots$ doğru parçaları verilmişken bir veya daha fazla $x, y, z, \dots$ doğru parçalarının çizimini yapmak. Verilen doğru parçalarını üçgen veya çokgenlerin kenarları, dairelerin yarıçapları, vs. olarak verilmiş kabul ediyoruz. Aranılan şekli de böyle elemanlardan ibaret itibar ediyoruz.

Bu iddianın doğruluğuna kendimizi, üzerinde çizim yapılan düzlemi

$$w = u + iv$$

geometrik temsilini kullanarak karmaşık sayılar cismine tasvir etmek suretiyle daha iyi inandırabiliriz.

Burada, bir cümlemin diğer bir cümleye olan bire-bir bir tasvirine ait bir misal elde etmiş oluyoruz. Cümleden biri noktalardan, öteki ise sayılardan ibaret bulunmaktadır.

Bu suretle, karteziyen koordinatların ithaliyle bütün şekiller sayılarla ifade edilmiş olurlar. Meselâ, bir daire $z_0 = x_0 + iy_0$ merkezi, veya daha basit olarak (x_0, y_0) ve r yarıçapı ile; bir doğru $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ noktalarıyla veya (x_1, y_1) , (x_2, y_2) nokta çiftiyle v.s. olarak verilebilir.

$z = x + iy$ sayıları da, eksenler üzerinde uzunlukları x ve y olan doğru parçalarıyla belirtilir.

Ohalde her çizim problemi, verilen doğru parçalarından başlayıp, bazı yeni doğru parçalarının çizimine irca edilmiş bulunuyor.

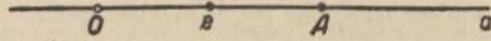
$a, b, c, \dots$ ve $x, y, z, \dots$ bir a doğrusu üzerinde belirli bir O noktasından itibaren alınmış doğru parçaları olsun. Bir a doğrusunun her A noktasına bir OA doğru parçası tekabül ettirebiliriz; bunun karşısı da doğrudur. Bir tarafta alınan doğru parçalarını pozitif ve diğer tarafta alınanları da negatif itibar edelim. Bu doğru parçalarından bir tanesi birim olarak seçildiğinde bildiğimiz «sayı eksenini» ni elde ederiz.

Evvelâ tek bir e doğru parçasını alalım ve bunun verilmiş olduğunu kabul edelim.

e yi sayı eksenimizin *birim* doğru parçası olarak alalım ve şu soruyu soralım: e birim doğru parçasını verilmiş kabul ettiğimizde sayı ekseninin hangi noktaları cetvel ve pergelle çizilebilir?

Bütün doğru parçalarının 0 noktasından itibaren alındığını kabul ettiğimizden, bunların uc noktalarını veya bazı noktaları belirtmek yeter.

Eğer e birim uzunluğu verilmişken cetvel ve pergelle çizilebilen noktaları bulabilirsek (Şekil 91) problemin, yalnız e biriminin mevcut olduğu özel hal için çözümünün yapılması kalır. Doğru parçaları yerine sayılar alabiliriz.



Şek. 91

Çizimlerde kullanılan *keyfi* elemanlar keyfilikleri dolayısıyla *rasyonel* olarak seçilebilir.

OE birim uzunluğunu ele alarak herhangi n tam sayısını

$$n \cdot Oe = Oe + Oe + \dots + Oe$$

doğru parçasıyla gösterebiliriz.

Ohalde tam sayılar halkasından herhangi bir eleman cetvel ve pergelle çizilebilir.

$x = n/m$ sayısını veya doğru parçasını, $e = 1$ birim uzunluk olmak üzere, $x/e = n/m$ orantısıyla kolayca çizebiliriz.

Ohalde, her rasyonel sayı veya R_0 rasyonel sayılar (veya doğru parçaları) cisminin herhangi bir elemanı cetvel ve pergelle çizilebilir.

Her noktada yoğun olan R_0 rasyonel sayılar cisminin sayılabilir olduğunu ve bunun neticesi bu cismin bütün reel sayıları (doğru parçalarını) vermediğini biliyoruz [40].

Bir a rasyonel sayısını alırsak, $x = a$ sayısını veya a ile e nin geometrik ortalaması olan ve $x/a = e/x$ ile verilen $x^2 = ae$ doğru parçasını çizebiliriz. Şimdi, $\sqrt{k_0}$ kare kökü yadrasyonel

olan rasyonel k_0 sayısını alalım. Bu k_0 sayısının çizilebileceği bilinmektedir.

Bunun gibi,

$$a_0 + b_0 \sqrt{k_0}, \quad a_0 \in R_0, \quad b_0 \in R_0$$

olarak verilen sayıların çizimi de kolaylıkla yapılabilir.

k_0 sabit bir rasyonel sayı olmak üzere a_0 ve b_0 sayılarını R_0 rasyonel sayılar cümlesinde değiştirirsek bu sayıların toplam, fark, çarpım ve bölümleri aynı cümleye ait olur. Hakikaten

$$x_1 = a_0' + b_0' \sqrt{k_0} \quad \text{ve} \quad x_2 = a_0'' + b_0'' \sqrt{k_0} \quad \text{ise}$$

$$x_1 \pm x_2 = (a_0' \pm a_0'') + (b_0' \pm b_0'') \sqrt{k_0};$$

$$x_1 \cdot x_2 = (a_0' + b_0' \sqrt{k_0})(a_0'' + b_0'' \sqrt{k_0}) =$$

$$= (a_0' a_0'' + b_0' b_0'' k_0) + (a_0' b_0'' + a_0'' b_0') \sqrt{k_0};$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_0' + b_0' \sqrt{k_0}}{a_0'' + b_0'' \sqrt{k_0}} = \frac{(a_0' + b_0' \sqrt{k_0})(a_0'' - b_0'' \sqrt{k_0})}{a_0''^2 - k_0 b_0''^2}$$

$$= \tilde{a}_0 + \tilde{b}_0 \sqrt{k_0}$$

Burada $a_0''^2 - k_0 b_0''^2 \neq 0$ caridir, zira aksi halde $\sqrt{k_0}$ rasyonel olur. Ayrıca $b_0'' \neq 0$ dır.

Bu sayılar rasyonel işlemlere göre kapalı olduğundan bir R_1 cismini teşkil ederler ve

$$R_0 \subset R_1$$

doğrudur.

R_1 cismi, R_0 cisminde $\sqrt{k_0}$ sayısının katılmasıyla elde edilmiştir. R_1 ara bir cisimdir. R_1 cisminin sayıları da cetvel ve pergelle çizilebilir.

Şimdi R_1 cisminden, $\sqrt{k_1}$ bu cisme ait olmamak üzere, bir

k_1 sayısı seçelim, diğer bir deyimle, $\sqrt{k_1}$ sayısı R_1 de indirgenemez olsun. $\sqrt{k_1}$ sayısını R_1 cismine katarak

$$a_1 + b_1 \sqrt{k_1}$$

şeklindeki sayıları içine alan yeni bir R_2 ara cismini elde ederiz. Burada a_1 ve b_1 , R_1 in değişen elemanları, k_1 ise *sabit* bir elemanıdır.

İspat, evvelki hesapların bir tekrarıdır ve

$$R_1 \subset R_2$$

caridir, zira $b_1 = 0$ için $a_1 + 0\sqrt{k_1} \in R_1$ doğrudur. R_2 cismine ait olan sayılar da cetvel ve pergelle çizilebilir.

Bir eleman katılmasıyla bir cismin genişletilmesi sonsuz olarak devam ettirilebilir ve elde edilen her yeni cismin elemanları cetvel ve pergelle çizilebilir.

Eğer verilen $a, b, c, \dots$ doğru parçalarının sayısı 1 den fazla ise, rasyonel işlemlerle, bu doğru parçalarını içine alan en küçük K_0 cismine ait olmıyan $\sqrt{k_0}$ sayısını katmakla (halbuki $k_0 \in K_0$) daha geniş bir cisim elde edebiliriz.

Şimdi bu genişletmeleri şöylece hülâsa edebiliriz:

1. Rasyonel R cismine bütün $a, b, c, \dots$ doğru parçalarını katar ve K_0 cismini elde ederiz.

2. K_0 cismine, indirgenemez olan $\sqrt{k_0}$ kökünü katar ($k_0 \in K_0$) ve K_1 cismini elde ederiz.

3. K_1 cismine, indirgenemez $\sqrt{k_1}$ kökünü katar ($k_1 \in K_1$) K_2 yi buluruz.

.....

$n + 1$. K_{n-1} cisminde ise indirgenemez olan $\sqrt{k_{n-1}}$ kökünü katarak ($k_{n-1} \in K_{n-1}$) K_n cismini elde ederiz.

$a, b, c, \dots$ doğru parçalarından başlayarak bu suretle «genişletilmiş» bir cisimdeki herhangi bir doğru parçasının çizimini yapmamız mümkün olur.

Şimdi şu sorulabilir: $a, b, c, \dots$ doğru parçalarından başlamak suretiyle cetvel ve pergelle çizilebilen fakat genişletilmiş hiçbir cisme ait olmıyan doğru parçaları var mıdır?

Bu sorunun cevabı şudur: $a, b, c, \dots$ doğru parçalarından başlayarak cetvel ve pergelle çizimi mümkün olan her doğru parçası istisnasız, bu genişletilmiş cisimlerden birine ait olur.

Bunun böyle olduğunu görmek için, cetvel ve pergel çizimlerinin bu «genişletilmiş» cisimlerin dışına çıkmadığını göstereceğiz. Bir K cismindeki her sayıyı çizibildiğimizi kabul edelim ve cetvel çizimlerini düşünelim.

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) iki noktanın koordinatları ise ve bu koordinatlar K cismine ait ise, bu iki noktadan geçen doğrunun

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

denklemindeki katsayılar K cismine ait olur.

Eğer, katsayıları K ya ait olan

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

doğrularının arakesit noktasını bulmak istersek, arakesit

$$x = \frac{C'B - CB'}{AB' - A'B} \quad y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$$

olduğundan bunların K ya ait olduğunu görürüz.

Böyle iki nokta arasındaki uzaklık veya bu noktaların belirlediği doğru parçası

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ile belirlidir ve kök içindeki ifade K cismine ait bulunmaktadır. d nin çizimi pergel kullanılmasını gerektirir.

K cisminden başlayarak cetvelle çizimi yapılabilen her doğru parçası (sayı), K nın «genişletilmiş» cisimlerinden birine aittir.

Pergel çizimlerine geçelim.

Merkezi (x_1, y_1) ve noktalarından biri (x_2, y_2) olan dairenin denklemi

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

veya

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y - x_2^2 + 2x_1x_2 - y_2^2 + 2y_1y_2 = 0$$

olup katsayıları K cisminde bulunmaktadır.

Eğer

$$x^2 + y^2 - ax - by + c = 0,$$

$$x^2 + y^2 - a'x - b'y + c' = 0$$

dairelerinin arakesit noktalarını bulmak istersek, denklemleri taraf tarafa çıkararak, daire ve doğru denklemlerinden ibaret denk

$$x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$$

$$(a' - a)x + (b' - b)y + (c - c') = 0$$

sistemini buluruz.

Bu sistemi çözersek, p, q, s K cismine ait olmak üzere

$$p + q\sqrt{s}$$

sayısını elde ederiz. Bu da arakesitin koordinatlarının K nin bir üst cismine ait olduğunu ifade eder.

İki nokta arasındaki uzaklıkta bu nevi koordinatlar mevcut olduğundan, s ler farklı bile olsa, uzaklık K nin bir üst cismine ait olur. Bunun sağlanması da zor bir iş değildir.

Bu arada daire ile doğrunun da arakesitini incelemiş bulunuyoruz.

Ohalde, cetvel ve pergel çizimleriyle, belirli doğru parçalarından elde edilen bir cismin üst cisimlerinde bulunmayan hiç bir doğru parçası elde edilemez.

Şimdi, a, b, c katsayıları rasyonel olan üçüncü dereceden

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

denkleminin köklerine dair bir teorem ispatlıyacağız.

Teorem. *Eğer katsayıları rasyonel olan üçüncü dereceden bir denklemin rasyonel olan hiç bir kökü yoksa, bu denklemin hiçbir kökü, R rasyonel sayılar cisminden başlayarak cetvel ve pergelle elde edilemez.*

İspat olmıyana ergi ile yapılacaktır. Verilen denklemin x kökünün cetvel ve pergelle çizilebileceğini kabul edelim. Bu takdirde x kökü, R nin

$$R, R_1, \dots, R_{n-1}, R_n$$

üst cisimlerinden bir R_n cismine ait olur.

$x \in R_n$ olduğunu fakat hiçbir kökün R_{n-1} 'e ait olmadığını ($x \in R_{n-1}$ ⁽¹⁾ kabul edebiliriz; zira eğer köklerden biri R_{n-1} de olsaydı bu kök üzerinde dururduk ve cisim zincirini sadece kısaltmış olurduk. Ayrıca cisim zincirimiz sadece R den ibaret olmaz, çünkü köklerimiz kabul icabı rasyonel sayı değildir.

⁽¹⁾ $\in$ sembolü x 'in R_{n-1} 'e ait olmadığını ifade ediyor.

Ohalde $n \geq 1$ olup $x \in R_n$ dir.

x kökünü

$$x = p + q\sqrt{k_{n-1}}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $k_{n-1} \in R_{n-1}$ olup p ve $q \in R_{n-1}$ dir ve $\sqrt{k_{n-1}}$ sayısı R_{n-1} in elemanı bulunmamaktadır.

Şimdi

$$x = p + q\sqrt{k_{n-1}},$$

denklemin kökü olduğu takdirde, R_n ye ait olan

$$y = p - q\sqrt{k_{n-1}}$$

sayısının da aynı denklemin kökü olduğunu göstereceğiz.

