TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı : 20

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT II)

Çeviren
Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1963

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı : 20

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT II)

Çeviren
Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1963

Bu kitabın telif hakkını Türk Matematik Derneğine bağışlayan
YALE ÜNİVERSİTESİ'ne
teşekkürlerimizi sunarız.

Türk Matematik Derneği

Matbaa Teknisyenleri Basımevi
Divanyolu, Biçkiyurdu Sokak 12
İSTANBUL — 1963

BU KİTAP HAKKINDA

Bu kitap tamamen orta öğretim müfredatına paralel olup müstakbel öğretmenlerin mesleki ihtiyaçlarını karşılamak ve özel olarak matematik kültürlerini genişletmek ve geometri öğretimindeki gerekli tekniği geliştirmek amaciyle hazırlanmıştır.

Önce, cümle teorisine dayanan kavramlar, soyut fonksiyon (LOBACHEVSKI anlamında) kavramının tatbikatı, dönüşüm gurupları kavramı, guruplar teorisinin ana hatları incelenmiştir. Bugün LOBACHEVSKI geometrisinin esaslarını ele almadan geometriyi başarılı bir şekilde öğretmek mümkün değildir.

Kitapta bol sayıda temrin bulunmaktadır. Okuyucuların bu temrinler dışında çalışma yapmaları da kaçınılmaz bir zarurettir. Her bölümde bu gibi çalışmalar için konular verilmiş ve bunlarla ilgili yayınlara atıflar yapılmıştır. Böylece, yeniliğine rağmen bu programa öğretmenin ve öğrencinin hızla intibakı kolaylaştırılmıştır.

Orta öğretim ders kitaplarının bünyesine uygun temrinlere özel önem verilmiştir. Geometrinin sistemli olarak incelenmesinin orta öğretim ileri sınıflarında ele alınması temayülü, buna mukabil ilk iki yıl bunun yerine bir nevi mantık ve «sezgiye dayanan tümden gelim» in konması savunulacak bir hareket değildir. Mevcut geometri programı çerçevesi içinde öğretmenin, modern ilmin önemli fikirlerini — cümle teorisine dayanan kavramları, soyut fonksiyon kavramını, geometrik dönüşümleri, gurup kavramını, aksiyomatik metodu, v.s. — işleme bakımından imkânları artmıştır. Kanaatımızca müfredat programında, meselâ yeteri kadar temel hazırlanmaksızın diferansiyel ve integral hesabın okutulması gibi değişiklikler bugün modası geçmiş görünmektedir.

Bu kitap, orta öğretim ders kitaplariyle birlikte programın hemen hemen tam olarak incelenmesine imkân verecektir. Yer darlığı dolayısiyle trigonometrinin geometriye tatbikatiyle ilgili iki bölümden sarfı nazar edilmiştir. Bu noksanlık diğer ders kitaplarından faydalanılarak telafi edilebilir.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısiyle mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özelikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar ol-

mayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

KISIM II. ELEMENTER GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER

BÖLÜM IV. PARALEL ÖTELEMELER (ÖTELEMELER)

21. Paralel doğrular 1
22. Ötelemeler (düzlemde paralel ötelemeler) 5
23. Düzlemde bir doğruya paralel olan ötelemelerin gurupu 12
24. Düzlemin bütün ötelemelerinin gurupu 15
25. Şekillerin değişmez'leri ve değişmez özelikleri 24
26. Çizim problemlerinin çözümünde paralel ötelemeler usulü 27
27. Uzayda ötelemeler gurupu 30

BÖLÜM V. DÖNDÜRME

28. Bir nokta etrafında döndürme vasıtasiyle düzlemin kendi üzerine dönüşümü 36
29. Düzlemde hareketler gurupu 41
30. Çizim problemlerinin çözümünde döndürme usulü ... 46
31. Uzayın bir eksen etrafında döndürülmesi 52
32. Dönel yüzeyler 57
33. Uzayın bir nokta etrafında döndürülmesi 65
34. Uzayda hareketler gurupu 69
35. Düzgün piramidin dönme grupları 74
36. Ortogonal dönüşümlerin tarif ve özelikleri 76

BÖLÜM VI. SİMETRİ

37. Düzlemde bir eksene göre simetri 83
38. Düzlemde bir noktaya göre simetri 89
39. Çizim problemlerinin çözümünde simetri usulü 91
40. Uzayın düzleme göre simetrisi 93
41. Uzayın bir noktaya göre simetrileri 96
42. Düzlemde şekillerin simetrisi 98
43. Uzayda şekillerin simetrileri 103

BÖLÜM VII BENZERLİK

44. Düzlemin merkezil benzerlikleri 110
45. Dairelerin benzerliği..... 115
46. Eş merkezli benzerlik dönüşümlerinin gurupu 118
47. Düzlemde şekillerin benzerliğinin genel hali 120
48. Çizim problemlerinin çözümünde benzerlik usulü 128

BÖLÜM VIII. EVİRTİM

49. Düzlemde evirtim 132
50. Uzayda evirtim 147
51. Evirtimlerin geometrik çizimlere tatbiki 149
52. Apollonius problemi 156

KISIM III. UZUNLUK, ALAN VE HACIMLARIN ÖLÇÜLMESİ

BÖLÜM IX. UZUNLUK, ALAN VE HACIM ÖLÇME GENEL PROBLEMİ

53. Doğru parçalarının mukayesesi..... 163
54. Doğru parçalarını ölçme genel problemi 170
55. Bir doğru parçasının uzunluğunun ölçü biriminin seçimine bağlılığı 182
56. Bir düzlemde alanların mukayesesi..... 187
57. Çokgenlerin dönüşümü..... 199
58. Basit çokgenlerin alanlarını ölçme problemi 206
59. Düzlemsel bir şeklin alan kavramına dair 216
60. Hacım ölçme probleminin kısaca incelenmesi 220

İKİNCİ KISIM

ELEMENTER GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER

BÖLÜM IV

PARALEL ÖTELEMELER (ÖTELEMELER)

Bu IV. bölümde düzlem ve uzaydaki ötelemeler, ve paralel ötelemelerle ilgili olarak paralel doğruların özelikleri incelenmiştir.

Paralel doğrular teorisinden ilerde Lobachevski geometrisine girişte faydalanılacaktır.

26. maddede paralel öteleme usulünün çizim problemlerinin çözümünde tatbikatı görülecektir.

21. Paralel doğrular

Farklı iki doğru birden fazla noktada kesişemez, zira, iki doğrunun birden fazla noktası olduğu takdirde çakışırlar, veya bütün noktaları ortak olur.

Bir düzlemde kesişmiyen doğruların varlığının ispatından sonra *paralellik aksiyomu* ithal edilir.

IV (Euclid aksiyomu). *a keyfî bir doğru, A da doğrunun dışında bir nokta ise, a doğrusiyle A noktasının belirlediği düzlemde A noktasından geçip a doğrusunu kesmiyen birden fazla doğru yoktur.*

«Birden fazla yoktur» ifadesinin, aksiyomu; «ancak bir tane vardır» ifadesinin ise teoremi (bak: 2) belirlediğini tebarüz ettirelim. Bu teereme Euklid aksiyomunun *birinci neticesi* diyoruz.

Euclid aksiyomunun ifadesinde ve paralelin tarifinde b doğrusu, a doğrusu ve bunun dışındaki A noktasiyle belirlenmektedir. Halbuki b nin ihtiva ettiği başka noktalar da mevcuttur. B, böyle başka bir nokta olsun olsun. Birinci netice, B den geçip a doğrusuna paralel bir c doğrusunun mevcut olduğunu ifade etmekte, fakat c nin b ile aynı olup olmadığı hakkında bir şey söylememektedir.

b doğrusunun a ve B ile belirlendiği ve ayrıca B den geçtiği göz önünde tutulursa, birden fazla böyle bir doğru olmadığını ifade eden Euclid aksiyomu kullanıldığında c nin b ile çıkışacağı çıkar. Ohalde b üzerinde hangi B noktası seçilirse seçilsin, a doğrusu ve B noktasiyle belirlenen paralel, b ile çakışmış olur. Buna Euclid aksiyomunun *ikinci neticesi* diyeceğiz.

Ancak bu ikinci neticeyi elde ettikten sonra, b üzerindeki ve paralelliğin buna göre cari olduğu A noktasını zikretmeksizin b nin a ya paralelliğinden bahsedebiliriz.

Şu ifadenin ancak şimdi anlamı bulunmaktadır: *b doğrusu a doğrusuna paraleldir.*

Şimdi karşıt olarak a nın b ye paralel oluşunun ispatı kalmıştı. Bu ise *üçüncü netice* yi teşkil eder.

Eğer b doğrusu a doğrusuna paralel ise a doğrusu da b doğrusuna paraleldir.

Hakikaten, a doğrusu üzerinde bir C noktası alalım (Şekil 127).

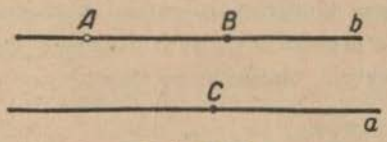
C noktası ile b doğrusu, üzerinde a doğrusunun bulunduğu bir düzlem belirler. a doğrusunun b doğrusiyle hiçbir ortak noktası olmadığından, a doğrusu b ye araleldir.

Üçüncü neticenin bu ispatından şunu ifade etmek mümkün olur: *a ve b doğruları birbirine paraleldir.* Paralel doğrular hakkında elde edilen bu özeliğe iki doğrunun paralelliğine ait *simetri özeliği* diyoruz.

Nihayet, Euclid aksiyomunun *dördüncü netice* sini ispatlıyalım :

Eğer a doğrusu bir b doğrusuna ve b doğrusu da bir c doğrusuna paralelse, a doğrusu c doğrusuna paraleldir.

a ve *c* doğrularının ikisi de *b* doğrusuna paralel olduğundan *a* ve *b* doğruları ve bunun gibi *c* ve *b* doğruları bir düzlem üze-



(Şek. 127)

rinde bulunur. Bu düzlemler ya farklıdır veya farklı değilse çakışık durumdadır. Eğer farklı iseler *b* doğrusunda kesişirler.

a ve *c* doğrularının *S* noktasında kesiştiklerini farzedelim. Bu takdirde, *S* noktası *a* doğrusu üzerinde bulunduğundan *a* ve doğrularının düzlemine, *c* doğrusunda bulunduğundan ise *c* ve *b* doğrularının düzlemine ait olacağından *S* noktası bu düzlemlerin arakesiti olan *b* doğrusu üzerinde bulunur. Bundan da *a* ve *b* doğrularının ortak bir *S* noktası olduğu çıkar; fakat bu, *a* ve *b* nin paralel oluşundan imkânsızdır. Vardığımız bu çelişmezlik *a* ve *c* doğrularının ortak noktası olmadığını göstermiş olur.

Fakat *a* ve *c* doğruları aykırı olabilir. Şimdi bunun da olamıyacağını gösterelim.

c doğrusu üzerinde bir *C* noktası alalım ve *c*, *b* doğrularının belirlediği düzlemle *a*, *c* doğrularının belirlediği düzlemin *d* arakesitini düşünelim.

d arakesit doğrusu *b* doğrusuna paraleldir.

Bunu şöyle ispatlarız: *d* doğrusu *c* ve *b* doğrularının düzlemindedir. Eğer *d* doğrusu *b* doğrusunu bir Σ noktasında kesseydi, *b* üzerinde olan Σ noktası *a* ve *b* doğrularının düzlemine,

ve d üzerinde olması dolayısiyle de d ve a nın düzlemine ait olurdu. Fakat bu, Σ nın, belirtilen düzlemlerin a arakesitine (1) ait olduğunu ifade eder. Bu da a ve b doğrularının ortak bir Σ noktasının varlığı demek olup imkânsızdır. Öyle ise b doğrusu d doğrusuna paraleldir.

Ohalde C noktasından geçen d doğrusu ile yine C den geçen c doğrusu aynı b doğrusuna paralel bulunduklarından çıkışırlar. Halbuki d doğrusu a ile aynı düzlemde olduğundan a ile $c \equiv d$ doğruları aykırı olamazlar ve dolayısiyle a doğrusu c ye paralel olur.

Bu suretle dördüncü neticenin ispatının ilk yarısını bitirmiş oluyoruz.

Şimdi, (a, d) doğrularının düzlemiyle (a, c) doğrularının düzlemi çakışsın, veya, a, b ve c doğruları bir düzleme ait olsunlar.

a ve c doğruları, b doğrusuna paralel olduklarından b yi kesemezler.

a ve c doğruları bir S noktasında kesişselerdi, S den b ye paralel olan iki doğru geçerdi. Euclid aksiyomuna göre ise bu imkânsız olduğundan a ve c doğrularının paralelliği çıkar ve dördüncü neticenin ispatı tamamlanmış olur.

Dördüncü netice ile ifade edilen paralellik özeliğine *tranzitivlik* özeliği denir.

Bu özelik düzlem ve uzay için doğru olduğundan paralel doğrular *demet*inden bahsedebiliriz (1).

Bir α düzleminde bir a doğrusuna paralel olan doğruların cümlesine *paralel doğrular demeti* adı verilir.

(1) Meğer ki a, b, d doğruları aynı düzlemde bulunsunlar, Bu takdirde b doğrusu ile C noktası bu düzlemde bulunur (d doğrusu C den geçiyor). Dolayısiyle, b ye paralel olduğu ve C den geçtiği için c doğrusu da bu düzleme ait olur. Bu da a ve c nin aynı düzleme ait bulunup aykırı olmadığını ifade eder.

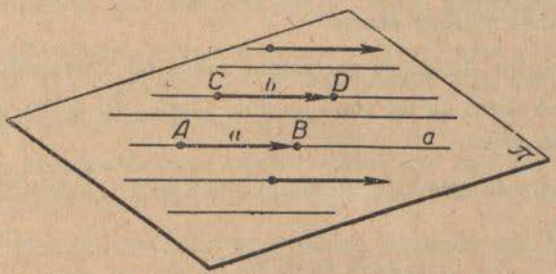
Bir a doğrusunun belirlediği demetin herhangi iki b, c doğrusu birbirine paraleldir. Hakikaten, b doğrusu a ya paralel olduğundan simetri özeliği dolayısiyle a doğrusu b ye paraleldir. c doğrusu da a ya paralel olduğundan tranzitivlik özeliğinden dolayı b doğrusu c ye paralel bulunur.

Bu suretle, bir paralel doğrular demeti herhangi bir doğrusu ile belirli bulunduğundan birbirine paralel olan doğruların demetinden bahsedebiliriz.

Paralelliğe ait simetri ve tranzitivlik özelikleri uzayda da doğru olduğundan şu benzer tarifi de verebiliriz: Uzayda bir a doğrusuna paralel olan doğruların cümlesine *paralel doğrular demeti* denir (1).

22. Ötelemeler (düzlemde paralel ötelemeler).

Bir π düzlemine ait bir paralel doğrular demetini inceliyelim (Şekil 128).



Şek. 128

Her a doğrusunun bir demet, a nın kendisi dahil a ya paralel olan bütün doğruların sınıfını belirlediğini görmüştük. Doğruların paralelliği simetri ve tranzitivlik özeliklerini haiz oldu-

(1) Kitabın aslında düzlemdeki paralel doğrular için «pencil», uzaydaki paralel doğrular için ise «bundle» kelimeleri kullanılmıştır. Biz her ikisi için de «demet» tabirini kabul ettik.

ğundan π düzlemindeki doğruların tümü, aralarında paralel olan doğru sınıflarına ayrılabilir. Düzlemin her hangi a doğrusu kendisine paralel olan doğruların ve kendisinin de dahil olduğu sınıfı temsil eder. a ile belirlenen sınıfa ait her b doğrusu tam ait olduğu sınıfı belirler.

Bir sınıftaki doğrular cümlesine — paraleller demetinin doğrularına — *bir istikamet* tekabül ettirip demetin bütün doğrularının bir ve aynı istikameti haiz olduğunu söyliyeceğiz. Her doğru yalnız bir demete ait bulunduğundan bir doğrunun yalnız bir istikameti mevcut olur.

Bir a doğrusu üzerinde herhangi iki A, B noktasını alalım a doğrusu (ve dolayısiyle bir istikamet de) A ve B noktasiyle tamamen belirli olur. AB doğru parçasına, istikametten başka *yön* vermek de mümkündür. A, doğru parçasının *birinci* noktası — başlangıç noktası — ve B, *ikinci* noktası — *uc* noktası — olarak alınırsa AB doğru parçasına istikametten başka bir de yön tekabül ettirmiş oluruz.

Aynı bir AB doğru parçasının yalnız bir istikameti ve $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ olmak üzere de iki yönü vardır. Yönlü $\overline{AB}$ doğru parçasına *vektör* adı verilir.

Vektörler aşağıda gösterildiği gibi küçük veya büyük kalın harflerle :

$$a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C,\ \ldots.$$

veya

$$\overline{AB},\ \overline{CD},\ \overline{LM},\ \ldots$$

gibi üzerlerinde çizgi olan büyük iki harfle gösterilir. Bu son halde birinci harf başlangıç noktasını, ikinci harf uc noktasını, gösterir.

AB doğrusunun $\overline{AB}$ ve $\overline{BA}$ vektörleriyle belirlenen iki yönü vardır ve $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ yönlerine *ters* yön adı verilir.

AB doğru parçasının uzunluğuna $\overline{AB}$ vektörünün *uzunluk*'u denir.

Başlangıç noktasiyle uc noktası çakışan bir vektöre *sıfır vektör* adı verilir. Böyle bir vektörün ne istikameti ne de yönü belirli olup uzunluğu sıfıra eşittir.

İstikametleri, yönleri ve uzunlukları aynı olan iki vektör eşit addolunur : $a = b$

İhtar: Eğer istikamet, yön ve uzunlukları aynı olan vektörlere eşit olarak bakarsak ve ayrıca bu vektörler aynı doğru *üzerinde bulunursa* böyle vektörlere *kayan vektörler*, üzerinde bulundukları doğruya da *tesir çizgisi* diyeceğiz.

Mekanikte katı cisimlere tatbik edilen kuvvetler kayan vektörlerdir. Böyle bir cisme tatbik edilen bir kuvvet, cismin hareket ve sükûnet durumunu bozmaksızın tesir çizgisi üzerinde kaydırılabilir.

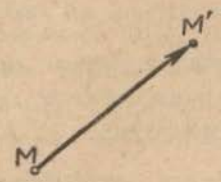
Bir kuvvet, hareket ve sükûnet durumunu bozmaksızın, kendisine paralel olan diğer bir doğru üzerine kaydırılamaz.

Aynı istikamet, aynı yön ve uzunluktan başka *aynı başlangıç noktası* olan vektörlere eşit diyecek olursak *sabit* vektör dediğimiz vektörleri elde ederiz.

Esas konumuzda tarifi verilen vektorlerin eşitliğini, *serbest* vektörlerin eşitliğinin tarifi olarak alıyoruz.

Bir düzlemin kendisine tasvirinden, düzlemin her M noktasının aynı düzlemin bir M' noktasına tasvirini anlıyoruz. Verilen bir tasvir altında, M noktası bir M' noktasına gitmiş veya *dönüşmüş* veyahut da M noktası M' noktasına *kaymıştır* deriz. M noktasının M' resminin yeri $\overline{MM'}$ vektöriyle kolayca tarif edilebilir (Şekil 129).

Şu tarifi verelim. **Tarif :** Başlangıç noktası M de uc noktası M' resminde olan vektöre, düzlemin kendisine olan tasviri altında, M nin *öteleme vektörü* denir.

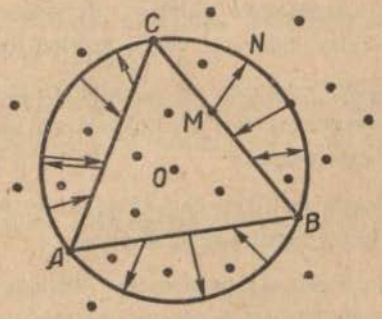


Şek. 129

Bir misal alalım.

Evvelce (13, 14) bir düzlemin kendisine tasvirinde bir dönüşüm alınmış ve bu dönüşümle bir daire içine çizilen ABC üçgeninin noktaları dairenin noktalarına ve karşıt olarak dairenin noktaları üçgenin noktalarına ve düzlemin diğer bütün noktaları da kendilerine tasvir edilmişti (Şekil 101, 111).

Şekil 130 da bu tasvire ait bir kaç vektör gösterilmiş bulunmaktadır. Çizgisel üçgenle dairenin noktasından gayri nokta-

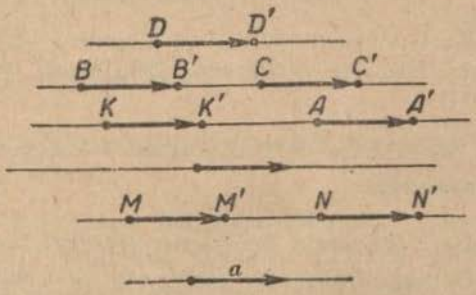


Şek. 130

lara ait öteleme vektörleri sıfır-vektörlerden ibarettir; üçgenin tepe noktalarının vektörleri de sıfır vektörlerdir.

M noktası N ye (Şekil 130) N de M ye gittiğinden her MN doğru parçası $\overline{MN}$ ve $\overline{NM}$ olmak üzere ters yönlü iki öteleme vektörünü haizdir.

Şimdi ötelemenin (veya paralel ötelemenin) tarifini verelim: Düzlemde *paralel öteleme* (veya *öteleme*), bütün noktalarının öte-



Şek. 131

leme vektörleri biribirine eşit olan, düzlemin kendisine bir tasviridir :

$$\overline{MM'} = \overline{NN'} = \overline{AA'} = \overline{BB'} = \ldots = a = \ldots$$ (Şekil 131).

Düzlemde öteleme, inceliyeceğimiz ve aşikâr teoremler şeklinde ifade edeceğimiz bir takım özelikleri haizdir:

Teorem 1. *Düzlemde paralel öteleme, düzlemin kendisine olan bire-bir bir tasvirdir.*

Hakikaten, f paralel öteleme düzlemin her M noktasına aynı düzlemin

$$M' = f(M)$$

noktasını tekabül ettirir; burada M' noktası, verilen ve başlangıç noktası M olan a vektörünün uc noktasıdır.

M nin resmi olan M' noktasının çizimi şöyle elde edilir.

M noktasından a vektörünün belirlediği demetin bir doğrusunu geçirir ve bu doğru üzerinde $\overline{MM'} = a$ olacak şekilde yönlü doğru parçasını alırız.

M' noktasının $f^{-1}(M')$ ters resmi aşikâr olduğu veçhile

$$M = f^{-1}(M')$$

den ibarettir.

Dönüşüm bire-bir olduğundan (14), ispat tamamlanmış olur.

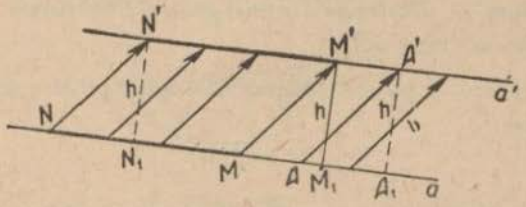
Bundan sonra artık ötelemenin düzlemde olduğunu açık olarak ifade etmiyeceğiz.

Teorem 2. *Bir paralel öteleme her doğruyu, kendisine paralel olan bir doğruya dönüştürür, veya, diğer bir deyimle, birinci doğrunun bütün noktalarını, bu birinci doğruya paralel bir doğru üzerinde bulunan noktalara götürür.*

Bunu ispatlamak üzere, a doğrusuna ait (Şekil 132) her M noktasının M' resminden a doğrusuna $M'M_1$ dikmesini çizelim. Bu bütün dikmeler birbirine eşittir:

$$M'M_1 = N'N_1 = A'A_1 = \ldots = h$$

Bundan, a doğrusunun M noktalarının a nın aynı tarafına düşmüş olan M' resimlerinin a dan aynı h uzaklığında bulunduk-



Şek. 132

ları, ve dolayısiyle a ya paralel a' doğrusu üzerinde oldukları çıkar ve ispat sabit olur.

Dönüşümün adı, bu teoremle ifade edilen özelikten gelmektedir.

Teorem 3. *Bir paralel öteleme paralel iki doğruyu yine paralel iki doğruya götürür, diğer bir deyimle, paralel iki doğrunun resmi paralel iki doğrudan ibarettir.*

Bu teorem evvelkinin bir neticesi olup bu teoremden aşağıdaki önemli teorem elde edilir:

Teorem 4. *Bir paralel öteleme her paralel doğrular demetini kendisine dönüştürür.*

Bu böyledir, çünkü paraleller demetinin her a doğrusu, a ya paralel bir a' doğrusuna dönüşür, diğer bir deyimle, a' doğrusu a ile belirlenen paraleller demetine ait olur.

Bir paraleller demeti öteleme altında *değişmez* kalır; bu halde her doğru düzlemdeki yerine göre değişmeyip kendisine gitmiş olur. Böyle bir doğrunun noktaları aynı doğru üzerinde kalır ve sadece bu doğru üzerinde kaymış olurlar.

Düzlemin bir dönüşümünde yerleri değişmiyen doğrulara *kayan doğrular* denir. Bir dönüşme altında, kayan doğrular bir paraleller demetinin doğruları olur.

Birim dönüşüm olmıyan bir ötelemenin sabit hiç bir noktası yoktur.

Teorem 5. *Bir paralel öteleme bir doğru parçasını, kendisine eşit ve paralel olan bir doğru parçasına dönüştürür.*

MN doğru parçasının noktaları $M'N'$ doğru parçasının noktalarına dönüşürler (Şekil 132). $MNN'M'$ ise bir paralel kenar olduğundan

$$MN = M'N'$$

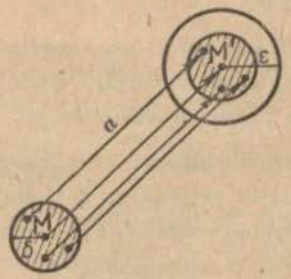
elde edilir ve ispat sabit olur.

Bundan, her şeklin paralel bir öteleme ile eşit bir şekle dönüşeceği çıkar. Meselâ, bir üçgen, kare ve bir daire; noktaları

verilen öteleme vektöriyle kaymak suretiyle aynı şekillere dönüşürler.

Teorem 6. *Bir paralel öteleme iki taraflı sürekli bir dönüşümdür.*

M' noktası M nin resmi olsun. M' noktasının keyfî küçük bir ε - civarını seçelim (Şekil 133). M noktasının bir δ - civarına



Şek. 133

karşı, merkezi M ve yarıçapı $\delta \leq \varepsilon$ olan herhangi açık diskini seçebilir ve aynı şekilde ters dönüşümün de sürekli olduğunu ispatlıyabiliriz.

Ohalde bir paralel dönüşüm düzlemin kendisine topolojik bir dönüşümdür.

23. Düzlemde bir doğruya paralel olan ötelemelerin gurubu

Bir π düzleminde, bu düzlemin verilen bir a doğrusunu değişmez bırakan bütün ötelemelerin G cümlesini düşünelim. Bu cümlenin herhangi elemanı (öteleme) demetin a ya paralel her doğrusunu kendisine dönüştürür.

Bu cümlenin biribiri ardınca tatbik edilen iki ötelemesi yerine aynı cümleden bir öteleme alınabilir. Birinci Φ_1 ötelemesi

a doğrusunun M noktasını M' ye götürürse veya $\overline{MM'}$ öteleme vektörüyle belirlenirse ve ikinci öteleme de a doğrusunun M' noktasını aynı doğrunun M'' noktasına götürür veya $M'M''$ öteleme vektörüyle belirlenirse, Φ_1 ve Φ_2 yerine geçen Φ ötelemesi, M yi M'' noktasına götürmüş ve $\overline{MM''}$ öteleme vektöriyle karakterize edilmiş olur. Φ bileşke ötelemesine Φ_1 ve Φ_2 ötelemelerinin toplamı denir ve

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

yazılır.

Φ toplamının Φ_1, Φ_2 ötelemelerine tekabül ettirilmesi işlemine ötelemelerin *toplam*'ı denir.

Bir a doğrusunu değişmez bırakan ötelemelerin toplam işlemi *kapalı*'dır. Bu ise, G cümlesine ait paralel iki Φ_1, Φ_2 ötelemesinin, toplandığı zaman, yine G cümlesine ait bir Φ ötelemesi vereceği anlamındadır.

Ohalde, *toplam* denilen cebirsel bir işlem tarif edilmiş bir G cümlemiz mevcuttur.

Paralel ötelemelerin toplamının asosiyatif

$$\Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3) = (\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3$$

özeliğini haiz olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca, Φ_0 *birim ötelemesi, bahis konusu ötelemelerin cümlesinde bulunmakta olup* cümleye ait herhangi Φ ötelemesi için

$$\Phi + \Phi_0 = \Phi$$

şartını sağlamaktadır.

Birim dönüşüm, düzlemin, düzleme ait her noktayı kendisigötüren veya yerinde bırakan dönüşümüdür.

Bundan başka, ötelemelerin verilen cümlesindeki her Φ ötelemesi için, aynı cümlede, toplamları Φ_0 birim dönüşümü olan bir $(-\Phi)$ dönüşümü mevcuttur:

$$\Phi + (-\Phi) = (-\Phi) + \Phi = \Phi_0$$

Bu böyledir, çünkü Φ ötelemesi M yi M' ye götürürse veya $\Phi(M) = M'$ ise, M' yü M ye götüren öteleme $(-\Phi)$ den ibarettir.

$(-\Phi)$ ötelemesine Φ nin *tersi* denir.

$(-\Phi)$ nin ters ötelemesi de Φ dir:

$$-(-\Phi) = \Phi.$$

$$\Phi + (-\Phi) = \Phi_0$$

yerine

$$\Phi - \Phi = \Phi_0$$

yazarız.

Kendisine ait iki elemana karşı aynı cümlede üçüncü bir eleman tekabül ettirecek şekilde, içinde bir değerli bir işlem tarif edilmiş bulunan herhangi neviden elemanların her cümlesinin bir gurup teşkil ettiğini biliyoruz.

Dönüşümler cümlesinde bazı gurup şartlarının kendiliğinden mevcut olduğuna işaret edelim. Biz burada bunlar üzerinde duracak değiliz.

Bahis konusu gurupta komütatif özelik caridir:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1$$

Ohalde *paralel ötelemeler cümlesinin komutatif bir gurup* olduğunu söyliyebiliriz.

Bu gurupun elemanlariyle öteleme vektörleri arasında birebir bir tekabül elde edeceğiz.

Vektörlerin toplam işlemini, aşağıdaki gibi, bunlara tekabül eden dönüşümlerin toplamı yardımı ile tarif edeceğiz: Verilen iki vektörden karşıt ötelemelere geçip bu ötelemeleri topluya-

lım. Bu toplam-kaydırmaya tekabül eden vektörü verilen iki vektörün toplamı olarak alacağız. Paralel vektörlerin cümlesi, toplam işlemine göre, paralel ötelemeler gurupu ile izomorf olan bir gurup teşkil eder.

Bir temrin olarak, reel sayılar cümlesinin adi toplamaya göre paralel vektörlerin gurupu ile izomorf olan bir gurup teşkil ettiğini ispatlayınız.

24. Düzlemin bütün ötelemelerinin gurupu

Düzlemin *bütün* ötelemelerinin cümlesinde belirli bir sırada alınan herhangi iki ötelemeye aşağıdaki şekilde bir üçüncüsünü tekabül ettiren bir işlem tarif edeceğiz. M düzlemde herhangi bir nokta, M' de bunun resmi ise, bir öteleme M ve M' noktasiyle tamamen belirlidir ve bu ötelemenin öteleme vektörü $\overline{MM'}$dür.

Birinci Φ_1 ötelemesi M yi M' ye, ikinci Φ_2 ötelemesi ise M' yü M'' ye götürsün. Φ_1 ve Φ_2 ötelemelerine, M yi M'' ye götüren Φ ötelemesi tekabül ettirelim. Φ ötelemesine Φ_1 ve Φ_2 ötelemelerinin toplamı ve Φ_1, Φ_2 ötelemelerine Φ yi tekabül ettirme işlemine ise *toplama* denir ve şöyle yazılır (1):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 herhangi üç öteleme ise

$$\Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3) = (\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3 \quad \ldots\ldots (1)$$

caridir.

$\Phi_1(M) = M'$, $\Phi_2(M') = M''$, $\Phi_3(M'') = M'''$ yazarsak (1) denkleminin sol tarafında Φ_1 ötelemesi M yi M' ye, halbuki $\Phi_2 + \Phi_3$ ötelemesi M' yü M''' ye götürmektedir. (1) denkleminin sağ tarafında ise M noktası M''' ye başka türlü götürülmektedir.

(1) Hangi M noktası alınırsa alınsın Φ nin aynı kalacağı kolayca gösterilebilir.

$\Phi_1 + \Phi_2$ dönüşümü M noktasını M'' ye, sonra da Φ_3 dönüşümü M'' noktasını M''' ye götürmektedir.

Asosiyativlik şartı cari bulunmaktadır. Etkisiz elemanın varlığı şartı da caridir; zira Φ_0 birim öteleme yektörü sıfır öteleme vektörüne tekabül eden ötelemeden ibaret olup herhangi Φ için

$$\Phi + \Phi_0 = \Phi$$

doğrudur.

Her elemanın ters elemanının varlığı şartı da sağlanmaktadır.

M yi M' ye götüren ve öteleme vektörü $\overline{MM'}$ olan her Φ ötelemesine mukabil M' yü M ye götüren ve öteleme vektörü $\overline{M'M}$ olan bir $(-\Phi)$ ötelemesi mevcuttur ve

$$\Phi + (-\Phi) = (-\Phi) + \Phi = \Phi_0$$

yazılır.

Düzlemdeki bütün ötelemelerin cümlesinde, ithal ettiğimiz toplama işlemine göre, bütün gurup özelikleri sağlanmış bulunmaktadır: *Düzlemdeki ötelemelerin cümlesi bir guruptur.*

Ayrıca,

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1$$

cari olduğundan, düzlemdeki ötelemeler gurupu *komütatif* bir guruptur.

Ötelemeler cümlesiyle birlikte düzlemde vektörler cümlesi de mevcut bulunmaktadır. Bundan başka ötelemelerle vektörler arasında bire-bir bir tekabül elde edilmiş bulunuyor.

İzomorfizma elde edecek şekilde, vektörlerin toplama işlemini ithal edelim. Meselâ, a ve b gibi iki vektöre aşağıdaki şekilde bir c vektörünü tekabül eden ötelemeler Φ_a ve Φ_b ise Φ_a ile Φ_b nin toplamı olan $\Phi_a + \Phi_b$ ötelemesine tekabül eden vektöre c der ve

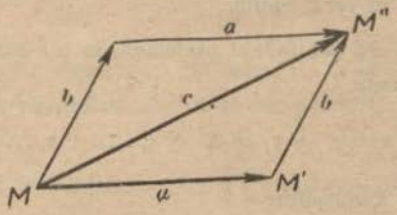
$$c = a + b$$

yazarız.

Vektörlerin toplamı üçgen veya paralelkenar kaidesi ile tarif edilir (Şekil 134).

Düzlemdeki vektörler cümlesinin, toplamaya göre, düzlemin paralel ötelemelerinin guruplariyle izomorf olan bir gurup olduğu kolaylıkla görülebilir.

Karmaşık sayıların toplamının cebirden bildiğimiz geometrik tefsirini düşünürsek, bütün karmaşık sayıların cümlesinin,



Şek. 134

toplamaya göre, düzlemin vektörler ve öteleme guruplariyle izomorf olan komütatif gurup olduğu da görülebilir.

Düzlemdeki ötelemeler gurupunun bazı alt guruplarını gösterelim.