$x \in R_n$ den x^3 ve x^2 nin ve netice olarak

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

nin R_n de olduğu çıkar. Bu da

$$x^3 + ax^2 + bx + c = r + s\sqrt{k_{n-1}}$$

eşitliği demektir ve $r, s \in R_{n-1}$, $\sqrt{k_{n-1}} \in R_{n-1}$ caridir.

Kolaylıkla

$$y^3 + ay^2 + by + c = r - s\sqrt{k_{n-1}}$$

olduğu gösterilebilir.

x sayısı denklemin kökü olduğundan

$$r + s\sqrt{k_{n-1}} = 0$$

yazarız.

Eğer burada $s \neq 0$ ise $\sqrt{k_{n-1}} = -r/s$ den $\sqrt{k_{n-1}}$ in R_{n-1} 'e ait olduğu çıkar. Fakat bu doğru olmadığından $s = 0$ dir. Bu da $r = 0$ verir.

Ohalde $x = p + q\sqrt{k_{n-1}}$ denklemin bir kökü ise
 $y = p - q\sqrt{k_{n-1}}$ de denklemin bir köküdür.

Bu kökler birbirinden farklıdır, zira eğer eşit olsalardı

$$x - y = 2q\sqrt{k_{n-1}} = 0 \text{ veya } q = 0$$

elde edilirdi ve bu $x = p \in R_{n-1}$ verirdi. Halbuki bu doğru değildir.

Diğer taraftan üçüncü derece denkleminin köklerine ait

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

özeliliğinden

$$x_3 = -a - x - y$$

veya

$$x_3 = -a - 2p$$

elde edilir ki, bu $x_3 \in R_{n-1}$ ifade eder. Bu suretle kökleri içine alan en küçük cismin R_{n-1} olduğu çıkar ve bir çelişmezliğe varılarak teorem ispatlanmış olur.

Şimdi, meşhur bazı eski problemleri ele alacağız [22], [50].

Açıyı üçe bölme. Herhangi bir açıyı üç eşit parçaya bölmek.

Bu problemin cetvel ve pergelle çözülemeyeceğini ispatlıyacağız. Evvelâ şu hususu belirtelim. Bir açı verilmişken hipotenüsü 1 olan dik üçgenin bir kenarı olarak kosinüs, ve karşıt olarak, cosinüs verilmişken açı çizilebilir.

Verilen açı α , cosinüsü de a olsun

$$a = \cos \alpha.$$

$x = \cos \alpha/3$ ün çizimi bahis konusudur.

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}$$

eşitliğinden, kökü $\cos \alpha/3$ olan

$$a = 4x^3 - 3x$$

denklemini elde ederiz.

Açıyı üçe bölme problemi, üçüncü derece denkleminin kökünün çizimine ait probleme denk bulunmaktadır.

$a (|a| < 1)$ nın hangi değerleri için bu denklemin rasyonel kökleri olmadığının incelenmesi cebire ait bir problemdir. Fakat maksada varmak için sadece bir açının bile cetvel ve pergelle üçe bölünemeyeceğini göstermek yeter. Bu misalle, genel halde bir açının cetvel ve pergelle üç eşit parçaya bölünemeyeceği ispatlanmış olur.

$\alpha = 60^\circ$ olsun. Bu takdirde $\cos \alpha = 1/2$ olup denklem

$$8x^3 - 6x = 1$$

dir.

$z = 2x$ koyarak denklemi

$$(**) \quad z^3 - 3z = 1$$

olarak sadeleştirilim,

Bu denklemin hiçbir rasyonel kökü olmadığından köklerini cetvel ve pergelle çizmek mümkün değildir.

(**) denkleminin, p ve q tam sayıları aralarında asal olmak üzere, $z = p/q$ şeklinde rasyonel kökü olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$p^3 - 3pq^2 = q^3$$

elde edilir ve p nin q^3 ü böleceği neticesi çıkar. Bu ise $p \neq \pm 1$ şartıyla p ve q nin ortak bölüneni mevcut olması demektir. Aynı şekilde, $p^3 = 3pq^2 + q^3$ de q ile bölünebilir ve $q \neq \pm 1$ şartıyla p ve q nün ortak bölüneni olacağı çıkar.

p ve q aralarında asal sayılar olduğundan ± 1 den farklı ortak bölünenleri olamaz ve p, q sayıları ± 1 'e eşit olurlar ve netice olarak $z = \pm 1$ elde edilir. Halbuki $z = 1$ ve $z = -1$ sayı-

kenariyle arakesitini C ile gösterip, C den, A ve B noktaları karşıt olarak b doğrusunun uzantısı ve daire üzerine gelecek şekilde bir doğru geçirelim. Elde edilen BAO açısı verilen boc açısının üçte birine eşit olur.

İspat. B yi O ya birleştirerek $AB = OB = OC = a$ elde ederiz. İkizkenar üçgenlerden ve dış açıortaya ait bir teoremden $\alpha = \beta + x$; $\beta = 2x$ yazarak $x = \alpha/3$ buluruz.

Bu çözüm Archimed'e aittir [50].

Meşhur eski problemlerden ikincisine geçelim:

Kübün iki katını bulmak. Kenarı a olan bir küb verildiğinde hacmi bunun iki katı olan kübün kenarını bulmak.

Bu problemin *cetvel ve pergelle* çözülemeyeceğini göstereceğiz. Çözüm, kübün kenarı a olduğuna göre

$$x^3 = 2a^3$$

denkleminin çözümüne irca edilir.

Verilen kübün kenarı birim olarak alındığında denklem kat-sayıları rasyonel olan

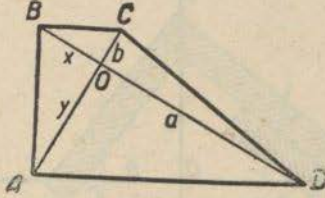
$$x^3 - 2 = 0$$

denklemine döner. Bu denklemin ise rasyonel kökleri olmadığı kolaylıkla gösterilebilir. Ohalde $a=1$ doğru parçasından başlamak suretiyle kökleri *cetvel ve pergelle* çizmek imkânsızdır.

Şimdi *serbestçe hareket eden iki dik açı* kullanarak problemin matematiksel sıhhatli çözümünü inceliyelim. Evvelâ, köşegenleri dik olan dik bir yamuğa ait yardımcı bir teorem ispatlıyalım (Şekil 93). Köşegenleri dik olan dik bir yamukta köşegenlerin parçaları geometrik bir dizi teşkil ederler:

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{b}$$

$ABCD$ yamuğunda DB AC köşegenleri birbirine dik olsunlar ve A, B açıları da dik açı bulunsunlar. Şekilden, yüksekliği



Şek. 93

AO olan ABD dik üçgeninden $a/y = y/x$ ve yüksekliği x olan ABC üçgeninden ise $y/x = x/b$ elde ederiz. [Bu suretle yardımcı teorem ispatlanmış olur.]

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{b}$$

den derhal

$$y^2 = ax \quad \text{ve} \quad x^2 = by$$

ve bunlardan da

$$x = \sqrt[3]{ab^2} \quad \text{ve} \quad y = \sqrt[3]{a^2b}$$

elde eder ve $a=2, b=1$ koyarak

$$x = \sqrt[3]{2}$$

veya

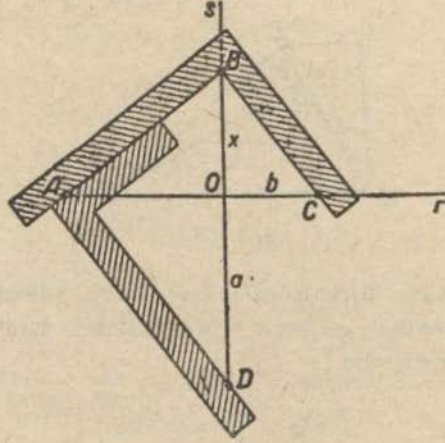
$$x^3 - 2 = 0$$

denkleminin bir çözümünü buluruz.

Yardımcı teoremi kullanarak iki dik açı yardımıyla x doğru parçasının çizimini veren bir usul bulmuş oluyoruz.

Birbirine dik olan r ve s doğruları üzerinde ortak O noktalarından itibaren $OC = b = 1$ ve $OD = a = 2$ alalım (Şekil 94). Dik iki açıyı, köşegenleri r ve s doğruları olmak ve kendileri

yamuk teşkil etmek üzere yerleştirelim. Bu takdirde $OB = x$ aranılan doğru parçasından ibarettir.



Şek. 94

Bu çözüm Plato'ya atfedilmektedir [50].

(*) denklemlerinden, aranılan doğru parçasının, denklemleri

$$y^2 = 2x \text{ ve } x^2 = y$$

olan parabollerin A arakesit noktasının apsisi olduğu da görülmektedir (Şekil 95).

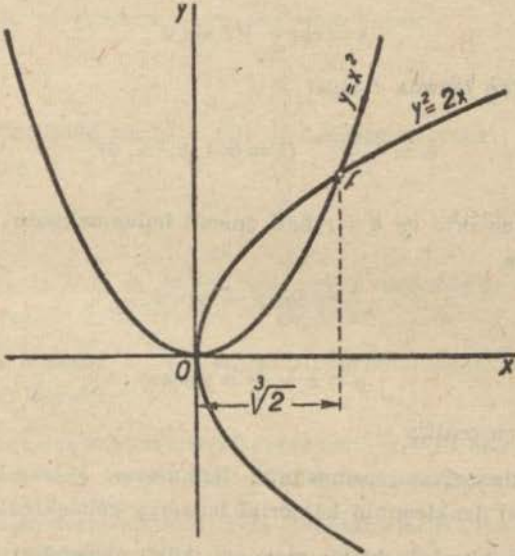
Serbest dik iki açı kullanarak katsayıları rasyonel olan üçüncü ve dördüncü dereceden herhangi bir denklemin köklerini bulmak mümkündür [2]. Bu suretle kübün iki katını bulma problemini kapatmış bulunuyoruz.

Düzgün 7 - gen. Düzgün 7 - genin çizimini yapmak.

Bu problemin de cetvel ve pergelle çözülemeyeceğini ispatlıyacağız. Düzgün bir çokgenin çizimi, bilindiği veçhile, 1'in köklerini bulmağa veya

$$x^n - 1 = 0$$

denklemini çözmeye denktir.



Şek. 95

Misalimizde $n = 7$ olup köklerden biri 1'e eşit bulunmakta [33] ve diğerleri

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

denklemini sağlamaktadırlar.

Bu bir karşıt denklem olup, z^3 ile bölündüğünde

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0,$$

ve $z + (1/z) = y$ konulduğunda

$$(z) \quad y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

elde edilir.

Birimin 7 nci dereceden kökü

$$z = \cos \phi + i \sin \phi$$

şeklinde olup burada ϕ açısı

$$\phi = \frac{2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

olarak bilinmekte ve $k = 1$ hali önemli bulunmaktadır.

Ayrıca

$$\frac{1}{z} = \cos \phi - i \sin \phi,$$

$$y = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \phi$$

eşitlikleri mevcuttur.

Aranılan açının cosinüsünün bulunması, katsayıları rasyonel olan (z) denkleminin köklerini bulmaya gelmektedir.

(z) denkleminin hiçbir rasyonel kökü olmadığını göstereceğiz. p ve q ($q \neq 0$) aralarında asal tam sayılar olmak üzere denklemin $y = p/q$ şeklinde rasyonel bir kökü olduğunu kabul edelim. Bu değeri (z) denkleminde yerine koyarsak

$$p^3 + pq^2 - 2pq^2 - q^3 = 0$$

elde edilir ki p nin q ile, q nün de p ile bölünebileceği çıkar. p ve q aralarında asal olduklarından $p = \pm 1$, $q = \pm 1$ ve dolayısıyla $y = \pm 1$ elde edilir. Halbuki $y = \pm 1$ sayıları (z) denkleminin kökleri değildir.

(z) denkleminin kökleri rasyonel olmadığından düzgün 7-genin cetvel ve pergelle çiziminin mümkün olmadığı çıkmış olur.

Bunun gibi cetvel ve pergelle ne düzgün 9 - geni ne de kenar sayısı bunun 2^n katı olan düzgün çokgeni çizmek mümkündür.

Gauss bir teorem ispatlayarak cetvel ve pergelle çizilebilecek düzgün çokgenlerin kenar sayısının ancak

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_s$$

olabileceğini ifade etmiştir. Bu ifadedeki p_i sayıları farklı asal sayılar olup

$$p_i = 2^{2^k} + 1$$

şeklinde dir.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ halleri asal sayı vermektedir ve bu asal sayılar sırasıyla 3, 5, 17, 257 ve 65537 dir.

Buna mukabil $2^{2^5} + 1$ sayısı 641 ile bölünmekte olup (Euler) birleşik bir sayıdır.

Meşhur Rus matematikçisi Pervoushin $k = 12$ halinde 114.689 ve $k = 23$ halinde ise 167.772.161 bölenlerini bulmuştur.

Bölenler derin matematiksel muhakemelerle elde edilmişlerdir. $2^{2^{12}} + 1$ ve $2^{2^{23}} + 1$ sayılarının fevkalâde büyüklüğünden bu sayıların tam olarak yazılması çok zaman istemektedir. Halbuki satranç probleminde gereken buğday tanesi sayısı ancak $2^{64} - 1$ dir.

k nın hangi kâfi derecede büyük değerleri için bileşik sayı elde edileceği ve $2^{2^k} + 1$ şeklinde sayılar arasında sonsuz sayıda asal sayı mevcut olup olmadığı bilinmemektedir.

İşaret ettiğimiz bu noktalarla meşhur eski problemleri kapatıyoruz. Bu meyanda *dairenin kuadratürü* de, diğer bir deyimle r yarıçaplı bir daire ile eşdeğerli olan bir karenin x kenarının cetvel ve pergelle çizimi de zikredilebilir. Bu problem $x^2 = nr^2$ denkleminde veya $r = 1$ koyarak

$$x = \sqrt{\pi}$$

doğru parçasının cetvel ve pergelle çizimine denktir. Bu çizim imkânsız olup ispatı matematiksel analize ait bulunmaktadır [27] [44].

BÖLÜM III

ŞEKİLLERİN DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde geometrideki fonksiyonel bağlantıları ve şekillerin tasvir ve dönüşümlerini inceleyeceğiz ve özel olarak düzlemin düzleme ve uzayın uzaya dönüşüm kavramını, ayrıca, düzlemin uzaya ve düzlemin düzleme olan bazı özel dönüşümlerini ele alacağız. Bu özel dönüşümler geometrik çizim teorisiyle Lobachevski geometrisinin etüdünde tatbik yeri bulacaklardır. Bölümün sonunda da dönüşümlerin grup kavramı ile grupun genel tarifi yer alacaktır.

13. Bir şeklin diğer bir şekle tasviri.

Eğer bir Φ şeklinin her A noktasına, bir kaide veya bir kanunla bir Ψ şeklinin belirli bir B noktası tekabül ettirilirse, Φ şekli Ψ şeklinin içerisine tasvir ettirilmıştır denir ve bu $B = f(A)$ ile gösterilir.

Bu tasvirde B noktasına A nın tasviri adı verilir, ve değişkenin Φ şeklinin bütün noktalarını gezdiği düşünülerek B noktasına f nin A ya tekabül eden değeri olarak bakılır. Bu ise, ilk defa Lobachevski (1834) ve sonra Dirichlet (1837) tarafından verilen fonksiyon genel tarifiyle uygunluk teşkil eder.

Φ şeklinin noktalarından tasvirle elde edilen bütün tasvir noktalarının Φ cümlesine, Φ nin f dönüşümü altında tasviri adı verilir.

Şeklin bu tasviri $f(\Phi)$ veya $\Phi' = f(\Phi)$ olarak gösterilir.

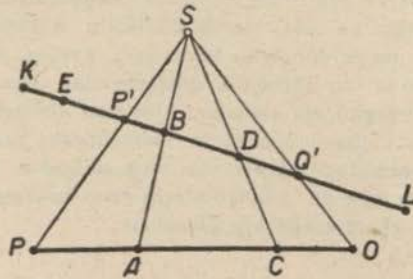
Bir Φ şeklinin bir Ψ şekli içerisine tasvirinin önemli

özel bir hali, Ψ şeklinin her bir noktasının Φ ye ait en aşağı bir noktanın tasviri olduğu haldir.

Bu takdirde, Φ şekli Ψ şekli üzerine tasvir edilmiştir denir, ve Φ nin $f(\Phi)$ ye tasviri bu nevidendir.

Bu basit fakat gayet önemli kavramlara kendimizi alıştırmak için bir kaç misal alalım.

PQ ve KL verilen iki doğru parçası olsun (Şekil 96). Şekil-



Şek. 96

de bir S noktası seçip PQ doğru parçasının her A noktasına, SA doğrusu yardımıyla KL doğru parçasının B noktasını tekabül ettirelim. Bu takdirde PQ doğru parçasının P ve Q uç noktalarına P' ve Q' noktaları tekabül eder. Bu suretle PQ doğru parçası KL doğru parçasının içerisine tasvir edilmiş olur.

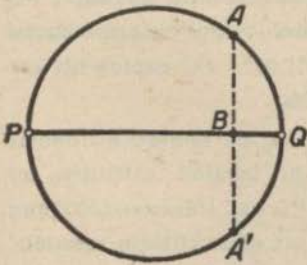
B noktası A nın, D , P' , Q' noktaları da karşıt olarak C , P , Q noktalarının tasvirleridir.

Verilen tasviri f ile gösterirsek bu tekabülleri $B=f(A)$, $D=f(C)$, $P'=f(P)$, $Q'=f(Q)$ olarak ifade ederiz.

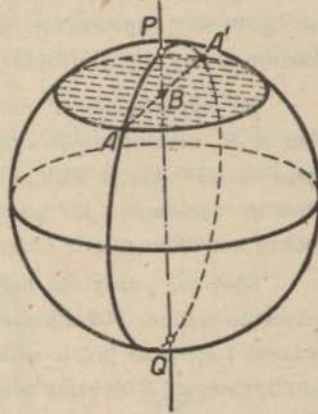
PQ doğru parçasının tamamının tasviri $P'Q'$ doğru parçası olup $P'Q'=f(PQ)$ dır.

P' doğru parçasının, bir defa daha, KL doğru parçasının içerisine tasvir edildiğine işaret ediyoruz. P' nün KL üzerine

tasvir edildiğini söyleyemeyiz, çünkü, meselâ E , K ve L noktaları PQ doğru parçasının hiç bir noktasının tasviri değildir. Bu sebeple PQ nün $P'Q'$ içerisine tasviri tabirini kullanıyoruz.



Şek. 97



Şek. 98

Bu misalde şekillerin tasvirine ait verdiğimiz bütün kavramları ele almış isek de bir misal bütün hususları vermekten uzaktır. Eğer KL doğru parçası yerine S noktasını almış olsaydık ve PQ doğru parçasının her noktasına S noktasını tekabül ettirseydik bir şeklin diğer bir şekle tasviri halini elde ederdik.

İkinci şeklin her S noktası (ikinci şekil yalnız S noktasından ibarettir) birinci şeklin (PQ doğru parçasının) bir noktasının tasviri olduğundan, bu halde, PQ doğrusu S nin yalnız içerisine değil üzerine de tasvir edilmiş olmaktadır.

Son misalden, farklı noktaların tasvirlerinin çakışabileceğini anlamakla beraber hiç bir A noktasının, bir tasvirle, birden fazla resmi (tasviri) olmadığını da tebarüz ettiriyoruz.

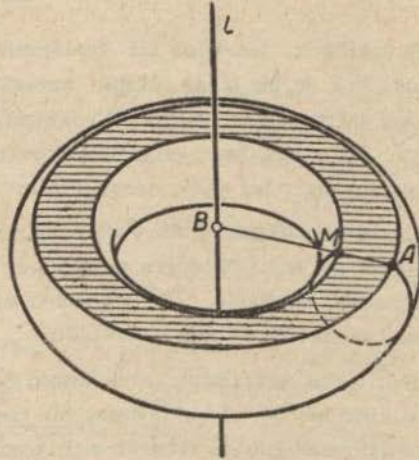
Şimdi bir dalrenin her A noktasını bu noktanın bir çap üzerindeki B ayağına tekabül ettirerek bir daireyi bir çapa tasvir edelim (Şekil 97). Bu halde daire yalnız çapın içerisine değil ay-

nı zamanda *üzerine* de tasvir edilmiş oluyor. Çapın her B iç noktası iki noktanın resmi-*dir*. $B = f(A)$ ve $B = f(A')$.

Aynı tarzda bir küre yüzeyi bir çapın *üzerine* tasvir edilir-se (Şekil 98), çapın her iç noktası bir «paralel» in bütün noktalarının resmi olur (kutuplar P ve Q olduğuna göre).

Bir kürenin her A' noktasına, bu noktadan PQ çapına çizilen $A'B$ dikmesinin B ayağını tekabül ettirerek bir küre, PQ çapı *üzerine* tasvir edilebilir; bu tasvirde çapın her iç noktası disk'in tamamının bir tasviridir (Şekil 98). PQ çapına ait her nokta kendisine tasvir edilmiş olmaktadır.

Eğer tor yüzeyinin her A noktasına, bu noktadan l dönme eksenine çizilen AB dikmesinin B ayağı tekabül ettirilirse tor yüzeyi l *içerisine* tasvir edilmiş olur. Tasvirin l *üzerine* olduğunu söyleyemeyiz. B noktası genel olarak, bir daire çiftinin resmi-*dir*. Tor yüzeyinin tamamının resmi l ye ait bir doğru parçası-*dır*.



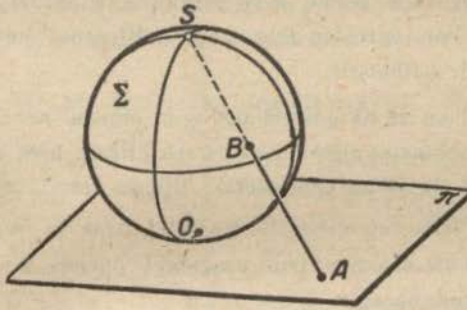
Şek. 99

Tor yüzeyi bu doğru parçasının *üzerine* (aynı zamanda *içerisine*) tasvir edilmiş bulunmaktadır.

Eğer tor yüzeyiyle sınırlı olan cisim l doğrusu içerisine tasvir edilirse B noktası, genel olarak, daire halkasının tamamının resmi olur (Şekil 99).

Cismin tamamının resmi de l nin bir doğru parçasından ibaret olur ve cisim bu doğru parçasının üzerine (veya yine içerisine) tasvir edilmiş olur.

(Şekil 100) de π düzleminin her A noktasına, bu düzleme güney kutpunda teğet Σ küre yüzeyinin kuzey S kutpundan ge-



Şek. 100

çen SA doğrusuyla, B noktasını tekabül ettirelim. *Streografik izdüşüm* adı verilen bu tekabülle π düzlemi Σ küre yüzünün içerisine tasvir edilmiştir.

Düzlemin küre üzerine tasvir edildiğini söyleyemeyiz, zira, kürenin S noktası düzlemin hiç bir noktasının resmi bulunmamaktadır. Düzlemin resmi S noktasında *delinmiş* küre yüzeyinden ibarettir. π düzlemi kendi resminin üzerine — S de delinmiş küre yüzeyine — veya içerisine tasvir edilmiştir.

Eğer gekil 33 deki parabolün her M noktasına, dairenin SM anadoğrusuna rastlayan A noktası tekabül ettirilirse, parabolün daire içerisine tasviri elde edilir. Dairenin P noktası parabolün hiç bir noktasının resmi değildir, zira SP anadoğrusu π düzlemi-

ne paralel bulunmaktadır. Parabolün resmi P noktası atılan daireden ibarettir. Parabol kendi resminin hem üzerine hem içerisine tasvir edilmiş bulunuyor.

Şekil 31 deki hiperbolün M noktasına, (2) küresinin teğetsel dairesinin B noktası tekabül ettirilirse hiperbol de dairenin üzerine değil içerisine tasvir edilmiş olur.

Bu halde, dairenin düzlemine paralel olan anadoğruları üzerindeki iki noktası hiperbolün hiç bir noktasının resmi olmakla, hiperbolün resmi, π ye paralel anadoğrular üzerindeki noktaları atılan daireden ibaret olur. Hiperbol kendi resminin üzerine tasvir edilmiştir.

Şekil 27 ve 29 da gösterildiği gibi elipsin her M noktasına dairenin A noktasını tekabül ettirirsek elipsin hem daire üzerine hem içerisine tasvirini elde ederiz. Elipsin resmi adı geçen daireden ibarettir.

Bu örneklerden bazılarını aşağıdaki önemli tarife misal olmak üzere kullanacağız.

Tarif: Φ şeklinin Ψ şekline tasviri f , ve B noktası Ψ şeklinin keyfi bir noktası ise f tasvirigle resimleri B olan Φ nin bütün noktalarının cümlesine B nin ters resmi denir ve bu cümle (veya şekil) $f^{-1}(B)$ olarak gösterilir.

Şekil 100 de π nin S noktasında delinmiş küre yüzeyine tasvirinde B nin ters resmi A noktasıdır:

$$f^{-1}(B) = A.$$

Şekil 97 de dairenin çapına tasvirinde çapın B iç noktasının ters resmi 0 - boyutlu AA' doğru parçasıdır. Çapın her bir uc noktasının ters resmi yine aynı noktadır. Öyle ise $f^{-1}(B) = (AA')^0$ yazabiliriz. Burada 0 işareti AA' nün boyutunu göstermektedir.

Şekil 98 de küre yüzeyinin PQ çapına tasvirinde, PQ çapının B iç noktasının ters resmi, düzlemi B den geçen paralelin çemberinden ibarettir. Kutupların ters resmi ise kendileridir.

Şekil 98 de küre cisminin, çapına tasvirinde çapın her iç noktasının ters resmi, düzlemi bu noktadan geçen «paralel» ile sınırlı diskten ibarettir.

Tor yüzeyinin, kendi resmine tasvirinde (Şekil 99) her B noktasının ters resmi, düzlemi B noktasından geçen daire çiftidir.

Tor yüzeyiyle sınırlı olan cismin l eksenine tasvirinde (Şekil 99) B nin ters resmi taranmış halkadan ibarettir.

14. Şekillerin bire-bir tasviri

Eğer ϕ şeklinin ψ şekli üzerine f ile tasvirinde, ψ şeklinin her B noktasının f^{-1} ters resmi ϕ şeklinde yalnız bir A noktadan ibaretse ϕ şeklinin ψ şekli üzerine tasvirine *bire-bir* tasvirdir denir.

Bu tarife örnek olmak üzere bir kaç misal alalım.

Şekil 100 deki düzlemin, S noktasında delinmiş küre yüzeyi üzerine olan tasviri bire-bir bir tasvirdir. Halbuki düzlemin bütün küre yüzeyinin *içerisine* tasviri bire-bir değildir. Tasvirin bire-bir olması için gerekli şartlardan biri, bir şeklin diğeri üzerine tasvir edilmiş olmasıdır.

Şekil 98 de kürenin, çapı üzerine tasviri bire-bir değildir, zira çapın bir iç noktasının ters resmi kürenin tek bir noktası olmayıp tek mil diskten ibarettir.

Şekil 27 ve 29 ile ilgili elipsin daireye tasviri bire-bir tasvirler değildir.

Evvelce şekil 31 ve şekil 33 de ele alınan hiperbolün iki noktası atılan daire üzerine tasviri ile parabolün, bir noktası atılan daireye tasvirleri yine bire-bir tasvirlerdir.

Hiperbol ve parabolün dairenin tamamının içerisine tasvirleri bire-bir değildir.