Şu alt gurupu teşkil edelim: Keyfî fakat sabit bir Φ ötelemesini alıp n tanesinin toplamını yazalım:

$$\underbrace{\Phi + \Phi + \cdots + \Phi}_{n \text{ tane}}$$

ve şu sembolü ithal edelim:

$$\underbrace{\Phi + \Phi + \cdots + \Phi}_{n \text{ tane}} = n\Phi$$

Aynı sembolü ters dönüşüm için de kullanalım:

$$(-\Phi) = (-\Phi) + \cdots + (-\Phi) = -n\Phi$$

$(-n\Phi)$ ötelemesi $n\Phi$ ötelemesinin tersidir, zira, Φ_0 etkisiz eleman olduğuna göre,

$$n\Phi + (-n\Phi) = \Phi_0$$

eşitliği kolayca sağlanabilir.

Ayrıca,

$$0 \cdot \Phi = \Phi_0$$

eşitliğiyle $0 \cdot \Phi$ yi tarif edelim.

Bu suretle $n\Phi$ şeklindeki ötelemelerin bir cümlesini elde etmiş oluruz. Burada

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm 4, \ldots$$

değerleri bahis konusudur.

Bu ötelemelerin cümlesinin, düzlemin bütün ötelemelerinin cümlesi için tarif edilmiş bulunan toplama işlemine göre bir gurup teşkil ettiğini göstereceğiz. p ve q herhangi tam sayılar olduğuna göre

$$p\Phi + q\Phi = (p + q)\Phi$$

eşitliğini sağlamak zor değildir.

Bundan, $n\Phi$ şeklindeki herhangi iki ötelemenin toplamının aynı tipten olduğu çıkar ve bu, toplamanın *kapalılık* şartını teşkil eder.

Bütün ötelemeler için doğru olan asosiyativlik şartının sağlanmasına lüzum yoktur.

Etkisiz eleman, $n = 0$ için $0\,\Phi = \Phi_0$ olmasından mevcut bulunmaktadır.

Ters elemanın mevcut olduğu da görülmektedir.

$$n\Phi + (-n\Phi) = \Phi_0$$

Ayrıca, toplama işlemi komutatif bulunmaktadır.

Düzlemin bütün ötelemelerinin gurupunun bir alt gurupunu teşkil etmiş bulunuyoruz.

Bu gurupa, *verilen Φ ötelemesinden meydana gelen alt gurup* adı verilir.

Eğer bütün tam sayıların toplamaya göre gurupunun sayılariyle, biraz evvel teşkil edilen alt gurupun ötelemeleri arasında

$$n \longleftrightarrow n\Phi$$

bire-bir tekabülünü kurarsak, bu tekabül, kolayca görüleceği veçhile bir *izomorfizma* dan ibarettir ve guruplar da birbiriyle *izomorftur*.

Tam sayılar gurupu ile izomorf olan guruplara *sonsuz siklik gurup* denir.

A ve A_1 noktalarına, verilen Φ ötelemesiyle meydana gelen bir ötelemeler alt gurupuna göre, bu alt gurupta A noktasını A_1 noktasına götüren bir öteleme mevcut olduğu takdirde, özdeştir diyeceğiz. Özdeşliği $\sim$ işaretiyle göstererek

$$A \sim A_1$$

yazacağız.

Aşağıdakilerin doğruluğu kolayca sağlanabilir:

1. Refleksivlik: $A \sim A$

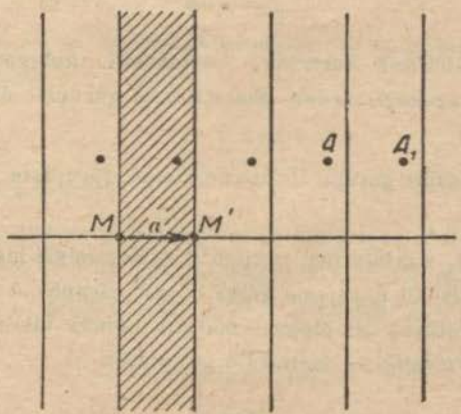
2. Simetri : $A \sim B$ ise $B \sim A$ dır.

3. Tranzitivlik: $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise $A \sim C$ dir.

Ohalde Φ ötelemesiyle meydana gelen bir alt gurup, düzlemin noktalarını özdeş nokta sınıflarına ayırmaktadır.

Bütün özdeş noktalara tek bir nokta gibi bakarsak («bu noktaları yapıştırarak»), düzlemden yeni bir şekil elde ederiz. Bu şekil, her özdeş noktalar sınıfından alınan temsilî birer noktadan ibaret noktaların cümlesiyle gösterilebilir. Tabiî bu şekil içinde özdeş olan herhangi iki nokta bulunamaz.

Alt gurupu meydana getiren Φ ötelemesinin $a = \overline{MM'}$ ötelеme vektörünü alıp (Şekil 135) M ve M' uc noktalarından paralel doğrular çizersek, içinde özdeş iki nokta bulunmıyan bir şerit elde etmiş oluruz. Bu şeridin sınırı (M, M' gibi) özdeş nokta çiftlerinden ibaret olup, özdeşleştirilmesi bir silindir verir.



Şek. 135

Şeridin iç noktalarına, şeridin sınırını teşkil eden doğrulardan yalnız birini katarsak, düzlemin, alt gurupun her dönüşümiyle tamamen taranan bir bölgesini elde ederiz, veya diğer bir deyimle, bölgenin her noktasını bölgenin dışındaki bir noktaya götürmüş oluruz.

Şimdi, paralel olmıyan Φ_1, Φ_2 gibi iki ötelemeden meydana gelen gurupu elde edeceğiz.

$$p,\ q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n$$

olmak üzere

$$\Phi = p\Phi_1 + q\Phi_2$$

şeklindeki bütün ötelemelerin cümlesini ele alalım. Tabiî $p\Phi_1$ ve $q\Phi_2$ nin anlamını evvelden bilmekteyiz.

Belirtilen ötelemelerin cümlesinin toplama işlemine göre, bütün ötelemeler gurupunun bir alt gurupu olduğu kolaylıkla sağlanabilir.

Evvelkine benzer tarzda, A ve A_1 noktalarına; verilen ve paralel olmıyan Φ_1 ve Φ_2 ötelemelerinden elde edilen gurupa göre, bu alt gurupta A noktasını A_1 noktasına götüren bir öteleme mevcut olduğu takdirde *özdeştir* diyeceğiz. Özdeşlik bağıntısı refleksivlik, simetri ve tranzitivlik özeliklerini haizdir.

Düzlemdeki noktaların cümlesinin tamamı özdeş nokta sınıflarına ayrılabilir.

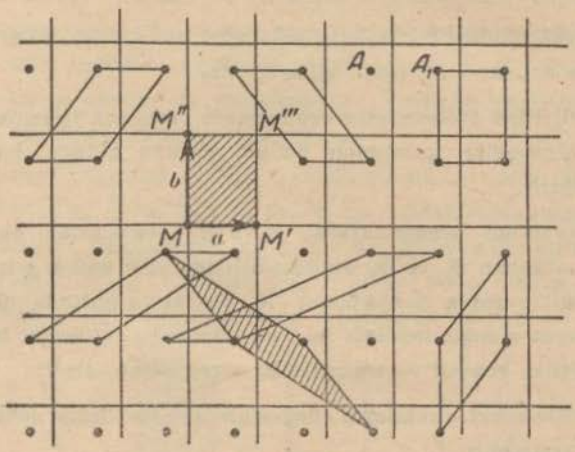
Bütün özdeş noktalara tek bir nokta gibi bakarsak («bu noktaları birbirine yapıştırarak»), düzlemden yeni bir şekil elde ederiz. Bu şekil, düzlemin aralarında hiçbir özdeş nokta çifti bulunmıyan noktalarından ibaret olup topolojik olarak bir torus'a denktir.

Alt gurupu meydana getiren Φ_1 ve Φ_2 ötelemelerinin $a = \overline{MM'}$ ve $b = \overline{MM''}$ öteleme vektörlerini ele alıp (Şekil 136) kenarları MM' ve MM'' olan paralelkenarı incelersek, paralelkenarın iç noktalarından ibaret ve aralarında özdeş nokta bulunmıyan nokta cümlesini elde ederiz.

Bu iç noktalara MM' ve MM'' doğru parçalarının noktalarını katarsak, özdeş nokta elde edilmeden genişletilmesi mümkün olmıyan bir nokta cümlesine varırız.

Düzlemin elde edilen bölgesi, alt gurupun her ökleme elemanı tarafından «taranmış olur», veya diğer bir deyimle, bölgenin her noktası bir dış noktaya gider.

Verilen bir nokta ile özdeş olan bütün noktaların bir cümlesi latis meydana getirir (Şekil 136). Bunlara benzer latisler



Şek. 136

kristalografide ve sayıların geometrik teorisinde önemli rol oynamaktadır.

Karmaşık sayılar gurupuna veya p ve q tam sayılar olmak üzere $p + q\ i$ şeklindeki sayılara, Φ_1 ve Φ_2 birbirine paralel olmak üzere $p\Phi_1 + q\Phi_2$ şeklindeki ötelemeleri tekabül ettirecek olursak

$$p + qi \longleftrightarrow p\Phi_1 + q\Phi_2$$

izomorfizmasını elde ederiz.

Bu ise, karmaşık tam sayılar gurupunun, paralel olmıyan ötelemelerden meydana gelen alt gurup ile izomorf olması demektir.

Bu alt gurup, meselâ $\Phi_2 - \Phi_1$ ve $\Phi_2 - 2\Phi_1$ gibi farklı ötelemelerle de elde edilebilir. Düzlemin özdeş nokta ihtiva etmiyen karşıt bölgesi, paralel olmıyan iki kenarı atılan iki boyutlu bir paralelkenardan ibarettir (Şekil 136).

$$\Phi_1^* = \Phi_2 - \Phi_1 ; \quad \Phi_2^* = \Phi_2 - 2\Phi_1$$

koyarsak, p ve q tam sayılar olmak üzere

$$p\Phi_1^* + q\Phi_2^*$$

ötelemeler cümlesi, $p\Phi_1 + q\Phi_2$ ötelemeler gurupiyle çakışan bir gurup teşkil eder.

Bu gurupun ötelemeleri arasında, izomorfizma olan bire-bir

$$p\Phi_1 + q\Phi_2 \longleftrightarrow p\Phi_1^* + q\Phi_2^* \qquad (*)$$

tekabülünü kurmak mümkündür.

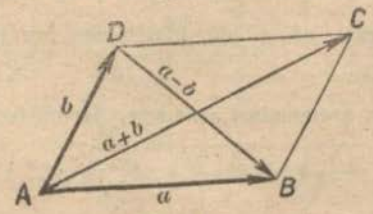
Bir gurupun kendi kendisiyle olan izomorfizmasına gurupun *otomorfizma* sı denir.

(*) tekabülüne bir ötelemenin diğer bir ötelemeye dönüşümü göziyle bakılabilir. Burada dönüşen elemanlar nokta olmayıp ötelemelerden ibarettir.

Bir temrin olarak, verilen gurupun bütün izomorfizmalar cümlesini inceleyiniz ve otomorfizmaların toplama işlemini öteleme dönüşümlerinin toplama işlemi olarak tarif ederek verilen gurupun bütün otomorfizmalar cümlesinin bir gurup olduğunu gösteriniz.

Netice olarak düzlemin paralel ötelemelerinin paralel kenarın özelikleriyle bağlı olduğuna işaret edelim. Her paralelkenara bunun kenarlariyle belirtilen a ve b öteleme vektörlerinin meydana getirdiği alt gurup tekabül eder (Şekil 137). AB vektöriyle temsil edilen a vektörü, ikinci AD kenarını BC kenarını BC durumuna götüren öteleme vektöründen ibarettir. Bu, paralelkenarın karşı kenarlarının paralel ve eşit olması özeliğiyle ilgilidir. Paralel kenarın karşı açılar toplamının 180° olma özeliği ise, ötelemelerin bir doğruyu kendisine paralel bir doğruya döndürmesiyle ilgilidir.

Bütün düzlemi paralelkenarlarla «döşemek» mümkündür. Şekil 136 da bu, bir dörtgen için icra edilmiştir. Düzlem, alt gurupu meydana getiren muhtelif öteleme çiftine tekabül eden paralelkenarlardan herbiriyle «döşenebilir» ve ayrıca, ortak bir A noktaları bulunan farklı iki paralelkenarla belirlenen iki «döşe-



(Şek. 137)

me» verildiğinde, bu paralel kenarların tepe noktalarından ibaret olan latis her iki «döşeme» için aynı olur. Paralelkenarlar, tepe noktalardan başka, latisin noktalarını (A ya özdeş noktalar) ihtiva etmez (Şekil 136). Böyle her paralelkenar, MM' ve MM'' doğrularına paralel olan doğrularla kesilmiş olup uygun paralel ötelemelerle bu parçalarını kaydırıp ekliyerek $MM'M''M'''$ dikdörtgenini elde etmek mümkündür.

Bu iddiaların sağlanmasını bir temrin olarak okuyucuya bırakıyoruz.

25. Şekillerin değişmez'leri ve değişmez özelikleri.

Bir şekil herhangi bir dönüşümle dönüştürüldüğünde bazı sıfatları veya karakteristikleri değişmekte fakat diğer bazıları aynı kalmaktadır. Meselâ, 1-boyutlu bir üçgenin topolojik bir dönüşümle daireye tasvirinde (Şekil 101) üçgenin birçok özelikleri değişmektedir. Bunlardan kenarların doğrusal oluşu, kenarların uzunluğu, açılar ve alan, v.s. özelikler zikredelim. Buna mukabil üçgenin, kendisini kesmiyen kapalı bir eğri oluşu değişmiyen bir vasıftır.

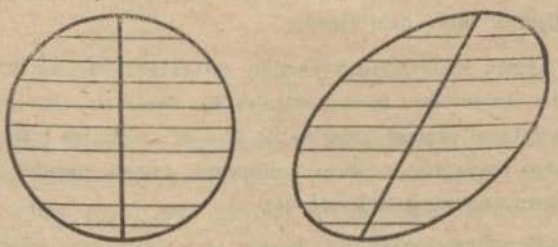
Şekillerin genel topolojik dönüşümleri (15) pek çok değişik şekilde tezahür edebilir. Şekillerin pek az özeliği topolojik dönüşümler altında değişmez kalkmaktadır. Bununla beraber bu gibi özelikler şekillerin en derin özeliklerini teşkil ederler.

Dönel silindir ve dönel koninin (Şekil 27) bir kesitine, bir dairenin paralel veya merkezî bir izdüşümle dönüşümü olarak bakılabilir. Dairenin, en fazla iki noktası hariç, her noktası, silindir veya koninin aynı anadoğrusu üzerinde olmak üzere konik kesitin bir noktasına dönüşür.

Bir dairenin paralel bir izdüşümle bir elipse izdüşürülmesinde ve bununla birlikte dairenin bütün düzleminin elipsin düzlemine izdüşümünde, doğruların doğrusal olma vasfı ve doğruların paralelliği değişmez kalır. Aynı veya paralel doğrular üzerindeki doğru parçalarının oranı ve özel olarak bir doğrunun orta noktasının izdüşümünün, bunun izdüşümü olan doğru parçasının orta noktası olması da değişmez özeliklerdendir.

Paralel olmıyan parçalarının oranı muhafaza edilmemektedir. Bunun gibi doğrular arasındaki açılar da değişmekte ve özel olarak dik doğruların izdüşümleri genel olarak dik olmamakta ve doğru parçalarının uzunlukları da değişmektedir.

Meselâ, bir dairede bir çapın paralel kirişler ailesine dikliğini ve bu çapın bu kirişleri iki eşit parçaya bölüşünü ele alalım (Şekil 138).



Şek. 138

Paralel izdüşümde çapla kirişlerin dikliği muhafaza edilmemesine mukabil çapın, paralel kirişlerin orta noktalarının geometrik yeri olması özeliği değişmemektedir.

Bu misalleri gördükten sonra aşağıdaki tarifleri verelim :

Şekillerin, bir sisteme ait dönüşümlerle bozulmıyan vasıf ve özeliklerine bu dönüşümler sistemine göre değişmez özelikleri denir.

Özel olarak bu dönüşümler sistemi bir gurup olduğu takdirde, şekillerin dönüşümler gurupuna göre değişmez özeliklerinden bahsetmiş oluruz.

Bir şekle ait uzunluk, açı veya alan gibi bir büyüklük veya bir miktar bir gurupun bütün dönüşümleriyle değişmez kalırsa bu miktara şeklin bu gurupa göre bir **değişmez***'i adı verilir.*

Meselâ, bütün paralel izdüşümler altında doğruların paralelliği ile paralel doğru parçalarının oranı birer değişmez özeliktir. Açılar ise stereografik izdüşüm altında ve kürenin döndürmelerinde değişmez kalır (Cilt I, sahife 151).

Özel olarak düzlemdeki ötelemeler gurupunun değişmez özeliklerini ve değişmezlerini ele alalım. iki nokta arasındaki uzaklık ötelemeler gurupunun bir değişmezidir. Bundan, doğrular arasındaki açı ile şekillerin alanının değişmezliği neticesine varırız. Şekillerin nokta, doğru vs. olması gibi sıfatları ötelemelerle değişmez kalan özeliklerdir.

Bir açının kenarlarının verilen istikametleri haiz olması sıfatı bütün ötelemelere göre değişmez bir özeliktir. Bir doğrunun belirli yeri işgal etmesi veya sabit olması sıfatı ise bütün ötelemelere göre değişmez bir özelik olmayıp sadece paralel ötelemeler alt gurupuna göre değişmezdir.

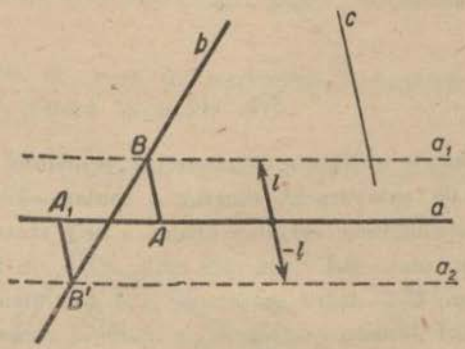
Paralel bir demetin her doğrusunun uzaydaki yeri yalnız bu demete paralel olan ötelemeler gurupuna göre değişmezdir.

Böyle bir demete paralel ötelemeler gurupuna göre değişmez adı vermiştik. Bu demet, gurupun her ötelemesinin *kayan doğrular*ından ibarettir.

26. Çizim problemlerinin çözümünde paralel ötelemeler usulü.

Çizim problemlerinin çözümünde, verilen düzlemsel bir geometrik yerin çizimi için bir şekli veya şeklin bir kısmını bir öteleme ile uygun bir yere kaydırmak ve çizimi icra ettikten sonra ters dönüşümle şekli eski yerine götürmek ekseriya faydalıdır.

Problem. *Verilen bir c doğrusuna paralel olan l uzunluğundaki bir AB doğru parçasını, verilen iki a ve b doğrusu arasına yerleştirmek* (Şekil 139).



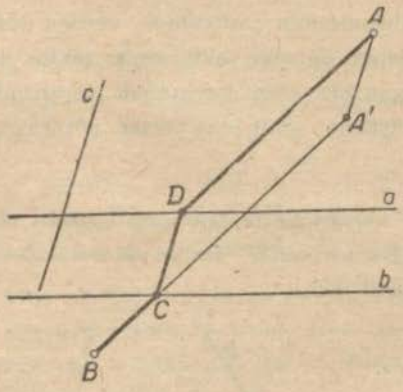
Şek. 139

a doğrusunu (c doğrusuna paralel olan l uzunluğundaki $\mp l$ öteleme vektörüyle) kaydırırsak, b ile arakesiti B ve B' olan a_1 ve a_2 doğrularını elde ederiz. c doğrusuna paralel olan BA ve $B'A_1$ doğru parçaları aranılan doğru parçalarından ibaret olur.

a ve b doğruları kesiştiği takdirde problemin iki çözümü

vardır. Paralellik halinde ise problemin ya hiç çözümü yoktur veya sonsuz sayıda çözümü vardır.

Problem. *İki a ve b paralel doğrusu ve a, b ile sınırlı şeridin birer tarafında A ve B noktaları verilmişken, a ile b arasına düşen yol verilen bir c doğrusuna paralel olmak üzere, A ile B arasındaki en kısa yolu bulmak* (Şekil 140).



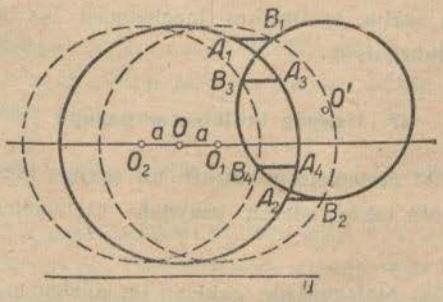
Şek. 140

A noktasiyle birlikte *a* doğrusunu *c* ye paralel olarak kaydırıp *a* yı *b* ile çakıştıracak olursak *A* noktası *A'* ye gelir. *B* ile *A'* birleştirildiğinde, aranılan yoldan *a* ile *b* arasındaki kısım kadar noksan olan *BA'* yolu elde edilir. *BA* nın *b* yi kestiği nokta *C* olsun. *CA'* doğru parçasına $\overline{A'A}$ ters ötelemesi tatbik edildiğinde *DA* durumu ve dolayısiyle *B* ile *A* arasındaki aranılan *BCDA* yolu elde edilir.

Problem. *Verilen bir u doğrusiyle aynı istikamette olan a uzunluğundaki bir doğru parçasını, verilen iki O, O' dairesi arasına yerleştirmek* (Şekil 141).

AB doğru parçasının *A* ucu *O* dairesinde olsun. *B* yi bulmak için *O* dairesini *u* ya paralel olarak ve *a* uzunluğu kadar

kaydırırız. Bunun için de dairenin O merkezini kaydırmak ve aynı yarıçapla O_1 ve O_2 dairelerini çizmek kâfidir. O_1 ve O_2

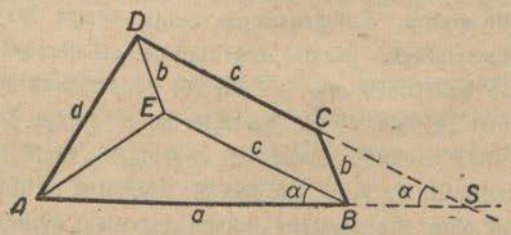


Şek. 141

dairelerinin O ile olan arakesitleri doğru parçasının B ucunu vermiş olur.

O' noktası O_1 veya O_2 merkeziyle çakışmadığı takdirde problemin dört çözümü vardır.

Problem. *Dört kenariyle, karşıt iki kenar arasındaki açısı bilinen dörtgeni çizmek*



Şek. 142

$ABCD$ aranılan dörtgen (Şekil 142) ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ ve $< BSC = \alpha$ olsun.

Bir paralel öteleme ile CD yi BE ye götürelim ve $DE = b$, $BE = c$ ve $< ABE = \alpha$ elde edelim. Bu suretle, kenarları a, c

ve aralarındaki açı α olan ABE üçgeninin çizimi mümkün olur ve sonra AE üzerine kenarları bilinen AED üçgeni çizilebilir.

Çözümün varlık şartlarının incelenmesi bir temrin olarak okuyucuya bırakılmıştır.

27. Uzayda ötelemeler gurupu.

Düzlemdeki ötelemelerin etraflı bir şekilde incelenmesinden sonra, aynı yolu takip ederek uzaydaki ötelemeleri ele almak güç değildir.

Düzlemdeki ötelemelerde çakışan iki düzlem almak ve bunlardan birinin diğeri üzerinde birim kadar hareket ettiğini düşünmek mümkündür. Bunun gibi biri hareket eden diğeri sabit kalan iki uzay düşünülebilir ve bunlardan birincisi diğerinin içinde herhangi bir istikamette serbest olarak hareket ettirilebilir.

Bu şekil hareketlerin geometrik anlamı, uzayın her M noktasına belirli bir kaide ile, bir M' noktasını tekabül ettirmekten ibarettir.

Uzayda, bir a doğrusuna paralel olan bütün doğruların cümlesini ele alalım. a doğrusunun dahil olduğu bu doğrular cümlesine, hatırlarsak, paralel doğrular demeti demiştik. a doğrusu demetin belirtilmesinde özel bir rol oynamamaktadır. Paralelliğin simetri ve tranzitivlik özeliklerinden dolayı demet, her doğrusiyle belirlenebilir. Uzaydaki doğruların tümü bu suretle sınıflara ayrılabilir ve sınıf paralel bir demetin bütün doğrularından ibaret olur. Bir demetin bütün doğruları aynı istikameti haizdir. Her doğru yalnız bir demete ait bulunduğundan bir doğrunun tek bir istikameti olur.

Bir doğru üzerinde iki A ve B noktası alarak bu doğruya $\overline{AB}$ veya $\overline{BA}$ vektöriyle bir yön vermek mümkündür. Bu doğruya iki türlü yön verilebilir ve yönlü bir doğruya da ekseriya *eksen* denir.

Tıpkı düzlemde olduğu gibi, paralel, aynı uzunlukta ve aynı yönde olan doğru parçalariyle belirli olan vektörleri eşit addedeceğiz.

Uzayda *öteleme* veya *paralel öteleme*, uzayın kendisine bir dönüşümü olup bu dönüşüm altında uzayın bütün noktalarının öteleme vektörleri biribirine eşittir:

$$MM' = NN' = AA' = BB' = \cdots = a \cdots$$

Ötelemelerin esas özeliklerini ifade eden 1—6 teoremleri (22) burada da muteberdir. Yine düzlemde olduğu gibi bütün ötelemelerin cümlesinde ötelemelere ait cebirsel toplama işlemini tarif ederiz. Ötelemelerin toplamına, karşıt öteleme vektörlerinin toplamı tekabül eder:

$$\overline{MM''} = \overline{MM'} + \overline{M'M''}$$

Uzayı kendisine götüren birim dönüşüm etkisiz öteleme olarak alınır.

Bütün (20) gurup şartları kolayca sağlanabilir ve dolayısiyle *uzaydaki bütün ötelemeler cümlesinin gurup olduğu* elde edilmiş olur.

Bir paralel doğrular demetinin her doğrusunu yerinde bırakan bütün ötelemelerin cümlesi, bütün ötelemelerin gurupunun bir alt gurupunu teşkil eder. Bu alt gurupa *uzaydaki doğrusal paralel ötelemelerin gurupu* adı verilir.

Bir paralel ötelemeler gurupu, toplamaya göre, reel sayılar gurupiyle izomorftur. Bunun doğruluğu düzlemdeki paralel ötelemeler için verilen yolla gösterilebilir.

Bir paralel ötelemeler alt gurupu altında hiçbir doğrusu değişmiyen demete, paralel ötelemeler gurupuna göre *değişmez doğrular demeti* adı verilir.

Bu demetin doğruları yalnız verilen ötelemeler altında «kendileri üzerinde kayarlar» ve *kayan doğrular* adını alırlar.

Bir paralel alt gurupun bütün paralel ötelemeleri altında değişmiyen düzlemlerin cümlesinin de karakterize edilmesini bir temrin olarak okuyucuya bırakıyoruz.

Anadoğruları değişmez demete ait olan silindir yüzeyleri de, verilen ötelemeler altında «kendileri üzerinde kayarlar» ve *kayan yüzeyler* adını alırlar. Düzlemin paralelliği, doğruların paralelliği gibi simetri ve tranzitivlik özeliklerini haiz bulunurlar.

Uzaydaki bütün düzlemlerin cümlesi paralel düzlem sınıflarına ayrılabilir. Her sınıf, paralel demet teşkil eden düzlemlerden ibarettir. Bir paralel demetin bütün düzlemlerinin aynı *iki-boyutlu istikamet*'i haiz olduğunu söyliyeceğiz.

Bir paralel demetin herhangi bir düzlemi, ait olduğu sınıfı temsil edebilir ve demeti belirten α düzlemi özel bir rol oynamaz.

Bir paralel düzlemler demetinin her düzlemini yerinde bırakan bütün ötelemelerin cümlesi, bütün ötelemelerin bir alt gurupunu teşkil eder. Bu alt gurupa uzayda, bir düzlemsel paralel ötelemeler gurupu denir.

Düzlemsel ötelemelerin gurupunun, daha evvel düzlemde ele aldığımız bütün ötelemelerin ve ayrıca karmaşık sayıların gurupiyle izomorf olduğu gösterilebilir.

Düzlemsel ötelemeler gurupunun her elemanı altında her düzlemi değişmez kalan demete, düzlemsel ötelemelerin bu alt gurupuna göre, değişmez demet denir. Böyle bir demetin düzlemleri verilen ötelemeler altında sadece «kendileri üzerinde kayarlar» ve her kaydırma altında *kayan yüzeyler* adını alırlar.

İki nokta arasındaki uzaklık, iki doğru arasındaki açı, iki

düzlem arasındaki açı, bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı ötelemeler gurupunun değişmezleridir.

Aşağıda, şekillerin alan ve hacımlarının da bu ötelemeler gurubunun değişmezleri olduğunu göreceğiz.

Yönlü iki paralel doğrular demeti verildiğinde, birinci demetin yönlü herhangi bir doğrusunun ikinci demetin yönlü her doğrusiyle eşit açılar yaptığını söyliyeceğiz. İki istikamet arasındaki açıdan da ekseriya bahsedilirse de dört açı mevcut olduğundan açı bir türlü olarak belirlenemez.

Yönlü bir paralel doğrular demetiyle bir paralel düzlemler demeti verildiğinde, demetin yönlü her doğrusu demetin her düzlemi ile eşit açılar yapar. Bir düzlemle yönlü bir doğru arasındaki açı belirli olup verilen doğru ile yönlü izdüşümü arasındaki açıdan ibarettir.

Öteleme vektörleri a, b, c olup bir düzlem üzerinde bulunmıyan Φ_a, Φ_b, Φ_c ötelemelerinden meydana gelen G ötelemeler alt gurupunu, veya, p, q, r tam sayılar olmak üzere

$$\Phi = p\Phi_a + q\Phi_b + r\Phi_c$$

dönüşümlerini ele alalım.

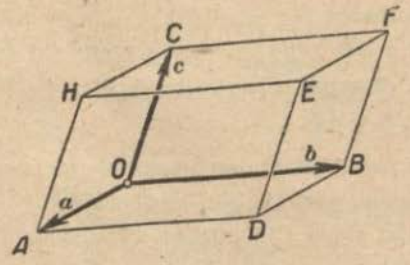
Düzlemde olduğu gibi uzaydaki iki noktayı; bu noktalardan biri G alt gurupunun bir ötelemesiyle diğerine götürüldüğü takdirde, G alt gurubuna göre özdeş addedeceğiz.

Her nokta kendisine özdeştir, $A \sim A$. $A \sim B$ ise $B \sim A$ dır - simetri özeliği. $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise $A \sim C$ dir - tranzitivlik özeliği. Ohalde uzaydaki bütün noktaların cümlesi, G alt gurupuna göre özdeş noktalar sınıflarına ayrılabilir.

Ayrıtları a, b, c olan paralelyüzün (Şekil 143) iç noktaları arasında bir çift bile özdeş nokta ihtiva etmediği kolayca görülebilir. Paralelyüzlünün iç noktalarına $OADB$, $OBFC$, $OANC$

yüzlerinin noktalarını katacak olursak, uzayın alt gurupun her ötelemesiyle tamamen «taranan» ve özdeş nokta ilâve etmeksisin genişletilmesi imkânı olmıyan bir bölgesini elde ederiz.

Paralelyüzün karşıt eşit yüzleri, öteleme vektörleri a, b, c olan G alt gurubunun ötelemeleriyle biri birine dönüşürler.



Şek. 143

Meselâ, $OBFC$ yüzü Φ_a ötelemesiyle $ADEN$ yüzüne dönüşmektedir. Paralel iki yüz arasına düşen bütün ayrıtlar, G alt gurupunun ötelemeleriyle biribirine dönüşürler. Meselâ, OC ayrıtı, $\Phi_a + \Phi_b$ ötelemesiyle DE ayırtına dönüşmektedir.

Uzayın tümü, herbiri üç adet yüz ile iç noktalardan ibaret olan böyle yarım-açık paralelyüzerle «döşenebilir».

Bu «döşeme» ye ait herhangi iki paralelyüz veya hücre verildiğinde, G alt gurupunda birinci hücreyi ikincisine götürecek bir öteleme mevcut olur.

Uzayın verilen sınıfına ait bütün paralelyüzlülerin tepe noktaları *uzay latisi* meydana getirir.

G alt gurupu Φ_a, Φ_b, Φ_c den olduğu kadar bu alt gurupun diğer ötelemelerinden de elde edilebilir. Böyle her üç ötelemenin sistemine uzayın özel bir hücreler sınıfı tekabül eder. Bununla beraber bir sınıfın «latis» teşkil eden nokta cümlesi bir diğerinde de «latis» olur.

Okuyucunun G alt gurupunu meydana getiren ötelemelerden üçünü teşkil ettiği sistemlerin cümlesinin tümünü bulması, bir temrin olarak tavsiye olunur.

BÖLÜM V

DÖNDÜRME

V. Bölümde bir düzlemin bir nokta etrafında, bir uzayın bir eksen etrafında, yine bir uzayın bir nokta etrafında döndürmeleri ele alınacak ve uzayın bir eksen etrafında döndürmelerinin gurupu ile ilgili olarak dönel yüzeylerin elemanter özelikleri incelenecektir.

Düzlem ile uzayın *hareket* olarak bilinen dönüşümlerinin tarifleri verilecek ve bu hareketlerin ötelemelerle olan ilgisi kurulacaktır.

Madde 30 da da döndürme usulünün çizim problemlerinin çözümünde tatbikatı görülecektir(1).

28. Bir nokta etrafında döndürme vasıtasiyle düzlemin kendi üzerine dönüşümü.

O, düzlem üzerinde verilen bir nokta olsun (Şekil 144). *Düzlemin O noktası etrafında Φ açısı kadar döndürülmesinden*, düzlemin,

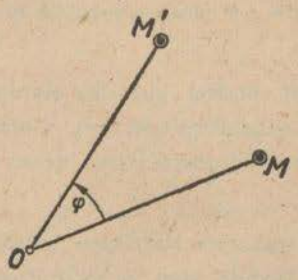
$$OM' = OM, \qquad < MOM' = \Phi$$

olmak üzere, M yi M' ye tekabül ettiren kendi üzerine bir dönüşümünü anlıyoruz. Açıları 2π nin katları kadar farkeden döndürmeler eşit itibar olunur. O noktası döndürme ile kendisine gider, veya diğer bir deyimle, sabit kalır.

Φ açısını radyanla ölçersek reel bir x sayısını elde ederiz. Φ açılı her dönmeye k tam bir sayı olmak üzere, $x + 2k\pi$ sayı-

(1) Diğer bir deyimle, keyfi bir döndürmeye, müsaade edilen bir çizim aleti olarak bakılarak çizim problemleri ele alınacaktır.

ları tekabül eder. Açıların yönü için pozitif yön olarak saat yönünün tersini kabul ediyoruz.



Şek. 144

Eş merkezli döndürmelerin *toplam*'ı genel dönüşümlerde olduğu gibi yapılır. Φ_1 açılı bir döndürme herhangi bir M noktasını M' ye, Φ_2 açılı döndürme ise M' yü M'' ye götürürse, bu döndürmelerin bu toplamı, açısı $\Phi_1 + \Phi_2$ olan bir döndürmeden ibarettir.

Düzlemde O merkezli döndürmelerin cümlesinin, döndürmelerin toplamına göre gurup olduğu kolaylıkla görülür.

Bu döndürmeler arasında etkisiz bir eleman - sükûnet, veya açısı sıfır olan bir döndürme mevcuttur. Her Φ açılı döndürmeye $(-\Phi)$ açılı ters bir döndürme tekabül eder. Kolayca sağlanabileceği gibi herhangi neviden dönüşümler için asosiyatiflik özeliği cari bulunur. Ayrıca, düzlemde O merkezli döndürmelerin gurupu *komutatif* tir.

Her x sayısına, açısı radyan olarak x'e eşit olan döndürmeyi tekabül ettirerek, reel sayılar cümlesi döndürmeler cümlesine tasvir edilebilir.

Bu tasvirde Φ açısının ters resmi, k herhangi tam bir sayı olduğuna göre

$$x + 2k\pi$$

şeklindeki sayılar cümlesidir.

Böyle bir resim, Φ açısına tekabül eden sayılar sınıfını verir.

Böyle sınıfların cümlesi bire-bir olarak döndürmeler cümlesi üzerine tasvir edilebilir; her sayı cümlesine bir döndürme tekabül eder ve her döndürmenin ters resim olarak tek bir sınıfı mevcut olur.

Reel sayıların yukarıda zikredilen sınıflarının cümlesi döndürmeler gurupiyle izomorf olan bir guruptur.

Sınıfların toplama işlemi aşağıdaki kaideye göre elde olunur: Toplanacak sınıfların herbirinden birer sayı alınır; bu sayıların toplamı, sınıfların toplamı olarak bakacağımız üçüncü sınıfa ait sayı olur. Bu kaide, toplam olan sınıfı bir türlü olarak belirler.

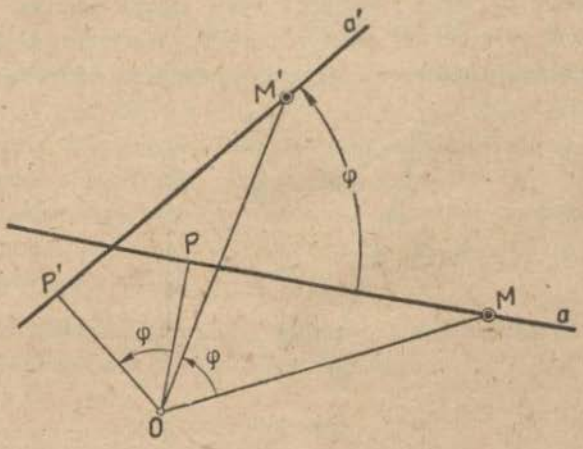
k tam bir sayı olduğuna göre $2k\pi$ şeklindeki sayıların cümlesi, sınıfların gurupuna ait etkisiz eleman olup toplamaya göre bir guruptur.

$$2k_1\pi + 2k_2\pi = 2(k_1 + k_2)\pi$$

Şimdi, döndürme altında bir şeklin değişmez kalan bazı özeliklerini ele alalım. Bir nokta bir noktaya dönüşür. Nokta olma vasfı bir değişmezdir. Böyle olmakla beraber, O döndürme merkezi hariç, her noktanın yeri değişmektedir. Değişmiyen O merkezine yer bakımından bir değişmez nokta adı verilir.

Bir a doğrusuna ait noktalar (Şekil 145) bir a' doğrusunun noktalarına dönüşürler. Diğer bir deyimle bir döndürme bir doğruyu bir doğruya dönüştürür. İspat: OP, bir a doğrusuna çizilen dikme olsun. OP doğru parçasının bütün noktaları OP' doğru parçasının noktalarına dönüşürler. P' den OP' doğrusuna dik a' doğrusunu çizelim. a' doğrusu a doğrusunun resmidir, zira, a

doğrusunun her M noktası, döndürme ile ve $P'M' = PM$ olacak şekilde, a' doğrusunun bir M' noktasına gider. Bu son iddia OPM ve $OP'M'$ üçgenlerinin eşitliğinden ileri gelmektedir.



Şek. 145

(Çünkü, OPM ve $OP'M'$ dik üçgenleridir ve $OP = OP'$, $PM = P'M'$ caridir). Bundan, a doğrusu ile a' rermi arasındaki Φ açısının döndürme açısına eşit olduğu da elde edilir.

İki nokta arasındaki uzaklık, düzlemde bir nokta etrafındaki döndürmelerin gurupunun bir değişmezidir.

AB doğru parçası (Şekil 146), Φ açılı bir döndürmede $A'B'$ doğrusuna döner. AB doğru parçasiyle $A'B'$ resminin eşitliği OAB ve $OA'B'$ üçgenlerinin eşitliğinden, bu son eşitlik de

$$OA = OA',\ OB = OB',\ < AOB = < A'OB'$$

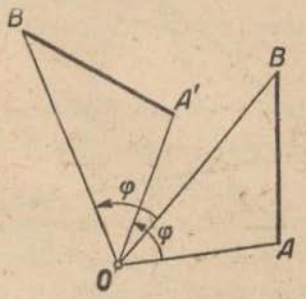
den elde edilir.

Doğru parçalarının uzunluklarının değişmezliğinden derhal

bir nokta etrafında döndürme altında açıların değişmezliği neticesine varılır.

Bir şeklin kendi resmine eşit olacağı artık kolaylıkla çıkar.

Meselâ bir daire, merkezin resmi resmin merkezi olmak üzere aynı yarıçaplı bir daireye dönüşür. Merkezleri O döndürme merkeziyle çakışmıyan dairelerin döndürme neticesinde yer-



Şek. 146

leri değişir. Merkezleri O noktasında olan daireler, gurupun her döndürmesi altında yerlerini muhafaza edip sadece «kendi üzerlerinde kaymış olurlar». Merkezi O olan eşmerkezli dairelere, döndürme gurupunun değişmezleri, veya, düzlemin O noktası etrafındaki döndürmeleri altında *kayan eğriler* adı verilir.

O döndürme merkezinden geçen her doğru yine O merkezinden geçen bir doğruya döner. Merkezi O döndürme merkezinde bulunan doğru demetinin tümü, gurupun herhangi bir döndürmesi altında aynı kalır. Merkezi O döndürme merkeziyle çakışan doğru demetine düzlemin O noktası etrafındaki döndürmelerinin gurupunun *değişmez demet*'i denir.

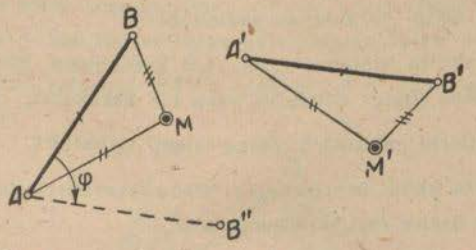
Döndürme adını verdiğimiz düzlemin kendisine dönüşümlerinin, sezgi ile, aşağıdaki şekilde cereyan ettiğini düşünebiliriz: Biri sabit diğeri bunun üzerinde kayabilen ve her bir noktasında çakışan iki düzlem alalım. Döndürme merkezi O, yerinde ka-

lır ve hareket eden düzlemin (diğer) noktaları yer değiştirdiği halde, O noktası yer değiştiremez. Hareket eden düzlem, hüviyetini hiçbir suretle kaybetmeksizin O noktası etrafında döner.

29. Düzlemde hareketler gurupu

O dan başka O_1 gibi bir nokta sabit tutulursa ikinci düzlemi birinciye göre hareket ettirme imkânı kalmaz. Hareket edebilen düzlemin OO_1 etrafında «döndürülüp yatırılma» imkânını hesaba katmıyoruz. Bütün «döndürülüp yatırılma» ları hesaba katmıyacak olursak, hareket edebilen düzlemin sabit düzleme göre yeri, düzlemin herhangi AB doğru parçasının yeriyle tamamen belirli olur.

Bunu göz önünde tutarak, düzlemin kendi üzerine tasvirini şöylece yapabiliriz: Düzlemde eşit herhangi iki AB, $A'B'$ doğru



Şek. 147

parçasını ele alıp (Şekil 147) A noktasına A' noktasını, B ye B noktasını ve düzlemin keyfî bir M noktasına da,

$$AM = A'M', \quad BM = B'M'$$

olacak ve ayrıca AMB ve $A'M'B'$ eş yönlü üçgenleri benzer bulunacak şekilde, aynı düzlemin M' noktasını tekabül ettiririz. Eş yönlü deyince A, M, B ve A', M', B' tepe noktalarının her iki üçgende ya pozitif yönde veya her iki üçgende negatif yön-

de sıralandıklarını kastediyoruz. Eğer M noktası AB doğrusu üzeriude ise M' resmi, yön bahis konusu olmadan bir türlü olarak belirli olur. Bu tasvirde sabit nokta mevcut olmasının gerekmediği açıktır.

Yukarıda yaptığımız gibi AB ve $A'B'$ doğru parçalariyle belirli bir tasvir alalım. $C'D'$ doğru parçası bu tasvir altında CD doğru parçasının resmi olsun. Bu takdirde CD ve $C'D'$ doğru parçalariyle elde edilen tasvir AB ve $A'B'$ ile elde edilen tasvirin aynı olur. Adı geçen tasvirin, AB doğru parçası $A'B'$ ile çakışıncıya kadar, kayabilen düzlemi sabit düzlem üzerinde kaydırıldığını ve netice olarak her M noktasının M' resmiyle çakışacağını düşünmek mümkündür.

Düzlemin kendi üzerine olan bu tasvirine *hareket* diyoruz. Hareketin bire-bir ve iki taraflı sürekli bir dönüşüm olduğu kolaylıkla görülebilir. *Düzlemdeki bütün hareketlerin cümlesi* nin bir gurup teşkil ettiği de kolayca sağlanabilir.

İki hareketin toplamı, veya, bir hareketten sonra ikincisinin tatbikinden ibaret dönüşüm yine bir harekettir.

Hareketlerin cebirsel toplama işlemi kapalıdır.

Düzlemin kendi üzerine olan bütün tasvirlerinde olduğu gibi asosiyatif özelik cari bulunmaktadır.

Etkisiz elemanın mevcudiyet şartı da sağlanmaktadır, zira, birim dönüşüm bir harekettir (bu harekette $A'B'$ doğru parçası AB doğru parçasiyle çakışır).

Her harekete mukabil bir ters hareketin varlığı, $A'B'$ doğru parçasını (geriye) AB doğru parçasına götüren bir hareketin varlığından bilinmektedir (Şekil 147).

Düzlemde ötelemeler ve düzlemin bir nokta etrafındaki döndürmeleri harekettir. Düzlemdeki bütün ötelemelerin gurupu, düzlemdeki bütün hareketler grupunun bir alt gurupudur. Düz-

lemin bir nokta etrafındaki döndürmeleri gurupu da bütün hareketlerin gurupunun bir alt gurupudur.

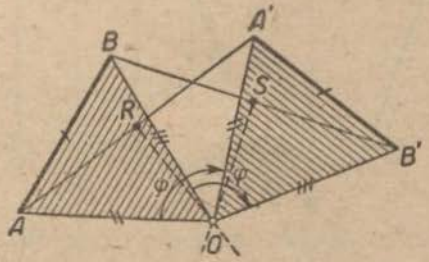
Düzlemdeki herhangi bir hareket biri biri ardınca tatbik edilen bir döndürme ile bir ötelemeden elde edilebilir.

İspatı için, düzlemi AB doğru parçasının A noktası etrafında (Şekil 147) Φ açısı kadar ve AB doğru parçası $A'B'$ ye paralel olan AB'' durumuna gelinceye kadar döndürelim ve sonra öteleme vertörü $\overrightarrow{AA'}$ olan ötelemeyi tatbik edelim. Bu döndürme ve ötelemenin toplamı verilen harekete eşittir. Tabiî bu dönüşümlerin ikisi birden de birim dönüşümlerden ibaret olabilir.

Bir hareketin bir döndürme ile bir ötelemeye ayrılabildiği ispatlandıktan sonra, şekillerin bütün hareketler gurupuna göre değişmezlerini elde etmek mümkündür. Esas «değişmez» *iki noktanın* değişmezi olup iki nokta arasındaki uzaklıktan ibarettir:

Şimdi daha kuvvetli bir iddiada bulunacağız: *Düzlemdeki her hareket ya bir öteleme veya nokta etrafında bir döndürmedir.*

Hareket, düzlemi AB ile beraber $A'B'$ durumuna götürsün (Şekil 148)



Şek. 148

Bir O döndürme merkezi varsa, $OA=OA'$ ve $OB=OB'$ eşitlikleri cari olmalıdır. Bunlardan birinci eşitlik, O noktasının A ve A' noktalarından aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik

yerine ait olduğunu, veya, O nun AA' doğru parçasının RO orta dikmesi üzerinde bulunduğunu gösterir. Benzer tarzda, ikinci eşitlikten ise O nun BB' nün SO orta dikmesinde bulunduğu çıkar.

RO ve SO orta dikmeleri ya O noktasında kesişirler veya çakışırlar veyahut da paralel bulunurlar.

Bu üç şıkkı inceliyelim.

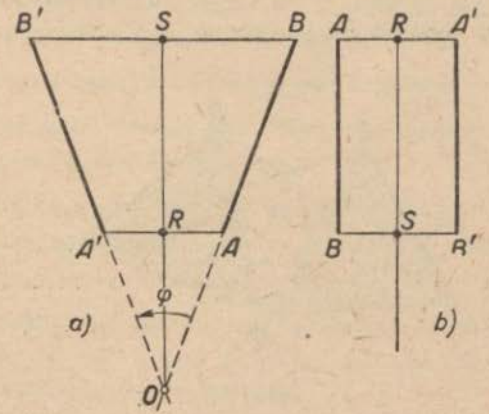
1. RO ve SO orta dikmeleri O noktasında kesişirler (Şekil 148). Hareket, açısı

$$\Phi = < AOA'$$

olan döndürmeden ibarettir.

AOA' ve BOB' açılarının eşitliği, ABO ve $A'B'O'$ üçgenlerinde karşıt kenarların eşit olmasından çıkar.

2. RO ve SO orta dikmeleri çakıştıklarında $ABB'A'$ şekli, AA', BB' kenarları paralel olan bir yamuk olur (Şekil 149 a, b).



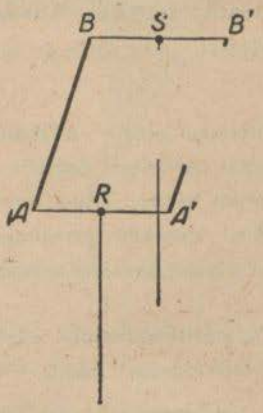
Şek. 149

Bu takdirde, AB ve $A'B'$ paralel değilse, açısı $\Phi = < AOA' = < BOB'$ ve merkezi AB ile $A'B'$ nün ortak O noktası olan bir

dönme mevcut olur. AB nin $A'B'$ ye paralelliği halinde ise bir öteleme vardır (Şekil 149 b).

3. RO ve SO orta dikmeleri paralel olup O noktası mevcut değildir. Bu ise, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{A'B'}$ vektörlerinin (Şekil 150) paralelliği ve eşyönlü olmaları haline tekabül eder ve hareket, öteleme vektörü $\overrightarrow{AA'}$ olan bir öteleme olur.

İddia bu suretle sabit olur. Bundan da düzlemdeki ötelemelerle düzlemin her noktası etrafındaki döndürmelerinin cümlesinin hareketler gurupunu teşkil ettiği çıkar.



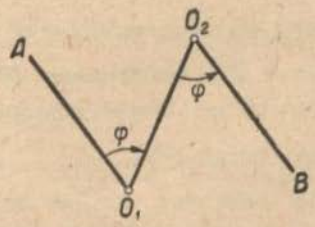
Şek. 150

Düzlemdeki bütün ötelemeler cümlesi hareket gurupunun bir alt gurupu olduğu halde düzlemin her noktası etrafındaki bütün döndürmelerinin cümlesi bir gurup teşkil etmez.

Bu aşağıdaki misalle kolayca ispatlanabilir.

O_1A doğru parçasını, buna «bağlı» hareket edebilen düzlemle birlikte O_1 noktası etrafında Φ açısı kadar döndürürsek (Şekil 151) O_1A doğru parçası O_1O_2 durumunu alır. O_2 merkezi etrafın-

da $(-\Phi)$ açısiyle ikinci bir döndürme tatbikiyle de O_1O_2 doğru parçası BO_2 ye gider.



Şek. 151

Bu iki döndürmenin tatbiki sonunda, öteleme vektörü $\overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{O_1B}$ olan bir öteleme elde edilir ki bu bir nokta etrafında döndürme olamaz.

Döndürmelerin toplama işlemi, düzlemin bütün döndürmelerinin cümlesinde kapalı bir işlem değildir; dolayısiyle mümkün merkezlerle düşünülebilen bütün döndürmelerin cümlesi bir grup teşkil etmemektedir. Hareket gurupunun komütatif olmadığının ispatı bir temrin olarak tavsiye olunur.

30. Çizim problemlerinin çözümünde döndürme usulü.

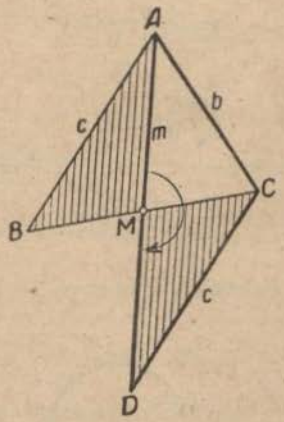
Çizim problemlerinin çözümünde, bir şekli veya bir şeklin bir kısmını ekseriya bir nokta etrafında bir açı kadar döndürmek ve şekilde veya kısmında çizim icra ettikten sonra şekli ters döndürme ile eski yerine getirmek uygun olmaktadır.

Döndürme usulü en iyi olarak misaller üzerinde izah edilebilir.

Problem. *$AB = c$, $AC = b$ kenarlariyle $AM = m$ kenar ortayı verilen üçgeni çizmek.*

AMB üçgenini M etrafında π açısı kadar döndürürsek, MD

doğru parçası AM doğru parçasının doğrultusuna gelmek üzere DMC durumunu elde ederiz (Şekil 152). ADC üçgeni bilinen üç kenariyle ($AD = 2m$) kolayca çizilebilir. $2m < b + c$ şartı altında çözüm daima mümkündür.



Şek. 152

Problem. *İki daire ve bir P noktası verildiğine göre ucları daireler üzerinde ve ortası P de olan AB doğru parçalarını çizmek.*

(1) dairesini P etrafında α açısı kadar döndürerek (1′) durumunu elde edelim (Şekil 153). $AP = PB$ olduğundan (1) in istenilen A noktası (1′) de B noktasına gider. B noktasının (2) üzerinde de bulunması gerektiğinden B noktası (1′) ve (2) dairelerinin arakesitine ait olur.

R_1 ve R_2 verilen dairelerin yarıçapları ise (1′) ve (2) nin kesişme şartı

$$R_2 - R_1 \leqq O_1' O_2 \leqq R_2 + R_1$$

olur. Bu eşitliklerin 2 ile bölünmesinden de

$$\frac{R_2 - R_1}{2} \leq PQ \leq \frac{R_2 + R_1}{2}$$

elde olunur.

Burada Q noktası O_1O_2 nin orta noktası olup

$$PQ = \frac{1}{2} O_1' O_2$$

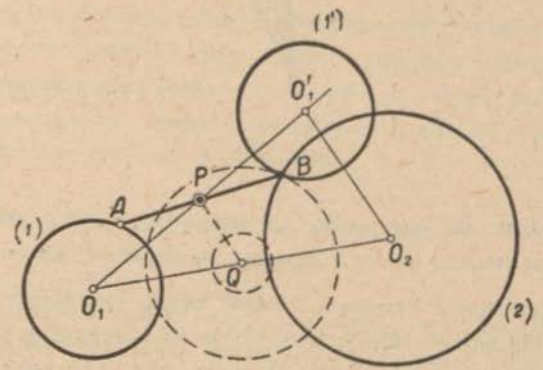
dır. Q merkezli,

$$\frac{1}{2}(R_2 - R_1)$$

ve

$$\frac{1}{2}(R_2 + R_1)$$

yarıçaplı daireleri çizersek, P noktası bu iki daire arasındaki

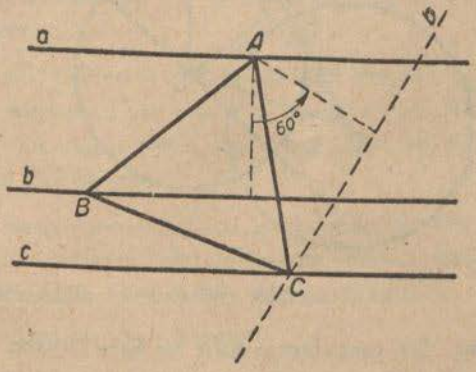


Şek. 153

halka üzerinde olduğu takdirde, iki çözüm mevcut olur. P bu dairelerden birinin üzerinde ise bir çözüm vardır ve halkanın dışında ise hiç çözüm yoktur.

Problem. *Paralel üç doğru verilmişken tepe noktaları bu doğrular üzerinde bulunan eşkenar bir üçgen çizmek.*

Verilen paralel doğrular a, b, c olsun (Şekil 154). a doğrusu üzerindeki A tepe noktası keyfî olarak alınabilir, zira, ABC çizilmişse verilen doğrulara paralel olan bir öteleme ile bu üçgen, problemin şartlarını sağlıyan bir üçgene gitmiş olur.



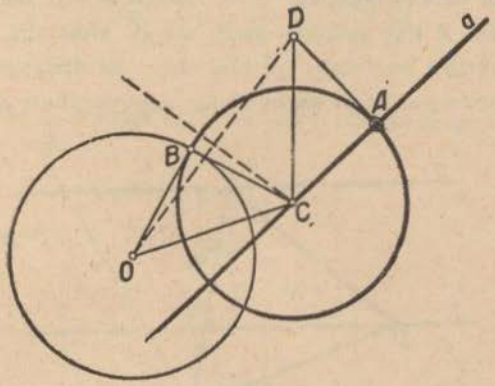
Şek. 154

ABC, istenilen üçgen olsun. Düzlem A noktası etrafında AB kenarı AC kenarı ile çakışacak şekilde 60° döndürülürse b deki B tepe noktası C noktasına gitmiş olur.

b doğrusunu A noktası etrafında 60° döndürelim. Dönme sonunda c doğrusiyle olan C arakesiti aranılan üçgenin C tepe noktası olur.

Problem. *Bir daire, bir a doğrusu ve bu doğru üzerinde bir A noktası verilmişken, A dan geçen, merkezi a da olan ve verilen daireye dik olan bir daire çizmek.*

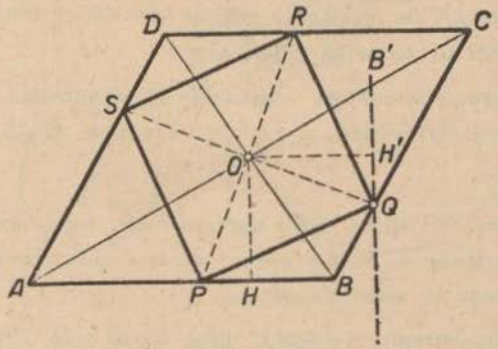
Aranılan dairenin merkezi C olsun (Şekil 155). OBC üçgeni dik bir üçgendir. Bu üçgeni C etrafında BCA açısı kadar döndürelim. BO doğru parçası a ya A da dik olan AD durumunu alır. Aranılan C noktası O ve D noktalarından eşit uzaklıkta bulunur. D nin çizimini yaparak probleminin çözümünü elde etmek mümkün olur (Şekil 155).



Şek. 155

Problem. *Bir paralelkenar içine bir kare çizmek.*

PQRS aranılan kare olsun (Şekil 156). Karenin merkezinin paralelkenarın merkeziyle çakıştığı açıktır. Bunu ispatlamak için



Şek. 156

RP çapının *O* orta noktasının paralelkenarın *AD* ve *BC* kenarlarının ortalarını birleştiren doğru üzerinde ve *OS* çapının aynı *O* orta noktasının *AB* ve *DC* kenarlarının ortalarını birleştiren

doğru üzerinde olduğunu görmek kâfidir. Bundan paralelkenarla karenin merkezlerinin çakışacağı çıkar.

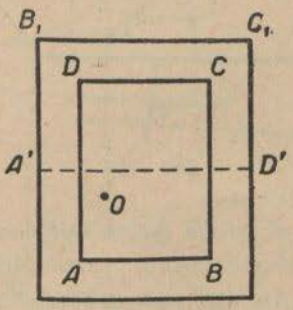
POQ ikizkenar dik üçgenini *O* noktası etrafında 90° döndürelim. *AB* nin *P* noktası *BC* nin *Q* noktasına gider. Bu da bizi bir çizime götürür.

AB doğrusunu *O* merkezi etrafında 90° döndürürsek, karenin aranılan *Q* noktasını, *AB* nin *A'B'* resmiyle *BC* nin arakesiti olarak belirtmiş oluruz (Şekil 156). *QS* çapını da çizmek suretiyle kare elde edilmiş olur.

Problemin hangi şartlar altında çözümünün mevcut olduğunun incelenmesi bir temrin olarak tavsiye olunur. Kare dışına çizilen her dikdörtgenin kare olduğu da ispatlanmalıdır.

Aşağıdaki problemi ispat ediniz.

Problem. *Açılar kapanır bir oyun masası, üzerindeki bir O noktası etrafında döndürülerek ABCD durumundan A'B'C'D' du-*



Şek. 157

rumuna ve sonra masa açılarak $B'C'C_1B_1$ durumuna getiriliyor (Şekil 157). Döndürme merkezini bulunuz.

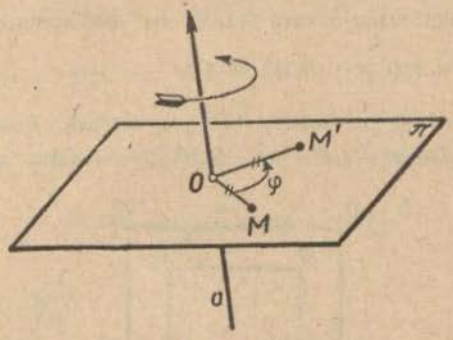
31. Uzayın bir eksen etrafında döndürülmesi.

Uzayda bir eksen veya diğer bir deyimle yönlü bir doğru alalım.

Uzayın a ekseni etrafında Φ açısı kadar *döndürülme* sinden, uzayın, aşağıdaki şartlar altında kendisi üzerine bir dönüşümünü anlıyoruz.

1) Her M noktasının M' resmi M ile birlikte a döndürme eksenine dik bir π düzlemi üzerinde bulunur.

2) M ve M' noktalarının dönme eksenine uzaklıkları birbirine eşittir: $OM' = OM$ (Şekil 158).



Şek. 158

3) MOM' açısı Φ açısına eşittir; OM dan OM' ye olan dönme yönü, $\Phi > 0$ iken sağ-vidanın eksen yönünde hareketindeki yönüne, $\Phi < 0$ iken ise aksi yönüne tekabül eder.

Uzayın bir eksen etrafındaki dönmesinin bire-bir bir dönüşüm olduğunu sağlamak güç değildir.

Tarifimizden, uzayın bir eksen etrafında Φ kadar dönmesinin a ya dik her π düzleminde π nin a yı kestiği O noktası etrafında ve aynı Φ açısı kadar bir dönmeyi meydana getirdiği neticesi çıkar.

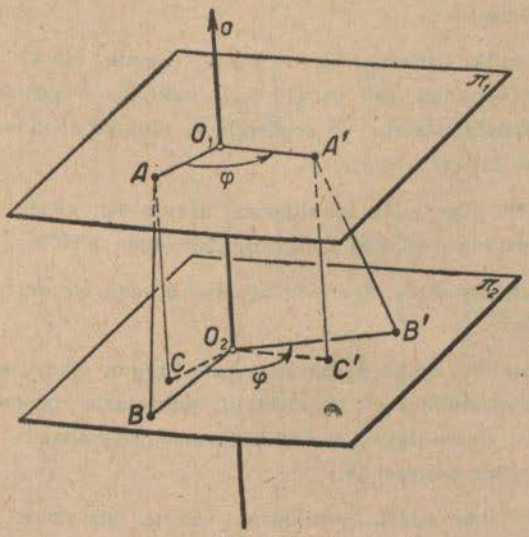
Uzayda bir eksene göre bütün döndürmelerin cümlesi açıların toplama işlemine göre bir gurup teşkil eder. Açıları 2π nin katları kadar fark eden döndürmeler özdeş itibar olunur. Bu gurup tabiî düzlemde O noktasına göre olan döndürmeler gurupu ile izomorf olan bir guruptur.

İki A, B noktasının AB uzaklığı a ekseni etrafındaki döndürmelerin bir değişmezidir : A', B' noktaları A ve B nin resimleri ise

$$A'B' = AB$$

dir.

İspat için evvelâ A ve B nin a döndürme eksenine dik bir düzlem üzerinde olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (28) den dolayı AB uzaklığı, π düzleminin a ekseninin π yi kestiği O noktasına göre döndürmelerine göre değişmez kalır.



Şek. 159

Şimdi A, B noktalarının a eksenine dik bir düzlem üzerinde bulunmadığını kabul edelim (Şekil 159).

A noktasiyle A' resmi, a eksenini O_1 noktasında kesen ve a ya dik olan π_1 düzleminde bulunur.

B noktasiyle B' resmi de, a eksenini O_2 noktasında kesen ve a ya dik olan π_2 düzlemindedir.

π_2 ye AC ve $A'C'$ dikmelerini indirecek olursak

$$AC = A'C',\quad O_2C = O_1A,\quad O_2C' = O_1A',\quad \angle CO_2C' = \Phi$$

elde edilir ve bundan C' nün uzayın a ekseni etrafında dönmesi altında C nin resmi olduğu ve $B'C' = BC$ çıkar.

ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin eşitliğinden de hipotenüslerinin eşitliği elde olunup ispat sabit olur.

Uzayın bir eksen etrafında dönmesi altında düzlemler düzlemlere dönüşürler.

Bu özelik, herhangi bir düzleme, uygun olarak seçilen A ve B noktalarından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak bakılabilmesinin ve uzaklıkların dönme altında değişmez kalmasının bir neticesidir.

Düzlem olma sıfatı şekillerin, uzayın bir eksen etrafında dönmesi altında değişmez kalan özeliklerinden biridir.

Uzayın bir eksen etrafında dönmesi altında, bir doğru bir doğruya dönüşür.

Bu özelik, herhangi bir doğruya, uygun olarak seçilen A, B, C noktalarından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak bakılabilmesinin ve uzaklıkların dönme altında değişmez kalmasının bir neticesidir.

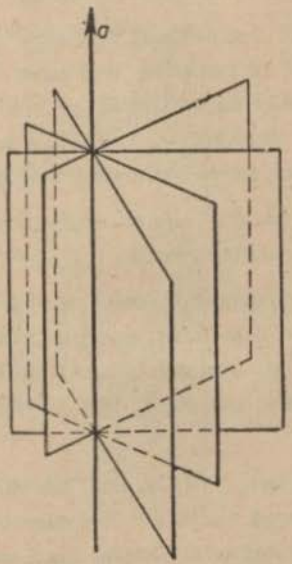
Doğru olma sıfatı, şekillerin, uzayın bir eksen etrafında dönmesi altında değişmez kalan özeliklerinden biridir.

Uzayın bir eksen etrafında bir Φ açısı kadar bir dönmesi uzayın kendisine bir dönüşümüdür. Bu bizi şu neticeye götürür:

Paralel düzlemler ve paralel doğrular, uzayın bir eksen etrafında dönmesinde karşıt olarak paralel düzlem ve paralel doğrulara dönüşürler.

Her düzlem, bir dönme ile bir düzleme dönüştüğünden, uzayın bir eksen etrafında dönme gurupuna göre değişmez bir şekildir; aynı şey doğru için de söylenebilir.

Adı geçen gurupun bütün dönmeleri altında yeri değişmez kalan düzlemler de vardır. Uzayın bir eksen etrafında dönmeleri altında yeri değişmiyen düzlemlere, uzayın verilen eksen etrafındaki dönmeleri gurupunun *değişmez düzlemleri* denir. Değişmez düzlemler tabiî dönme eksenine dik olan düzlemlerdir. Böyle her düzlem, ekseni kestiği nokta etrafında dönmek suretiyle, guru-



Şek. 160

pun dönmeleri altında sadece kendi üzerinde kaymış olur. Böyle

bir düzlem uzayın bir eksen etrafındaki her dönmesinde bir *kayan düzlem* teşkil eder.

Dönme ekseninden geçen düzlem demeti de (Şekil 160) uzaydaki yeri bakımından bir değişmezdir.

Bu demete ait her düzlem, gurupun her dönmesi altında aynı demetin bir düzlemine dönüşür. Düzlem demetinin tüm olarak uzaydaki yeri değişmez.

Uzayın bir eksen etrafında dönmelerine göre değişmez kalan iki düzlem demeti, mevcuttur:

(*i*) Herbiri dönme eksenine dik olan düzlemlerin demeti,

(*ii*) Dönme ekseninden geçen düzlemlerin demeti.

Birinci demetin her düzlemi gurupun bütün dönmeleri altında uzaydaki yeri bakımından değişmez kalmakta, diğer bir deyimle, bu düzlemler *kayan düzlemler* teşkil etmekte; ikinci demetin herhangi bir düzlemi ise, etkisiz dönme hariç, gurupun her elemanı altında uzayda yer değiştirmektedir.

Değişmez her düzlem, dönme ekseninden geçen düzlem demetini bir *doğru demeti* nde keser.

Değişmez bir düzlemde bulunan ve merkezi dönme ekseniyle çakışan bir doğru demetinin, gurupun bütün dönmeleri altında, yeri değişmez. Bu, düzlemin demet merkezi etrafındaki dönmeler gurupuna göre, adı geçen düzlemdeki değişmez doğru demetidir.

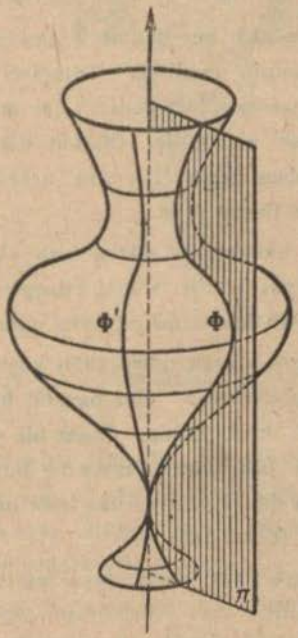
Doğru demeti nden, verilen bir S noktasından — demetin merkezinden — geçen uzaya ait doğrular cümlesini anlıyoruz. Uzayda verilen bir doğruya paralel olan ve bu doğruyu içine alan doğrular cümlesine *paralel doğrular demeti* adının verildiği malûmumuzdur.

Merkezi dönme ekseni üzerinde bulunan her doğru demeti-

nin ve dönme eksenine paralel olan doğruların demetinin, uzaydaki yere göre bir değişmez veya verilen eksen etrafındaki dönmeler gurupunun *değişmez demeti* olduğu açıktır.

32. Dönel yüzeyler

Madde 3 de dönel yüzeylerin genel tarifini vermiştik. Dönel bir şeklin kendi ekseni etrafındaki bir dönme ile kendisine dönüştüğünü veya, daha açık olarak, kendi üzerine tasvir edildiğini görmek kolaydır. Dönel bir şekil uzaydaki yeri bakımından



Şek. 161

bir değişmezdir veya şeklin ekseni etrafındaki dönmelerinin gurupuna göre bir *değişmez şekil* dir.

Dönel şekli meydana getiren Φ şekli (3) l dönme ekseninden geçen bir π düzleminde bulunan bir eğri ise, dönel şekle *dönel yüzey* adı verilir (Şekil 161).

İhtar. Dönme ekseninden geçen bir düzlem üzerinde bulunması gerekmiyen bir Φ eğrisiyle de dönel yüzeyi elde etmek mümkündür (mesela, şekil 18 e bak). Yüzeyin böyle bir düzlemle olan kesitini inceliyecek olursak yukarıda verilen tarifin daha dar bir dönel yüzey sınıfını verdiğini görmeyiz.

Uzayın l ekseni etrafındaki bir dönmesinde dönel bir yüzeyin kendi üzerinde kaydığı veya *kayan yüzey* teşkil ettiği açıktır.

l ekseni etrafındaki her dönme Φ ana şeklini Φ' durumuna götürür. Φ ana eğrisinin gurupun dönmeleri altındaki Φ' resmine dönel yüzeyin *meridyen* leri denir. Her meridyen dönel yüzeyin ana eğrisi olarak alınabilir. Ohalde dönel yüzeyin, ekseni olan (değişmez) düzlem demeti ile olan arakesiti dönel yüzeyin meridyen ailesinden ibaret olur.