Şekil 29 daki elipsin daire üzerine tasviri ile ilgili olarak elipsin iç noktaları bire-bir olarak dairenin iç noktalarına tasvir edilebilirler. Elips içindeki her L noktasına, diskin SL ışını üzerine düşen N iç noktası tekabül ettirilebilir. Benzer tarzda böyle bir tekabül parabol ve hiperbol için de yapılabilir (Şekil 33 ve 31)

Diğer misallere geçmeden evvel aşağıdaki genel neticeyi verelim.

Φ şeklinin Ψ şekli üzerine olan bire-bir tasviri, kendiliğinden Ψ şeklinin Φ şekline olan bire-bir tasvirini doğurur.

Bu, Ψ şeklinin her B noktasının $f^{-1}(B)$ ters resminin Φ şeklinde tek bir A noktasından ibaret bulunmasından ileri gelmektedir. Bundan da, $A = f^{-1}(B)$ olduğundan, f^{-1} in bire-bir bir tasvir olduğu ve Ψ şeklinin Φ şekli üzerine olan f^{-1} tasvirinde A noktasının ters resminin, veya $f(A)$ nın, tek bir noktadan ibaret olduğu elde edilir.

Φ şeklinin Ψ şekli üzerine bire-bir tasvirinde Φ şeklinin her A noktasına Ψ şeklinin belirli bir $f(A) = B$ eşi tekabül eder; bundan da Ψ şeklinin her B noktasının Φ şeklinde tamamen belirli tek bir A noktasının eşi olduğu görülür. Bu eş olma durumu, incelediğimiz misallerde açıkça görülmektedir.

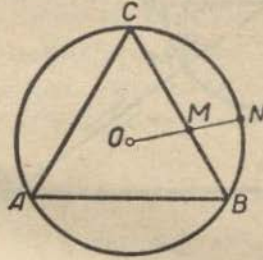
f^{-1} tasvirine, f tasvirinin ters tasviri denir. f^{-1} tasvirinin ters tasvirinin f tasviri olduğu açıktır.

Bir şeklin diğer şekil üzerine yapılan bu bire-bir tasvirlerinin simetrik durumundan dolayı şekiller arasındaki bire-bir tekabül den bahsederiz.

Birkaç misal alalım.

0 - boyutlu ABC üçgeninin çevrel dairesi üzerine bire-bir bir tasvirini kuralım (Şekil 101).

Üçgenin her M noktasına OMN yarı çapı ile dairenin N noktasını tekabül ettirelim. Dairenin o - boyutlu üçgen üzerine ters tasvirinde, N noktasının resmi olarak o boyutlu üçgenin tam M noktasını buluruz. Bu suretle iki şekil arasında (M, N)



Şek. 101

nokta çiftlerinin tekabülü kurulmuş olur. Üçgenin tepe noktaları kendi kendilerine tekabül ederler. Bu suretle iki şekil arasında bire-bir bir tekabül elde etmiş oluyoruz.

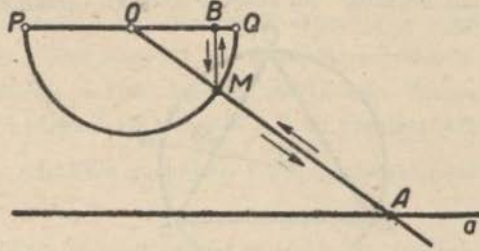
Eğer iki cümle arasında herhangi bir tarzda bire-bir bir tekabül kurulmuşsa, bu cümlelere *özdeş* veya *eşkudretli* dir denir ([36], [40]). Bir şeklin mümkün en büyük kudreti *kontinü* (*) olup bu kudret sonlu ötesi $\approx$ ($\times \times$) sayısıdır. Uzayın bütün noktalarının cümlesinin, düzlemin bütün noktalar cümlesinin ve doğrunun bütün noktalar cümlesinin kudretleri hep aynı $\approx$ sayısıdır. Her bir şekil ya sonlu, ya sayılabilir veya kontinü'nün kudreti kadar noktanın cümlesidir. Bu iddiayı ispatlamak için burada duracak değiliz ([35], [43]). Geometride bire-bir tekabülün en genel şekli önemli değildir. Önemli olan, ileriki bahiste inceliyeceğimiz bire-bir tekabül sınıflarından bazılarıdır.

Açık PMQ yarım dairesinin PQ yarıçapı a doğrusuna paralel olsun (Şekil 102). OA ışınıyla a doğrusunu açık yarım daire

(*) Reel sayılar cümlesinin kudreti

(**) Alef diye okunur.

üzerine tasvir edelim ve $M = f_1(A)$ yazalım. Ayrıca bu yarım daireyi, M den PQ ye MB dikmesini çizerek PQ aralığı üzerine tasvir edip $B = f_2(M)$ yazalım. Bu suretle a doğrusunun nokta-

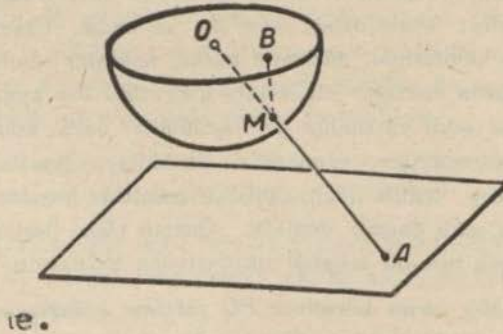


Şek. 102

lariyle PQ aralığının (A, B) eş noktalarının veya doğru ile aralığın bire-bir bir tekabül kurulmuş olur.

Aynı tarzda bir düzlem ve bir açık yarım küre arasında ve yine düzlemle açık disk arasında bire-bir bir tekabül kurmak mümkündür (Şekil 103).

$$A' = f(A), O' = f(O)$$



ie.

Şek. 103

Bunun gibi açık disk ile, delinmiş küre yüzeyi arasında da bir tekabül kurulabilir, Bu maksatla ekvator diskini, küreye gü-

PQ nün 1, 2, 3,... dizisinin noktalarına diğer dizinin $3', 4', 4', \dots$ noktalarına tekabül ettirerek veya

$$3' = f(1), 4' = f(2), \dots n' = f(n-2), \dots$$

yazarak ve ayrıca PQ doğru parçasının P ve Q noktalarını $P'Q'$ nün $2', 1'$ noktalarına resmederek veya

$$2' = f(P), \quad 1' = f(Q)$$

yazarak tekabülü tamamlıyalım.

Doğru parçasının aralık üzerine olan bire-bir tasvirinin teşkili bu suretle tamamlanmış olur. Okuyucunun bu tasviri ne «basit» ne de «tabii» bulacağını sanıyoruz. Bununla beraber tasvir bire-birdir.

Tabiatıyla bire-birlik tasvirin «basit» veya «tabii» olmasını gerektirmez.

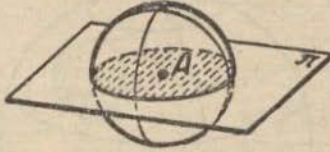
Aynı şekilde bir disk ile bir açık disk arasında veya bir küre ile bir açık küre arasında bire-bir bir tekabül kurulabilir. Böyle tekabüllerin kurulmasını okuyucuya temrin olarak tavsiye ederiz. Kapalı küre yüzeyi ile düzlem ve bir düzlemle açık veya kapalı bir diski (vesaire) atılmış düzlem arasında tekabüller kurmak da faydalıdır.

Bir doğru parçası ile uzay arasında olduğu gibi, farklı boyutlu iki şekil arasında da tekabül kurulabilir.

15. Şekillerin Sürekli Tasviri

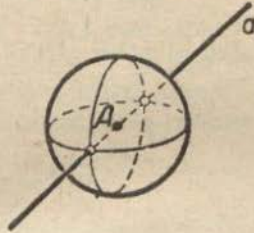
Aşağıdaki tarifleri veriyoruz. Bir A noktasının uzaya göre bir civarından veya kısaca bir A noktasının civarından, merkezi A olan açık bir küreyi (küre cismini) anlıyoruz. Bu kürenin yarıçapına *civar yarıçapı* denir. Buna göre merkezleri A olan bütün eşmerkezli açık kürelerin cümlesi bu noktanın bütün civarlarının cümlesi olur.

Bir ϕ şeklinin bir A noktasının bu düzleme göre civarından ise A merkezli açık küre ile bu şeklin arakesitini anlıyoruz. Ohalde π düzlemindeki bir A noktasının π düzlemine göre bir civarı bu düzlemin A merkezli açık küre ile arakesiti veya π nin



Şek. 105

A merkezli herhangi bir açık disk olur (Şekil 105). Bir a doğrusunun bir A noktasının bir civarı ise bu doğrunun, orta noktası A olan aralığından ibaret olur (Şekil 106).



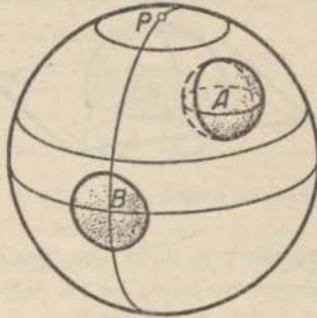
Şek. 106

Bir küre yüzeyinin bir A noktasının bu yüzeye göre civarı küresel açık bir disk, veya küre yüzeyinin, merkezi A olan herhangi açık bir küre içerisinde kalan noktalarının cümlesidir (Şekil 107).

A noktasının merkeze göre simetrik noktasında delinmiş küre yüzeyi, ve bütün küre yüzeyi A noktasının civarlarıdır.

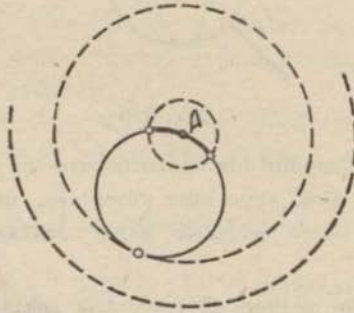
Bunlardan birincisi, merkezi A olan ve yarıçapı verilen kürenin çapına eşit bulunan açık kürenin içinde, ikincisi ise yarıçapı, verilen kürenin çapından büyük olan kürenin içindedir. Şekilde ayrıca B ve P noktalarının küresel civarları gösterilmiştir.

Bir dairenin A noktasının bu daireye göre civarı bu dairenin, orta noktası A olan bir yayıdır. Bu hale tekabül eden diğer civarlar A nın merkeze göre simetriği atılmış daire ve veri-



Şek. 107

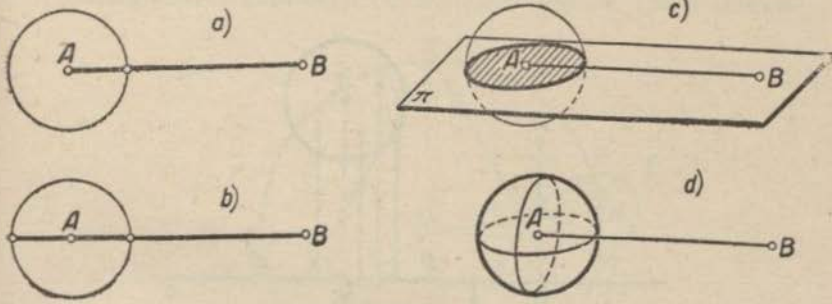
len bütün daire ile teşkil edilebilir. (Şekil 108) de noktalı çizgiler, arakesitleri A noktasının verilen daireye göre mütekabil civarlarını veren açık küreleri göstermektedir.



Şek. 108

AB doğru parçasının A uc noktasının bu doğru parçasına (Şekil 109 a), AB doğrusuna (Şekil 109 b), doğruyu içine π düzlemine (Şekil 109 c), ve bütün uzaya (Şekil 109 d) göre civarları arasında fark gözetilmelidir.

Bu suretle bir noktanın *civar* ve *izafi civar* kavramlarını açıkladıktan sonra geometride en önemli kavramlardan biri olan



Şek. 109

sürekli tasvirin tarifine geçiyoruz. f , Φ şeklinin Ψ şeklinin içerisine tasviri, A_0 ise Φ şeklinin bir noktası olsun.

Eğer Ψ şeklinin $f(A_0)$ noktasının Ψ şekline göre her E civarına karşı A_0 noktasının Φ ye göre bir Δ civarı bulunabilse ve Δ civarının tamamı E civarı içerisine tasvir edilebilse, diğer bir deyimle

$$f(\Delta) \subset E$$

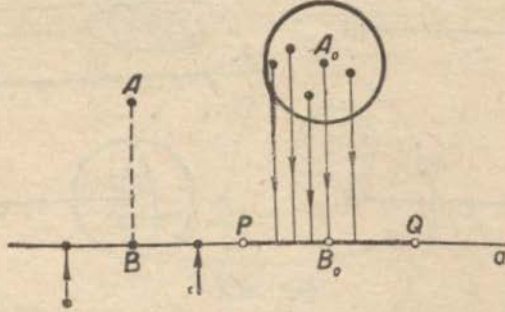
olsa, f tasvirine A_0 noktasında *sürekli* denir.

Örnek olmak üzere bir kaç misal alalım.

Bir düzlemler bunun üzerinde bulunan a doğrusunu alalım ve düzlemin her A noktasını bu noktadan a ya çizilen AB dikmesi ile B ayağına tasvir edelim (Şekil 110).

a doğrusunun noktaları kendi kendilerine tasvir olunurlar. Düzlemin a doğrusu üzerine olan f tasvirinin *sürekli* olduğunu ispat edeceğiz. $f(A_0) = B_0$ noktasının a doğrusuna göre keyfi bir civarını seçelim; bu civar bir PQ aralığından ibarettir. Eğer A_0 noktasının düzleme göre, yarı çapı PQ aralığının yarıçapından büyük olmamak üzere bir civarını (açık disk) seçecek olursak

bu civarın tamamı PQ aralığının içerisine tasvir edilmiş olur. A noktası düzlemin herhangi bir noktası olduğu için tasvir *sürekli*dir.