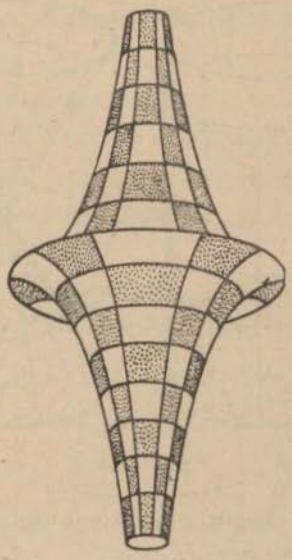
Dönel yüzeyin eksene dik düzlemlerle olan kesitlerine dönel yüzeyin *paralel* leri adı verilir. Dönel yüzeyin (değişmez) paralel düzlem demetiyle olan kesiti de yüzeyin paralellerini verir.

Her paralel, açık olarak görüldüğü veçhile, merkezi eksende olan bir daireden ibarettir. Her paralel herhangi meridyenin düzlemini dik olarak kestiğinden, dönel bir yüzeyin her meridiyeni de her paraleli dik olarak keser ve bundan dolayı meridyenlerle paralellerin dönel yüzey üzerinde ortogonal şebeke teşkil ettiğini söyleriz (Şekil 162).

Dönel bir yüzeye paralellerin veya meridyenlerin geometrik yeri olarak bakılabilir.

Merkezleri l dönme ekseni üzerinde olan ve eksene dik düzlemler üzerinde bulunan uzayın bütün daireleri, uzaydaki yer bakımından, değişmez'dir veya l eksenli dönmelerin gurupuna göre *değişmez daireler* dir. Her değişmez daire, gurupun her dön-

mesi altında kendi üzerinde «kayar» ve eksen etrafındaki her dönme altında bir *kayan eğri* dir. Uzayın her noktasından, veri-



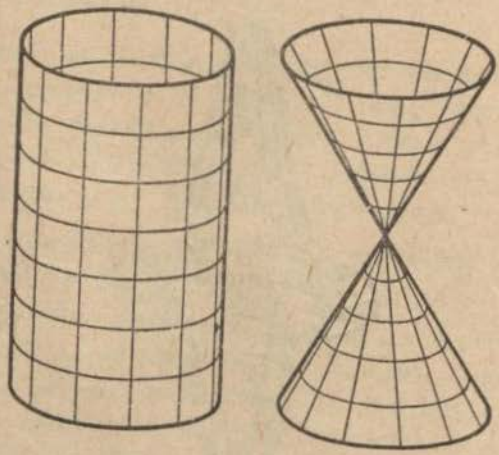
Şek. 162

len eksen etrafındaki dönmelerin gurupuna göre değişmez olan bir daire geçer.

Dönme eksenine dik olan her düzlemi yalnız bir noktada kesen bir eğri seçip bunun noktalarından geçen değişmez bütün dairelerin toplamını alırsak paralelleriyle meydana gelmiş olan dönel bir yüzey elde etmiş oluruz.

Madde 3 de, doğrulardan elde edilmiş olan en basit dönel yüzeyleri görmüştük. Bu dönel yüzeyler silindir (şekil 16) ve konilerden (şekil 17) ibarettir. Silindir ve koninin meridiyenleri anadoğrulardan ve paralelleri ise bunlara dik olarak kesen dairelerden ibarettir (Şekil 163).

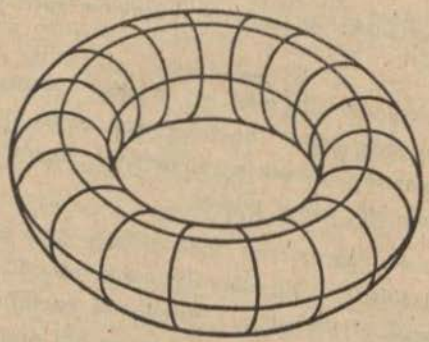
Ayrıca dairelerden meydana gelen dönel yüzeyleri de incelemiştik. Bunlardan birincisi torus idi (şekil 20) — bir daireyi, düz-



Şek. 163

leminde bulunan ve kendisini kesmiyen bir eksen etrafında döndürmek suretiyle elde edilen yüzey.

Torusun meridiyenleri anadaireye eşit olan dairelerden ve



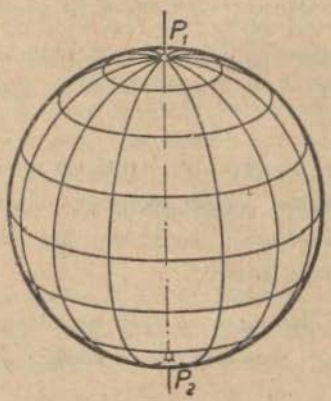
Şek. 164

paralelleri ise herhangi bir meridiyenin noktalariyle belirli değişmez dairelerden ibarettir (Şekil 164).

Bir dairenin çapı etrafında döndürülmesinden meydana gelen yüzeyi ele alalım.

Bu yüzey bildiğimiz veçhile bir *küre* dir. Küreyi elde etmek için yarım daireyi çapı etrafında döndürmek kâfidir.

Ana yarım - dairenin resimleri kürenin meridiyenlerini teşkil eder. Yarım - dairenin her noktası kürenin paralellerinden bi-



Şek. 165

rini çizer. En büyük paralele kürenin *ekvatörü* denir. Küre - yüzeyindeki paraleller ailesi ile meridiyenler ailesi ortogonal bir şebeke meydana getirir (Şekil 165).

Kürenin, ana yarım - dairenin dönme ekseni üzerinde bulunan ve ekvatör düzlemine dik olan çapının uc noktaları ortogonal şebekenin *kutup*larında bulunur. Kutuplar şebekenin tekil noktalardır: Kürenin bütün meridiyenleri kutupların herbirinden geçtiği halde, adi her noktadan - kutuplardan başka her noktadan - yalnız bir paralel ve bir meridyen geçer.

Küre her çapına göre dönel bir yüzey olup her çapı dönme

ekseni olarak alınabilir. Kürenin, çaplarından biri etrafında dönmesi küreyi kendi üzerinde kaydırmış olur. Dönmelerin gurupu altında, değişmez daireler değişmez düzlemlerle kürenin arakesiti olur.

Bütün bu özelikler, kürenin, merkezden uzaklığı yarıçaptan büyük olmayan düzlemle olan arakesitinin bir daire oluşunun neticesidir.

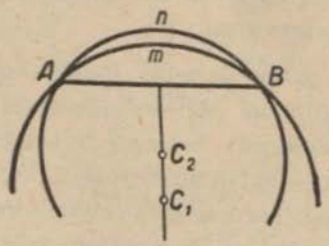
Şu özeliğe işaret edelim: *Bir kürede, bir çapın uc noktaları olmıyan A ve B gibi iki noktadan ancak bir büyük daire geçer.*

A ve B noktaları O merkeziyle birlikte bir düzlem belirtir ve bu düzlem küreyi A ve B noktalarından geçen bir büyük daire boyunca keser.

Küre üzerinde, bir çapın uc noktaları olmıyan A ve B gibi iki noktadan bir düzlem demeti geçirmek mümkündür. Bu demetin, kürenin O merkezinden geçemiyen her düzlemi, küreyi küçük bir daire boyunca keser.

Küre üzerinde, bir çapın uc noktaları olmıyan A ve B noktalarını birleştiren daire yaylarından en küçüğü büyük daireye tekabül eder.

Bunu ispat etmek için AB ekseni etrafında bir döndürme ile demetin her düzlemini büyük dairenin durumuna, ve ayrıca her dairenin küçük yayını AB doğrusunun aynı tarafına getirelim.



Şek. 166

Böyle iki AB yayından yarıçapı daha büyük olan A_mB yayı diğeri tarafından çevrelendiği için A_nB yayından daha küçük olur. (Şekil 166). Büyük dairenin yarıçapı en büyük olduğundan büyük dairenin yayı en küçük olur ve ispat biter.

İspatsız olarak şu özeliği kaydedelim: *Bir kürede bir çapın ucları olmıyan iki A ve B noktasını birleştiren eğrilerden en küçüğü, kürenin büyük dairesinin bir yayıdır.*

Bir küre üzerinde iki A ve B noktasını birleştiren en kısa eğrinin uzunluğuna bu iki nokta arasındaki *küresel uzaklık*, veya ölçmeler yalnız kürede yapılıyorsa sadece *uzaklık* denir.

Küresel uzaklık kavramından faydalanarak küre yüzeyine ait şekillerin birçok özeliğini elde edebiliriz. Meselâ şu özeliği kaydedelim: *Küre yüzeyi üzerindeki bir noktadan aynı uzaklıkta bulunan (küresel uzaklık olarak) küre yüzeyine ait noktaların geometrik yeri bir dairedir.*

Bir paralele ait noktalar P_1 ve P_2 kutuplarından aynı uzaklıkta bulunur (Şekil 165). Ohalde küre yüzeyi üzerindeki her dairenin küresel iki merkezi vardır.

Bunun gibi, *herhangi bir paralel* — ve küre yüzeyindeki her daire, küresel merkezlerini birleştiren çapı dönme ekseni kabul eden paraleller ailesine aittir — *ekvatordan aynı uzaklıkta ve ekvatorun aynı tarafında bulunan noktaların geometrik yeridir.*

Düzlemde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir doğru, kürede ise bir büyük dairedir. Düzlemde bir doğrudan aynı uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu doğruya paralel iki doğrudan ibarettir.

Küre yüzeyinde bir büyük daireden aynı küresel uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri iki paralelden (veya iki noktadan) ibarettir.

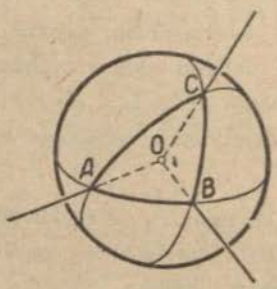
Ekvatorden başka paraleller küre üzerinde en kısa küresel

uzaklığı vermemekte ve düzlemle bir benzerlik bulunmamaktadır.

*Küre yüzeyi üzerinde verilen iki noktadan aynı küresel uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin bir büyük daire olduğu*nun ispatının yapılmasını bir temrin olarak tavsiye ederiz.

Bu bahsi kapatırken AB, BC ve CA büyük daire yaylarından teşekkül eden şekle *ABC küresel üçgeni* denildiğine işaret edelim.

Yarıçapı R olan küre yüzeyi üzerinde bulunan ve AB, BC, CA kenarlarının herbiri R den küçük olan küresel üçgene *Euler üçgeni* adı verilir (şekil 167).



Şek. 167

Küresel bir üçgende her üç açı dik veya her üç açı geniş açı olabilir. Bunlara ait misaller kolayca bulunabilir.

Küresel bir üçgenin açılarının toplamı iki dik açıdan büyüktür. Bu, üçyüzlüye ait ikiyüzlü açıların toplamı ile ilgili teoremin bir neticesidir. Bu açının kenarları, kürenin O merkezini küresel üçgenin A, B, C tepe noktalarına birleştiren doğrular (şekil 167), yüzleri ise O dan geçen ve küresel üçgenin AB, BC, CA kenarlarını içine alan düzlemlerdir.

Küresel bir üçgenin açıların toplamı, üçgenden üçgene farkeden değişen bir miktardır.

Aynı küre yüzeyinde benzer olup da büyüklükleri farklı olan küresel üçgenler mevcut değildir.

Aşağıdaki teorem doğrudur: *Küresel bir üçgenin üç açısı diğer bir üçgenin açılarına eşitse, bu üçgenler ya eşit veya simetriktir.*

Kürede simetri önemli rol oynamaktadır, zira, küresel bir üçgen döndürülüp diğer tarafın üzerine yatırılamaz.

Küre yüzeyindeki çizimler gayetle değerli temrin teşkil ederler. Küre yüzeyi üzerinde daire çizmek için ağaçtan bir küre modeli ve ayakları eğri olan pergel kullanmak uygun olur.

33. Uzayın bir nokta etrafında döndürülmesi

Uzayın, *uzayın bir nokta etrafında döndürülmesi* adı verilen dönüşümleri, kürenin muhtelif çapları etrafındaki dönmeleriyle sıkı sıkıya ilgili bulunmaktadır.

Uzayın, bir O noktasından geçen eksenlere göre bütün dönmeleri altında, merkezi O olan her küre, herhangi iki noktası arasındaki küresel uzaklık değişmeden kendisine dönüşür.

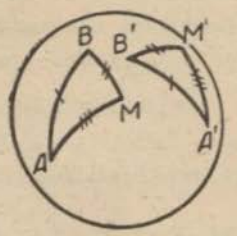
Her noktasında çakışan ve netice olarak merkezleri de aynı olan iki küre alalım. Bu kürelerden birinin sabit, diğerinin ise, herhangi iki nokta arasındaki küresel uzaklık değişmemek şartiyle birincisi üzerinde kaydığını düşünelim.

Hareket edebilen kürenin bir A noktasının yerini sabit bırakırsak, hareket edebilen kürenin kayma hareketi OA ekseni etrafındaki dönmesinden ibaret olur.

Eğer A noktasına ilâve olarak, AB çap olmak üzere, hareket edebilen düzlemin bir B noktasını da sabit tutacak olursak hareket edebilen düzlemi döndürme imkânı kalkar.

Diğer bir deyimle, *hareket edebilen kürenin sabit küreye göre durumu, hareket edebilen kürenin iki noktasiyle* ($AB \neq \pi R$) *belirlidir.*

Bunu göz önünde tutarak, bir kürenin kendisine olan aşağıdaki tasvirini elde edebiliriz: Küre üzerinde πR den farklı eşit AB ve $A'B'$ yaylarını alalım (Şekil 168) ve A noktasına A' yü ve B ye de B' noktasını tekabül ettirelim.



Şek. 168

Kürenin keyfî bir M noktasına,

$$AM = A'M', \quad BM = B'M'$$

küresel uzunluk eşitlikleri cari olacak şekilde aynı kürenin M' noktasını tekabül ettirelim ve ayrıca, düzlemde yaptığımız gibi, AMB ve $A'M'B'$ küresel üçgenlerinin yönlerini aynı olarak alalım (dışardan bakıldığında tepe noktaları aynı sırada bulunacak).

M noktası AB büyük dairesinin üzerinde ise, resmi, yönü zikretmeksizin bir türlü olarak belirli olur.

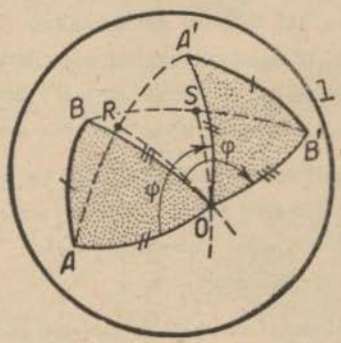
Düzlemde olduğu gibi, burada da kürenin, eşit AB ve $A'B'$ yaylariyle belirli olan kendisine tasviri elde edilmiş bulunmaktadır. CD üçüncü küresel yay ($\neq \pi R$) ve $C'D'$ bu tasvirdeki resmi olsun. Bu takdirde, CD ve $C'D'$ ile belirli olan tasvir AB ve $A'B'$ ile belirli olanın aynı olur.

Belirtilen tasvirin, hareket edebilen kürenin sabit küre üzerinde AB yayı $A'B'$ yayiyle ve netice olarak M noktası M' ile çakışıncaya kadar, bir kaymadan ibaret olduğu görülebilmektedir.

Kürenin anlattığımız bu kendisine tasvirine *kürenin merkezi etrafındaki bir dönmesi* adı verilir.

Şimdi şu özeliği ispatlıyacağız: *Kürenin, merkezi etrafındaki herhangi bir dönmesi, kürenin bir çapı etrafındaki bir dönmesinden ibarettir.*

Kürenin merkezi etrafındaki dönmesi, AB ve $A'B'$ ($AB = A'B' \neq nR$) küresel yaylariyle belirtilmiş olsun (Şekil 169).



Şek. 169

Düzlem halinde dönme merkezini veren çizimi (29, şekil 148) burada küre için tekrarlıyalım.

A ve A' noktalarını AA' büyük daire yayiyle birleştirip bu yayın R orta noktasından RO küresel dikmesini, aynı şekilde B ve B' noktalarını birleştirip BB' küresel yayının ortasından SO küresel dikmesini çizelim (O noktası küreyüzeyi üzerindedir şekil 169).

RO ve SO dikmeleri ya O noktasında kesişirler veya çakışırlar.

Kesişme halinde, kürenin (şekilde gösterilmemiş olan) O_1 merkezi etrafındaki dönmesi, kürenin OO_1 çapı etrafında

$$\Phi = < AOA' = < BOB'$$

açısı kadar dönmesinden ibaret olur.

RO ve SO nun çakışması halinde ise kürenin merkezi etrafındaki verilen dönmesi, O noktası AB ile $A'B'$ büyük dairelerinin ortak noktası olduğuna göre, OO_1 doğrusu etrafındaki dönmesi olur. Şekil 149 a benzer bir şekil çizilip ispatının yapılması tavsiye olunur.

İhtar: Kürede iki büyük daire daima kesişeceklerinden kürenin, düzlemdeki ötelemeye tekabül eden kendi üzerinde kayması mevcut olamaz. A ve A' (veya B ve B') noktaları bir çapın uc noktaları olması halinde de ispat muteber durumdadır.

İspat etmiş olduğumuz bu teoremden şu netice elde edilir: *Kürenin, merkezi etrafındaki bütün dönmelerinin cümlesi bir guruptur*, veya diğer bir deyimle, *kürenin, çapları etrafındaki bütün dönmelerin cümlesi bir guruptur.*

Burada gurup işlemi *dönmelerin toplama işlemi* veya ardışık iki dönmenin yerine bir dönmenin alınmasıdır.

Dönmelerin toplama işleminin kapalı oluşiyle gurupa ait diğer şartların cari olduğunun sağlanması bir temrin olarak tavsiye olunur. Dönme gurupunun komütatif olmadığı da ayrıca gösterilmelidir.

Kürenin çapı etrafında bir dönmesi uzayın bir eksen etrafında dönmesini meydana getirir; bunun tersi de doğrudur.

Bundan da *uzayın, verilen bir noktadan geçen mümkün bütün eksenlere göre dönmelerinin gurupu* kavramına varırız.

Bir temrin olarak, uzayın, bir O noktasında kesişip aralarında dik olan üç eksene göre yapılan 180 derecelik ardışık iki döndürmenin uzayı eski durumuna getireceğini ispatlayınız.

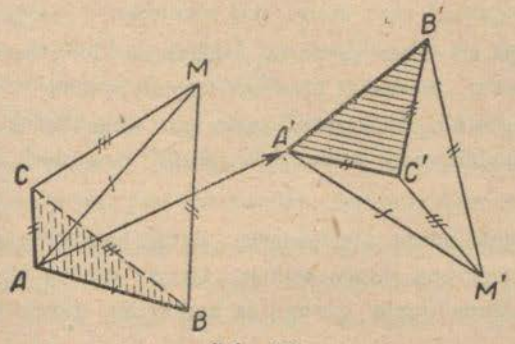
34. Uzayda hareketler gurupu

Uzayın, hareket diyeceğimiz aşağıdaki kendi üzerine tasvirini ele alalım.

ABC ve $A'B'C'$ uzayda sabit yer işgal eden iki üçgen olsun. A noktasına A' noktasını, B ye B' noktasını ve C ye C' noktasını ve uzayın herhangi M noktasına da

$$A'M' = AM, \quad B'M' = BM, \quad C'M' = CM$$

olacak ve $M'A'B'C'$, $MABC$ dörtyüzlüleri aynı yönde bulunacak şekilde M' noktasını tekabül ettirelim (Şekil 170).



Şek. 170

Dörtyüzlülerin aynı yönde olması deyince, M ve M' noktalarından bakıldığında ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde tepe noktalarının sırasının her iki üçgende de aynı olması anlaşılır.

M noktası ABC üçgeninin düzlemine aitse yönden bahsetmeye lüzum yoktur.

Sezişe dayanarak, verilen harekete, ABC üçgeninin buna bağlı uzayla birlikte $A'B'C'$ durumunu almak üzere yer değiştirmesi olarak bakılabilir ve bu halde herhangi M noktası M' resmiyle çakışmış olur.

Haraketin, uzayın kendisine olan bire-bir ve iki taraflı sürekli bir dönüşümü olduğu, veya, topolojik bir dönüşüm olduğu kolayca görülebilir. *Uzaydaki bütün hareketlerin cümlesi bir guruptur.*

Hakikaten, uzayda ABC üçgenini $A'B'C'$ üçgenine götüren Φ_1 hareketi ile bunu takip edip $A'B'C'$ üçgenini $A''B''C''$ üçgenine götüren Φ_2 hareketi yerine, ABC yi $A''B''C''$ ye götüren

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

hareketi alınabilir.

Bu da hareketlerin toplama işleminin kapalılığını ifade eder.

Gurupa ait diğer şartların sağlanması bir temrin olarak tavsiye olunur. Herhangi bir PQR üçgeniyle buna tekabül eden $P'Q'R'$ üçgeninin bu hareketi tarif için alınabileceği de kolaylıkla sağlanabilir ve o halde ABC, $A'B'C'$ üçgenleri özel bir rol oynamaz.

Uzaydaki bütün ötelemelerin, bütün hareketlerin gurupunun bir alt gurupu olduğu açıktır. Uzayın verilen bir nokta etrafındaki dönmelerinin gurupu da hareketler gurupunun bir alt gurupudur.

Şu özelik kolayca ispatlanabilir: *Uzaydaki her hareket birbiri ardınca tatbik edilen paralel bir öteleme ve bir eksen etrafındaki bir dönme ile elde edilebilir.*

İspat için, A herhangi bir nokta ve A' de verilen harekette A nın resmi olmak üzere, AA' kayma vektörünü alalım (Şekil 170).

$\overrightarrow{AA'}$ öteleme vektörünü tatbik edersek, geriye, A' noktasını sabit bırakan bir hareket neticesinde uzayın istenilen duruma getirilmesi kalır. Adı geçen bu hareket ise uzayın A' nokta-

sı etrafındaki dönmesi olup bu dönme A' den geçen bir eksen etrafındaki dönmeden ibaret bulunur ve ispatı sabit olur.

Öteleme vektörü olarak, başlangıç noktası herhangi bir A noktası ve nihayet noktası A nın bu hareketteki A' resmi olan vektör alınabileceğinden, verilen hareketin paralel kayma ve bir eksen etrafındaki dönme bileşenlerine ayrılması bir türlü olarak belirli olmaz.

ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri yerine yerine (şekil 170) düzlemde, düzlemsel harekete tekabül eden iki üçgen almak suretiyle, düzlemdeki herhangi bir hareketin uzayda bir hareket meydana getireceği kolayca görülebilir.

Düzlemdeki hareketlerle elde edilen uzay hareketleri, uzaydaki bütün hareketlerin bir alt gurupudur. Bu alt gurupun hareketlerine *düzlemsel hareketler* denir.

Burada nazara alınan düzlemsel hareketler gurupu, alt gurupu belirten düzlemi içine alan paralel düzlemler demetinin her düzlemini, uzaydaki yeri bakımından, değişmez bırakır.

Uzaydaki düzlemsel hareketlerin gurupiyle düzlemdeki hareketler gurupu arasında mevcut izomorfizmadan dolayı düzlemdeki hareketlerle ilgili her özeliğe uzaydaki hareketlerin bir özeliği tekabül eder.

Mesela, dözlemde öteleme olmıyan her hareketin bir dönme olduğunu bilmekteyiz.

İzomorfizmadan dolayı şu teoremi ifade edebiliriz: *Uzayın öteleme olmıyan her düzlemsel hareketi, değişmez demetin düzlemlerine dik bir eksen etrafındaki bir dönmeden ibarettir.*

Özel olarak: $\overrightarrow{AA'}$ *Öteleme vektöriyle belirli olan kayma ile,* $\overrightarrow{AA'}$ *vektörüne dik bir eksen etrafındaki* $\Phi \neq 0$ *açılı bir dönmenin toplamı, ekseni birinciye paralel dönmeye eşittir.*

Ayrıca, bileşke dönmenin aynı Φ açılı bir dönme olduğu kolaylıkla sağlanabilir.

Uzaydaki hareketlerle ilgili en önemli teoremlerden biri şudur:

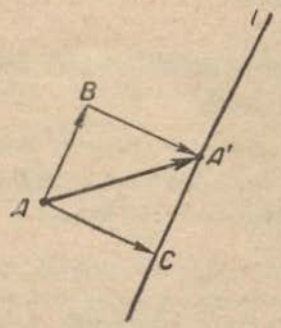
Teorem. *Uzaydaki herhangi bir dönüşüm, bir öteleme ile ekseni buna paralel olan bir dönmenin toplamına eşittir.*

Bunu ispatlamak üzere verilen hareket, öteleme vektörü $\overrightarrow{AA'}$ olan bir öteleme ile l ekseni A' den geçen bir dönme bileşenlerini haiz olsun.

Bu ötelemeyi, biri l dönme eksenine paralel diğeri l ye dik olmak üzere iki öteleme bileşenine ayıralım (Şekil 171):

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}$$

Evvelki teoreme göre l eksenine dik $\overrightarrow{BA'}$ ötelemesi ile l ekseni etrafındaki dönmenin toplamı yerine ekseni l ye paralel olan bir dönme alınabilir. Ohalde verilen hareket $\overrightarrow{AB}$ ötelemesiyle ekseni $\overrightarrow{AB}$ ye paralel olan bir dönmenin toplamına eşit olur ve ispat sabit olmuş bulunur.



Şekil 171

Bir öteleme ile, ekseni bu ötelemeye paralel olan bir dönmenin toplamı olan harekete *vida - hareketi* denir.

Ohalde uzaydaki her hareket bir vida - hareketidir.

Burada, öteleme veya dönmenin herbirinin veya ikisinin birden birim dönüşüm olması halini hariç tutmuyoruz.

Açık olarak, bir vida - hareketinde öteleme ve dönmenin alınış sırasının önemi yoktur. Öteleme ve ekseni bu ötelemeye paralel olan bir eksen etrafındaki dönmeden meydana gelen hareket çiftine *vida* diyoruz.

Öteleme vektörünün uzunluğunun dönme açısına oranına *vidanın parametresi* adı verilir.

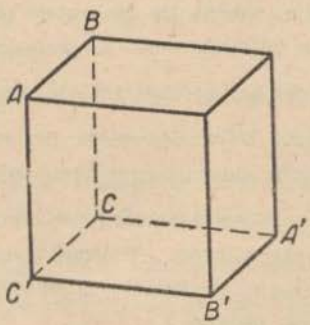
Geometrik hareket kavramında uzayın veya bir kısmının fiilî olarak ara durumlardan geçerek bir durumdan bir duruma ulaşması aranmaz. Geometrik hareket kavramında aranan esas nokta şeklin ilk ve nihaî durumlarıdır. Bir şeklin geometrik hareketinde noktaların yörüngeleri yoktur diyebiliriz.

Düzlemde olduğu gibi uzay hareketlerinde de herhangi iki noktanın değişmezi mevcuttur ve bu, bunlar arasındaki uzaklıktır.

Bir temrin olarak öğrenci, biribirine dik aykırı iki doğru etrafındaki 180 er derecelik iki dönmenin toplamının, bu iki doğruya dik istikamette bir vida - hareketi olduğunun ve bu harekette ötelemenin bu iki doğru arsındaki en kısa uzaklığının iki katı ve açının da 180° olduğunu göstermelidir.

Bir AB doğru parçasının, bir eksen etrafındaki dönme ile, paralel olmıyan $A'B'$ durumuna getirilebileceği ve netice olarak herhangi bir hareketin uygun eksenler etrafındaki iki dönmenin toplamına eşit olacağı ispat edilmelidir.

Bir küb, A,B,C tepe noktaları A',B',C' tepe noktalarına gidecek şekilde hareket ettirilmiştir (şekil 172). Vidayı bulunuz.

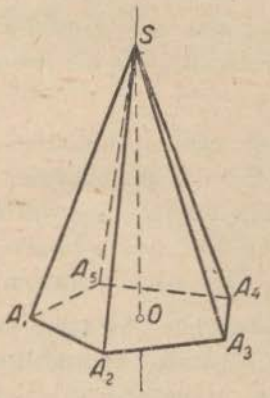


Şekil 172

Geometrik dönüşüm olarak incelediğimiz hareketlerin özelikleri katı cisimler mekaniğinde esaslı rol oynamaktadırlar.

35. Düzgün piramidin dönme grupları.

Dik $SA_1A_2\cdots A_n$ piramidini SO yüksekliği etrafında döndü-



Şek. 173

recek olursak (Şekil 173) piramidi kendisine döndüren hareketlerin cümlesi bir gurup teşkil eder.

Bu gurup, açıları

$$\Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = \frac{2\pi}{n},\ \Phi_2 = 2\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ \Phi_{n-1} = (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

olan n tane dönme ihtiva eder.

Dönme açısının genel şekli

$$\Phi_k = k\frac{2\pi}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

veya

$$\Phi_k = k\Phi_1$$

den ibarettir.

Devirlerin tam bir katı kadar farkeden dönmeler eşit itibar olunur. Yukarıda verilenlerden başka olan dönmelerin $SA_1A_2\cdots A_n$ piramidini kendisine götürmiyeceği kolayca görülebilir.

Açıları $p\Phi_1$ ve $q\Phi_1$ olan dönmelerin toplamı, açısı $r\Phi_1$ olan bir dünme olup burada r tam sayısı, $p+q$ nün n ile bölümünün kalanıdır.

Düzgün piramidin dönmeler gurupu, $A_1A_2\cdots A_n$ tabanının O merkezi etrafındaki dönmelerinin gurupiyle izomorftur. Burada bahis konusu olan döndürmeler, düzgün çokgeni düzleminden ayırmaksızın (döndürüp yatırmaksızın) kendisine çeviren döndürmeler olduğu malûmumuzdur.

Düzgün çokgenlerin dönmelerinin guruplariyle izomorf olan guruplara *sonlu siklik gurup* adı verilir. Sonlu bir siklik gurup bir elemanla, meselâ, misalimizde Φ_1 elemaniyle elde edilebilir.

Madde 24 de tam sayılar gurupuyle izomorf olan bir gurupa ait bir misal almıştık; böyle guruplara ise *sonsuz siklik gurup* denir.

Bir elemaniyle elde edilen bir gurupa *siklik gurup* adı verilir.

Cebirden, $w^n = z$ denkleminin karmaşık sayılar cisminde köklerinin

$$w_k = \sqrt[n]{p}\left[\cos\left(\frac{\Phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\Phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

olup

$$\Phi = \arg z, \quad p = |z|$$

dir.

w_k sayıları arasında n tanesinin farklı olduğunu da bilmekteyiz. Karmaşık sayıların 2π nin katları kadar farkeden açıları eşit itibar edildiğinden ve karmaşık sayıların çarpımında açılar toplandığından, z sayısının n-inci köklerinin cümlesi çarpıma göre bir gurup teşkil eder. Bu gurup, tabanı düzgün bir piramidin dönme gurupiyle izomorf bulunur.

Okuyucu, bir temrin olarak, gurupu meydana getiren, n-inci martebeden siklik gurupun bütün elemanlarını bulmalıdır. Binom denkleminin ilkel kökü kavramiyle mukayese yapınız.

36. Ortogonal dönüşümlerin tarif ve özelikleri

Uzayın bir eksen veya bir nokta etrafındaki dönmelerinin gurupu gibi öteleme gurupu da uzayın hareket gurupunun alt gurupudur. Diger taraftan hareket gurupu da daha geniş bir dönüşüm gurupunun bir alt gurupu bulunmaktadır.

Tarif: İki nokta arasındaki uzaklığı değişmez bırakan veya, AB uzaklığını, A ve B noktalarının A', B' resimleri arasındaki uzaklığa eşit kılan düzlemin düzleme, uzayın uzaya dönüşümlerine *ortogonal dönüşüm* adı verilir:

$$A'B' = AB.$$

Bu tariften, ortogonal dönüşümlerin özeliklerini veren birçok teorem elde edebiliriz.

Teorem 1. *Ortogonal bir dönüşüm bire-birdir.*

İspat: Eğer A ve B gibi farklı iki noktanın aynı ve bir tane A' resmi olsaydı, tariften dolayı aralarındaki AB uzaklığının sıfır olması gerekirdi; ohalde A ve B noktaları farklı olamaz.

Teorem 2. *Uzaydaki bütün ortogonal dönüşümlerin cümlesi, dönüşümlerin toplama işlemine göre bir gurup teşkil eder.*

İspat: 1. Ortogonal iki dönüşümün toplamı — diğer bir deyimle, biribiri ardınca tatbik edilen ortogonal iki dönüşümden elde edilen dönüşüm — ortogonal bir dönüşümdür, zira, toplam dönüşüm iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmemektedir.

Ohalde ortogonal dönüşümlerin cebirsel toplama işlemi *kapalı* dır.

2. Uzayı kendisine çeviren bütün dönüşümlerde *asosiyatif özelik* caridir.

3. Birim dönüşüm ortogonal olduğundan *etkisiz eleman* mevcut bulunmaktadır.

Bir gurupta her elemanın ters dönüşümünün varlık şartı, ortogonal dönüşümün tersinin ortogonal olmasından sağlanmaktadır. Bu suretle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Hareketler noktalar arasındaki uzaklığı muhafaza ettiğinden *uzaydaki hareketler gurupu ortogonal dönüşümler gurupunun bir alt gurupudur.*

Uzayda iki nokta arasındaki uzaklığın aşağıdaki basit özeliklerinden ortogonal dönüşümlerin özelikleri çıkar.

A. *A, B ve C noktaları doğrusal olmıyan üç nokta ise bu*

noktaların belirttiği iki doğru parçasının toplamı üçüncü doğru parçasından büyüktür.

B. *A, B ve C doğrusal üç nokta ve B noktası A ile C nin arasında ise*

$$AB + BC = AC$$

dir.

Bu iki teoremden, *B* teoreminin karşıt teoremi elde edilir.

C. *A, B ve C noktalariyle belirlenen doğru parçaları arasında*

$$AB + BC = AC$$

eşitliği varsa, bu noktalar doğrusaldır ve ayrıca B noktası A ile C nin arasındadır.

İspatı: *A, B, C* noktaları doğrusal olmasaydı *A* teoriminden $AB + BC > AC$ elde edilirdi.

B noktası *A* ile *C* arasındadır. Eğer meselâ *C* noktası *A* ile *B* arasında olsaydı,

$$AC + CB = AB$$

elde edilip $AB + BC = AC$ eşitliğiyle çelişmezliğe varılırdı.

Noktalar arasındaki uzaklığın özelikleri dolayısiyle üç noktanın doğrusal olup olmadığı bu noktalar arasındaki uzaklıkların verilmesiyle tamamen belirli olur. Ortogonal dönüşümler uzaklığı değiştirmediğinden aşağıdaki teoremler caridir.

Teorem 3. *Ortogonal bir tasvirle her doğrusal üç nokta doğrusal üç noktaya, doğrusal olmıyan üç nokta ise doğrusal olmıyan üç noktaya tasvir olunur.*

Teorem 4. *Ortogonal bir tasvirde bir doğrunun resmi bir doğrudur; bir doğrunun ters resmi de bir doğrudur.*

Teorem 5. *Ortogonal bir dönüşümde bir doğru parçası bir bir doğru parçasına dönüşür.*

Teorem 6. *Ortogonal bir dönüşümde bir doğru parçasını verilen bir oranda bölen bir nokta, doğru parçasının resmini aynı oranda bölen noktaya dönüşür.*

Diğer bir deyimle, bir doğru üzerindeki basit bölme oranı ortogonal bir dönüşümün basit bir *değişmez* idir.

3-6 özelikleri iki nokta arasındaki uzaklığın özelikleriyle ortogonal dönüşümlerin tarifinin neticeleridir.

Teorem 7. *Uzayın ortogonal bir dönüşümünde bir düzlemin resmi bir düzlem, karşıt olarak, bir düzlemin ters resmi de bir düzlemdir.*

İspatı: Verilen π düzleminde A noktasında kesişen AB, AC gibi iki doğru alalım. M noktası π düzleminde A dan farklı bir nokta olsun. M den, AB ve AC yi farklı P ve Q noktalarında kesen bir m doğrusu çizelim.

Verilen ortogonal dönüşümde A nın resmi bir A' noktası, AB ve AC doğrularının resimleri ise farklı olan $A'B'$, $A'C'$ doğrularıdır. m doğrusunun resmi, $A'B$, $A'C'$ yü P ve Q nün P',Q' resimlerinde kesen bir m' doğrusudur. Ohalde M nin M' resmi $A'B'$, $A'C'$ doğrularından geçen π düzleminde bulunur.

Demek ki π (AB, AC) düzlemindeki keyfî bir M noktası, π' $(A'B', A'C')$ düzleminin bir M' noktasına ve netice olarak π nin noktaları π' nün noktalarına dönüşmektedir.

Ters dönüşüm ortogonal olduğundan düzlemin ters resmi de düzlem olur ve bu suretle ispat tamamlanmış bulunur.

Teorem 8. *Ortogonal bir dönüşümle paralel doğrular paralel doğrulara ve paralel düzlemler paralel düzlemlere dönüşür.*

Çünkü, aksi takdirde, dönüşüm bire-bir olmaz.

Teorem 9. *Ortogonal bir dönüşümde açılar muhafaza olunur.*

Bu teorem, doğru parçalarının muhafaza olunuşunun bir neticesidir.

Düzlemsel olmıyan aynı O başlangıç noktalı e_1, e_2, e_3 vektörleri verildiğinde, bildiğimiz veçhile, her $\overrightarrow{OM}$ vektörü e_1, e_2, e_3 vektörlerine göre bir türlü olarak bileşenlerine ayrılabilir:

$$\overrightarrow{OM} = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$$

x, y, z sayılarına M noktasının e_1, e_2, e_3 vektör sistemine göre koordinatları denir.

Ayrıca x, y, z sayıları $\overrightarrow{OM}$ vektörünün sırasıyla e_1, e_2, e_3 ün eksenleri üzerindeki — genel olarak dik olmıyan — izdüşümlerinin e_1, e_2, e_3 e oranlarına eşittir.

Bu koordinat sistemini $O\{e_1, e_2, e_3\}$ semboliyle gösteriyoruz.

Teorem 10. (Ortogonal tasvirlerin birinci esas teoremi). *Ortogonal bir tasvirde düzlemsel olmıyan ve aynı O başlangıç noktalı e_1 e_2 e_3 vektör sistemi, açıları ve uzunlukları değişmiyen ve aynı O' başlangıç noktalı bir e_1', e_2', e_3' vektör sistemine dönüşür. Ayrıca her M noktası, $(e_1'\ e_2', e_3')$ e göre koordinatları, M nin (e_1, e_2, e_3) e göre koordinatlarının aynı olan bir M' noktasına dönüşür. Karşıt olarak, bu özelikleri haiz olan her dönüşüm ortogonal bir dönüşümdür.*

İspatı: Ortogonal bir dönüşümle O noktası bir O' noktasına, e_1, e_2, e_3 vektörleri de açılar ve uzunluklar aynı kalmak üzere e_1', e_2', e_3' vektörlerine dönüşür. Ayrıca, M noktasını e_1, e_2, e_3 eksenlerine izdüşüren düzlemlerin (e_2, e_3), (e_3, e_1), (e_1, e_2) düzlemleriyle paralelliği bozulmaz. Oranlar veya koordinatlar da muhafaza olunur.

Bir doğru parçasının uzunluğu, uc noktalarının koordinat-

lariyle tamamen belirli olduğundan karşıt taorem doğru olur ve ispat tamamlanmış bulunur.

Bu teoremden şu **netice** elde olunur: Uzayın *ortogonal* bir dönüşümü, düzlemsel olmıyan herhangi dört noktanın resimlerinin verilmesiyle tamamen belirli olur.

İspatı: Dört noktadan birini O başlangıç noktası, ve geriye kalan üçünü e_1, e_2, e_3 ün uc noktaları olarak alırsak resimleri — O' noktası ve e_1'. e_2', e_3' vektörleri — belirli olur. Bunun neticesi $M'(x, y, z)$ nün de $M(x, y, z)$ nin resmi olduğu bilinmiş olur. M' noktasının $O'(e_1', e_2', e_3')$ sistemine göre koordinatları M nin $O(e_1, e_2, e_3)$ sistemine göre koordinatlarının aynı olup neticenin ispatı elde edilmiş olur.

Okuyucuya, düzlemin kendisine olan ortogonal bir tasvirinde buna benzer neticeyi elde etmesi tavsiye olunur.

Bir π düzlemi verildiğinde her M noktasına, MM' doğrusu π ye dik, A noktası M nin π üzerindeki ayağı, M ile M' noktaları π nin karşı taraflarında ise

$$AM' = AM$$

olacak şekilde, M' noktasını tekabül ettiren uzay dönüşümüne düzleme göre *simetri* adını veriyoruz. π düzleminin noktaları simetrinin sabit noktalarıdır.

Bir π düzlemine göre simetri, noktalar arasındaki uzaklıkları muhafaza ettiğinden ortogonal bir dönüşümdür.

Bir π düzlemiyle bir a doğrusu verildiğinde düzlemin her M noktasına, MM' doğrusu a ya dik, A noktası M nin a üzerindeki ayağı, M ile M' noktaları a nın karşı taraflarında ve

$$AM' = AM$$

olacak şekilde, M' noktasını tekabül ettiren dönüşüme düzlemin doğruya göre simetrisi denir.

Düzlemin bir doğruya göre simetrisinin ortogonal bir dönüşüm olduğu kolayca görülebilir.

Simetrilerin özelikleri gelecek bölümde etraflıca ele alınacaktır.

Teorem 11. (Ortogonal dönüşümlerin ikinci esas teoremi). *Uzayın her ortogonal dönüşümü ya bir hareket veya bir hareketle bir simetrinin toplamıdır.*

İspat. Ortogonal dönüşümün; O noktasını O' noktasına, başlangıç noktaları O olan ve düzlemsel olmıyan e_1, e_2, e_3 vektörlerini, başlangıç noktaları O' olan e_1', e_2', e_3' vektörlerine götürdüğünü kabul edelim. O yu O' ye, e_1 ve e_2 vektörlerini e_1' e_2' vektörlerine götüren hareketi düşünelim. Böyle bir hareketin bir tane olduğunu bilmekteyiz. Uzunluk ve açıların eşitliğinden bu hareket ya e_3 vektörünü e_3' vektörüne götürür — bu takdirde ortogonal dönüşüm, hareketin aynı olur — veya e_3 vektörünün (e_1', e_2') düzlemine göre simetriği olan e_3'' vektörüne götürür.

Bu son halde ise ortogonal dönüşüm hareket ve düzleme göre simetrinin toplamı olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Ortogonal dönüşümlerin benzer bir özeliği düzlemde de mevcuttur.

Hareket olan ortogonal dönüşümlere *birinci neviden ortogonal dönüşüm*, diğerlerine *ikinci neviden ortoganal dönüşüm* adı verilir.

Ekseriya **herhangi** bir ortogonal dönüşüme hareket veya *dar anlamda hareket* denilmektedir. Bu terimi kullanırken dikkatli olmak icap eder.

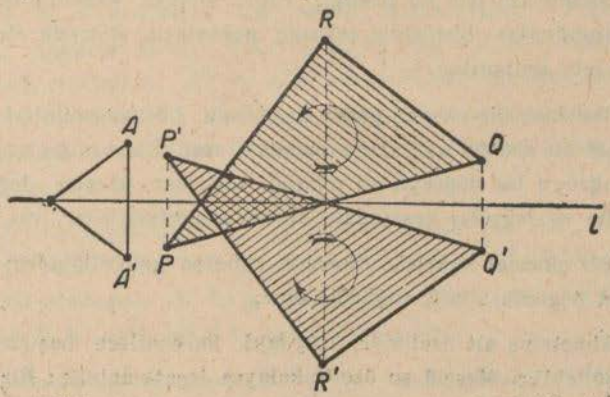
BÖLÜM VI.

SİMETRİ

Bölüm VI. da düzlemin bir eksen ve bir noktaya göre ve uzayın bir düzlem ve bir noktaya göre simetrilerini ele alacağız ve simetrilerin biri biri ardınca tatbikleriyle öteleme ve dönmelerin icrasını inceliyeceğiz. Kübün ve dörtyüzlünün simetri grupları etüd edilecek ve şekillerin simetrisi için Feodorov'un genel tarifi verilecektir. Madde 39 da da simetri usulünün kullanılmasiyle çizim problemlerinin çözümü incelenecektir.

37. Düzlemde bir eksene göre simetri.

A' noktasına, A ve A' noktaları aşağıdaki şartları sağladığı takdirde, A noktasının l doğrusuna göre simetriği deriz: 1) l nin birer tarafında olmak, 2) l den aynı uzaklıkta bulunmak, 3) l ye dik AA' doğrusu üzerinde bulunmak (Şekil 174).



Şek. 174

l doğrusuna A ve A' noktalarının *simetri ekseni* denir. Simetri ekseni üzerindeki her nokta kendi kendisinin simetriğidir.

Bir düzlemin A ve A' gibi iki noktasının ancak bir simetri ekseni mevcut olup düzlemde A ve A' noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeridir (Şekil 174).

Bir düzlemin her A noktasına bu düzlemin bir l eksenine göre A' simetriği tekabül ettirilirse düzlemin kendisine olan bu dönüşümüne *l eksenine göre simetri veya eksenel simetri* adı verilir,

Bir eksene göre simetrinin bire-bir ve iki taraflı sürekli olduğu kolaylıkla sağlanabilir. Bir A noktası, bunun simetriği olan A' noktasına dönüşür. Düzlemin bu dönüşümü, herhangi bir şeklin l eksenine göre simetriği olan şekle dönüşümünü meydana getirir. Meselâ PQR üçgeni (Şekil 174) bununla simetrik bulunan ve yönü ters olan $P'Q'R'$ üçgenine dönüşür.

Hareket terimiyle ifade edecek olursak bir düzlemin bir l eksenine göre simetrisi bu düzlemin l ekseni etrafındaki yarım bir devri olur.

Simetrinin işte bu özeliği, kâğıt simetri ekseninden ikiye «katlandığında» birbiriyle çakışan noktaların simetrik oluşunun tarifi için kullanılır.

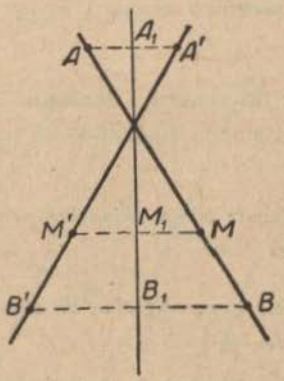
Bundan, bir eksene göre simetrinin bütün özelikleri çıkar. Eksenel bir simetri noktalar arasındaki uzaklıkları muhafaza eder, bir doğruyu bir doğruya ve paralel doğruları paralel doğrulara götürür ve doğrular arasındaki açıları muhafaza eder, vs.

Bir eksenel simetri, düzlemi «tersine çevirdiğinden» yön, meselâ üçgenin yönü, değişmiş olur.

Simetriye ait özelikler uzaydaki hareketlere başvurmadan elde edilebilir. Meselâ şu özelik kolayca ispatlanabilir: *Bir doğru üzerindeki iki nokta diğer bir doğrunun iki noktasının bir eksene*

göre simetriği ise birinci doğrunun bütün noktaları ikinci doğrunun bütün noktalarının simetriği olur.

İki doğru alıp bu AB, $A'B'$ doğrularında A, A' ve B, B' l eksenine göre simetrik noktalar olsunlar (Şekil 175).



Şek. 175

AB nin her M noktasının simetriği olan M' noktasının $A'B'$ üzerinde olduğunun ispatı istenmektedir.

A_1 ve B_1 noktaları AA' ve BB' doğrularının l doğrusunu kestiği noktalar olsun. $BB_1 = B'B_1$ ve $AA_1 = A'A_1$ olduğundan A_1 ve B_1 noktaları, AB ve $A'B'$ kesiştikleri takdirde bunların açı ortayına, paralel oldukları takdirde ise ortalarından geçen doğruya ait olurlar. Her iki halde de A_1B_1 doğrusu l simetri ekseniyle çakışır.

AB üzerinde keyfî bir M noktası alalım ve AA', BB' ye MM' paralelini çizip $A'B'$ ile olan arakesitine M' diyelim. MM' ve l nin arakesiti M_1 ile gösterildiğine göre, l nin özeliğinden $MM_1 = M'M_1$ elde edilir ve ispat bitmiş olur.

l eksenine göre alınan ardışık iki simetri düzlemin birim dönüşümüne eşittir.

İspat: M' keyfî bir M noktasının simetriği ise M' nün simetriği bu ilk M noktasıdır.

Mümkün olan bütün doğrulara göre alınan simetri dönüşümlerinin cümlesi kapalılık özeliğini haiz değildir. Daha iyi söylemek istersek: *İki simetrinin toplamı, simetriden farklı olan bir dönüşümdür.*

İspat: Ardışık iki simetri, düzlemin keyfî bir üçgeninin yönünü muhafaza ettiğinden toplam-dönüşüm hiçbir eksene göre simetri olamaz.

Bundan da *düzlemde bütün eksenel simetrilerin bir gurup teşetmediği* neticesi çıkar.

Teorem. *Eksenleri paralel olan iki simetrinin toplamı düzlemde bir ötelemeye denktir.*

Evvelâ, bir eksen üzerinde herhangi sırada alınan üç A, A', A'' noktası için vektörel

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$$

eşitliğinin cari olduğunu belirtelim.

Yönlü doğru parçalarını düşünürsek evvelki eşitlik

$$AA' + A'A'' + A''A = O$$

eşitliğine denk olur.

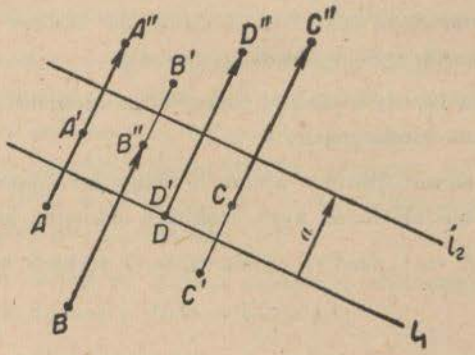
Bu denklemler, bir eksen üzerinde alınan üç A, A', A'' noktasının mümkün bütün sıralamaları için, hiç güçlük çekmeden sağlanabilir.

Şimdi simetri ekseni olarak l_1, l_2 gibi paralel iki doğru alalım ve l_1 doğrusunu birinci simetrinin, l_2 yi ise ikinci simetrinin ekseni olarak seçelim. l_1 doğrusunu l_2 ye götüren öteleme vektörüne a diyelim.

A keyfî bir nokta, A' noktası A nın l_1 eksenine göre simetriği, A'' de A' nün l_2 ye göre simetriği olduğuna göre

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$$

yazabiliriz (Şekil 176).



Şek. 176

Simetrinin özeliklerinden derhal

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{A_1A'}, \quad \overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'A_2}$$

elde olunur. Burada, şekilde gösterilmemiş bulunan A_1 ve A_2 noktaları AA'' nün l_1 ve l_2 ile olan arakesitlerini göstermektedir.

Bunlardan da

$$\overrightarrow{AA''} = 2(\overrightarrow{A_1A'} + \overrightarrow{A'A_2}) = 2\overrightarrow{A_1A_2} = 2a$$

bulunur.

Ohalde paralel eksenli iki simetrinin toplamı keyfî bir A noktasını, A ya bağlı olmıyan $2a$ öteleme vektöriyle A'' noktası-

na götürmektedir. Bu ise bu simetrilerin toplamının bir simetri olduğunu ispatlar.

Şekil 176 da simetri eksenlerine göre durumları değişik olan birkaç nokta gurupu gösterilmiştir.

Simetrilerin toplamında sırayı değiştirirsek birincinin tersi olan bir öteleme elde ederiz.

Karşıt teorem de doğrudur: *Düzlemde her öteleme paralel eksenli iki simetrinin toplamı olarak gösterilebilir.*

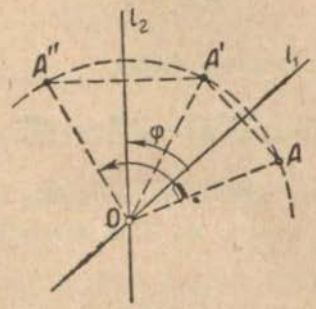
Teoremin ispatiyle simetri eksenlerinin seçilmesi bir temrin olarak okuyana bırakılmıştır.

Simetri ekseni üzerinde alınan herhangi bir noktanın simetrik A ve A' noktalarından aynı uzaklıkta olduğunu bilmekteyiz.

Ohalde l_1 ve l_2 simetri eksenlerinin O arakesit noktası için

$$OA = OA' = OA''$$

yazabiliriz (Şekil 177). Burada A düzlemde keyfi bir nokta, A'



Şek. 177

noktası bunun l_1 eksenine göre simetriği ve A'' de A' nün l_2 eksenine göre simetriğidir. Ayrıca ardışlık iki simetri «düzlemi tersine çevirmemektedir». Ohalde burada mütalea edilen iki simetrinin toplamı bir dönmeden ibarettir.

AOA'' dönme açısı eksenler arasındaki açının iki katıdır.

$$< AOA'' = 2\Phi$$

Karşıt **teorem** de doğrudur: *Düzlemde bir nokta etrafındaki her dönme eksenleri dönme merkezinden geçen iki simetrinin toplamı olarak gösterilebilir.*

Bu teoremin ispatı bir temrin olarak bırakılmıştır.

Eksenel simetrinin ispat etmiş olduğumuz özeliklerinden şu önemli netice elde olunur: *Bütün eksenel simetrilerin cümlesi bütün dönme ve ötelemeleri içine alan bir gurup meydana getirir.* Bu gurup düzlemin ortogonal dönüşümlerinin gurupunu teşkil eder. Düzlemin daha evvel ele alınmış olan hareketlerine birinci nevi ortogonal dönüşüm veya hareket denir.

Düzlemdeki hareketler gurupu ortogonal dönüşümler gurupunun bir alt gurupudur.

38. Düzlemde bir noktaya göre simetri

O noktası AA' nün ortası olduğu takdirde A' noktasına O ya göre A nın simetriği, O noktasına da *simetri merkezi* denir.

Simetri merkezi kendi kendisinin simetriğidir.

Düzlemin iki A ve A' noktasının ancak bir simetri merkezi vardır, bu da AA' nün orta noktasıdır.

Bir düzlemde her A noktasına göre A' simetriği tekabül ettirilirse düzlemin kendisine olan bu dönüşümüne merkeze göre simetri veya *merkezil simetri* denir.

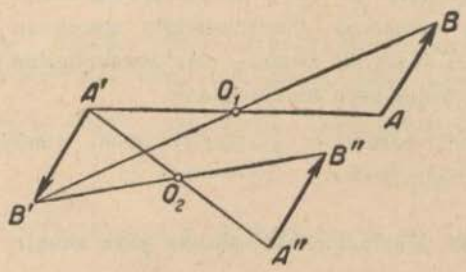
Merkezil simetrinin de bire-bir ve iki taraflı sürekli bir dönüşüm olduğu kolayca sağlanabilir.

Merkezil simetri tabiî, düzlemin simetri merkezi etrafında 180° dönmesinden ibaret olup [14] yeni bir dönüşüm değildir. Merkezil simetri bu noktada eksenel simetriden ayrılmaktadır.

Merkezil bir simetri, düzlemde bir nokta etrafındaki her dönme gibi, eksenleri merkezden geçen iki simetrinin toplamına eşittir. Bu halde simetri eksenleri birbirine dik bulunur.

Teorem. *Düzlemde merkezleri farklı iki simetrinin toplamı düzlemde bir ötelemedir.*

İspat: Düzlemde farklı merkezli iki dönmenin toplamının düzlemde birinci nevi hareket olduğunu bilmekteyiz (29). Birinci nevi her hareket iki çift karşıt nokta ile, veya — aynı şey demek olan — bir çift karşıt doğru parçasiyle tamamen belirli-



Şek. 178

dir. O_1 noktası etrafındaki (Şekil 178) 180° lik bir döndürme, verilen AB doğru parçasını AB ye paralel ve zıt yönlü $A'B'$ doğru parçasına ve O_2 merkezli 180° lik ikinci döndürme ise $A'B'$ doğru parçasını AB ye paralel ve bununla aynı yönde olan $A''B''$ doğru parçasına götürür ve ispat ister.

Karşıt olarak, *düzlemde her öteleme, birinin merkezi keyfî olarak seçilebilen merkezil iki şimetrinin toplamına eşittir.*

Bu iddianın ispatı temrin olarak bırakılmıştır.

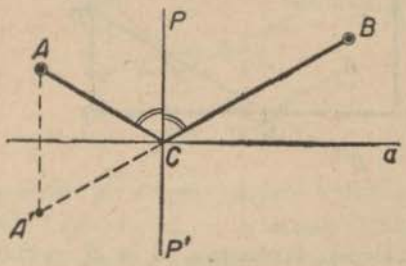
39. Çizim problemlerinin çözümünde simetri usulü

Çizim problemlerinin çözümünde bir şekle veya bir kısmına bir simetri tatbik etmek ve çizimin icrasından sonra şekli ikinci bir simetri ile eski yerine getirmek ekseriya faydalı olmaktadır.

Simetrinin başka tatbikatı da mevcuttur.

Simetri usulu en iyi, misaller üzerinde açıklanır.

Problem. *Bir a doğrusunun aynı tarafında A ve B gibi iki nokta verilmişken* (Şekil 179) *a üzerinde,* $< ACP = < BCP$ *olmak ve CP doğrusu a ya dik bulunmak üzere bir C noktası bulmak.*



Şek. 179

A noktasının a doğrusuna göre A' simetriğini alırsak

$$< A'CP' = < ACP = < PCB$$

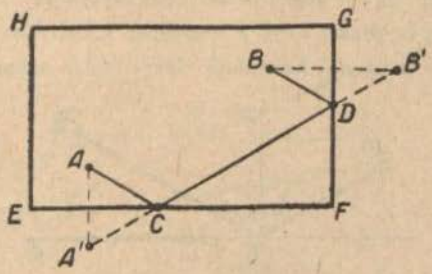
elde eder ve BC ile CA' doğru parçalarının aynı BCA' doğrusu üzerine düştüğünü görürüz. Aranılan C noktası da B noktasını A nın a ya göre simetriği olan A' noktasına birleştirmekle elde edilir.

A noktası bir ışık membaı ise, bu noktadan çıkan bütün ışınlar bu kanunla a aynasında aksederler ve A nın resmi olan A' noktasından çıkmış gibi görünürler.

Tıpkı bunun gibi, A bir bir bilardo topu ve a masanın bandı ise, A topunun a bandına çarpıp B ye ulaşması için buna C istikametinde vurmak icap eder (Şekil 179).

Ayrıca, kırık ACB doğrusunun $AC+CB$ uzunluğunun, a doğrusuna uğramak şartiyle A ile B noktası arasındaki en kısa yol olduğu açıktır.

Problem. *Bir bilârdo masasında A ve B gibi iki nokta verildiğine göre, A da bulunan topun iki banda çarptıktan sonra B ye ulaşması için gideceği yolu bulmak* (Şekil 180).



Şek. 180

Evvelki probleme dayanarak, A ve B noktalarının EF ve FC eksenlerine simetrikleri olan A' ve B' noktalarını birleştirir ve aranılan kırık $ACDB$ yolunu elde ederiz.

Problemin çözümünün mevcut olabilmesi için A ve B toplarının masanın neresinde olması gerektiğinin araştırılmasını bir temrin olarak bırakıyoruz.

Problem. *Kenarlarının O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 orta noktaları verilen beşgeni çizmek.*

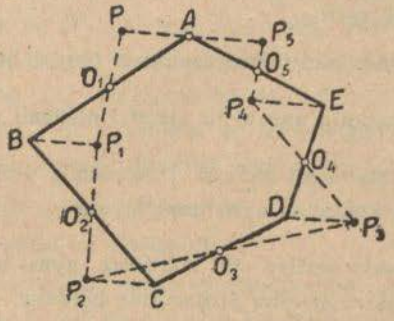
Aranılan beşgen $ABCDE$ olsun (Şekil 181).

A tepe noktası bilinmiş olsaydı, A nın O_1 e göre simetriği alınarak B, B nin O_2 ye göre alınarak C, ··· ve nihayet D, E tepe noktaları elde edilir ve tekrar A ya varılırdı.

Keyfî bir P noktası alalım ve O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 noktalarına göre ardışık P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 simetrik noktalarını elde edelim. Merkezli simetrinin özeliklerinden derhal

$$AP = BP_1 = CP_2 = DP_3 = EP_4 = AP_5$$

bulunur. Bu denklemde görülen bütün doğru parçaları birbirine



Şek. 181

paralel olup her biri bir evvelkiyle ters yönlüdür. Bundan da A noktasının, PP_5 doğru parçasının ortasında olduğu çıkar. Ohalde keyfî bir P noktasından başlamak suretiyle beşgenin A ve diğer tepe noktalarını bulmak mümkündür.

Bu çizimin ancak kenar sayısı tek olan çokgenlere tatbik edilebileceğini gösteriniz.

Başka misaller ve lüzumlu problemler İ. İ. Aleksandrov'un şu kitabında mevcuttur : *«Geometrik çizim problemleri koleksiyonu»*.

40. Uzayın düzleme göre simetrisi

A ve A' noktalarına, aşağıdaki şartları sağladıkları takdirde α düzlemine göre simetriktir deriz : 1) α düzleminin birer tarafında olmak, 2) α ya dik aynı doğru üzerinde olmak, 3) α düzleminden aynı uzaklıkta bulunmak.

α düzlemine, A ve A' noktalarının simetri düzlemi adı verilir.

Simetri düzlemindeki noktalar kendi kendilerinin simetriğidir.

Uzayın her A noktasına bir α düzlemine göre A' simetriği tekabül ettirilirse uzayın kendisine olan bu dönüşümüne *düzleme göre simetri* adı verilir.

Düzleme göre simetrinin özelikleri liseden bilinmektedir [17].

1. İki noktanın ancak bir simetri düzlemi vardır.

2. İki noktaya ait simetri düzleminde bulunan her nokta bu iki noktadan aynı uzaklıktadır.

3. Bir nokta verilen iki noktadan aynı uzaklıkta ise, bu noktaların simetri düzleminde bulunur.

4. Bir doğrunun iki noktası diğer bir doğrunun iki noktasının bir düzleme göre simetriği isise, birinci doğrunun bütün noktaları ikinci doğrunun noktalariyle simetriktirler.

Bu özellik şöyle de ifade edilebilir: Bir düzleme göre simetri, doğruları doğrulara dönüştürür.

Bu özelik en basit olarak, dönüştürülecek doğrudan simetri düzlemine dik bir düzlem geçirmek ve çizilen bu düzlemde iki düzlemin arakesitine göre, doğrunun simetriğini almakla sağlanır.

5. Bir düzlemde doğrusal olmıyan herhangi üç A, B, C noktası, diğer bir düzlemin üç A', B', C' noktasının üçüncü bir düzleme göre simetriği iseler, birinci düzlemin bütün noktaları ikinci düzlemin noktalariyle simetrik olurlar.

Bu özelik evvelki özeliği kullanarak kolayca elde edilir.

İspat : AB, BC, CA doğruları evvelki özelikten dolayı $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ doğrularına dönüşürler.

Birinci düzlemin keyfî bir M noktasından bir doğru çizip bunun AB, BC, CA doğrularından herhangi ikisini kestiği noktaları D ve E ile gösterelim. D ve E nin üçüncü düzleme göre simetrikleri olan D' ve E' simetrik noktaları, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ doğruları arasında, iki doğrunun resimleri olan doğrular üzerinde bulunur. Ohalde DE nin simetriği olan $D'E'$ doğrusu ikinci düzleme ait bulunur. Bu da M nin M' simetriğinin ikinci düzlemde bulunduğunu gösterir ve ispat sabit olur.

Hülâsa edersek şunu söyliyebiliriz : *Bir düzleme göre simetri, bir düzlemi bir düzleme dönüştürür.*

Düzlem haline benzer olarak şu ispatlanabilir : *Uzayın paralel düzlemlere göre ardışık iki simetrisi bir ötelemeye denktir. Bunun karşıtı da doğrudur.*

Şu özelik de ispatlanabilir : *Kesişen iki düzleme göre iki simetrinin toplamı, ekseni bu iki düzlemin arakesiti ve açısı bu iki düzlemin açısının iki katı olan ve yönü birinci düzlemden ikinci düzleme olan yön olan bir dönmeye eşittir.*

İki nokta arasındaki uzaklık, iki düzlem arasındaki açı, iki doğru arasındaki açı, bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı, hepsi düzleme göre simetri altında, birer *değişmezdir.*

Uzayda bütün düzlemlere göre simetrilerin cümlesinin grup teşkil etmiyeceği ve düzleme göre simetrinin bire-bir ve iki taraflı sürekli veya topolojik bir dönüşüm olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

$SABC$ dörtyüzlüsü ile bunun ABC düzlemine göre $S'ABC$ simetriğini düşünelim. Bu dörtyüzlülerin ters yönlü olduğunu bilmekteyiz. Bunların karşıt tepe noktalarını bir döndürme ile çakıştırmanın imkânı yoktur.

Bir şekil bir düzleme göre diğer bir şeklin simetriği ise bu şekillere bir düzleme göre simetriktir denir.

Bir düzleme göre simetrik olan şekiller genel olarak biribirine eşit değildir. Şekillerin eşitliği deyince, uzayın birinci neviden bir hareketiyle çakışabilen şekilleri kastediyoruz (evvelce incelenen helisel hareket gibi). Meselâ, sol el sağ elin simetriği olduğu halde biribirine eşit değildir.

41. Uzayan bir noktaya göre simetrileri

O noktası AA' doğru parçasının ortası olduğu takdirde A ve A' noktalarına O *noktasına göre simetrik* tir deriz. O noktasına A ve A' noktalarının *simetri merkezi* denir.

Uzayın her A noktasına, verilen O merkezine göre A' simetriği tekabül ettirilirse uzayın kendisine olan bu dönüşümüne *merkeze göre simetri* veya *merkezil simetri* adı verilir.

Merkezil simetrinin aşağıdaki özelikleri liseden bilinmektedir [17].

1. İki noktanın ancak bir simetri merkezi vardır.

2. Simetri merkezinin simetriği yine kendisidir.

3. Bir doğrunun iki noktası ikinci bir doğrunun iki noktasının bir merkeze göre simetriği ise, birinci doğrunun bütün noktaları diğer doğrunun noktalarının aynı merkeze göre simetriğidir.

a doğrusu, O simetri merkezinden geçmiyen bir doğru olsun. a doğrusiyle O noktasından bir düzlem geçirerek bu düzlemde a nın a' simetriğini çizelim. a' doğrusu a nın uzayın O merkezine göre de simetriği olur.

Hülâsa edersek şöyle deriz: Merkezil bir simetri bir doğruyu bir doğruya dönüştürür.

4. Bir düzlemle doğrusal olmıyan üç A, B, C noktası ikinci bir düzlemin üç A', B', C' noktasının bir merkeze göre simetriği iseler, birinci düzlemin bütün noktaları ikinci düzlemin noktalarının aynı merkeze göre simetriği olurlar.

İspatı, evvelki maddenin 5 özeliğinin ispatının bir tekrarı olup öğrenciye bırakılmıştır.

Bunu kısaca şöyle ifade ederiz: *Merkezil bir simetri bir düzlemi bir düzleme dönüştürür.*

Paralel iki düzlemin bir merkeze göre simetriklerinin paralel olduğunun ispatının yapılmasını okuyucuya tavsiye ederiz.

Düzlemdeki merkezil simetrinin aksine olarak, uzaydaki merkezil simetri uzayın basit bir dönmesine icra edilemez. Halbuki uzayın bir eksene göre simetrisi uzayın bir eksen etrafındaki 180° lik bir dönmesinden ibarettir.

Bir noktaya göre simetrik olan iki şekil genel olarak birbirine eşit değildir, diğer bir deyimle, biri, uzayın bir hareketi ile diğerine dönüştürülemez.

Meselâ, küresel bir üçgen genel olarak kürenin merkezine göre simetriği olan üçgene eşit değildir.

Küresel ABC üçgeninin kürenin merkezine göre küresel simetriği olan $A'B'C'$ üçgeninin; C'' noktası C nin AB dairesinin düzlemine göre simetriği veya, AB büyük dairesine göre küresel simetriği olduğuna göre; kürenin merkezine göre döndürülmesiyle ABC'' durumuna getirilebileceğinin ispatı öğrenciye tavsiye olunur.

Küre yüzeyini «tersine yatırmakla» kendisiyle çakıştırmak imkânsız olduğundan (bu, düzlemde yapılabilir) kürede simetrik şekillerle eşit şekiller arasında önemli fark olmuş bulunur.

Bütün noktalara göre uzay simetrilerinin cümlesinin bir gurup teşkil etmiyeceği kolayca sağlanabilir.

42. Düzlemde şekillerin simetrisi

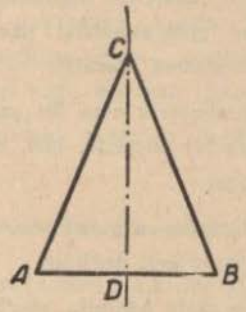
Düzlemde simetrik şekilleri ele alalım.

Bir eksene göre simetriği kendisiyle çakışan bir şekle *bir eksene göre simetrik* şekil denir.

Eksenel simetriği haiz düzlemsel şekillerden bir kaç misal alalım.

1. İkizkenar bir üçgen, aynı zamanda iç açıortayı ve kenarortay olan yüksekliğe göre simetriktir.

İspat: CD doğrusu tabanı AB olan ABC ikizkenar üçgenin yüksekliği olsun (Şekil 182).



Şek. 182

AB doğru parçası CD ye dik olduğundan ve $AD = BD$ eşitliğinden, B noktası A nın CD ye göre simetriği olur; C kendi kendisinin simetriğidir. Ohalde CD eksenine göre simetri, 0-boyutlu ABC üçgenini kendisine dönüştürür.

Ayrıca, AC doğrusu bu simetri ile BC doğrusuna, BC doğrusu AC ye dönüşür ve AB ise kendisine dönüşür. Ohalde CD ye göre simetri çizgisel ikizkenar ABC üçgenini kendisine çevirir.

Aynı şekilde, iki boyutlu ABC üçgeninin de CD ye göre simetride kendisine dönüşeceği ispatlanabilir.

2. Eşkenar bir üçgende üç simetri ekseni mevcuttur.

Bu iddia evvelkinin bir neticesidir.

Eşkenar bir üçgeni kendisine dönüştüren bütün simetrilerin, veya (uzayda veya düzlemdeki) bütün hareketlerin cümlesi bir gurup teşkil eder.

Bu gurup, üçgenin merkezi etrafındaki dönmelerinin üçüncü mertebeden olan siklik alt gurupu ile üç eksene göre simetrilerden ibarettir.

Altı elemandan ibaret olan bu gurupa *üçgenin gurupu* adı adı verilir (20).

3. Bir dikdörtgen karşılıklı kenarların ortalarını birleştiren doğrulara göre simetriktir.

İspatın yapılması bir temrin olarak tavsiye olunur. Okuyucu şunu da ispatlamalıdır:

4. Ekşenar dörtgen her köşegenine göre simetriktir.

Evvelki iki özeliğin bir neticesi olarak şu özeliği elde ederiz.

5. Kare, karşılıklı kenarların ortalarını birleştiren doğrularla köşegenlerine göre simetriktir. Ohalde karenin dört tane simetri ekseni vardır. Okuyucuya, karenin düzlemde bu dört eksenden başka simetri eksenini haiz olmadığının ispatını yapması tavsiye olunur.