Şek. 110

Evvelce incelediğimiz tasvirlerden, şekil 96 da PQ doğru parçasının KL doğru parçası içerisine, şekil 97 de bir dairenin kendi çapı üzerine, şekil 98 de bir küre yüzeyinin ve kürenin PQ çapları üzerine, şekil 99 da bir tor yüzeyi ve torun l eksenindeki doğru parçasından ibaret kendi resimleri üzerine tasvirleri hep sürekli tasvirlerdir. Bunun gibi şekil 100 de bir düzlemin küre içerisine olan stereografik tasviri de sürekli bir tasvirdir.

Bütün bu hallerde $f(A)$ keyfi noktasının izafi E civarına karşı, A noktasının

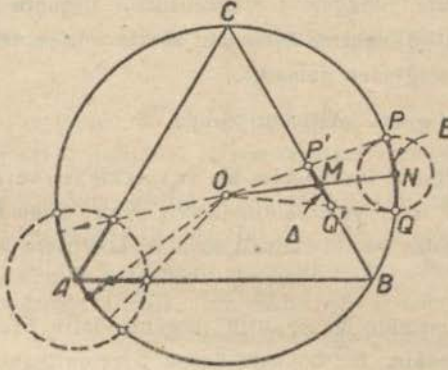
$$f(\Delta) \subset E$$

olacak şekilde izafi bir Δ — civarı bulunabilir.

Öğrenciye bu hususu sağlaması tavsiye olunur.

Bir örnek olmak üzere 1 - boyutlu ABC üçgeninin çevrel dairesi üzerine tasviri halini ele alalım (şekil 101) ve herhangi E civarı verilmişken, $f(\Delta) \subset E$ olacak şekilde bir Δ — civarını bulalım.

M , üçgenin keyfi bir noktası ve $N = f(M)$ olsun. N noktasının daireye göre keyfi bir E civarını seçelim (Şekil 111). Bu



Şek. 111

civar açık bir PQ yayından ibarettir. P ve Q noktalarını O merkezine birleştirerek bunların üçgeni kestiği noktaları P' ve Q' ile gösterelim.

$P'Q'$ doğru parçasının, orta noktası M olan herhangi bir aralığı Δ — civarı olarak alınıp

$$f(\Delta) \subset E$$

yazılabilir.

Eğer N noktasının E civarı, N noktasının merkeze göre simetriği atılan daireden veya dairenin tamamından ibaretse, M noktasının, M nin merkeze göre simetriğini içine almayan üçgene göre — ikinci halde hatta 1-boyutlu bütün üçgene göre — civarı Δ — civarı olarak alınabilir.

Eğer tasvir edilen nokta bir A tepe noktası ise ve E civarının yarıçapı kâfi derecede küçükse, üçgene göre Δ — civarı olarak üçgenle daireye göre E civarını meydana getiren aynı açık kürenin arakesiti alınabilir; bu halde $f(\Delta) \subset E$ dir (Şekil 111).

Üçgenin daire üzerine olan bu bire - bir tasviri diğer yönde de de süreklidir, diğer bir deyimle, f^{-1} tasviri de süreklidir.

Bunu böyle olduğu, f^{-1} tasvirinde, üçgenin her civarına karşı, üçgenin bu civarına tamamen tasvir edilen daireye ait civar bulunabileceğinden anlaşılır.

Aşağıdaki genel tarifi veriyoruz:

Tarif: Eğer f tasviri bire-bir ve sürekli ise ve f^{-1} ters tasviri de sürekli ise f ye *topolojik* tasvir denir. Bunu şöyle de ifade edebiliriz: bire-bir ve iki taraflı sürekli tasvirlerle topolojik tasvir denir.

Evvelki misalde bir boyutlu üçgenin daire üzerine ve karşıt olarak dairenin bir boyutlu üçgen üzerine tasviri topolojik tasvirdir.

Şekil 100 deki düzlemin delinmiş küreye olan stereografik tasviri (ve karşıtı) topolojik bir tasvirdir.

Şekil 98 de kürenin kendi çapı üzerine olan tasviri bire-bir olmadığından topolojik tasvir değildir.

Şekil 104 de PQ doğru parçasının $P'Q'$ aralığı üzerine gayri tabii tasviri bire-bir olduğu halde bir taraflı bile sürekli değildir. Çünkü, meselâ, $1'$ noktasının kâfi derecede küçük bir E civarını alacak olursak, $Q = f^{-1}(1')$ noktasının herhangi bir $\triangle -$ civarında, $E -$ civarının içerisine tasvir edilmeyen noktalar buluruz.

Bir küre yüzeyi bir düzlem üzerine bire-bir olarak fakat topolojik olmayarak tasvir edilebilir. Bunun gibi bir doğru parçası bir aralık üzerine topolojik olarak, diğer bir deyimle, bire-bir ve iki taraflı sürekli olarak tasvir edilemez. Bu iddiayı ispatsız bırakıyoruz. Yine ispatsız olarak meselâ bir doğru parçası ile bir küb veya düzlemle daire arasında olduğu gibi, farklı boyutlu iki şekil arasında topolojik bir tekabül kurulamayacağına işaret edelim.

Topolojik olarak birbirilerine tasvir edilebilen iki şekle *topolojik özdeş* veya *homeomorf* şekiller denir.

Bütün dairelerin birbirileriyle homeomorf olduğu ve 1-boyutlu herhangi bir üçgenle topolojik özdeş olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tor ile küre topolojik olarak farklıdır, veya diğer bir deyimle, homeomorf değildirler. Bunun ispatını vermiyoruz.

Topolojik özellikler şekillerin topolojik bütün tasvirler altında değişmiyen özellikleridir, diğer bir deyimle, ϕ şeklinin topolojik özellikleri, yalnız ϕ ye değil topolojik özdeş olan her ψ şekline ait özellikleridir. Meselâ, bir şeklin eğri olması, yüzey, cisim, veya-daire ve 1-boyutlu üçgende olduğu gibi, kapalı olması hep topolojik özelliklerdir.

Eğer ϕ şekli ψ şekli üzerine tasvir edilmişse ϕ şekline ψ ye dönüştürülmüştür de denir. Eğer ϕ şekli ψ şekli üzerine topolojik olarak tasvir edilmişse ψ şekline ϕ den *topolojik dönüşümle* elde edilmiştir denir.

İncelediğimiz bu kavramlar yardımıyla, eğri yayı, kapalı bir eğri, vs. gibi kavramları sıhhatli olarak tarif etmek mümkündür.

Basit bir yay, doğru parçasının; kapalı basit bir yay 1-boyutlu üçgenin vs. topolojik tasvirleridir.

Geometride rastlanan tasvirlerin ekserisi topolojik tasvirdir.

Şekillerin yalnız topolojik özellikleri ve bunların topolojik dönüşümlerinin özellikleri «süreklilik geometrisi» nin, diğer bir deyimle, *topoloji*'nin konusudur.

Elementer geometride yukarıda ele alınan topolojik kavramlardan çok basitlerine ihtiyaç olacaktır.

16. Düzlemin düzleme ve uzayan uzaya dönüşün kavramı

Bir ϕ şeklinin bir ψ şekline tasvirinde ψ şeklinin ϕ şeklinden farklı olması gerekmez. ψ şeklinin ϕ şekli ile çakışması halinde ϕ şeklinin kendi içerisine veya özel olarak ϕ şeklinin kendi üzerine tasviri bahis konusu olur.

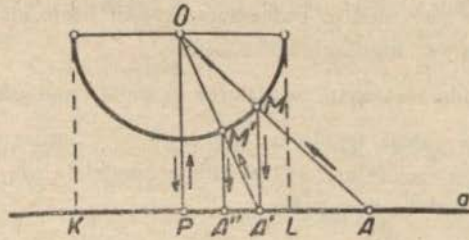
Bir ϕ şeklinin kendi içerisine veya kendi üzerine tasviri halinde içerisine ve üzerine arasında fark gözetmeksizin ϕ şeklinin kendine dönüşümünden bahsederiz.

Özel olarak düzlemin kendine ve uzayın kendisine dönüşümlerinden bahsedebiliriz.

Aşağıdaki misaller bu genel tarife birer örnektir.

Küre cisminin kendi çapına tasviri (Şekil 98) aynı zamanda küre cisminin kendi içerisine bir tasvirdir. Burada PQ çapı kürenin resminin tamamıdır. Kürenin kendi içerisine olan bu tasviri, kürenin kendi içerisine olan dönüşümlerinden bir tanesidir.

Eğer (Şekil 112) de a doğrusunu açık yarım daire üzerine, ve sonra dik izdüşümle bu yarım daireyi yine a doğrusu içerisi-



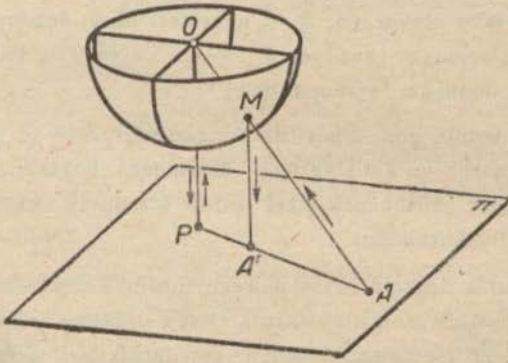
Şek. 112

ne tasvir edersek a doğrusunun kendi içerisine olan f dönüşümünü elde ederiz: $f(A) = A'$, $f(A') = A''$, ..., $f(P) = P$. P nok-

tası bu dönüşümün sabit bir noktasıdır. a doğrusunun tam resmi KL aralığından ibaret olup bu dönüşümün topolojik olduğu kolayca görülebilir.

Aynı tarzda bir π düzleminin kendi içerisine dönüşümü teşkil edilebilir (Şekil 113). Düzlemin tam resmi bu düzlemin açık bir diskinden ibarettir. Düzlemin kendi içerisine böyle bir tasviri yine topolojiktir.

Düzlemin kendi üzerine dönüşümünde π düzlemindeki her



Şek. 113

şeklin aynı düzlemde bir şekle dönüşeceği hatırdan çıkarılmamalıdır. Meselâ, merkezi P de olan bir dairenin aynı merkezli diğer bir daireye dönüşeceği kolaylıkla görülebilir. P den geçen doğrular kendilerine tasvir olunurlar ve böyle her doğrunun tam resmi şekil 112 den görüleceği veçhile bir aralıktan ibaret olur. P den geçmeyen bir doğru bir eğrinin yayına dönüşür. Merkezi P de olmıyan bir daire kapalı bir eğriye, bu daire ile sınırlı disk ise dairenin resmiyle sınırlanan düzlemin bir bölgesine dönüşür.

Bir düzlemin kendisine olan bir dönüşümü bu düzlemin her şeklinin bir dönüşümünü meydana getirir.

π düzleminin kendisine olan bir dönüşümünü teşkil edelim.

π düzleminde eşkenar 1-boyutlu ABC üçgenini ve bunun çevrel dairesini çizelim (şekil 101). 1-boyutlu üçgenin her M noktasını dairenin bir N noktasına ve dairenin her N noktasını üçgenin buna tekabül eden M noktasına dönüştürelim ve diğer bütün noktaları sabit bırakalım. Bu suretle düzlemin kendisine (hakikatte kendi üzerine), topolojik olmayan dönüşümünü elde ederiz.

Düzlemin kendisine olan bu dönüşümü π düzlemindeki her şeklin bir dönüşümünü meydana getirir. ABC üçgeni topolojik olarak çevrel daireye, çevrel daire de yine topolojik olarak üçgene dönüşmüş oluyor. A, B, C noktaları hariç üçgen veya dairenin noktalarından geçmiyen her şekil olduğu gibi kalır ve netice olarak dönüşüm topolojik olur.

Tıpkı bunun gibi, 2-boyutlu düzgün dörtyüzlü ve çevrel küresini düşünerek ve aynı yarıçap üzerindeki noktaları dönüştürerek ve diğer bütün noktaları sabit bırakarak uzayın uzaya olan tasvirini kurabiliriz.

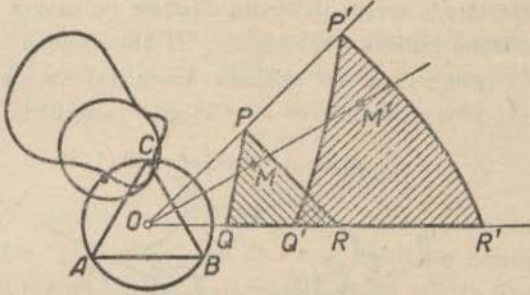
1-boyutlu üçgenin çevrel daireye topolojik dönüşümü sürekli olarak ve aşağıda anlatılan tarzda bütün düzleme teşmil edilebilir. O noktası kendisine, π nin O dan farklı her S noktası da, S' noktası OS ışını üzerinde olmak ve

$$\frac{OS'}{OS} = \frac{ON}{OM}$$

eşitliğini sağlamak üzere, S' noktasına gitsin. Bu, S' noktasını tek olarak belirlemekte olup böylece, düzlemin kendisine bir dönüşümünü elde ederiz. Bunun topolojik olduğu kolayca ispatlanabilir. Düzlemin kendisine (hakikatte kendi üzerine) olan bu tasviri bu düzlemdeki her şeklin topolojik bir dönüşümünü meydana getirir.

O noktasından geçen her ışında homotetik dönüşüm mevcut olup her ışının kendisine ait $k = ON/OM$ benzerlik oranı vardır. OA, OB, OC ışınlarındaki noktalar, $k=1$ olmasından sa-

bit kalırlar. (Şekil 114) de PQR üçgeninin $P'Q'R'$ şekline dönüşümüyle bir dairenin dönüşümü gösterilmiştir.



Şek. 114

ABC üçgeni kendi çevrel dairesine dönüşmekte olup öğren-ciye dairenin hangi şekle dönüşeceğini göstermesi temrin olarak tavsiye olunur.

Düzgün dörtyüzlü ve çevrel küre düşünülerek yukarıdakine benzer bir dönüşüm kurulabilir.