Kareyi kendisine dönüştüren düzlemde veya uzaydaki bütün simetrilerin veya hareketlerin cümlesi aşağıdaki dönüşümlerden ibarettir: Kareyi kendisine dönüştüren, merkezi etrafındaki döndürmeler (bu döndürmeler, bildiğimiz gibi, karenin bütün simetrilerinin gurupunun 4 cü mertebeden siklik alt gurupudur; bu alt gurup da, birim dönmeyi içine alan dört dönmeden ibarettir), ve dört simetri ekseni etrafında döndürüp yatırma. Bu dönüşüm-

ler *karenin gurupu* adı verilen 8 ci mertebeden bir gurup teşkil ederler.

6. n kenarlı düzgün çokgenin n simetri ekseni vardır.

n sayısının çift olması halinde simetri eksenleri karşıt tepe noktalarını birleştiren $n/2$ doğru ile karşıt kenarların ortalarını birleştiren $n/2$ doğrudan ibarettir. n sayısının tek olması halinde ise simetri eksenleri, tepe noktalarını karşıt kenarların ortalarına birleştiren doğrular olur.

n kenarlı düzgün çokgenin bütün simetrilerinin cümlesini incelemeden evvel sık sık başvuracağımız aşağıdaki ihtarı kaydedelim.

İhtar: Bir şeklin simetrileri, diğer bir deyimle, şekli kendisiyle çakıştıran birinci ve ikinci neviden hareketler bir *gurup teşkil eder.*

İspat: Şekli kendisiyle çakıştıran iki hareketin toplamı bir hareket olup bu da şekli kendisine dönüştürür. Ohalde simetrilerde toplam işleminin kapalılık özeliği mevcuttur. Ayrıca, simetrilerin toplamı, genel olarak hareketlerde olduğu gibi, asosiyatiflik özeliğini haizdir. Şekillerin simetrilerinin sınıfında etkisiz eleman, veya şeklin her noktasını yerinde bırakan bir hareket vardır. Nihayet şeklin her simetrisinin bir ters simetrisi mevcuttur.

Kare ve eşkenar üçgenin simetrilerin gurupuna ait misalleri daha evvel görmüştük.

n kenarlı düzgün çokgenin simetrilerinin gurupunu daha etraflı olarak inceliyelim. Evvelâ şu özeliği ispatlıyalım :]

n kenarlı düzgün çokgenin merkeze göre n tane dönmesi, simetri eksenlerine göre n tane simetri veya eksenler etrafında döndürüp yatırma çokgeni kendisine götüren bütün yer değiştirmelerin

tamamını teşkil eder. n kenarlı çokgenin merkezi etrafındaki her dönme düzlemde birinci neviden bir harekettir. Düzlemin her «döndürüp yatırması» ikinci neviden bir harekettir.

İspat: Birinci neviden iki simetrinin toplamı birinci neviden, birinci neviden simetri ile ikinci neviden simetrinin toplamı ikinci neviden ve nihayet ikinci neviden iki simetri toplamı da birinci neviden bir simetridir.

Birinci neviden simetriler, bildiğimiz gibi, n kenarlı çokgenin, açıları

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n}, \cdots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

olan merkeze göre dönmelerinin bir siklik gurupunu teşkil eder.

Birinci neviden n tane simetri mevcut olup bunlar n kenarlı çokgenin bütün simetrilerinin bir alt gurupunu verir.

İkinci neviden keyfî bir simetriyi alıp bunun, n-kenarlı çokgenin simetri eksenlerinden birine göre evvelce bahsi geçen döndürüp yatırma ile çakışacağını ispatlıyalım.

Verilen ikinci neviden simetrinin icrasından sonra, n kenarlı çokgenin simetri eksenlerinden birine göre seçeceğimiz sabit bir döndürüp yatırmayı tatbik edelim.

Adı geçen iki simetrinin toplamı *birinci neviden* bir simetri veya, n-kenarlı çokgenin merkezi etrafında bir dönmedir.

Ohalde, ikinci neviden bir simetri, bunu takip eden sabit döndürüp yatırma ile birinci neviden bir simetri verir:

$$x_2 + a_2 = x_1$$

Burada x_2 ikinci neviden herhangi bir simetriyi, a_2 çokgenin sabit bir ekseni etrafında döndürüp yatırmayı ve x_1 — toplam — birinci nevide bir simetriyi göstermektedir.

Yukardaki eşitliği

$$x_2 = x_1 + (-a_2)$$

şeklinde yazarak ikinci neviden bir simetrinin, çokgenin merkeze göre bir x_1 dönmesi ile sabit bir eksene göre $(-a_2)$ döndürüp yatırmanın toplamına eşit olduğu anlaşılır.

n tane dönme simetrisi mevcut olduğundan ikinci neviden *n den fazla* simetri *yoktur*. Fakat ikinci neviden n simetrinin — simetri eksenleri etrafında döndürüp yatırma — mevcut olduğu bilindiğinden, bu n tane döndürüp yatırmanın ikinci neviden bütün simetrileri vereceği çıkmış ve ispat tamamlanmış olur.

Bu arada, n kenarlı düzgün bir çokgenin gösterilen bu simetri eksenlerinden başka simetri eksenini haiz olmadığı da elde edilmiş olur. Ayrıca, şu netice de bulunur: n-kenarlı düzgün bir çökgenin simetri gurupu iki elemandan meydana gelir: $2\pi/n$ açılı bir dönme ve bir döndürülüp-yatırma.

n kenarlı düzgün çokgenin simetrilerinin gurupunun mertebesi $2n$ dir.

7. Bir dairenin her çapı, dairenin bir simetri eksenidir.

8. Kesişen iki doğrunun iki simetri ekseni mevcuttur. Bu eksenler bu doğruların meydana getirdiği açıların biribirine dik açı ortaylardır.

9. Paralel iki doğrunun sonsuz sayıda simetri ekseni mevcuttur.

Burada, düzlemde şekillerin eksenel simetrilerinin incelenmesini kapatıyor ve *düzlemde şekillerin merkezil simetrisi* ne geçiyoruz.

Bir noktaya göre simetri vasıtasiyle kendisine dönüşen şekle bir noktaya göre simetrik şekil adı verilir.

Düzlemde merkezil simetri, simetri merkezine göre π açısı kadar dönmeye denk olduğundan bu döndürme, bir noktaya göre simetrik olan bir şekli kendisine dönüştürür.

Bir nokta etrafında π açısı kadar döndürme, biribirine dik eksenlere göre iki simetrinin toplamına eşit olduğundan, bu eksenlerden herbirine göre simetrik olan bir şekil, bu eksenlerin arakesiti olan noktaya göre simetrik bulunur.

Bunun karşıtı doğru değildir. Bir şekil bir noktaya göre simetrik olduğu halde simetri ekseni olmayabilir. Misal olarak, meselâ dikdörtgen ve eşkenar dörtgen olmayan paralelkenarı alabiliriz.

n-kenarlı düzgün çokgenin ancak π çiftken bir simetri merkezi vardır. Bir dairenin veya bir diskin merkezi kendi simetri merkezidir.

43 Uzayda şekillerin simetrileri

Bir π düzlemine göre uzay simetrisiyle kendisiye dönüşen şekle *π düzlemine göre simetrik şekil* adı verilir.

π düzlemine şeklin *simetri düzlemi* denir.

Bir O noktasına göre simetri ile kendisine dönüşen bir şekle *O noktasına göre simetrik şekil*, O noktasına da şeklin *simetri merkezi* denir.

Bir l eksenine göre simetri ile kendisine dönüşen bir şekle *l doğrusuna göre simetrik şekil*, l eksenine ise şeklin *simetri ekseni* denir. Bu eksen etrafında 180° lik bir döndürme verilen şekli kendisiyle çakıştırır,

Bu eksene aynı zamanda *ikinci mertebeden simetri ekseni* de denir. Zira, verilen şeklin bu eksen etrafındaki tam bir devrinde şekil kendisiyle iki defa çakışır.

Bir şeklin bir eksen etrafında tam bir devrinde bu şekil

kendisiyle birkaç kere çakışırsa, eksene *yüksek mertebeden simetri ekseni* denir. Bir eksenin mertebesi bu eksene göre simetrik olan bir şeklin bu eksen etrafında tam bir devrinde kendisiyle çakışma sayısıdır.

Yüksek mertebeden simetri ekseninin tarifinde şeklin hareketinden kinematik vasıf atılır ve hareketin sadece geometrik kavramı göz önünde tutulur.

Bu maksatla şu özeliğe işaret edelim: *Bir şeklin simetri ekseni etrafında dönmesi esnasında şekli kendisiyle çakıştıran hareketlerinin cümlesi bir gurup teşkil eder.* Bu gurupa *şeklin eksenel simetrisinin gurupu* adı verilir. Bu gurupun mertebesi simetri ekseninin de mertebesidir. Meselâ, n-kenarlı düzgün bir çokgenin merkezinden bu düzleme çizilen dikme n-kenarlı çokgenin n ci mertebeden bir simetri eksenidir.

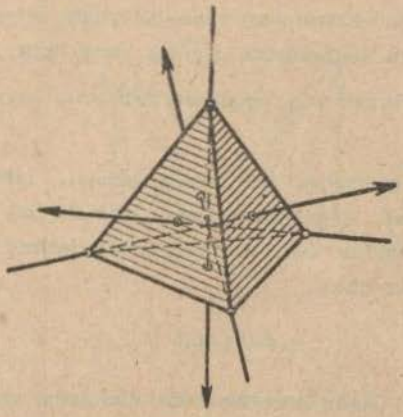
Düzgün dörtyüzlünün simetri eksenlerini inceliyelim. Dörtyüzlünün dışına bir küre çizilebilir ve kürenin merkezine *dörtyüzlünün merkezi* denir. Bir dörtyüzlünün merkezi tepe noktalarından eşit uzaklıktadır.

Dörtyüzlüyü kendisine götüren hareketlerde merkez yerinde kaldığından dörtyüzlünün bütün simetrileri bir nokta etrafındaki dönmelerden ibarettir. Bir nokta etrafındaki her dönmenin de bir eksen etrafındaki dönme olduğu bilinmektedir (33).

Ohalde dörtyüzlünün her simetrisi, merkezinden geçen bir eksene göre bir dönme olur. Bu eksen dörtyüzlünün bir simetri eksenidir.

Bunun neticesi, düzgün bir dörtyüzlünün simetri eksenlerinin tam sayısını bulmak kolaydır.

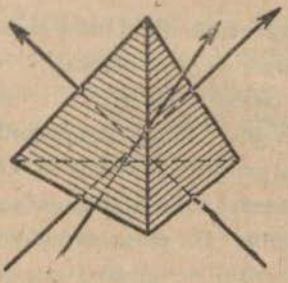
Herhangi tepe noktasından tabana bir dikme indirilir. Bu dikme 3 üncü mertebeden bir eksendir. Bunun gibi 3 üncü mertebeden olan ve herbiri bir tepe noktasından geçen dört tane simetri ekseni vardır (Şekil 183).



Şek. 183

Bu simetri eksenleri dörtyüzlünün karşıt yüzlerinin de simetri eksenleridir.

Ortak tepe noktaları olmayan kenarlara, karşıt kenarlar adı verilir. Karşıt kenarların orta noktalarını birleştirerek dörtyüzlünün 2 inci mertebeden üç simetri eksenini daha buluruz (Şekil 184).



Şek. 184

Dörtyüzlünün başka simetri ekseni yoktur, zira, simetri ek-

seni ya bir tepe noktasından veya bir yüzün ortasından veyahut bir kenarın orta noktasından geçmek zorundadır.

Şimdi dörtyüzlünün simetrilerinin tam sayısı kolayca hesaplanabilir.

3 üncü mertebeden her simetri ekseni, birim dönüşüm olmayan 2 simetri; 2 nci mertebeden her simetri ekseni ise 1 simetri verir. Ohalde dörtyüzlünün simetrilerinin tam sayısı, birim dönüşüm de dahil,

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12$$

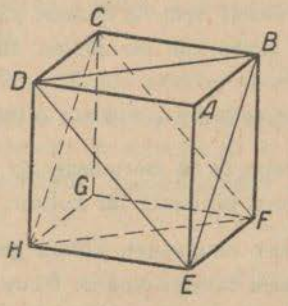
den ibarettir. Düzgün dörtyüzlünün simetrilerinin tam sayısının kenarların sayısının iki katı olduğuna işaret edebiliriz.

Dörtyüzlünün bütün simetrilerinin, veya aynı şey demek olan, yedi simetri ekseni etrafındaki dönmelerin cümlesi bir guruptur. Bu gurupa *dörtyüzlünün gurupu* denir. Bu gurupun sekiz tane has alt gurupu mevcuttur. Bunlardan yedisi dörtyüzlünün simetri eksenlerinin her birine göre olan dönmelere tekabül eden siklik alt guruplardır. Sekizinci has alt gurup ise 2 nci mertebeden olan üç simetri eksenine göre olan dönmeler ve birim dönmeden ibarettir.

Okuyucuya dörtyüzlünün bütün simetri düzlemlerini bulması bir temrin olarak tavsiye olunur.

Şimdi *kübün simetri eksenleri*'nin bulunmasına geçelim. Dörtyüzlüde olduğu gibi, bütün simetrilerde kübün merkezinin yer değiştirmediğini görürüz. Bundan da kübün bütün simetrilerinin, kübün merkezden geçen eksenlerine göre dönmelerinden ibaret olduğu anlaşılır. Bu eksenler kübün simetri eksenlerini teşkil eder.

Kübün tepe noktalardan geçen eksenlerinden başlıyalım. Her A tepe noktasından kübün AB, AD, AE farklı üç kenarı geçer (Şekil 185). Bu kenarların diğer uc noktaları, tepe noktası



Şek. 185

A olan düzgün bir piramidin eşkenar BDE üçgenini teşkil eder. A dan geçip BDE düzlemine dik olan doğru kübün bir simetri ekseni olur; zira, düzgün $ABDE$ piramidini kendisine döndüren yüksekliği etrafındaki dönmesi kübün de bir simetrisidir.

Kübde tepe noktalardan geçen farklı dört simetri ekseni vardır. Çünkü, meselâ kübün G tepe noktasından geçen simetri ekseni BDE düzlemine paralel olan CFH düzlemine dik bulunur ve birinci eksen gibi kübün merkezinden geçer. Ohalde karşıt tepe noktalarının her birinden geçen simetri eksenleri biribirinin aynı olur.

Aynı şekilde, karşıt yüzlere dik olan ve bunların merkezinden geçen üç simetri ekseni de elde edilebilir; bu eksenler 4 üncü mertebeden olan eksenlerdir. Ayrıca, kübün karşıt kenarlarının ortalarından geçen altı simetri ekseni mevcuttur ve bunlar 2 nci mertebeden olan eksenlerdir.

Ohalde *kübde onüç simetri ekseni vardır:* Dört köşegen, kübün karşıt yüzlerinin ortalarını birleştiren üç doğru ve kübün karşıt kenarlarının orta noktalarına birleştiren altı doğru.

Kübün bütün simetrileri *kübün gurupu* adı verilen bir grup teşkil eder. Bu gurupun elemanlarının sayısını hesaplıyalım.

Birim simetriden başka şu simetriler vardır: Bir tepe nok-

tasından geçen her eksen için üç dönme; karşıt kenarların ortalarından geçen her eksen için bir dönme. Birim simetri ile birlikte tam

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 = 24$$

simetri. Kübün gurupu 24 cü mertebedendir. Kübün simetrilerinin sayısı kenarlarının sayısının iki katıdır.

Bir temrin olarak okuyucuya kübün gurupunun bütün has alt guruplarını bulması tavsiye olunur. Okuyucu kübün bütün simetri düzlemlerini de bulmalıdır. Düzgün çokyüzlülerin herbirinde simetri gurupunun ve alt guruplarının bulunması da faydalı bir temrin olur [4], [17].

Bu bahsi, simetrik şekillerin, meşhur Rus kristalografi bilgini ve matematikçisi ve Akademi üyesi Y. S. Feodorov (1859-1919) tarafından verilen genel tarifiyle kapatıyoruz.

«Muhtelif durumlarda doğrudan doğruya kendisiyle çakışabilen veya bu olmazsa bu şekil yerine kendisinin aynadaki görüntüsü olan şekle *simetrik* bir şekil denir... şekli ilk durumuyla çakıştırmak için bir eksen etrafında belirli bir açı kadar döndürmeyi ve aynı zamanda ayna görüntüsüyle değiştirmeyi gerektiren simetri haline *kompleks simetri* diyorum ... en genel hareket helisel harekettir ... Ohalde genel olarak bir şekil muhtelif durumlarda doğrudan doğruya kendisiyle çakıştırılabilirse daima bu helisel simetri eksenini bulabiliriz.» [45]

Feodorov, sonlu şekillerde helisel hareketin parametresinin (34) sıfır olduğunu, ve ayrıca sonlu şekillerde simetri eksenlerinin çakıştığını göstermiştir. Sonsuz şekillerde ise helisel parametresi sıfırdan farklı helisel simetri ekseni ile kesişmiyen simetri eksenleri mevcut olabilmektedir.

Feodorov, *düzgün şekiller sistemi* kavramını ithal etmiştir. «Düzgün şekiller sistemi adı altında», her doğrultuda sonsuza uzanan ve simetri kaidelerine göre bileşen şekillerden iki tane-

si çakıştırıldığında bütün şekilleri çakışan sonlu şekillerden ibaret sisteme denir [45].

Feodorov, 230 tane düzgün şekiller sisteminin mevcut olduğunu ispatlamış, hepsini belirtmiş ve aynı zamanda kristallerin mümkün bünye problemini çözmüştür. E. S. Feodorov'un bulduğu neticeler ilmin en büyük başarılarından birini teşkil etmektedir.

BÖLÜM VII.

BENZERLİK

Bu bölümde düzlemin ve uzayın merkezil benzerlik (1) denilen dönüşümlerini inceliyeceğiz. Merkezil benzerlikle ilgili olarak benzerlik dönüşümlerinin genel gurupiyle değişmezliğini ele alacağız. Hareket olmıyan genel benzerliğin bir dönme ile merkezil bir benzerliğin toplamı olduğunu ifade eden bir teorem ispatlıyacağız. Benzer şekillerin tarifini verecek ve özeliklerini etüd edeceğiz.

Madde 48 de de çizim problemlerinin çözümünde benzerlik usulünü kullanacağız.

44. Düzlemin merkezil benzerlikleri

Düzlemin bir A' noktasına, aşağıdaki şartlar cari olduğu takdirde, O noktasına göre A noktasının merkezil benzeri denir:

1) A' noktası OA doğrusu üzerindedir.

2) Verilen $k \neq 0$ sayısı için $OA' = k \cdot OA$ dır.

3) $k > 0$ olduğunda O noktası AA' doğru parçasının dışında, $k < 0$ halinde ise O noktası AA' nün içindedir.

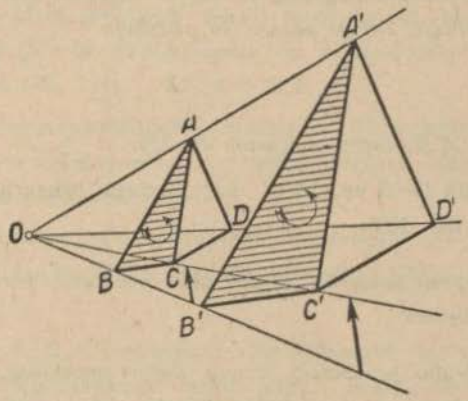
Bir düzlemin her A noktasını, O merkezine ve bütün noktalar için sabit olan k sayısına göre A' merkezil benzerliğine dönüştüren bir dönüşüme düzlemin bir merkezil benzerliği adı verilir.

O merkezine *benzerlik merkezi*, k sayısına ise *benzerlik katsayısı* denir.

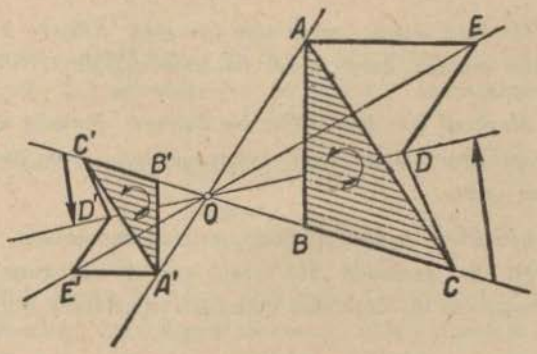
---

(1) Bu dönüşüme «homoteti» de denilmektedir.

$k > 0$ halinde merkezil benzerliğe *doğru-benzerlik* $k < 0$ halinde ise *ters benzerlik* denir. O benzerlik merkezine birinci halde *dış*, ikinci halde *iç* sıfatları verilir (Şekil 186, 187).



Şek. 186



Şek. 187

O benzerlik merkezi, merkezil benzerlikte kendisine dönüşen yegâne noktadır ($k \neq 1$ ise).

Merkezil benzerliğin tarifinden *bire-bir* olduğu anlaşılır.

Merkezil benzerliğin aşağıdaki özelikleri liseden bilinmektedir [17].

1. *O merkezinden geçen bir doğru üzerinde bulunmıyan bir AB doğru parçası, AB ye paralel ve uzunluğu*

$$A'B' = k.\,AB$$

ile belirli bir A'B' doğru parçasına dönüşür.

Bu eşitlik OAB ve $OA'B'$ üçgenlerinin benzerliğinden elde edilir (Şekil 186, 187).

2) *Merkezil benzerlik bir doğruyu, kendisine paralel olan bir doğruya dönüştürür.*

3) *Doğrular arasındaki açının değeri muhafaza olunur, diğer bir deyimle açı merkezil izdüşümün bir değişmezidir.*

Bu özelik evvelkinin bir neticesidir.

4) *Merkezil olarak benzer olan her şekil çiftinde karşıt doğru parçaları orantılı, karşıt açılar ise birbirine eşittir.*

5) *Merkezil bir benzerlikte bir daireye dönüşüp merkezi birinci dairenin merkezinin resmi, yarıçaplarının oranı ise benzerlik katsayısına eşittir.*

Bu özelikten faydalanılarak merkezil benzerliğin yalnız bire-bir değil aynı zamanda iki taraflı sürekli olduğunu diğer bir deyimle topolojik bir dönüşüm olduğunu ispatlamak güç değildir.

6) *Merkezil bir benzerlikle elde edilen bir şeklin alanının verilen şeklin alanına oranı benzerlik katsayısının karesine eşittir.*

Verilen şeklin alanı S, resminin alanı da S' ise $S' = k^2 S$ eşitliği caridir.

Merkezil benzerliğin aşağıdaki diğer özelikleri aşikârdır:

7) *Merkezil olarak benzer olan her hangi iki üçgenin yönleri aynıdır; merkezil olarak benzer iki şekilde karşıt açıların yönleri birdir* (Şekil 186, 187).

8) *Merkezil olarak benzer herhangi iki vektörün doğrubenzerlikteki* ($k > 0$) *yönleri aynı, ters benzerlikteki ise* ($k < 0$) *terstir* (Şekil 186, 187).

Evvelce incelediğimiz elemanter dönüşümlerdekinin aksine olarak, *iki nokta arasındaki uzaklık merkezil benzerlikte* ($k \neq 1$) *muhafaza edilememektedir.*

Doğru parçasının uzunluğu benzerliğin ($k \neq 1$) bir değişmezi olmadığı halde, doğru parçası olma sıfatı değişmez özelik bulunmaktadır.

Üç A, B, C noktasının bir değişmezi mevcut olup bu, bu üç noktadan herhangi birinin diğer ikisine olan uzaklıklarının oranıdır :

$$\frac{AB}{AC} \text{ bir değişmezdir.}$$

İspat : Dönüşüm, A, B, C noktalarını $A'B' = k.AB$ ve $B'C' = k \cdot BC$ eşitlikleriyle A', B', C' noktalarına götürmektedir.

Oranın değişmezliği ise bu eşitliklerden elde edilir :

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}.$$

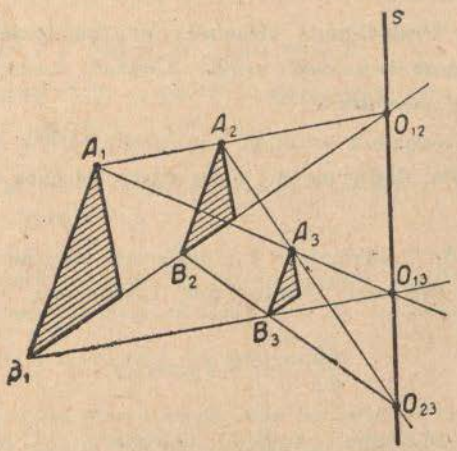
Özel olarak üç nokta doğrusalsa noktalardan birinin diğer ikisiyle sınırlı olan doğru parçasını bölme oranının değişmezliği mevcut olur.

Merkezil benzerlikte bir şeklin biçimi değişmez kaldığı halde şeklin boyutları ($k \neq 1$) değişmektedir.

Bu bahsi bitirirken *üç benzerlik merkeziyle ilgili teoremi* ispatlıyalım.

İkişer ikişer benzer olan üç şeklin benzerlik merkezleri bir doğru üzerinde bulunur.

O_{12}, O_{23}, O_{31} noktaları, numaraları indis olarak belirtilen şekillerin benzerlik merkezleri olsun (Şekil 188). $O_{23}O_{12}$ doğrusuna s diyerek s doğrusunun O_{12} noktasından geçtiğini göstereceğiz.



Şek. 188

S doğrusunu 1 şekline ait kabul edelim. s doğrusu O_{13} den geçtiğinden, merkez bu nokta olan ve 1 şeklini 3 şekline götüren benzerlikte s doğrusu kendisine dönüşür.

Şimdi s doğrusu 3 şekline ait olsun. Merkezi O_{23} olan ve 3 şeklini 2 şekline götüren benzerlik s doğrusunu yine kendisine dönüştürür. Bundan, 2 şekline ait olduğu kabul edilen s doğrusunun 1 şekline ait olan aynı s doğrusuna dönüşeceği çıkar. O halde merkezi O_{12} olan ve 1 şeklini 2 şekline götüren benzerlik s doğrusunu kendisine götürmüş olur. Bu ise ancak s doğrusu O_{12} merkezinden geçtiğinde olabilir ve ispat sabit olur (1).

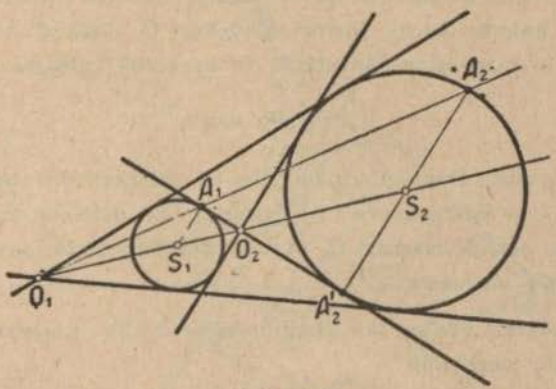
(1) Merkezi O_{ij} olan olan ve i şeklini j şekline $(i, j = 1, 2, 3)$

45. Dairelerin benzerliği

Eşit olmayan ve eşmerkezli bulunmayan herhangi iki daire merkezil benzer olarak düşünülebilir ve bu dört türlü mümkündür. Diğer bir deyimle düzlemde bir daireyi bir diğerine dönüştüren dört benzerlik merkezi vardır.

Merkezil bir benzerlik bulmak için merkezinin ve benzerlik katsayısının belirtilmesi gerekir; bunun için de biribirine tekabül eden paralel, doğru veya ters yönlü iki doğru parçasının uçlarını bulmak kâfidir.

Yarıçapları R_1 ve R_2 olan ve eşit olmayan iki dairenin merkezleri S_1 ve S_2 olsun (Şekil 189).



Şek. 189

götüren benzerliği S_{ij} ile gösterirsek, ispatta, S_{12} düzlemin herhangi P noktasını P' noktasına ve S_{22} ise P' yü P'' ye götürdüğü takdirde S_{12} nin P yi P'' ye götüreceği kabul edilmiştir. Bu, teoremin hipotezinde verilmiş olarak da kabul edilebilir. Böyle olmakla beraber hipotezi, P noktası 1 şekline ait olduğu takdirde S_{12} nin P yi P'' ye götüreceği şeklinde almak da mümkündür. Bunun düzlemdeki her P noktası için doğruluğu ise, iki merkezil benzerliğin toplamının ya bir öteleme veya merkezil bir benzerlik olduğunu ifade eden teoremden çıkar (46 nın sonu).

Birinci daireyi ikinci daireye dönüştürecek dönüşümlerin benzerlik katsayısı

$$k = R_2/R_1$$

olmalıdır.

Aranılan benzerliklerin merkezlerini bulmak için ikinci dairenin bir $A_2A'_2$ çapını alır ve birinci dairenin buna paralel olan S_1A_1 yarıçapını çizeriz. A_1 ve A_2 noktalarına aranılan benzerliğin karşıt noktaları olarak bakarsak, benzerliğin O_1 merkezi olarak A_1A_2 ve S_1S_2 doğrularının kesişme noktasını elde ederiz. A_1 ve A'_2 karşıt noktalar olarak alındığında ise benzerlik merkezi O_2 olur.

Bu suretle dairelerden birini diğerine çeviren dört merkezil benzerlik bulmuş oluruz. Birinci dönüşüm O_1 merkezli olup (S_1) dairesini (S_2) dairesine dönüştürür ve benzerlik katsayısı

$$k_1 = R_2/R_1 \text{ den}$$

ibaret bulunur. İkinci dönüşüm yine O_1 merkezlidir; benzerlik katsayısı $k_2 = R_1/R_2$ dir ve (S_2) dairesini (S_1) dairesine dönüştürür. Aynı şekilde merkezi O_2 olan ve daireleri birbirine çeviren iki dönüşüm mevcuttur.

O_1 noktası verilen iki direnin *dış* benzerlik merkezi O_2 ise *iç* benzerlik merkezidir.

Dairelerin O_1 ve O_2 merkezlerinin çakışması halinde, birbirinin tersi olan ve bu dairelerden birini diğerine dönüştüren merkezil iki benzerliğin bir tane ve ortak olan merkezi bu iki dairenin merkeziyle çakışır; benzerliğin katsayıları da

$$k_1 = R_2/R_1, \quad k_2 = R_1/R_2$$

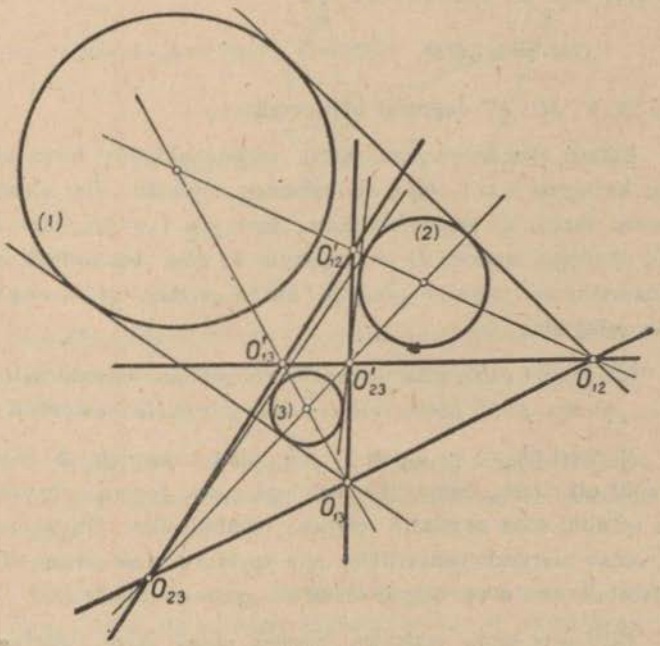
den ibarettir.

Merkezil berzerlik dönüşümünün bire-bir özeliğinden, iki dairenin dış benzerlik merkezinden dairelerin birine çizilen teğetle-

rin diğer daireye de teğet olacağı elde edilir. İç merkez dairelerin hiçbirinin içinde bulunmadığı takdirde aynı özelik iç merkez için de caridir (Şekil 189).

Üç benzerlik merkezine ait 46 da ifade edilen teoremden üç dairenin *altı benzerlik merkezine ait teoremi* söylüyebiliriz.

Herhangi ikisi eşit olmıyan üç dairenin merkezleri doğrusal değilse, ikişer ikişer alınan bu dairelerin altı benzerlik merkezi üçer üçer dört doğru üzerinde bulunur (Şekil 190). İspatı bir temrin olarak okuyucuya bırakılmıştır.



Şek. 190

Şekilde altı benzerlik merkezi uygun indisli harflerle gösterilmiştir: O_{12}, O_{13}, O_{23}, O'_{12}, O'_{13}, O'_{23}.

Herbirinde üç dairenin üç benzerlik merkezi bulunan dört doğruya *üç dairenin benzerlik eksenleri* denir.

46. Eş merkezli benzerlik dönüşümlerinin gurupu

Düzlemin ortak O noktalı bütün merkezil benzerliklerinin cümlesi bir gurup teşkil eder.

İspat: Merkezleri ortak O noktası ve katsayıları k_1 ve k_2 olan böyle iki dönüşümün toplamı aynı merkezli ve katsayısı $k = k_1 k_2$ olan bir benzerliktir, zira

$$OM' = k_1 \cdot OM, \quad OM'' = k_2 \cdot OM' = k_2 \cdot k_1 \cdot OM$$

olup O, M, M', M'' doğrusal bulunmaktadır.

Etkisiz elemanın varlık şartı sağlanmaktadır; birim dönüşüm, katsayısı $k = 1$ olan dönüşümden ibarettir. Her elemanın tersinin varlığı da sağlanmaktadır. Katsayısı $k_2 = 1/k_1$ olan merkezil dönüşüm merkezi O ve katsayısı k_1 olan benzerliğin tersi bulunmaktadır. Ohalde gurupun bütün şartları sağlanmış olup iddia sabit olur.

Merkezleri ortak olan benzerliklerin gurupu, çarpım işlemine göre, sıfırdan farklı bütün reel sayıların gurupiyle izomorftur.

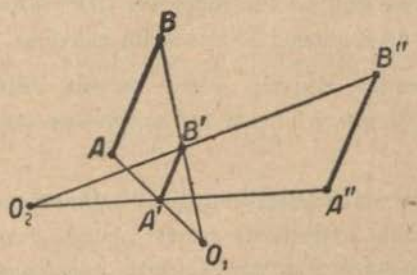
Merkezi O ve katsayısı $k \neq 0$ olan benzerliğe k sayısını tekabül ettirirsek, benzerliklerin toplamına, toplanan benzerliklere tekabül eden sayıların çarpımı tekabül eder. Bu izomorfizma, ortak merkezli benzerlikler için toplam yerine çarpım dilinin kullanılmasının daha uygun olduğunu göstermektedir (20).

Düzlemde bütün noktalar merkez olmak üzere, düzlemdeki mümkün bütün merkezil benzerlik dönüşümlerinin cümlesi bir gurup teşkil etmez. Bunun böyle olduğunu görmek için bu cümleye ait iki dönüşümün toplamının merkezil dönüşüm olmadığını göstermek üzere tek bir misal bulmak kâfidir, zira, bu takdirde topla-

mın kapalı olmadığı gösterilmiş olur. Hakikaten, bu cümleden iki merkezil benzerlik bulup toplamın öteleme olduğunu ve dolayısiyle merkezil benzerlik olmadığını göstermek kolaydır.

Düzlemde A ve B noktalarını karşıt olarak A'' ve B'' noktalarına götüren keyfî bir öteleme alalım.

Şekil 191 de gösterildiği gibi, A ve B noktalarını A', B' noktalarına dönüştüren bir benzerliğin merkezi olarak O_1 noktasını seçelim. Bu taktirde $A'A''$ ve $B'B''$ doğrularının arakesiti



Şek. 191

olan O_2 noktası, A' ve B' noktalarını A'' ve B'' noktalarına dönüştüren ikinci bir benzerliğin merkezi olur ve aranılan benzerlik bulunmuş olur.