Uzayın elde edilen kendine (hakikatte kendi üzerine) dönüşümü topolojiktir ve bunun böyle olduğu kolayca sağlanabilir.

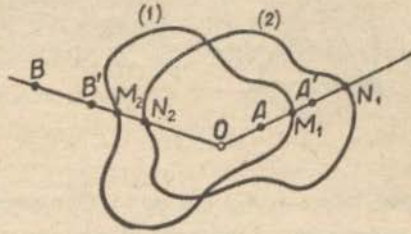
Şekillerin, bir sınıfa ait bütün dönüşümler altında değiş-miyen özelliklerine, bu şekillerin (bu sınıf dönüşümlerine göre) *değişmez* özellikleri adını verdiğimiz hatırlıyalım. Meselâ, bir dairenin, topolojik dönüşümler altındaki değişmez bir özeliği, kendisini kesmiyen kapalı bir eğri olmasıdır. Topolojik resimde bir kesiklik süreklilikten, kendini kesme ise bire-birlikten dola-yı mevcut olamaz. Daireyi, bükülebilen ve çok elastik olan ka-uçuk bir ipten yapılmış kabul edersek, daireyi istediğimiz gibi çekip bükerek topolojik resimlerini elde etmiş oluruz.

Bu dönüşümlerle meselâ, uzunluk, iç bükeylik, düzlemsellik bozulur.

Genel olarak, topolojik dönüşümlerde ne doğruların uzun-

luk ve açılarının ne de alanın değişmezliğini söyleyebiliriz, zira düzlemsel bir şekil, vs. en karışık bir hale gelebilmektedir.

İncelediğimiz tarzda düzlemin düzleme ve uzayın uzaya birçok tasvirlerini bulmak güç değildir. O noktasından (Şekil 115) geçen her ışını yalnız bir noktada kesen (1) ve (2) eğrilerini (uzayda iki yüzey) alabilir ve evvelki gibi yapabiliriz.

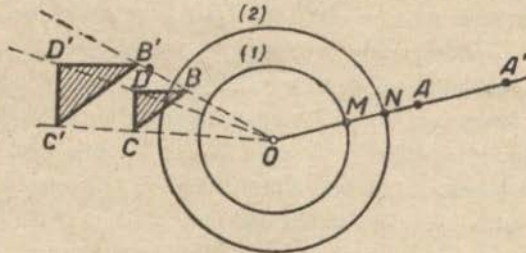


Şek. 115

Diğer bir deyimle, her A noktasını, A' noktası OA üzerinde olmak ve

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{ON_1}{OM_1}$$

eşitliğini sağlamak üzere, A' noktasına tasvir edebiliriz. Burada



Şek. 116

M_1 , N_1 noktaları bir ışının (1) ve (2) eğrilerini kestiği noktalardır.

Eğer (1) ve (2) eğrileri eşmerkezli daireler (uzayda küreler) ise, dönüşüm, bildiğimiz, merkezi O da olan (Şekil 116) bir benzerlik dönüşümünden ibaret olur.

(1) ve (2) eğrileri yerine basit şekiller olarak, (üçgen, kare, daire, vs.) gibi elemanter şekillerin resimlerini incelemek faydalı olur.

17. Stereografik izdüşüm

Şekillerin *merkezi izdüşüm* adı verilen başka bir dönüşümünü ele alacağız. Şekil 29, 31, 33 de konik kesitlerin daireye tasviriyle (genel olarak daire üzerine değil), şekil 100 de bir düzlemin küreye tasvirinde (küre üzerine değil) merkezi S noktası olan merkezi izdüşümlerle meşgul olmuştuk.

Düzlemsel şekillerin, ileride bize lâzım olacak olan, küresel şekillere merkezi bir izdüşümü ile tasvirinin — stereografik izdüşümün — özelliklerini inceliyelim.

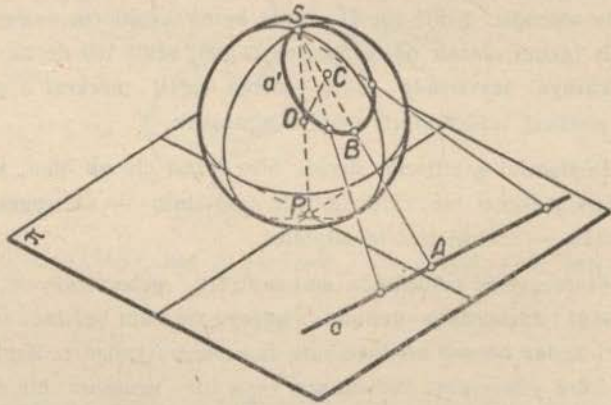
Stereografik izdüşümün matematikte, geometride ve kompleks sayı düzleminin delinmiş küreye malûm şedilde bire-bir tasviri kadar önemli bir tatbikatı da kartografyadadır. Kartografyada küre yüzeyinin tamamının veya bir kısmının bir düzlem üzerine, diğer bir deyimle, küre olarak kabul edilen yeryüzünün kâğıt üzerine çizimi ile meşgul olunur. Stereografik izdüşüm kartografyada kullanılan en önemli izdüşümlerden birini teşkil eder⁽¹⁾. Stereografik izdüşümün incelenmesinde (şekil 100) kürenin S izdüşüm merkezinde delinmiş olduğunu ve bu S noktasının küre yüzeyine değil uzaya ait olduğunu kabul edeceğiz. Bu-

(1) Bak : A. V. Gedymin, Kartografya, Enstitü Öğretmeninin ders kitabı, Uchpedgiz 1946.

Bu kitaptaki öğretici resimler incelenirse, kürenin muhtelif dönüşümlerle düzleme tasvirini de şekillerin bozulmaları hakkında gayet iyi fikir edinilebilir [14].

nun gibi küre yüzeyi üzerindeki her şekil, eğer bu şekil bu noktadan geçiyorsa, S noktasında delinmiş kabul edilecektir.

Evvelâ, stereografik izdüşümle π düzleminin herhangi a doğrusunun S noktasından geçen bir daireye dönüştüğünü görürüz (Şekil 117). Bunun böyle olduğu, a doğrusuna ait A noktalarını kürenin B noktalarına izdüşüren SA ışınlarının a doğrusunu izdüşüren bir düzlem üzerinde bulunmasından ve bu düzlemin küreyi S noktasından geçen daire boyunca kesmesinden ileri gelmektedir.



Şek. 117

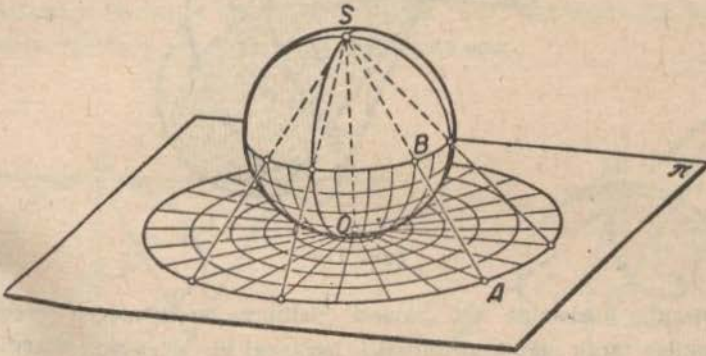
Bu suretle π düzleminin herhangi bir a doğrusu S den geçen a' dairesine dönüşmüş olur. Küreye ait S den geçen her a' dairesi de ters dönüşümle düzlemin a doğrusuna döner. Bu, stereografik izdüşümün temel özelliklerinden birini teşkil eder.

Özel olarak bütün meridiyenler güney kutuptan geçen doğrulara (Şekil 118) ve karşıt olarak merkezi güney kutup olan doğru demetine ait her doğru da bir meridiyene dönüşür (Şekil 118).

Dönüşümün birebirliğinden delinmiş kürenin π düzlemi üze-

rine dönüşümünden, bazen de π düzleminin küre içerisine (veya delinmiş küre üzerine) dönüşümünden bahsederiz. Bunlardan hangisinin kastedildiği konudan anlaşılır.

Kürenin ekvator dahil bütün paralellerinin, düzlemde, merkezleri kürenin güney kutbunda olan eşmerkezli dairelere dönüştüğü kolaylıkla görülür (Şekil 118). İspat olarak, herhangi para-



Şek. 118

leli izdüşüren dairesel dik koninin π düzlemini daire boyunca kestiğini söyleyebiliriz. Kutup bölgelerinin haritalarının çiziminde kullanılan metot budur ve buna ait misaller herhangi atlasta bulunabilir.

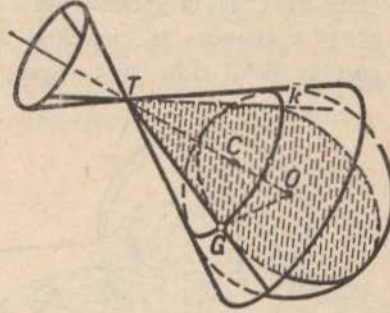
Şimdi incelemiş olduğumuz dairelelerden başka, küreye ait diğer dairelerin resimlerinin ne olacağını görelim (Şekil 117, 118).

Şu özellik caridir: *Küredeki, S stereografik izdüşüm merkezinden geçmiyen herhangi bir dairenin π izdüşüm düzlemindeki resmi bir dairedir.*

BU, STEREOGRAFİK İZDÜŞÜMÜN ESAS İLK TEOREMİDİR.

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki üç hususa işaret edelim.

(i) Bir küreye bir k dairesi boyunca teğet olan koninin T tepe noktası şöyle bulunur : Kürenin O merkezinden (Şekil 119)



Şek. 119

dairenin düzlemine OC dikmesi çizilir ve bu [dikmeden geçen (şekilde taralı olarak gösterilen) herhangi bir düzlemde kürenin büyük dairesinin k dairesini kestiği G noktasındaki GT teğeti resmedilir. Bu teğetin OC yi kestiği noktası koninin aranan tepe noktası olur. Eğer k büyük daire olacak olursa, GT teğeti OC ye paralel olacağından koni silindirden ibaret bulunur.

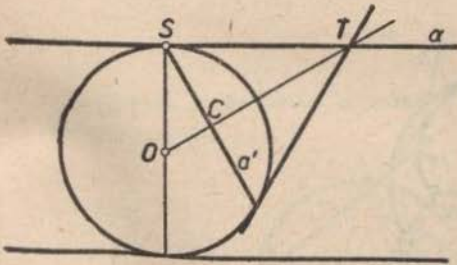
(ii) S izdüşüm merkezinden geçen herhangi a' dairesine teğet olan koninin T tepe noktası (şekil 117), küreye S noktasında teğet olan ve dolayısıyla π düzlemine paralel olan α düzleminde bulunur. Şekil 120 de, S noktası ile a' dairesinin düzlemine dik OC dikmesinden geçen düzlemin küre ile olan arakesiti gösterilmiştir (şekil 117).

(iii) Kürenin her teğet doğrusu, bu doğrudan geçen bir düzlemin küre ile olan arakesit dairesine teğettir.

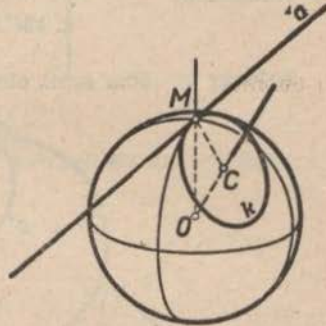
İspat : a doğrusu küreye M noktasında teğet olsun (Şekil 121), veya a kürenin OM dik yarıçapı bulunsun. a doğrusundan,

küreyi k daireesinde kesecek bir düzlem geçirecek olursak (k nin büyük daire olmadığını farzediyoruz, k nin büyük daire olması halinde iddianın doğruluğu açıktır) ve bu düzleme OC dikmesini indirirsek OC doğrusu bu düzlemin a doğrusuna dik olur. Tabii bu iki doğru aykırı durumdadır.

Ohalde a doğrusu OM ve OC ye dik olduğundan bunların düzlemine ve netice olarak bu düzlemin CM doğrusuna dik bulunur. Bu da a nın k ya teğetliğini ifade eder.



Şek. 120



Şek. 121

Şimdi bunları göz önünde bulundurarak yardımcı bir teorem ispat edeceğiz.

Yardımcı teorem :

b , küreye M' noktasında teğet bir doğru olsun (Şekil 122). Stereografik izdüşümün S merkezinden ve b den bir düzlem geçirelim. Bu düzlem küreyi a' daireesinde ve π düzlemini ise a' nın resmi olan a doğrusunda keser. (Şekil 123, a' daireesi ve a , b doğrularıyla birlikte bu düzlemi göstermektedir). C noktası a' nın merkezi olmak üzere, SC doğrusunun (Şekil 122, 123) a doğrusuna dik olduğu kolayca sağlanabilir. a ve b doğrularının SM yi aynı açı altında kestiklerini göstereyim.

$$\angle TM'M = \angle KMM'$$

eşitliğini yazabiliriz.

KM ye paralel TM'' doğrusunu çizelim. Bu takdirde ya M'' ve M' noktaları çakışır veya $M'M''T$ üçgeninin M' ve M'' açıları eşit olurlar ve bundan

$$TM' = TM''$$

elde edilir.

$$\frac{MK}{M''T} = \frac{SK}{ST}$$

den

$$MK = M''T \frac{SK}{ST} = M'T \frac{SK}{ST}$$

bulunur. Halbuki M' nün a' üzerinde olması dolayısıyla $M'T$ sabit bulunduğundan MK nın da sabit olduğu çıkar ve a nın daire oluşu ispatlanmış bulunur.

Burada, evvelki bölümde kullandığımız önemli bir husus üzerine dikkati çekmek isteriz. a' dairesinin küre üzerindeki merkezini bulmak için T tepe noktasından (şekil 124) a' dairesinin düzlemine dik indirmek ve bu dikmenin küre yüzeyini delegeği noktaları bulmak gerekmektedir. a' dairesi S kutbuna göre paralel olarak alınmadığından ST , a' dairesinin düzlemine dik olamaz ve bunun neticesi a' nün merkezi ST üzerinde bulunamaz. Ohalde, *düzlemi kürenin bir paraleli olmıyan ve π izdüşüm düzlemine paralel bulunmıyan bir a' dairesinin küresel merkezinin π deki resmi a dönüşüm dairesinin merkezi olamaz.*

Buna benzer olarak şu da gösterilebilir: *π düzleminde, K merkezi teğet noktası olmıyan bir dairenin küre üzerindeki resmi, S den geçmıyan ve merkezi SK izdüşüren ışıını üzerinde olmıyan bir dairedir.*

ŞİMDİ STEREOGRAFİK İZDÜŞÜMÜN ESAS İKİNCİ TEOREMİNİ İSPATLIYACAĞIZ.

Küre üzerinde alınan iki eğri γ arasındaki açı, bu eğrilerin stereografik izdüşüm eğrileri arasındaki açıya eşittir.

Küfe üzerinde, P' noktasında kesişen ve aralarındaki açı α olan $1'$ ve $2'$ eğrileri verilmiş olsun (şekil 124). Bu eğriler arasındaki açı b_1, b_2 teğetleri arasındaki açı olup b_1 ve b_2 ler küreye P' de teğet düzlemin iki doğrusudur [1]. $1'$ ve $2'$ eğrilerinin π deki resimleri 1 ve 2 eğrileridir. 1 ve $1'$ eğrileri S tepe noktalı izdüşüren koninin yüzeyi üzerinde, 2 ve $2'$ eğrileri de yine S tepe noktalı izdüşüren koninin yüzeyi üzerindedir. $SP'P$ bu konilerin ortak anadoğrusudur. Birinci koni yüzeyinin bu $SP'P = g$ anadoğrusundaki teğet düzlemi $1'$ ve 1 eğrilerinin b_1 ve c_1 teğetlerini içine alır.

Yardımcı teoremden

$$\angle b_1 P'P = \angle c_1 PP'$$

ve

$$\angle b_2 P'P = \angle c_2 PP'$$

elde ederiz.

Ohalde, $P'pb_1b_2$ ve Ppc_1c_2 üçyüzlü açılarında ortak ikiyüzlü açı (konilerin teğet düzlemlerinin arasındaki açı) ve iki çift karşıt eşit yüzaçıları mevcuttur. Böyle üçyüzlü açılar eşit veya simetrik olacağından üçüncü yüzaçıları eşit bulunur ve $\alpha = \beta$ elde edilir.

Stereografik izdüşüm açıları muhafaza eden bir dönüşümdür.

Eğriler arasındaki açıları muhafaza eden dönüşümlere *konform tasvir* denir.

Stereografik izdüşüm konform bir tasvirdir.

Stereografik izdüşüme ait bilgimizden faydalananarak düzleme ait bazı dönüşümler elde edelim.

Eğer π düzlemi stereografik izdüşümle bir küreye tasvir edilmişse ve küre de S den geçmiyebilen bir çapı etrafında dön-

dürülürse ve küre tekrar π ye tasvir edilirse düzlemin kendisine bir tasviri elde edilmiş olur.

Başlangıçta π nin A noktası kürede A' ye, kürenin dönmesinden sonra A' noktası yine aynı kürede bir A'' noktasına gitmişse ters dönüşümle A'' noktası π de bir A_1 noktasına gider. Neticede π nin A noktası aynı düzlemin A_1 noktasına tasvir edilmiş olur.

Durum genel olarak bu ise de, istisnasız olarak böyle değildir. Meselâ kürede S deliği, dönmeden sonra yeni S' durumunu alır ve bunun resmi π nin bir A noktasının resmi olamaz. Ayrıca, dönmeden sonra π ye göre en yüksek noktaya ulaşan noktanın dönmeden sonra resmi mevcut değildir. Ohalde, düzlemin, izdüşüm ve dönmeden sonra en yüksek noktaya ulaşan noktasının π de resmi olamayacaktır. Düzlemin elde edilen bu tasviri düzlemin kendisine bire-bir tasviri olmayıp π de kendisine tasvir yapılamıyan nokta ile, resmi bulunmıyan nokta mevcut olmaktadır.

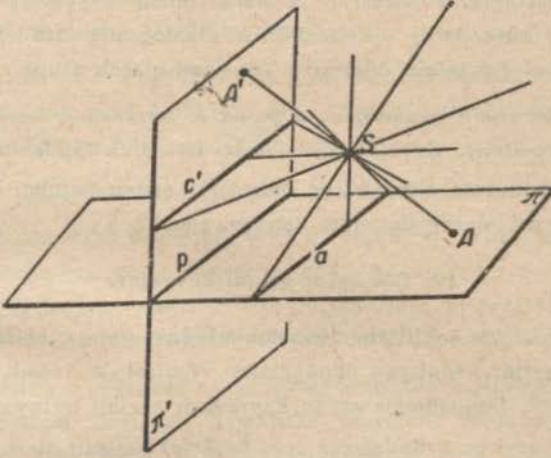
Bizim için önemli olan cihet, π deki şekillerle bu müstesna noktaları içine almayan bölgelerin topolojik olarak dönüşebildikleridir. Bu tasvirle, bütün doğru ve dairelerin cümlesi kendisine tasvir edilmekte veya değişmez kalmaktadır. Bu dönüşüm ayrıca konform bir dönüşümdür.

18. Merkezî izdüşüm kavramı

Stereografik bir izdüşüm, S merkeziyle π izdüşüm düzlemini özel durumda almak suretiyle kürenin düzleme merkezi izdüşümünün özel bir halidir. Bazen, merkezi S de tutarak, küre, ekvator düzlemine, vesair düzlemlere tasvir edilir. Bu suretle muhtelif stereografik izdüşümler elde edilir.

Bir π düzleminin diğer π' düzlemine merkezi tasvirinin özel bir önemi vardır. Burada da, π ve π' düzlemlerinin tamamı dü-

şünülürse ve bu düzlemler paralel değillerse tasvirin bire-birlik özeliği bozulabilir (Şekil 125). π düzleminde S den geçip π' ye paralel olan düzleme ait özel bir a doğrusu vardır ve bu doğru-



Şek. 125

nun resmi mevcut değildir. Bunun gibi π' düzleminde, π düzleminin hiçbir doğrusunun resmi olmıyan bir c' doğrusu vardır.

Eğer bu düzlemler bu doğrular boyunca kesilirse, diğer bir deyimle, bu doğrular düzlemlerden atılırsa, elde edilen şekillerdeki noktaların tekabülü bire-bir özeliğini haiz olur ve π nin herbir doğrusuna π' düzleminin bir doğrusu tekabül eder; bunun karşısı da doğrudur. Bu doğrular üzerinde bazı istisnai noktalar mevcuttur ve bunlar bu doğruların a ve c' doğrularıyla arakesitlerinden ibarettir.

Bir düzlemin merkezi izdüşümle diğer düzleme tasvirinde daireler koniklere dönüşür. Bu izdüşümlerin özel hallerini daha evvel görmüştük.

π ve π' düzlemlerini ve S izdüşüm merkezini, düzlemler ke-

sişecek şekilde ve π düzleminin verilen bir a dairesi π' düzleminin a' dairesine dönüşecek tarzda seçmek daima mümkündür.

Merkezî izdüşümün nasıl seçileceği şekil 124 de gösterilmiştir. π düzlemine, a dairesinin K merkezinden başka bir noktada değen bir küre çizilip a dairesinin a' stereografik izdüşümü bulunur ve a' dairesinin düzlemi π' düzlemi olarak alınır.

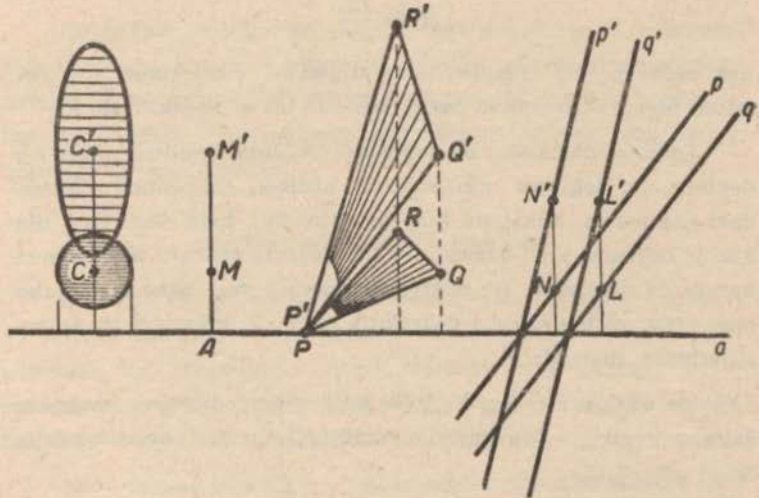
a' dairesinin merkezinin, a ya ait K merkezinin tasviri olmadığına bilmekteyiz. Evvelki bölümde bu husustan faydalanmıştık.

π düzleminin diğer bütün daireleri, çizimi yapılan bu izdüşümle, genel olarak dairelere dönüşmezler.

19. Dönüşüm grubu kavramı.

Geometride şekillerin dönüşümlerinden yalnız herbiri değil verilen şartları sağlayan dönüşümler cümlesi de önemli rol oynamaktadır. Dönüşümler grubu kavramını önemli buluyoruz.

Bu kavramı aydınlatmak için aşağıdaki misali alalım.



Şek. 126

α , π düzleminde bir doğru (Şekil 126) ve k verilen pozitif bir sayı olsun. M noktasına, (i) M' noktası, a doğrusuna dik olan MA dikmesi üzerinde bulunmak, ve M ile beraber a nın aynı tarafında olmak ve (ii) $AM' = k \cdot AM$ eşitliğini sağlamak üzere M' noktasını tekabül ettirelim.

Kurulan bu tekabül, π nin kendisine bir ϕ_k dönüşümü olup bu dönüşüme $k > 1$ halinde π nin düzgün gerilmesi ve $k < 1$ halinde ise düzgün büzülmesi denir.

Bu dönüşümde a doğrusunun noktaları sabit kalırlar.

Şekilde PQR üçgeninin $P'Q'R'$ üçgenine ve bir dairenin bir elipse dönüşümü gösterilmiştir ($k = 3$). Bu dönüşümde bir doğrunun bir doğruya, paralel p ve q doğrularının da paralel p' ve q' doğrularına dönüşeceği kolayca gösterilebilir.

Verilen a doğrusunun ve mümkün bütün $k > 0$ sayılarını almak suretiyle düzlemin kendisine tasvirini veren dönüşümler cümlesini elde ederiz. ϕ_1 ($k = 1$) dönüşümü birim dönüşüm olup π nin bütün noktalarını sabit bırakır.

Cümlelerin, birbiri ardınca tatbik edilen ϕ_{k_1} , ϕ_{k_2} , dönüşümleri $\phi_{k_1 k_2}$ dönüşümüne denktir. Bileşke dönüşümünün k büyültme katsayısı ϕ_{k_1} , ϕ_{k_2} dönüşümlerinin katsayılarının çarpımına eşittir :

$$k = k_1 k_2$$

$\phi_{k_1 k_2}$ dönüşümüne ϕ_{k_1} ve ϕ_{k_2} dönüşümlerinin toplamı denir ve

$$\phi_{k_1} + \phi_{k_2} = \phi_{k_1 k_2}$$

yazılır.

ϕ_k ve $\phi_{1/k}$ dönüşümlerinin toplamı ϕ_1 'e eşit olup

$$\phi_k + \phi_{1/k} = \phi_1$$

eşitliği caridir.

Φ_k ve $\Phi_{1/k}$ dönüşümlerine ters dönüşümler denir ve bunların toplamı birim dönüşümünü verir.

Şimdi dönüşümler grupunun genel tarifini verelim.

Tarif: *Düzlemi (veya uzayı) kendisine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümlerin A cümlesine gurup denir.*

1. *G cümlesine ait iki dönüşümün toplamı G cümlesine aittir (Toplama göre kapalılık)*
2. *Birim dönüşüm G cümlesine aittir (Etkisiz bir elemanın varlığı)*
3. *G cümlesinin her dönüşümünün bir ters dönüşümü vardır ve bu, G cümlesindedir (Bir ters elemanın varlığı).*

Ohalde, π düzleminin düzgün ϕ gerilmelerinin cümlesi bir gurup teşkil eder.

Bundan sonra dönüşümlere ait birçok gurup misalleri göreceğiz.

20. Gurup genel kavramı

Düzgün gerilmeler cümlesinde cebirsel bir işlem—toplama—tarif etmiş ve bunun, gurupu karakterize eden şartları sağlıyacağını ifade etmiştik.

Gurup genel kavramı cebire dahildir [4]. Bu bahiste, genel gurup teorisinin ileride bize lâzım olacak olan hususlarını ele alacağız.

Bazen içinde birtakım şartlara tabi bir işlem tarif edilmiş cümlelerin bazı özelliklerini göstermek önemlidir. Bunlar, tarif edilen işlemin tabiatına bağlı olmayan ve cümlelerin bütün elemanları için doğru olan özelliklerdir.

Konuya girmek için cebirsel işlemin tarifini verelim.

G , elemanları herhangi neviden olan bir cümle olsun.

G cümlesinde cebirsel bir işlem tarif edilmiştir demek, G cümlesinin verilen bir sırada alınan (farklı veya aynı) herhangi iki elemanına, bir kaide ile, G cümlesine ait tamamen belirli bir eleman tekabül ettirebilmesi demektir.

Misalimizde gerilme dönüşümleri cümlesinin herhangi iki elemanına, gerilme dönüşümleri cümlesinin üçüncü bir elemanı tekabül ettirilmiştir.

Aritmetik ve cebirde cebirsel işlemlere dair, toplay ve çarpay gibi, birçok misal mevcuttur.