Teorem : *Katsayıları k_1 ve k_2 olan iki benzerliğin toplamı $k_1 k_2 = 1$ halinde bir öteleme, diğer hallerde bir benzerlik dönüşümüdür.*

İspat : S_1 ve S_2, katsayıları k_1 ve k_2 olan benzerlikler ve $S_3 = S_1 + S_2$ de bunların toplamı olsun. A, B herhangi iki nokta, A', B' bunların S_1 deki resimleri, A'', B'' ise A', B' nün S_2 deki resimleri olsun. Bu takdirde AB, $A'B'$ doğru parçaları birbirine paralel olur ve $A''B'' = k_1 k_2 AB$ yi sağlar. $k_1 k_2 = 1$ halinde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$ ve dolayısiyle $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$ olduğundan S_3 bir öte-

leme olur. $k_1k_2 \neq 1$ halinde ise AA'' ve BB'' bir O noktasında kesişirler. O noktasının S_3 dönüşümünde sabit kaldığını göstereceğiz. O'' noktası O noktasının resmi ise $O''A''$ doğru parçası OA ya paralel olur ve A'' noktası OA üzerinde bulunduğundan O'' de bulunur. Bunun gibi O'' noktası OB üzerinde de bulunur. Ohalde $O = O''$ dür. Şimdi O dan geçen herhangi bir doğrunun S_3 ile kendisine dönüştüğünü gösterelim. P herhangi bir nokta, P'' de resmi olsun. Bu takdirde OP doğru parçasının resmi OP ye paralel olan ve O dan geçen OP'' olur. Ohalde P'' noktası O ve P noktalariyle doğrusaldır ve ayrıca $OP'' = k_1k_2\ OP$ mevcuttur. Bu da S_3 ün merkezil bir benzerlik olduğunu gösterir.

Gurup işlemini, toplama yerine çarpma dilinde kullanacak olursak merkezil benzerliklerin toplamı yerine çarpımından bahs edilir.

Okuyucuya, düzlemde incelemiş olduğumuz merkezil benzerlik dönüşümlerinin özeliklerine benzer olarak, uzaydaki merkezil benzerlik dönüşümlerinin özeliklerinin incelenmesi bir temrin olarak tavsiye olunur.

47. Düzlemde şekillerin benzerliğinin genel hali

Aşağıdaki şartları haiz olmak üzere düzlemin kendisine olan bire-bir dönüşümünü ele alalım: (*i*) A ve B nin resimleri A' ve B' dür. (*ii*) düzlemdeki bütün A, B çifti için

$$\frac{A'B'}{AB} = k = \text{sabit}$$

tir.

k sayısına *benzerlik katsayısı*, tasvirin kendisine de bir *benzerlik dönüşümü* veya sadece bir *benzerlik* denir.

Böyle dönüşümlerin varlığını misallerden anlıyabiliriz. Düzlemdeki herhangi hareket bir benzerliktir: $k = 1$. Herhangi bir

merkezil benzerlik ($k>0$ halinde) yine bir benzerliktir. Birim dönüşüm de bir benzerliktir.

Benzerlik özeliklerinden bir kaçını zikredelim.

1. *Bir benzerlikte bir doğru bir doğruya dönüşür*, diğer bir deyimle, doğrusal noktalar yine doğrusal olan noktalara dönüşür.

Bunu ispatlamak için AB üzerinde bir C noktası alıp resimlerine $A'B'$ ve C' diyelim. Benzerliğin tarifinden

$$A'C' : AC = C'B' : CB = A'B' : AB$$

yazar ve

$$(A'C' + C'B') : (AC + CB) = A'B' : AB$$

ile

$$AC + CB = AB$$

den

$$A'C' + C'B' = A'B'$$

elde ederiz.

Bu son eşitlik ise C' noktası ancak $A'B'$ üzerinde bulunduğunda doğru olacağından ispat sabit olur.

Bundan şu neticeyi elde ederiz.

2. *Bir benzerlikte doğru parçası doğru parçasına, bir doğru bir doğruya, bir yarım-düzlem bir yarım-düzleme ve bir açı bir açıya dönüşür.*

3. *İki doğru arasındaki açı benzerliğin bir değişmezidir.*

Bu, benzerlikte herhangi bir ABC üçgeninin kendisine benzer bir $A'B'C'$ üçgenine dönüşmesinin bir neticesidir, zira benzer dönüşümün tarifinden

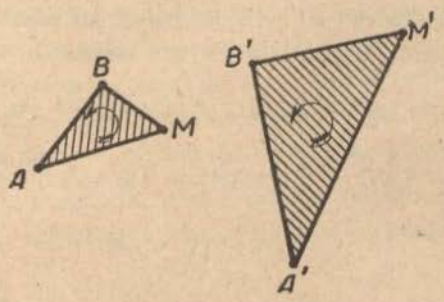
$$A'B' : B'C' : C'A' = AB : BC : CA$$

yazmak mümkündür.

Aşağıdaki özelik benzerliklerin çizimiyle ilgilidir.

4. *Bir benzerlik iki çift karşıt nokta ve herhangi bir üçgenin resminin yönü ile tamamen belirlidir* (1).

A' ve B' noktaları A ve B noktalarının resimleri olsun (Şekil 192).



Şek. 192

Benzerlik katsayısı

$$k = \frac{A'B'}{AB}$$

bağıntısiyle belirlidir.

Keyfî bir M noktasının resmini, M noktası AB üzerinde olmadığı takdirde ABM üçgenine benzer olan $A'B'M'$ üçgeninin M' tepe noktası olarak çizelim. AMB ve $A'M'B'$ üçgenleri aynı yönlü oldukları takdirde ise *ayna benzerliği* elde edilir.

$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM} = k$$

bağıntısı, M nin AB üzerinde olmaması halinde, M noktasının M' resminin nasıl çizileceğini göstermektedir.

---

(1) İlerisi için benzerliğin daima şu özeliğini kullanacağız: Düzlemde bir benzerlik ya *bütün* üçgenlerin yönünü muhafaza eder veya *bütün* üçgenlerin yönünü değiştirir.

Bir benzerlikte karşıt noktaların çizimi bu suretle elde edilmiş olur. Çizimden, benzerliğin, karşıt iki nokta çiftiyle ve yönün (doğru veya ters) verilmesiyle bir türlü olarak belirlendiği de anlaşılmış olur. Ayrıca bir benzerlikte herhangi iki çift karşıt noktanın, yön muhafaza edildildiği takdirde, bu dönüşümü tamamiyle belirliyeceği açıktır.

Birisi diğerine benzerlikle dönüşen, düzleme ait iki şekil benzerdirler.

Bir benzerlikte birbirine tekabül eden noktalara karşıt noktalar deriz.

Benzer iki şeklin karşıt doğru parçalarına, doğrularına, vs. *benzer doğru parçaları*, *benzer doğrular*, vs. denir.

5. *Hareket veya merkezil benzerlik olmıyan her doğru-benzerlik, düzlemin bir O noktası etrafında bir dönmesi ve merkezi bu nokta olan merkezil bir benzerliğin toplamına eşittir.*

Böyle bir halde O noktasının dönüşümde sabit bir nokta veya resmi ile çakışan bir nokta olduğuna işaret edelim. Sabit noktayı ve aynı zamanda toplamları verilen dönüşüme eşit olan dönme ile merkezil benzerliği bulmaya yarayan çizim usulünü gösterelim.

O noktasının,

$$A \to A' \quad \text{ve} \quad B \to B'$$

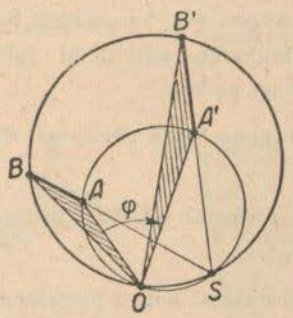
karşıt nokta çiftleriyle belirli benzerliğin istenilen sabit noktası olduğunu farzedelim (Şekil 193).

Kabulümüze göre verilen benzerlik bir hareket ve merkezil bir benzerlik olmadığından $A'B' \neq AB$ mevcuttur ve $A'B'$ doğru parçası AB ye paralel değildir.

S noktası, $A'B'$ ve AB doğrularının arakesiti olsun. $OA'B'$ üçgeni OAB üçgenine benzer bir üçgen olduğundan

$$< OAS = < OA'S$$

eşitliği elde edilir. Bu da O, S, A' ve A noktalarının bir daire



Şek. 193

üzerinde olduğunu gösterir. Bunun gibi O, S, B ve B' noktaları da bir daire üzerindedir.

Ohalde O sabit noktası, S, A ve A' noktalarından geçen daire ile S, B ve B' noktalarından geçen dairenin arakesitine ait olur. Verilen benzerlik ise merkezi O ve açısı $\Phi = < AOA'$ olan dönme ile merkezi O ve katsayısı $k = A'B'/AB$ olan merkezil benzerliğin toplamından ibarettir.

Sabit O noktasiyle arakesit S noktasının çakışması halinin incelenmesini bir temrin olarak bırakıyoruz. Böyle bir çakışmayı önlemek için, meselâ B, B' den farklı başka karşıt nokta çifti almak kâfidir. Teorem bu suretle ispatlanmış olur.

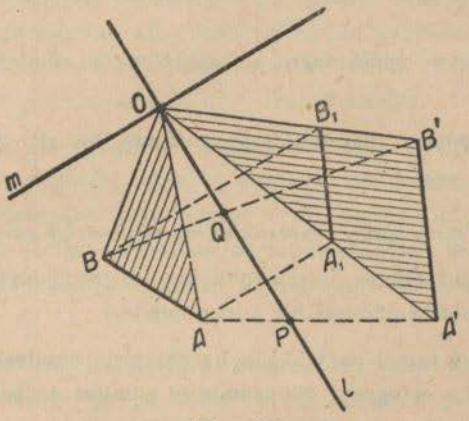
Aynı zamanda şu özeliği de elde etmiş bulunuyoruz (1):

(1) Yazar, varlığını kabul ederek, O noktasını bulmak için bir usul vermiştir. Şimdi okuyucu bu noktanın varlığına ait ispatı görecektir. S, A, A' ve S, B, B' noktalariyle belirli daireler ikinci bir O noktasında kesiştikleri takdirde OAA' ve OBB' üçgenlerinde karşıt açıların eşitliği ile yönlerin aynı olduğu kolayca görülebilir. Ohalde O noktası kendi resmiyle çakışmış olur. Eğer S, A, A' ve S, B, B' nok-

Düzlemin bir öteleme olmıyan her doğru-benzerliğinde tek bir O çifte noktası vardır.

6) *İkinci neviden bir hareket olmıyan her ters-benzerlik dönüşümü, bir O merkezli merkezil bir benzerlikle, bu noktadan geçen bir doğruya göre olan bir simetrinin toplamına eşittir.*

İstenen benzerliğin merkezi O olsun (Şekil 194). OA' doğrusu OA nın ve OA' de OB nin simetriği olması gerektiğinden



Şek. 194

l simetri ekseni AOA' ve BOB' üçgenlerinde O açısının açı ortayı olmalı ve dolayısıyla AA' ve BB' doğru parçalarını

$$\frac{A'P}{PA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=k;\quad \frac{B'Q}{QB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=k$$

oranında bölen P ve Q noktalarından geçmelidir.

---

talariyle belirli daireler yalnız S noktasında kesişecek olursa

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}$$

olduğu ve bundan da S nin kendi resmiyle çakışacağı elde edilir. Ohalde bütün hallerde, bir doğru-benzerlikte, sabit bir nokta mevcut olmuş olur.

AB nin l eksenine göre $A_1\ B_1$ simetriğini alarak, O merkezini, l ekseniyle A_1A' doğrusunun arakesiti olarak bulmuş oluruz.

l ve A_1A' doğrularının paralel olma halinin incelenmesini bir temrin olarak tavsiye ederiz (¹).

Özelik 6 dan, düzlemin hareket olmıyan her ters-benzerliğinde, bir O çifte noktası ile, biribirine dik ve O noktasından geçen iki l ve m çifte doğrusunun varlığı elde edilmiş olur (Şekil 194).

7. *Düzlemin bütün doğru benzerliklerinin cümlesi bir gurup teşkil eder.*

İkinci neviden hareketler bu gurupun bir alt gurupundan ibarettir.

8. *Düzlemin bütün benzerliklerinin cümlesi bir guruptur.*

Doğru-benzerlikler bu gurupun bir alt gurupunu teşkil eder. Ters-benzerliklerin cümlesi bir gurup değildir.

Birinci ve ikinci nevi bütün hareketlerin cümlesi, diğer bir deyimle, bütün ortogonal dönüşümlerin cümlesi de benzerlik dönüşümlerinin gurupunun bir alt gurupudur.

Bu son iddiaların ispatının etraflı olarak yapılmasını bir temrin olarak tavsiye ediyoruz.

Benzerlik gurupu, değişmezleri — ve alt guruplarının değişmezleri — elemanter geometride etüd edilen gurupun kendisinden ibarettir. Özel olarak, benzerlik dönüşümünde iki noktanın değişmezi bulunmadığına işaret edelim. A, B, ve C gibi üç noktanın değişmezi mevcuttur. Bu değişmez, bu noktalardan birinin

(¹) Burada yazar sabit nokta ile simetri ekseninin varlığını kabul ederek sadece bunları bulmak için usul vermektedir. Okuyucu bu usulle bulunan O noktasının sabit nokta ve l doğrusunun bir simetri ekseni olduğunu ispat etmelidir.

diğer ikisine olan uzaklıklarının *oran*ından ibarettir : $AB/AC =$ sabit, *bir değişmez* dir.

Üç nokta doğrusal ise, bu üç noktanın değişmezi noktalardan birinin ikisiyle sınırlı olan doğru parçasını bölme oranıdır.

Düzlemde ele alınan halde olduğu gibi, uzayın kendisine olan benzerlik dönüşümlerinin özelikleri de kolaylıkla elde edilebilir.

Bu bahsi bitirirken benzerlikler gurupunun daha geniş afin dönüşümlerin gurupunun alt gurupu olduğunu kaydedelim. Ortogonal dönüşümler ve benzerlikler *afin* dir. Madde 19 da ele alınan büzülme ve genişlemeler de afin dönüşümlerdir.

Uzayın afin dönüşümünün genel tarifi şudur: Doğrusal her üç noktayı yine doğrusal olan üç noktaya dönüştüren uzayın bire-bir bir dönüşümüne afin dönüşüm adı verilir. Böyle dönüşümlerin varlığı verilen misallerden bilinmektedir. Bu tariften hareketle afin dönüşümlerin bütün özeliklerini elde etmek mümkündür.

Uzayın afin dönüşümlerinin cümlesinin, *afin dönüşümler gurupu* adı verilen bir gurup teşkil ettiği kolayca görülebilir. Dönüşümlerin bu gurupunun değişmezlerini ve gurupun özeliklerinin incelenmesi *afin geometri* nin konusunu teşkil eder [21].

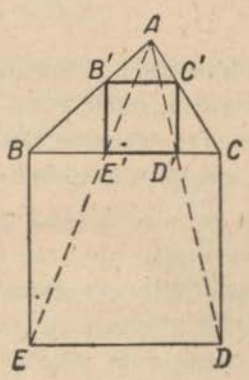
Bu geometride açı kavramı, uzunluk kavramı, paralel olmıyan doğru parçalarının oranı, alan kavramı mevcut değildir, zira, bu değerler dönüşümlerin afin gurupunun değişmezleri olmamaktadır. Paralel doğru parçalarının oranı ile alanların oranı bir değişmezdir. Afin geometrinin etüdü bu kitabın çerçevesine girmez.

48. Çizim problemlerinin çözümünde benzerlik usulü

Benzerlik usulü, diğer elemanter dönüşümlerle ilgili usuller gibi, birçok çizim probleminin çözümünde faydalı olmaktadır. Meselâ, bulunması istenilen şekle benzer olan bir şekli veya şeklin bir kısmını çizmek ekseriya daha kolaydır. Bu bilhassa problemin şartlarından bir kısmı aranılan şeklin biçimini, diğer kısmı ise boyutunu verdiği zaman caridir. Şartın ikinci kısmını bir tarafa bırakırsak aranılan şekle benzer bir şekil çizeriz. Tatbikatta benzer şekillerin çizimi merkezil olarak benziyen şekillerin çizimine irca edilir (44 ve 47).

Problem. *Bir üçgen içine bir kare çizmek.*

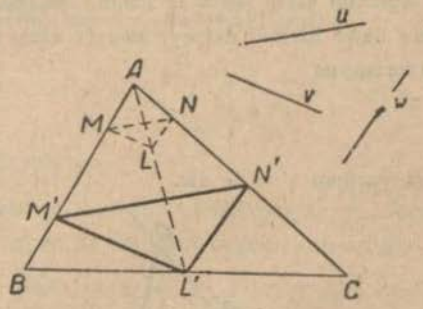
BC kenarı üzerine, ve BC ye göre A ile aynı tarafta olmamak üzere $BCDE$ karesini çizelim (Şekil 195).



Şek. 195

Aranılan $B'C'D'E'$ karesi, benzerlik merkezi A noktası olmak üzere, $BCDA$ ile merkezil olarak benzerdir. Bundan da aranılan karenin çizimi elde edilir.

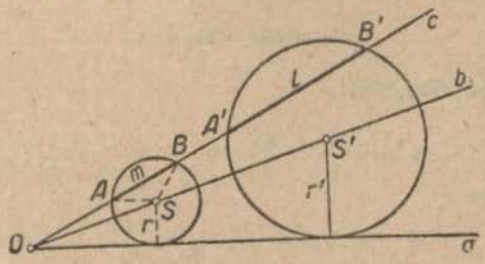
Problem. *Verilen bir ABC üçgeni içine; kenarları, verilen u, v, w doğrularına paralel olan ikinci bir üçgen çizmek* (Şekil 196).



Şek. 196

u doğrusuna paralel olmak ve üçgenin AB, AC kenarlarını M ve N noktalarında kesmek üzere keyfî bir MN doğrusu ile M ve N noktalarından v ve w doğrularına ML, NL paralellerini çizelim. AL doğrusunun BC kenarını kestiği noktayı L' ile gösterirsek aranılan $M'L'N'$ üçgeni, A noktası merkezil simetri merkezi olmak üzere, MLN üçgenine benzer olur.

Problem. *Bir O noktasında kesişen a, b, c gibi üç doğru verildiğine göre, a doğrusuna teğet, merkezi b doğrusunda olan ve c doğrusu üzerindeki kiriş parçası l uzunluğuna eşit olan bir daire çizmek* (Şekil 197).

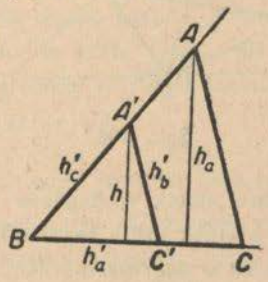


Şek. 197

b doğrusu üzerindeki keyfî bir S noktası merkez olarak a doğrusuna teğet r yarıçaplı daireyi çizelim. Bu dairenin c doğrusu üzerinde ayırdığı kiriş $AB = m$ olsun. Merkezi S', yarıçapı r' olan aranılan daire birinci daireye benzer olup benzerlik merkezi O dan ve katsayısı

$$k = \frac{l}{m}$$

den ibarettir ve yarıçap $r' = kr$ dir.



Şek. 198

Problem. *Yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan üçgeni çizmek.*

Evvelâ, bir üçgende yüksekliklerin kenarlarla ters orantılı olduğuna işaret edelim:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Bunun ispatı, üçgenin alanının iki katını veren

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S$$

ifadelerinden elde edilir:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Aynı şekilde

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

de doğrudur.

Bu göz önünde tutularak, kenarları, aranılan üçgenin yükseklikleri olan üçgeni çizelim: Şimdi ispatladığımız eşitliklerden çizimini yaptığımız üçgenin yüksekliklerine ait

$$h_a' : h_b' : h'_c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = a : b : c$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bu ise, aranılan üçgenin, kenarları h_a, h_b, h_c olan üçgenin yüksekliklerini kenar kabul eden üçgene benzediğini ifade eder.

Bundan da aranılan üçgenin çizimini elde ederiz. Kenarları h_a, h_b, h_c olan üçgeni çizer ve h_a', h_b', h_c' yüksekliklerini buluruz. Kenarları bu yükseklikler olan $A'B'C'$ üçgenini çizerek, şekil 198 de gösterildiği gibi, B merkezli benzerlikle büyültürüz. Çizim aynı zamanda çözümün varlık şartını da vermiş olmaktadır.

$$h_a + h_b > h_c$$

Müstakil çalışma için gereken başka misal ve temel problemleri evvelce bahsettiğimiz I. I. Aleksandrov'un kitabında bulmak mümkündür.

BÖLÜM VIII

EVİRTİM

Bölüm VIII. de düzlem ve uzayın evirtimlerini etüd edeceğiz. Madde 51 de evirtimlerin geometrik problemlerin çözümünde tatbikatı ele alınacak ve bununla ilgili olarak cetvel ve pergelle çözülebilen bütün problemlerin yalnız serbest pergel kullanarak çizilip çizilememesi sorusu cevaplandırılmış olacaktır. Örnek olarak, IV. kısımda etüd edilecek olan Lobachevskii geometrisinin tefsirinde esas önemi olan problemler seçilecektir.

Şekillerin evirtim dönüşümlerinde değişmez özeliklerinden Lobachevskii geometrisinde en büyük önemi olanları üzerinde durulacaktır.

49. Düzlemde evirtim

Merkezi O ve yarıçapı R olan bir daire alalım.

M' noktasına; aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde M nin verilen daireye göre *evrik* i (evriği) denir:

1) O, M ve M' noktaları O dan geçen bir ışın üzerinde bulunur.

2) $OM' \cdot OM = R^2$ caridir.

M' nün evriği de M noktası olduğundan M ve M' noktalarına verilen daireye göre birbirinin evriği denir.

Düzlemde her M noktasına M' evriğini tekabül ettiren dönüşüme *düzlemin verilen birdaireye göre evriği* veya sadece *evirtim* denir.

Verilen daireye *evirtim dairesi;* merkezine *evirtim merkezi* veya *evirtim kutpu;* yarıçapına, *evirtim yarıçapı;* ve yarıçapın karesine ise *evirtimin kuvveti denir.*

Evirtimle birbirine tekabül eden iki şekle *evrik şekiller* adı verilir.

Evirtim kutpunun evriği olmadığından *evirtim, düzlemin kendisine bire-bir bir dönüşümü değildir.*

Kürenin kendisine stereografik izdüşümle tasvirinde böyle bir durumla karşılaşmıştık (17).

Bundan sonra kutup noktasında delinmiş, diğer bir deyimle, O noktası atılmış olan düzlemle meşgul olacağız.

Bir evirtim, kutup noktasında delinmiş düzlemin kendisine olan bire-bir bir tasviridir.

Negatif kuvvetli $(-R^2)$ *bir evirtim* de düşünülebilir. Kuvveti $-R^2$ olan evirtim deyince kuvveti R^2 olan evirtimle evirtim kutpuna göre simetrinin toplamını anlıyoruz.

Evirtimin O merkezinden geçen bir eksen üzerindeki yönlü doğru parçalarına pozitif ve negatif işaretler vererek, negatif kuvvetli bir evirtimdeki evrik M, M' noktaları için

$$OM' \cdot OM = -R^2$$

denklemi yazılabilir.

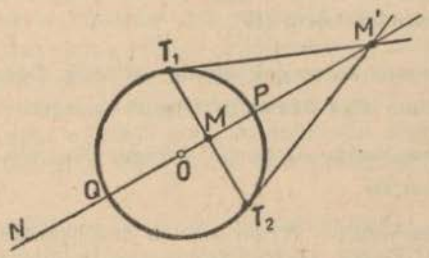
Negatif kuvvetli bir evirtimde noktaları çifte noktalardan ibaret olan daire mevcut değildir. Evirtim dairesi değişmez olmakla beraber noktaları ilk yerlerini muhafaza etmez. Bundan sonra, aksi söylenmedikçe, biz daima pozitif kuvvetli evirtimlerden bahsedeceğiz.

Evirtimin elde edeceğimiz her özeliğine negatif kuvvetli evirtimde buna tekabül eden özeliğinin ifade edilip ispatlanmasını okuyucuya bir temrin olarak tavsiye ederiz.

Evirtim dairesiyle merkezi verildiğinde herhangi bir M noktasının M' evriğinin çizimini bulmak için usuller vereceğiz.

1. Aşağıdaki çizim, hareket noktasını evrik noktaların tarifinden almıştır:

a) M noktası evirtim dairesinin içinde alınmış olsun. M den OM ışınına bir dik çizerek evirtim dairesinin T_1T_2 kirişini elde edelim (Şekil 199) ve bu kirişin uc noktasından daireye T_1M' ve



Şek. 199

T_2M' teğetlerini çizelim. Bu teğetlerin M' kesişme noktası M nin M' evriğinden ibarettir.

M noktası O kutpuna yaklaştıkça M' de uzaklaşmış olur; M noktası O ile çakıştığında çapın uclarındaki teğetler paralel olup kesişmezler. M noktası evirtim dairesine yaklaştıkça M' evriği de ayni daireye yaklaşmış olur.

Çemberin her P noktası (Şekil 199), $OP \cdot OP' = R^2$ eşitliğinden dolayı, düzlemin evirtiminde sabit kalır.

b) M noktası evirtim dairesinin dışında alınmış olsun. M' nün evriği M olduğundan ters sırada icra edilen aynı çizim aranılan noktayı vermiş olur.

Verilen M' noktasından (Şekil 199) evritim dairesine $M'T_1$, $M'T_2$ teğetleri çizilir ve T_1 ile T_2 değme noktaları birleştirilerek

elde olunan T_1T_2 kirişinin orta noktası aranılan M noktası olur.

Evrik noktalara ait ikinci çizimi vermeden aşağıdaki teoremleri ispatlıyalım :

α) *A, A' ve B, B' evrik nokta çiftleri ise ve O, A ve B doğrusal değilse, (evirtim merkezi O olduğuna göre) OAB ve $OB'A'$ ters benzer iki üçgendir.*

Evrik noktaların tarifinden O, A, A' ve O, B, B' noktaları

$$OA' \cdot OA = R^2 ; \quad OB' \cdot OB = R^2$$

eşitliklerini sağlamak üzere, birer ışın üzerinde bulunurlar. O noktasında ortak açıları olan OAB ve $O'AB'$ üçgenlerinden

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB}{OA}$$

elde edilerek ispat sabit olur.

Karşıt teorem de doğru olup sağlaması güçlük arzetmez :

β) *O noktasındaki açıları ortak olan OAB ve $OB'A'$ üçgenleri ters benzer iseler, A, A' ve B, B' nokta çiftleri O merkezli bir evirtimde evrik nokta çiftleri olur.*

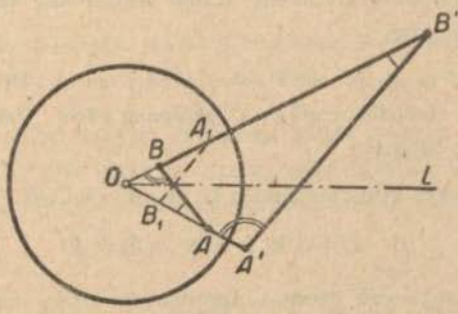
Evvelkilerden, *$AA'B'B$ dörtgeninin dışına bir daire çizilebileceği* de çıkar.

2) Evirtimin O kutpu ve evrik A, A' nokta çifti verildiğinbir B noktasının B' evriğinin çizimi şöyle elde olunur :

OB ışınını çizerek, üzerinde OA doğru parçasına eşit OA_1 doğru parçasını (Şekil 200), OA üzerinde ise OB ye eşit OB_1 doğru parçasını alalım ve A' noktasından B_1A_1 doğrusuna $A'B'$ doğrusunu çizelim. Aranılan nokta $A'B'$ ile OB nin B' arakesit noktası olur.

Çizim, demin ispatlamış olduğumuz özeliklere dayanmaktadır. Bu çizim, ters bir benzerliğin l eksenine göre bir simetri ile

merkezi O olan bir benzerlik toplamına eşit olmasından başka bir şey değildir (Şekil 200).

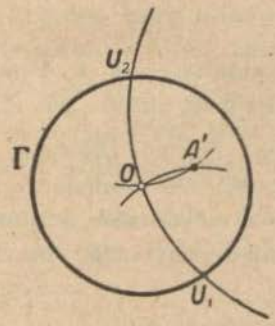


ek. 200

3) *Evrik noktanın yalnız pergel kullanarak çizilmesi.*

Cetvel ve serbest pergelle yapılabilen her çizimin yalnız pergelle yapılabileceğini (11) den bilmekteyiz. Bu teorem, yalnız pergel kullanmakla sıra ile beş temel çizimi (10) icra ederek elde edilmişti. Bununla beraber temel çizimlere icra etmeksizin, aranılan çizimi doğrudan doğruya pergelle bulmak mümkündür.

A noktasının, O merkezine ve Γ evirtim dairesine göre A' evriğini bulmak istiyelim (Şekil 201). A merkez ve AO yarıçaplı daireyi çizip bu dairenin Γ dairesini kestiği noktalara U_1, U_2



Şek. 201

diyelim. (Şekil 201 de A noktası — U_1OU_2 dairesinin merkezi — gösterilmemiştir.

Merkezleri U_1 ve U_2 ve yarıçapları $U_1O = U_2O$ olan iki daire yayını çizelim. Bu yayların O dan farklı arakesit noktası A nın A' evriğinden ibarettir.)

İspat: A ve A' noktaları OA ışını üzerinde bulunup ikizkenar OAU_1 ve OU_1A' üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{OA'}{OU_1} = \frac{OU_1}{OA} \text{ veya } \frac{OA'}{R} = \frac{R}{OA}$$

veyahut

$$OA' \cdot OA = R^2$$

elde edilir ve isbat sabit olur.

Bu çizim evirtim dairesinin dışında alınan A noktaları için daima tatbik edilebilir. A noktası dairenin içinde ise, A da OA yarıçapı ile çizilen daire

$$AO \geq \frac{1}{2} R$$

olduğu takdirde evirtim dairesini kesebilir.

Bundan da yukardaki çizimin genel olmadığı anlaşılır. Sadece pergel kullanarak A noktasının evriğini verecek genel çizimi bulmasını okuyucuya tavsiye ederiz.

Evirtimin bazı özeliklerini inceliyelim.

1. *Evirtim merkezinden geçen bir doğru evirtimle kendisine dönüşür.*

Bu, evrik noktaların tarifindeki ilk şartın bir neticesidir.

Şekil 199 da OP yarıçapı üzerindeki M noktalarının PM' ışını üzerindeki M' noktalarına dönüşmesine mukabil OQ yarıçapı üzerindeki noktalar QN ışını üzerindeki noktalara dönüşmektedirler. O noktasının evriği yoktur.

Bir evirtim, simetri gibi, bir OP ışını civarını P noktası etrafında (evirtim dairesinin P noktasındaki teğeti etrafında) döndürmüş olur. Bu esnada PO yarıçapının uzunluğu sonsuz uzar halbuki sonsuz PM' ışını PO yarıçapına kadar küçülür.

Simetri, düzlemin bir simetri ekseni etrafında yarım devri demektir; evirtimde simetri ekseni rolünü evirtim dairesi oynamaktadır.

Evirtim dairesinin yarıçapı «büyük» ise dairenin «civar» ında evirtim dairesi «yaklaşık olarak» bir simetriye denk olur.

2. *Merkezi evirtim kutpunda olan bir daire eş merkezli bir daireye dönüşür.*

M ve M' evrik noktalar olduğuna göre, yarıçapı OM olan daire, evirtimin tarifinden, yarıçapı OM' olan daireye dönüşür.

Evirtim dairesiyle eşmerkezli olan ve evirtim dairesinin içinde bulunan bir daire evirtim dairesinin dışında olan bir daireye dönüşür. Bunun karşıtı da doğrudur. Bu iç dairenin yarıçapı ne kadar küçükse resminin yarıçapı kadar büyük olur. Bir evirtim, evirtim dairesinin içindeki bütün noktaları düzlemde dış noktalara ve dış bölgenin hepsini içeriye götürür. Evirtim dairesi de değişmez kalır.

3. *Evirtim dairesine dik olan bir daire kendisine dönüşür.*

Evirtim dairesini P ve Q noktalarında dik olarak kesen bir daire alalım. OP ve OQ yarıçapları P ve Q noktalarında bu daireye teğet olur (Şekil 202).

Dik daireyi A ve A', B ve B', C ve C', $\cdots$ noktalarında kesen OAA', OBB', OCC', $\cdots$ ışınlarını çizelim.

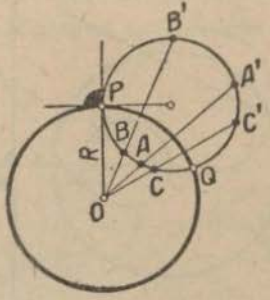
Kesen parçalarının çarpımlariyle ilgili teoremden

$$OA' \cdot OA = OB \cdot OB = OC' \cdot OC = \cdots = OP^2 = R^2$$

yazarız. Bu eşitlikler dik dairenin evirtimle kendisine dönüştüğünü, diğer bir deyimle, dış $PA'Q$ yayı iç PAQ yayına dönüşen değişmez daire olduğunu gösterir.

Burada simetri ile bir benzerlik görmekteyiz.

Bunun karşıt teoremi de doğrudur:



Şek. 202

4) *Evirtim dairesinden farklı olup evirtimle kendisine dönüşen bir daire evirtim dairesini dik olarak keser.*

5. *Evirtim kutpundan geçen bir daire bir doğruya dönüşür.*

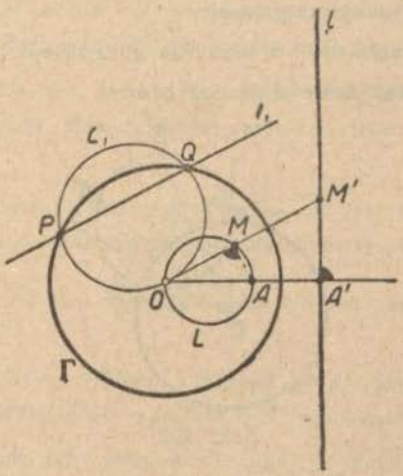
L, Evirtim dairesinin O merkezinden geçen bir daire olsun (Şekil 203). L dairesinin OA yarıçapını çizip çapın A ucunun A' evriğini elde edelim.

A' den geçip OA ışınına dik olan l doğrusu L dairesinin evriğinden ibarettir. İspat: O dan geçen bir OMM' ışını L dairesiyle l doğrusunu karşıt olarak M, M' noktalarında kessin. O noktasında ortak açıları olan dik OMA ve $OA'M'$ üçgenleri ters benzer olduğundan A, A' ve M, M' noktaları O merkezli bir evirtimde evrik nokta çiftleri olurlar. Bu evritimin yarıçapını bulalım. Adı geçen üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OM'}{OA'}\ ,\ \text{veya}\ OM'\cdot OM=OA'\cdot OA=R^2$$

elde edilir.

Ohalde L dairesini l doğrusuna çeviren evirtim, verilen evirtimin aynı olur ve ispat sabit bulunur.



Şek. 203

Evirtimin karşıtlık özeliğinden şunu elde ederiz:

6. *Evirtim merkezinden geçmiyen bir l doğrusu evirtimle, O merkezinden geçen bir daireye dönüşür.*

Bir doğrunun veya kutuptan geçen bir dairenin, bu doğru veya daire evirtim dairesini kestiği takdirde (Şekil 203), resimlerini çizmek özellikle kolay bir iştir, zira, bu halde verilen P ve Q gibi iki çifte noktası bilinmektedir.