Eğer işlemin neticesi G cümlesinin elemanlarının sırasına bağlı değilse, işleme komutatif işlem, eğer belirli bir sırada alınan iki (a, b) elemanına, işlemle üçüncü bir c elemanı tekabül ederse ve değişik sırada alınan aynı (b, a) elemanlarına c den farklı c' elemanı tekabül ederse işleme komutatif olmayan işlem denir.

İşlemi hangi sembolle göstereceğimizin ve işleme ne isim vereceğimizin önemi yoktur.

Sembol olarak artı ve çarpı işaretlerini

$$c = a + b, \quad b = a \cdot b, \quad c = ab, \quad c = a \times b$$

veya başka işaretler kullanabiliriz:

$$c = aob, \quad c = a \times b, \quad c = [ab].$$

Biz daha fazla $a + b$ sembolünü kullanacağız ve işleme toplama diyeceğiz. Sırası geldikçe de ab çarpım şeklini kullanıp işleme çarpım diyebileceğiz.

Cebirsel bir işlem tarif edilen bir G cümlesine, aşağıdaki şartları sağladığı takdirde *grup* adı verilir.

I. *Asosiyatiflik şartı* veya asosiyatiflik kanunu G cümlesinin herhangi a, b, c üç elemanı için caridir:

$$[a + (b + c) = (a + b) + c$$

II. *Etkisiz bir elemanın varlığı şartı*

G cümlesinin elemanları arasında etkisiz eleman adı verilip O ile gösterilen ve

$$a + O = O + a = a$$

eşitliklerini sağlayan bir eleman mevcut olmalıdır,

III. *Verilen bir elemanın ters elemanının varlığı şartı.*

G cümlesinin verilen her a elemanı için G cümlesinde

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

olacak şekilde bir $-a$ elemanı bulunabilmelidir.

Gruplara ait bir kaç misal alalım.

1. Düzgün gerilmeler cümlesinde komutatif grup elde etmiştik.

Φ_1 dönüşümü bu gurupun birim elemanı idi.

2. Bütün reel sayıların cümlesi adi toplama işlemiyle komutatif bir guruptur.

Bu gurupun etkisiz elemanı O sayısından ibarettir.

3. O hariç bütün reel sayılar çarpım işlemiyle yine komutatif bir grup teşkil eder ve etkisiz elemanı 1 sayısıdır. Bu grupta, işlem olarak çarpım almak daha doğru olup

$$I. a(bc) = (ab)c, \quad II. a \cdot 1 = 1 \cdot a, \quad III. a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

yazarız.

Etkisiz eleman 1 olup a nın ters elemanı a^{-1} dir.

4. Bütün karmaşık tam sayılar toplama göre bir gurup teşkil eder.

5. Karmaşık tam sayılar cümlesi, diğer bir deyimle, a ve b tam sayılar olmak üzere $z = a + ib$ şeklindeki sayılar toplama göre bir gurup teşkil eder.

6. Sıfır hariç, karmaşık sayılar cümlesi çarpıma göre bir guruptur.

Bu iddianın sağlanmasını bir temrin olarak okuyucuya bırakıyoruz.

7. Eşkenar bir ABC üçgenini kendisine dönüştüren dönüştürümlerin cümlesini inceliyelim,

Bu cümlelerin elemanları en basit olarak şu suretle gösterilir. Meselâ, dönüşüm A, B, C tepe noktalarını B, C, A tepe noktalarına götürürse bu eleman

$$\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$$

olarak yazılır.

Bunun gibi tam altı tane eleman mevcuttur:

$$a_0 = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix}$$

Bunlar ABC üçgeninin bütün *simetri* lerinin cümlesinin elemanlarından veya ABC yi kendisine çeviren hareketlerden ibarettir.

a_0 dönüşümü birim dönüşüm olup üçgenin her tepe noktasını yerinde bırakır. a_3 dönüşümü A tepe noktasını C tepe noktasına; B yi B ye, A yı da C ye götürür. a_5 dönüşümü ABC üçgeninin B den geçen yüksekliğe göre dönme hareketine denktir.

Bu dönüşümlerden birbiri ardınca tatbik edilen iki tanesi yerine aynı cümleye ait bir tanesi alınabilir. Bu iki dönüşüm yerine birinin alınmasına *çarpım* diyebilir ve «çarpım dili» kullanmış oluruz.

Cümlede *teklik ve kapalılık* özeliğini haiz bir işlemi tarif etmiş olduk.

İkinci olarak tatbik edilen dönüşümü sağ tarafa yazarız.

Meselâ

$$a_2 a_4 = \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}$$

de birinci dönüşüm A tepe noktasını B ye; ikincisi ise B yi A ya götürmektedir; netice olarak A tepe noktası $a_2 a_4$ dönüşümü ile A tepe noktasına gitmekte, veya yerinde kalmaktadır.

Aynı suretle $B \rightarrow A \rightarrow C$; $C \rightarrow C \rightarrow B$ olduğunu görürüz.

Ohalde $a_2 a_4 = a_1$ eşitliği vardır. Dönüşümleri ters sırada alırsak

$$a_4 a_2 = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix} = a_3,$$

elde ederiz.

Burada asosiyatiflik özeliğinin cari olduğunun sağlanmasını okuyucuya tavsiye ediyoruz. Etkisiz elemanın varlık şartı da sağlanmaktadır.

Bu eleman a_0 dır, zira, meselâ

$$a_3 a_0 = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix} = a_3,$$

ve bunun gibi $a_0 a_3 = a_3$ eşitlikleri mevcuttur.

Her elemanın bir ters elemanı vardır.

Meselâ $a_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & A \end{pmatrix}$ elemanını alalım. Bunun tersi

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & A \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}$$

olmalıdır ki bu, a_4 dönüşümünden başka bir şey değildir.

$$a_3 a_4 = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix} = a_0$$

ve

$$a_4 a_3 = a_0$$

olduğu da kolaylıkla sağlanabilir.

Eşkenar bir üçgenin simetrilerinin teşkil ettiği grup komutatif olmayan bir gruptur.

Okuyucunun, ele alınmış olan bu dönüşümlere ait işlemleri yalnız sembolle değil aynı zamanda grafikte de yapması tavsiye olunur.

Aynı misali kullanarak önemli *altgrup* kavramını izah edelim.

Cümlelerin altı elemanından iki tanesini, a_0 ve a_1 i alalım. Verilen cümlelerin bu altcümlesi, tarif edilen aynı işlemle bir grup, verilen grubun *altgrup* unu teşkil eder.

İşlemin (bu alt-cümle için) *kapalı* olduğunu gösterelim :

$$a_0 a_1 = a_1; \quad a_1 a_0 = a_1; \quad a_1 a_1 = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix} = a_0$$

Asosiyatif özeliğin sağlanmasına lüzum yoktur. Zira bu, bütün cümlede doğru olduğundan cümlelerin bir kısmı için de doğru kalır.

Etkisiz elemanın varlık şartı da mevcuttur. Zira, a_0 elemanı a_0 , a_1 altcümlesine ait bulunmaktadır.

Ayrıca, *ters elemanın varlığı* şartı sağlanmaktadır. Etkisiz elemanın tersi kendisidir. a_1 in tersi de a_1 dir.

Bundan başka $a_0 a_1 = a_1 a_0$ caridir. Ohalde, verilen gurupun bu altgurupu komutatif bulunmaktadır.

$[a_0, a_2]$ ve $[a_0, a_3]$ alt cümlelerinin de verilen gurupun altgurupları olduğu kolayca sağlanabilir. Verilen gurupun iki elemanından ibaret diğer altcümleleri altgurup teşkil etmezler. Sadece a_0 etkisiz elemandan ibaret alt cümle de bir alt gurup olup buna *birim alt gurup* denilmektedir.

Verilen cümlelerin üç elemanından ibaret $[a_0, a_3, a_4]$ alt cümlesini alalım. Bu alt cümleye ait işlem verilen gurupun tarif edilmiş olan işlemidir. Kapalılığı sağlayalım:

$$a_0 a_3 = a_3 a_0 = a_3; \quad a_0 a_4 = a_4 a_0 = a_4;$$

$$a_3 a_4 = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix} = a_0 = a_4 a_3$$

Bundan başka, a_0 etkisiz elemanı ve her elemanın ters elemanı mevcuttur:

$$a_3^{-1} = a_4; \quad a_4^{-1} = a_3; \quad a_0^{-1} = a_0.$$

ABC üçgeninin simetrilerinin gurupunun dört ve beş elemanlı altgurupları olmadığını sağlayınız.

Verilen gurupun bütün altguruplarını yazalım:

$$[a_0], [a_0, a_2], [a_0, a_3], [a_0, a_4], [a_0, a_3, a_4],$$

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5].$$

Bu altguruplardan birinci ve sonuncusuna, gurupun *has* olmayan altgurupları denir. Genel olarak, herhangi G gurupunun kendisine, G gurupunun *has olmayan altgurupları* denir.

Şimdi, guruplara tatbik edildiği anlamda, önemli *izomorfizma* kavramına geçelim. Bu kavram cebirden bilinmekte olup halka ve cisim kavramlarıyla birlikte mütalâa edilir.

G gurupunun bütün elemanlarının cümlesiyle G' gurupunun bütün elemanlarının cümlesi arasında bir

$$a \longleftrightarrow a'$$

bire-bir tekabül verilmiş olsun.

İşlem muhafaza edildiği takdirde tekabüle izomorfizma (veya izomorfik tekabül) denir, diğer bir deyimle, bir gurupun meselâ G nin üç elemanı arasında $a + b = c$ bağıntısı varsa, G nin a, b, c elemanları yerine G' nün bunlara tekabül eden a', b', c' elemanları arasında da

$$a' + b' = c'$$

bağıntısı cari ise G ile G' arasında izomorfizma vardır denir.

İzomorfik tekabül kurulmuş olan iki gurupa izomorf gurup adı verilir.

Üçgenin simetrilerinin gurupuna ait $[a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_0, a_3]$ üç alt gurupu, aşağıdaki izomorf tekabüller dolayısıyla izomorf-turlar.

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0, a_1 \\ \updownarrow \\ a_0, a_2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} a_0, a_1 \\ \updownarrow \\ a_0, a_3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} a_0, a_2 \\ \updownarrow \\ a_0, a_3 \end{array} \right\}$$

Genel olarak, iki elemandan ibaret herhangi iki gurup birbirleriyle daima izomorftur.

Gurup teorisi görüş noktasından, işlemle elemanların tabiatı ne olursu olsun, izomorf guruplar arasında fark yoktur.

Diğer bir misal daha alalım. Negatif olmayan $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ reel sayılarını çift sayılar ve tek sayılar olmak üzere iki sınıfa ayıralım:

$$b_0 = [0, 2, 4, 6, \dots],$$

$$b_1 = [1, 3, 5, 7, \dots].$$

ve b_0, b_1 den ibaret iki elemanın cümlesini düşünelim. Bu cümlelerin elemanları birer sınıftır.

Bu iki elemandan ibaret cümlede, aşağıdaki kaideye göre bir toplam tarif edelim: İki sınıfı toplamak demek bu sınıflardan birer sayı alarak bu sayıları anladığımız anlamda toplamak demektir. Toplamın ait olduğu sınıfa, verilen sınıfların toplamı adı verilir. Bu işlem; verilen iki sınıfa tek bir üçüncüsünü tekabül ettirmektedir ve işlem kapalıdır.

Bu kaideden şu eşitlikler elde edilir:

$$b_0 + b_0 = b_0, \quad b_0 + b_1 = b_1 + b_0 = b_1, \quad b_1 + b_1 = b_0$$

$[b_0, b_1]$ gurupu ile $[a_0, a_1]$ gurupu arasındaki izomorfizma

$$\begin{array}{ccc} a_0 & , & a_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ & & \downarrow \\ b_0 & , & b_1 \end{array}$$

şeklindedir.

İşlemin muhafaza edildiği aşağıdaki tablodan anlaşılabilir.

$$a_0 a_0 = a_0, \quad a_0 a_1 = a_1 a_0 = a_1, \quad a_1 a_1 = a_0;$$

$$b_0 + b_0 = b_0, \quad b_0 + b_1 = b_1 + b_0 = b_1, \quad b_1 + b_1 = b_0$$

Teorem. Bir G gurupunun bir G' gurupu üzerine

$$a \longleftrightarrow a'$$

izomorf tasvirinde, birinci gurupun etkisiz elemanına ikinci gurupun etkisiz elemanı, ve birinci gurupun birbirinin tersi olan her eleman çiftine ikinci gurupun birbirinin tersi olan bir eleman çifti tekabül eder.

G gurupunun a_0 etkisiz elemanına, verilen izomorfizma ile G' gurupunun a_0' elemanı tekabül etsin:

$$a_0 \longleftrightarrow a'_0.$$

a'_0 elemanının G' gurupunun etkisiz elemanı olduğunu göstereceğiz.

G gurupun keyfi bir elemanı için

$$a + a_0 = a, \quad a_0 + a = a$$

mevcut olup, izomorfizmadan dolayı

$$a' + a'_0 = a', \quad a'_0 + a' = a'$$

yazılabilir ve bundan da a'_0 in G' gurupunun etkisiz elemanı olduğu çıkar.

a ve b , G gurupunun birbirinin tersi bir eleman çifti olsun.

$$a + b = a_0, \quad b + a = a_0$$

İzomorfizmadan dolayı

$$a' + b' = a'_0, \quad b' + a' = a'_0$$

yazılabilir. a'_0 etkisiz eleman olduğundan a' ve b' nün birbirinin tersi olduğu çıkar.

Yayınlanmış olan eserler :

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanığın matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
- 11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler :

- 15 — İhtimaller hesabına giriş
- 16 — Sayı sistemi
- 17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi :

Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü

Vezneciler — İstanbul

Yayınlanmış olan eserler :

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
- 11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler :

- 15 — İhtimaller hesabına giriş
- 16 — Sayı sistemi
- 17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi :

Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü

Vezneciler — İstanbul

Fiatı 500 Krş.