α ve β yardımcı teoremlerinden aşağıdaki özeliği elde ederiz:

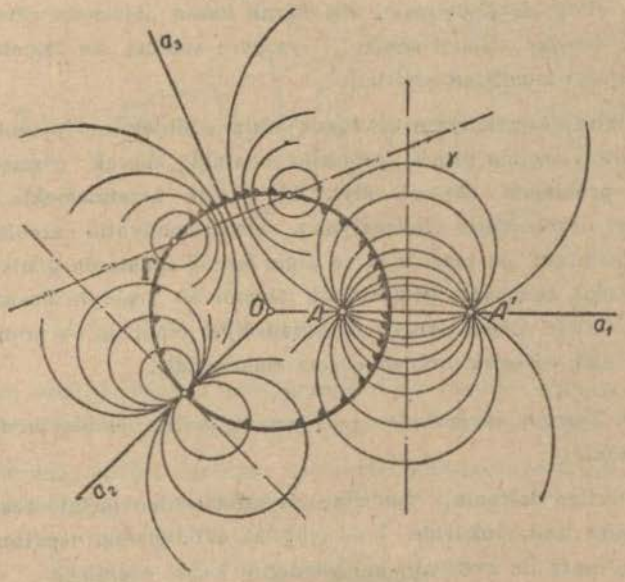
7. *Evrik A, A′ noktalarından geçen bir daire kendisine dönüşür ve dolayısiyle Γ evirtim dairesini dik olarak keser* (Şekil 204).

OAA' doğrusu, evrik A, A' noktasından geçen bütün dairelerin kuvvet eksenidir (Şekil 204). Ortak bir kuvvet eksenini haiz olan dairelerin cümlesine *daire demeti* denir.

Adı geçen demete ait her daire evirtimle kendisine dönüşür ve Γ evirtim dairesini dik olarak keser. Demetin bütün daireleri için

$$OA' \cdot OA = R^2$$

caridir ve bu, O evirtim merkezinden demetin bütün dairelerine çizilen teğetlerin uzunluğunun eşit olduğunu ve değme noktala-



Şek. 204

rının geometrik yerinin, AA' doğrusu ile kesişme noktaları hariç evirtim dairesinden ibaret bulunduğunu ifade eder.

Kuvvet ekseninin tarifini göz önünde tutarak şunu ifade edebiliriz :

8. *Bir daire demeti ile, kuvvet ekseni üzerinde (demete ait dairelerin dışında) bir P noktası verilmiş olsun . Bu takdirde mer-*

kezi P olan, ve demete ait her dairenin dik bulunduğu ve dolayısiyle evirtimde değişmez olan bir evirtim dairesi mevcuttur.

Kuvvet ekseni a_1 olan daire demetine (Şekil 204) *eliptik* a_2 olana *parabolik* ve a_3 olana *hiperbolik* demet denir.

Eliptik daire demetinin dairelerinin *iki* ortak noktası, parabolik olanlarınkilerin de hiç ortak noktası yoktur.

Verilen bir Γ dairesini dik olarak kesen dairelerin cümlesine *dik daireler demeti* denir. Γ ya göre evirtim bu demete ait her daireyi kendisine çevirir.

Daire geometrisinin etüdünde takip edilecek en iyi yol uygun sırada seçilen birçok problemi müstakil olarak çözmektir. Hiçbir problemin çözümü büyük bir güçlük arzetmemekte olup bu nevi problemlerin koleksiyonu, elektromanyetik alanlarda, aerodinamikte, ısı teorisinde ve diğer birçok sahalarda geniş tatbikatı olan elemanter geometrinin önemli bir kısmiyle hususiyet peyda ettirir. Ehemmiyetsiz olmıyan diğer cihet de bu problemlerden elde edilecek problem-çözme maharetidir.

9. *Evirtim merkezinden geçmiyen bir daire evirtimle bir daireye dönüşür.*

Verilen dairenin, kendisine ait noktalardan birinin resmini haiz olma hali, yukarıda 7 de mütalâa edildiğinden ispatımızda verilen daire ile evriğinin kesişmediğini kabul edebiliriz.

AB verilen dairenin, O kutpundan geçen çapı ve A', B' noktalarının resimleri olsun (Şekil 205). M' noktası, verilen daireye ait keyfî bir M noktasının resmi ise OAM ve $OM'A'$ üçgenleri OBM ve $OB'M'$ üçgenleri gibi ters benzer olduklarından

$$< OAM = < OM'A' = \alpha, \quad < OBM = < OM'B' = \beta$$

elde edilir.

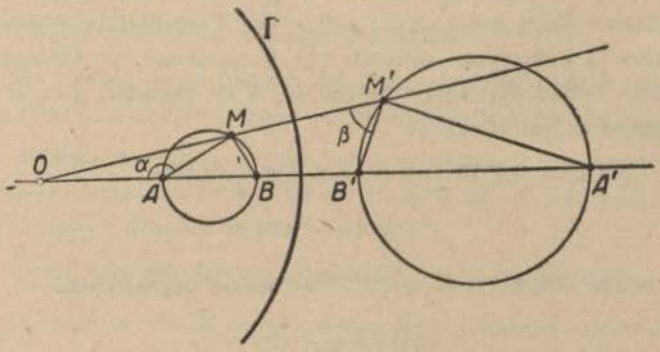
Diğer taraftan

$$< OAM - < OB'M' = \alpha - \beta = < AMB = \frac{\pi}{2}$$

olmakla

$$< A'M'B' = < OM'A' - < OM'B' = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

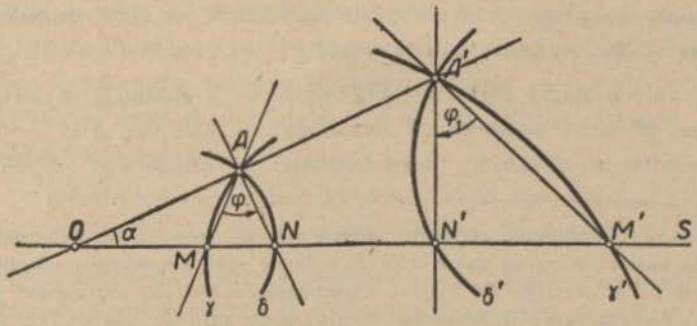
bulunur. M' noktası $A'B'$ doğru parçasını dik açı altında gördü-



Şek. 205

ğünden, verilen dairenen noktalarının evriği olan M' noktalarının geometrik yeri bir daire olmuş olur ve ispat sabit bulunur.

Burada, *verilen dairenin merkezinin resminin evrik dairenin merkezi olmadığını* tebarüz ettiriyoruz.



Şek. 206

İspat edilen bu özelik bize şunu ifade ettirir: *Bütün doğru ve dairelerden ibaret cümle bir evirtimle kendisine dönüşür.*

10. (Evirtimde açıların değişmezliği). *Kesişen iki eğri arasındaki açının değeri evirtimle değişmez.*

A noktasında kesişen γ ve δ eğrileri bir evirtimle γ' ve δ' eğrilerine dönüşsünler (Şekil 206). γ' ve δ' eğrilerinin A' kesişme noktası A noktasının resmidir. O noktasından bir OS doğrusu çizerek bunun dört eğriyi kestiği M, N ile resimleri olan M', N' noktalarını işaretliyelim (1).

OMA ve $OA'M'$ ters benzer üçgenlerinden

$$< OMA = < OA'M'$$

ve bunun gibi ONA ve $OA'N'$ ters benzer üçgenlerinden

$$< ONA = < OA'N'$$

ve bunlardan da

$$< MAN = < OMA - < ONA =$$

$$< OA'M' - < OA'N' = < M'A'N'$$

elde ederiz. Bu ise γ ve δ eğrilerinin AM ve AN kesenleri arasındaki ϕ açısının γ' ve δ' eğrilerinin $A'M'$ ve $A'N'$ kesenleri arasındaki ϕ_1 açısına eşitliği demektir.

$\alpha \to 0$ olarak limite geçildiğinde M ve N noktaları A noktasına, M' ve N' noktaları A' noktasına, ve AM, AN, $A'M'$, $A'N'$ kesenleri ise eğrilerinin *teğet* durumlarına gitmiş olur. Ohalde

---

(1) OS doğrusu eğrilerden birini, meselâ, γ yı birden fazla noktada keserse A ya en yakın olan M kesişme noktasını alırız (γ üzerinde A ile M arasında OS üzerine düşen başka nokta yok anlamında). γ' eğrisi γ nın resmi olduğundan M nin resmi olan M' noktası OS ile γ' nün A' ye en yakın arakesit noktası olur.

$$\lim_{\alpha \to 0} \Phi = \lim_{\alpha \to 0} \Phi_1 .$$

Bu ise γ ve δ eğrilerinin kesişme açısının γ' ve δ' eğrilerinin kesişme açısına eşit olduğunu ifade eder, zira, iki eğri arasındaki açı bunların kesişme noktalarındaki teğetler arasındaki açı olarak tarif edilmiştir. İspat bu suretle bitirilmiş olur.

Ohalde evirtim *konform* bir dönüşümdür.

Şu hususa işaret edelim: *Bir evirtim açıların değerini muhafaza ederse de yönlerini değiştirir* (Simetri ile tam benzerlik).

Açıların muhafaza edilmesinden şu neticeyi elde ederiz: *A noktasında teğet olan iki eğri bir evirtimle A nın A' resminde teğet olan iki eğriye dönüşür.*

İlerisi için çok faydalı olacak olan iki özelik vereceğiz.

A. *Evirtim dairesi olarak verilen bir Γ dairesine dik olan bir γ dairesi alacak olursak* (Şekil 204), *bu evirtim kapalı Γ diskini kendi üzerine tasvir eder.*

Bu tasvirde Γ diskinin γ dairesi dışına (içine) düşen kısmı γ nın içindeki (dışındaki) kısma tasvir olunur.

Γ diski, tasvir sonunda γ dairesinin Γ içine düşen yayı etrafında döndürülüp yatırılmış gibidir ve simetri ile büyük benzerlik mevcuttur. Simetri ise dik (ortogonal) bir «yay»a göre evirtimin limit halinden başka birşey değildir. γ dairesinin yarıçapı, Γ dairesiyle diklik baki kalmak şartiyle sonsuz olarak büyütülürse, yay Γ dairesinin çapı olur ve evirtim bildiğimiz simetriye yaklaşmış olur.

İkinci teoreme geçelim. Evirtimde keyfî iki noktanın değişmezi mevcut değildir. Bunun gibi üç noktanın da değişmezi yoktur.

Halbuki dört noktanın evirtimde bir değişmezi mevcut bulunmaktadır. Dört A, B, C, D noktasının değişmezini anlatmak için şu *tarifi* ithal ediyoruz:

Düzlemin *dört* A, B, C, D *noktasının bu sıraya göre çifte oranın* dan oranların

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

oranını anlıyoruz.

Dört noktanın çifte oranını $(ABCD)$ sembolü ile gösteriyoruz. Ohalde

$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}.$$

B. $(ABCD)$ *çifte oranı bir evirtimde* A, B, C, D *noktalarının bir değişmezidir.*

İspat : OAC ve $OC'A'$ ters benzerliğinden

$$(1) \qquad \frac{A'C'}{AC} = \frac{OC'}{OA} = \frac{OC' \cdot OC}{OA \cdot OC} = \frac{R^2}{OA \cdot OC}$$

yazabiliriz. Burada, A' ve C' ler A ve C nin evrikleri R ve O ise evirtimin yarıçapı ve merkezi bulunmaktadır.

Aynı suretle

$$(2) \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{R^2}{OB \cdot OC}$$

$$(3) \qquad \frac{A'D'}{AD} = \frac{R^2}{OA \cdot OD}$$

$$(4) \qquad \frac{B'D'}{BD} = \frac{R^2}{OB \cdot OD}$$

yazabiliriz.

Bu dört eşitlikten ise

$$\frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

veya $(A'B'C'D') = (ABCD)$ elde edilir. Bu da dört noktanın çifte oranının evirtimle değişmediğini göstermektedir.

İhtarlar: 1. Çifte oranını tarif ettiğimiz dört noktanın doğrusal olması şart değildir. Bu noktalar evirtim merkezi hariç olmak üzere düzlemin herhangi noktaları olabilirler.

2. Evirtim doğru parçalarını doğru parçalarına tasvir etmez. $(A'B'C'D')$ deki doğru parçaları $(ABCD)$ deki doğru parçalarının resimleri değildir.

50. Uzayda evirtim

Uzaydaki M ve M' noktalarına, aşağıdaki şartlar cari olduğunda, yarıçapı ve merkezi R ve O olan daireye göre evrik noktalar denir.

1) M ve M' noktaları O kutpundan geçen bir ışın üzerindedir.

2) $OM' \cdot OM = R^2$ caridir.

Uzayın kendisine tasvirinde, (O kutpu hariç) her M noktasına M' evriği tekabül ettirilen dönüşüme bir *evirtim* denir.

Merkezi O ve yarıçapı R olan küreyüzeyinin bütün noktaları kendilerine dönüşürler, diğer bir deyimle, evirtimin *çifte noktaları* dırlar. Çifte noktalardan ibaret olan bu küre yüzeyine *evirtim küresi* adı verilir.

Bu tariften, evirtim merkezinden geçen ve bu O noktasında delinmiş olan her düzlem, uzay evirtiminde kendisine dönüşür. Ayrıca, düzlemin kendisine olan bu tasviri, düzlemde O merkezli ve R yarıçaplı bir evirtim olur.

Bu ihtar ve düzlemdeki evirtimin özeliklerinden şu özelikler elde edilir.

1) O evirtim merkezinden geçen bütün doğrular (O kutpu hariç) kendilerine dönüşürler.

2) Merkezi O evirtim merkezinde olan bir küre eşmerkezli bir küreye dönüşür,

3) Evirtim küresini dik olarak kesen bir küre kendisine dönüşür.

3*) Evirtim küresini dik olarak kesen bir daire kendisine dönüşür.

4) Evirtim küresinden farklı olan ve evirtimde kendisine dönüşen bir küre evirtim küresini dik olarak keser.

4*) Evirtim küresine ait olmıyan ve evirtimde kendisine dönüşen bir daire evirtim dairesini dik olarak keser.

5) Evirtim merkezinden geçen bir küre bir düzleme dönüşür.

Özel olarak, böyle bir küre bir P noktasında evirtim küresine teğet ise, kürenin resmi olan π düzlemi de aynı P noktasında evirtim küresine teğet olur.

Stereografik izdüşüm kürenin bir evirtim dönüşümüyle π düzlemine tasvirinden başka bir şey değildir (Şekil 117, 118, 122, 124). S noktası evirtim merkezi yerine geçmekte ve SP evirtim yarıçapı olmaktadır.

Okuyucu, bir temrin olarak, stereografik izdüşümün madde 17 de ele alınan özeliklerini evirtimin özeliklerinden elde etmelidir.

5*) Evirtim merkezinden geçen bir daire bir doğruya dönüşür.

6) Evirtim merkezinden geçmiyen bir düzlem evirtim merkezinden geçen bir küreye dönüşür.

6*) Evirtim merkezinden geçmiyen bir doğru evirtim merkezinden geçen bir daireye dönüşür.

7) Evrik iki noktadan geçen bir küre kendisine dönüşür ve dolayısiyle evirtim dairesini dik olarak keser.

8) Uzayda evirtim; yüzeyler, eğriler ve yüzeylerle eğriler arasındaki açıları muhafaza eder.

Bu bahsi kapatırken ileride faydalı olacak olan önemli bir özeliği kaydedelim.

Verilen bir Γ küresine dik olan bir γ küresini evirtim küresi olarak alırsak, bu evirtim kapalı küre cismini kendisine çevirir.

Uzay evirtimine ait yukarıda sıralanan özeliklerin etraflı basit ispatlarının yapılması temrin olarak bırakılmıştır.

51. Evirtimlerin geometrik çizimlere tatbiki

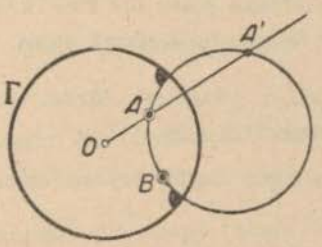
Evirtim dönüşümleri çizim problemlerinin çözümlerine ve ispatlarına muvaffakiyetle tatbik edilebilir.

Evirtim usulünü misallere tatbik ederek incelemiş olacağız. Bu misaller kısmen ilerideki faydası göz önünde tutularak seçilmiştir.

Problem: *Verilen bir Γ dairesi içinde alınan A ve B noktalarından geçmek ve verilen daireye dik olmak üzere bir daire çizmek.*

Aranılan daire Γ dairesine göre olan evirtimde değişmez kaldığından çizim derhal elde edilir. Γ yı evirtim dairesi seçmek suretiyle A nın A' evriğini alırsak ABA' üçgeninin çevrel dairesi aranılan daire olmuş olur (Şekil 207).

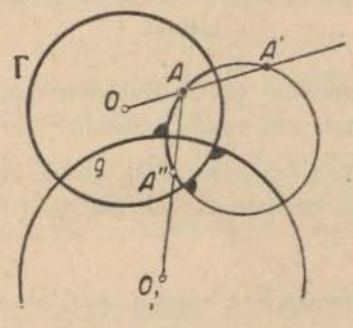
Verilen A ve B noktaları Γ nın O merkeziyle doğrusalsa, aranılan daire bir doğrudan ibaret olur. Problemin bir çözümü vardır.



Şek. 207

Problem : *Verilen bir A noktasından geçmek üzere, birbirine dik olarak verilen iki daireye, dik olan bir daire çizmek.* (A noktası verilen dairelerden birinin dışında bulunmaktadır.)

Şekil 208 deki Γ ve g daireleri verilen daireler olsun. Aranılan daire, evirtim daireleri Γ ve g olan iki evirtimde değişmez



Şekil 208

kalacağından çözümü hemen elde ederiz. Γ yı evirtim dairesi alarak A nın A' evriğini, g yı evirtim dairesi alarak A nın A'' evriğini buluruz.

$AA'A''$ üçgenin çevrel dairesi aranılan daireden ibaret olur.

A, A' A'' noktaları doğrusal olabilir. Bu takdirde verilen dairelerin merkezler doğrusu aranılan dairenin yerine geçmiş olur.

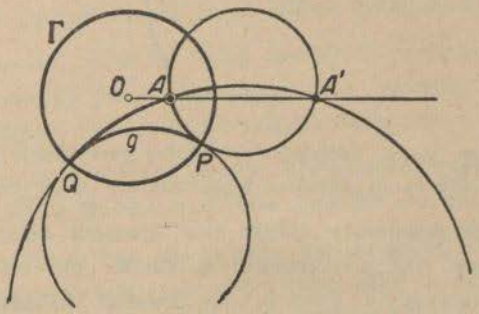
Problemin tek bir çözümü mevcuttur.

İhtar : Vermiş olduğumuz çözüm Γ ve g dairelerinin dik olmaması halinde de muteberdir. Dikliği sırf ileride lüzumunu düşünerek aldık.

Problem : *Bir A noktası ile biribirine dik g ve Γ daireleri verilmişken, A dan geçip g ye teğet ve Γ ya dik olan bir daire çizmek* (Şekil 209).

Aranılan daire Γ dairesine dik olduğundan, Γ dairesine göre evirtimde değişmez kalır.

Aranılan dairenin g dairesiyle olan P değme noktası, bu



Şek. 209

dairelerin değme noktasına dönüştüğünden P noktası çifte nokta olur ve dolayısiyle Γ üzerinde bulunur.

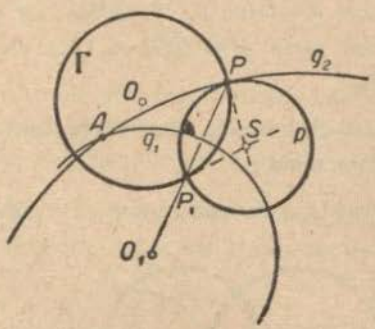
Bunlardan, aranılan dairenin çizimine geçebiliriz. Γ ve g nin arakesit noktalarından birine P der ve A nın Γ dairesine göre evriğini A' ile gösterirsek A, P ve A' noktalarından geçen daire

aranılan daire olmuş olur. Γ ve g daireleri P ve Q gibi iki noktada kesiştiğinden probleme iki cevap vardır.

O, A ve P noktaları doğrusal ise, aranılan cevap Γ nın O merkezinden geçen doğrudan ibaret olur.

A noktasını Γ nın üzerinde veya dışında alacak olursak çizim ne şekil alır?

Problem. *Bir Γ dairesi ile buna dik olan ve ortak A noktasından geçen g_1, g_2 daireleri verildiğine göre* (Şekil 210) *Γ ve g_1 dairelerine dik ve g_2 dairesine teğet olan bir daire çizmek.*

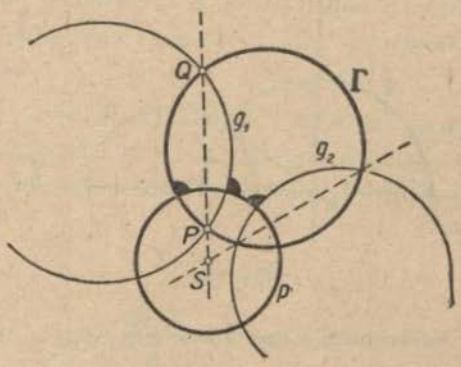


Şek. 210

Evvelki problemde olduğu gibi aranılan dairenin g_2 dairesiyle olan değme noktasının evirtimde bir çifte nokta olduğu ve dolayısiyle Γ ve g_2 nin arakesit noktası bulunduğu açıktır. Bundan dolayı problem, verilen bir P noktasından geçen ve verilen Γ ve g_1 dairelerine dik olan dairenin çizimine irca edilmiş olur. Aranılan p dairesinin S merkezi, Γ dairesinin P ve P_1 noktalarındaki PS ve P_1S teğetlerinin kesişme noktasından ibarettir (Şekil 210). Problemin dörtten fazla cevabı yoktur. İncelemenin tam olarak yapılması bir temrin olarak tavsiye olunur.

Problem. *Bir Γ dairesiyle buna dik olan ve birbirini kesmi-*

zen g_1 ve g_2 daireleri verildiğine göre (Şekil 111), *bu üç daireye dik olan bir daire çizmek.*



Şek. 211

Bu problemi daha genel şekliyle daha evvel (7 de) kuvvet ekseni ve kuvvet merkezi kavramlarını kullanarak çözmüştük:

S kuvvet merkezini bulup merkezi S ve yarıçapı S den verilen üç daireye çizilen teğetlerin ortak uzunluğu olan daireyi çizmek kâfidir. Problemin bir tek cevabı vardır.

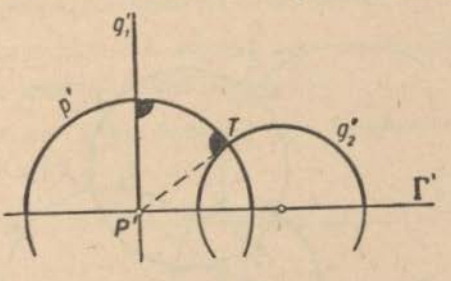
Şimdi bu problemin evirtim dönüşümüne dayanan biraz daha uzun fakat öğretici mahiyette olan bir çözümünü vereceğiz.

Γ, g_1 ve g_2 den ibaret olan verilen şekli, Γ ile g_1 dairelerinin Q arakesit noktasını kutup kabul eden ve keyfî R yarıçaplı bir evirtimle dönüştürelim. Bu evirtimi fiilen icra etmeksizin anlatmak mümkündür.

Q noktasından geçmeleri dolayısiyle Γ ve g_1 daireleri Γ' ve g'_1 doğrularına dönüşürler; bu dönüşümde eğrilerin, P nin resmi olan P' arakesit noktasındaki açısı muhafaza olunur (Şekil 212). Q nün de resmi yoktur.

Q den geçmiyen g_2 dairesi, Γ' doğrusuna dik olan veya

merkezi Γ' doğrusu üzerinde bulunan g'_2 dairesine dönüşür (resmin merkezinin merkezin resmi olmadığını hatırlamalıyız).



Şek. 212

Evirtim ile problem şu probleme irca edilmiş olur :

Birbirine dik Γ' ve g'_1 doğruları ile g'_1 doğrusunu kesmiyen ve merkezi Γ' üzerinde bulunan g'_2 dairesi verilmişken Γ' ve g'_1 doğrularına ve g'_2 dairesine dik bir p' dairesi çizmek.

Çözüm gayet basittir. Aranılan daire Γ' ve g'_1 doğrularına dik olduğundan merkezi bu doğruların kesiştiği P' noktasında ve yarıçapı da P' den g'_2 dairesine çizilen teğetin $P'T$ uzunluğuna eşit olmalıdır (Şekil 212). Çözüm bu suretle elde edilmiş olur.

İlk problemin çözümünü bulmak için Q merkezli aynı evirtimle

$$\Gamma' \to \Gamma,\ g'_1 \to g_1,\ g'_2 \to g_2,\ P' \to P$$

bulunur ve p' de aranılan p dairesine dönüşmüş olur.

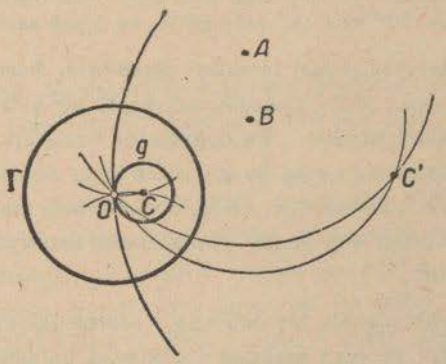
Noktaların, doğru ve dairelerin evirtimdeki resimlerini (pergelle bile) çizmek kolay olduğundan, bir problemin aslı yerine «problemin evirtimle dönüştürülen şekli» ni çözmek faydalı olabilir. Evirtim dairesiyle merkezini seçmek elimizde olup problemi basitleştirici şekilde seçme ekseriya mümkündür.

Bir temrin olarak, okuyucu, Γ dairesini bir Γ' doğrusuna

çevirerek ve «dönüşümle elde edilen problem» i ifade edip çözmek suretiyle bu bahisteki problemlerin hepsini çözmelidir.

Problem. *Sadece* A_1, B_1 *ve* A_2,B_2 *nokta çiftleri verilmişken yalnız pergel kullanmak suretiyle* A_1B_1, A_2B_2 *doğrularının kesişme noktasını bulmak.*

Evvelâ, A ve B noktalariyle belirli bir doğrunun evriği olan dairenin pergelle nasıl bulunacağını görelim. Γ evirtim dairesiyle O merkezinin verildiğini kabul ediyoruz (Şekil 213).



Şek. 213

Doğrunun evriğini veren çizim aşağıda gösterilen çizimden ibarettir.

O merkezinin AB ye göre C' simetriğini elde ederiz. Bu ise A, B merkez ve AO, BO yarıçaplı daireleri çizmekle kolayca yapılabilir.

C' noktasının evriği olan C noktası (1) aranılan g dairesinin merkezi olur; bu noktayı bilmekle bu merkezli ve CO yarıçaplı daire çiziliverir.

---

(1) Bir noktanın evriğinin sadece pergel kullanılarak çizimi daha evvel, 53 de görülmüştü.

İspat : OC doğrusunun AB doğrusu ve aranılan g dairesini kestiği evrik noktalar P, P' olsun (bu noktalar şekilde gösterilmemiştir).

Çizimden dolayı

$$OC' = 2\,OP;\ OP' \cdot OP = R^2,\ OC' \cdot OC = R^2$$

olduğundan

$$OP' \cdot OP = OC' \cdot OC = 2\,OP \cdot OC$$

ve bundan da $OP' = 2\,OC$ elde edilir ve ispat sabit olur.

Şimdi kolaylıkla asıl meseleyi çözebiliriz. Verilen noktalarla belirli olan A_1B_1, A_2B_2 doğrularını keyfî bir evirtim dairesi ve merkeziyle dönüştürelim. Bu doğruların evrikleri olan dairelerin S arakesitini elde edip bu noktanın aynı evirtimle S' evriğini bulalım. S' noktası A_1B_1, A_2B_2 doğrularının aranılan arakesit noktası olup çizim sırf pergel kullanılmak suretiyle elde edilmiş bulunmaktadır.

Benzer bir çizimle bir dairenin, sadece iki noktasiyle verilen bir doğru ile olan arakesit noktalarını bulmak da mümkündür.

Cetvel ve pergelle yapılabilen bütün çizimlerin sadece pergelle yapılabileceğinin ispatı işte bu usule dayanmaktadır.

52. Apollonius problemi

Apolonius problemi *cetvel ve pergel kullanarak verilen üç daireye teğet bir daire çizme* probleminden ibarettir.

Konik kesitler teorisinin elementer gelişiminde büyük önemi olan bu problem, gerek çözüm usulleri gerekse çok sayıdaki özel halleri bakımından ilgi çekicidir.

Bu problemin özel halleri, verilen dairelerden bazılarını nokta veya doğru olarak almakla elde edilir.

Özel hallerden bir kaçını inceliyelim.

1. Verilen üç daire üç noktadan ibaretse bildiğimiz şu problemi elde ederiz: *Bir üçgenin çevrel dairesini çizmek.*

Bu problemde üç noktanın doğrusal olma halini bir tarafa bırakıyoruz. Üç noktadan birini değişken kabul edersek diğer iki noktadan geçen dairelerin merkezinin geometrik yerini elde ederiz. Bu geometrik yer bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikmesi olur. Böyle iki geometrik yer ise dairenin merkezini verir.

2. Verilen üç daire üç doğrudan ibaretse yine bildiğimiz bir problem elde ederiz: *Verilen üç doğruya teğet olan bir daire çizmek.*

Verilen üç doğrudan ikisinin kesiştiğini üçüncüsünün ise değiştiğini kabul edelim. Bu takdirde iki doğruya teğet olan dairelerin merkezinin geometrik yerini elde ederiz. Bu geometrik yer iki doğrunun açıortayları olur. Bu iki doğru paralel ise ve bunları kestiğini kabul ettiğimiz üçüncü doğru değişirse, bu paralel doğrulara teğet olan dairelerin merkezinin geometrik yeri bu iki doğruya eşit uzaklıkta paralel doğrudan ibaret bulunur.

3. Dairelerden ikisi nokta ve üçüncüsü bir doğrudan ibaretse problem şu olur: *Verilen iki noktadan geçen ve verilen bir doğruya teğet olan bir daire çizmek.*

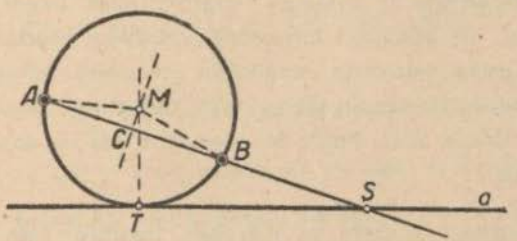
Problemin çözümü olabilmesi için verilen noktaların doğrunun birer tarafında olmaması gerekir (Şekil 214).

Lise kitaplarında verilen çözüm, aranılan dairenin verilen a doğrusiyle olan T değme noktasını bulmaya ve, AB ile a nın ortak noktası S ile gösterildiğine göre, $ST^2 = SA \cdot SB$ eşitliğinden faydalanmaya dayanmaktadır.

ST doğru parçası bulunduktan sonra bu uzunluk a üzerine

S nin iki tarafın konur ve bu suretle iki çözüm elde edilmiş olur. Şekil 214 de dairelerden yalnız biri gösterilmiştir.

AB ve a doğrularının paralelliği halinde aranılan dairenin T değme noktası, AB nin ortasından geçip her iki doğruya dik



Şek. 214

olan doğru üzerinde bulunur. Okuyucu problemin tam incelemesini bir temrin olarak ikmâl etmelidir.

Evirtim kullanarak problem şöyle çözülebilir: Verilen noktalardan birini, meselâ A yı evirtim merkezi olarak alıp a doğrusunu a' dairesine evirtelim; aranılan daire evirtimden sonra bir doğru olur ve problem, B nin B' evriğinden a' dairesine teğet çizmeğe irca olunur. Evirtimin tekrar icrası ile de asıl meselenin çözümü elde edilmiş olur.

Bir temrin olarak okuyucu çizimi fiilen icra etmelidir.

Problemde, verilen iki noktadan biri, meselâ B, düzlemde değişken kabul edilirse A noktasından geçip a doğrusuna teğet olan dairelerin merkezlerinin geometrik yeri bir *parabol* olur.

İspat: $MA = MT$ eşitliğinden M noktası A noktası ile a doğrusundan eşit uzaklıkta bulunur ve A noktası parabolün odağı, a da doğrultmanı olur.

4. Verilen üç daireden ikisi noktadan ve üçüncüsü bir doğrudan ibaretse problem şu olur: *Verilen bir noktadan geçen ve verilen iki doğruya teğet olan bir daire çizmek.*

Verilen nokta evirtim merkezi alınarak, problem, iki daireye teğet olan doğru çizmeğe irca edilir. Problemin incelenmesini ve çizimin yapılmasını bir temrin olarak tavsiye ediyoruz.

5. Problemde verilen üç daireden ikisi noktadan ibaretse problem şu şekli alır : *Verilen iki noktadan geçen ve verilen bir daireye teğet olan bir daire çizmek.*

Noktalardan birisi evirtim merkezi alınarak şu «evrik problem'i elde ederiz : *Verilen bir noktadan verilen bir daireye teğet çizmek.*

Problemin çizimi ve incelenmesi bir temrin olarak tavsiye olunur.

Problemde verilen noktalardan birisi, meselâ B, belirsiz addedilirse, B yi değiştirerek A dan geçen ve verilen Γ dairesine teğet olan dairelerin merkezlerinin geometrik yerini elde ederiz. A noktası Γ dairesinin dışında ise geometrik yer *hiperbol* ün bir kolundan, içinde ise bir *elips* ten ibarettir.

Bu iddiaların doğruluğu aşağıdaki eşitliklerin bir neticesidir:

$$OM - MA = OP = \text{sabit}$$

$$OM + MA = OP = \text{sabit}$$

6. Problemde, üç daireden birisi noktadan ibaret olacak olursa problem şu olur : *Verilen bir noktadan geçen ve verilen Γ_1 ile Γ_2 dairelerine teğet olan bir daire çizmek.*

A merkez ve herhangi bir yarıçapla yapılan bir evirtim, problemi bildiğimiz şu probleme irca eder: *Verilen Γ_1', Γ_2' dairelerine teğet çizmek.* Burada Γ_1', Γ_2' daireleri Γ_1, Γ_2 dairelerinin evirtimdeki resimleridir.

Γ_1', Γ_2' dairelerinin ortak teğetleri çizerek ve evirtimi bir daha icra ederek, asıl meselemizin çözümünü elde etmiş oluruz. Problemin dörtten fazla çözümü yoktur.

Okuyucu bu problemi incelemeli ve çizimi icra etmelidir. Okuyucu Apolonius probleminin geri kalan özel hallerini de ayrıca incelemelidir.

Şimdi, genel Apolonius problemine geçelim. Bu problem kolayca yukarıdaki 6 numaralı özel hale irca edilebilir. Bunun için, verilen ve aranılan dairelerin merkezlerinin yerini değiştirmeden, verilen dairelerden birinin yarıçapını, diğer dairelerin teğetliğini bozmıyacak şekilde yarıçapları uygun olarak değiştirmek suretiyle sıfıra götürebiliriz.

Dairelerden ikisi birbirine içten teğet olduğunda teğetlik bozulmadan ve merkezler yerinde kalarak bu dairelerden birinin yarıçapını değiştirecek olursak diğer dairenin yarıçapı ya ikisi birden artarak veya ikisi birden azalarak, aynı tarzda değişmiş olur. Dairelerin dıştan teğet olması halinde ise dairelerin birinin yarıçapının küçülmesi (büyümesi) diğerinin büyümesine (küçülmesine) sebep olur.

Verilen dairelerden birinin, meselâ Γ_1 in, yarıçapının küçüldüğünü kabul edelim. Bu takdirde aranılan dairenin Γ_1 dairesine dıştan veya içten teğet olmasına göre yarıçapı büyümüş veya küçülmüş olur (içten teğet olma halinde, aranılan daire tabiî Γ_1 i içine alır ve dolayısiyle Γ_1 noktaya dönünceye kadar içten teğetlik baki kalır.)

Aranılan dairenin yarıçapı değiştikçe diğer Γ_2 ve Γ_3 dairelerinin yarıçapları da değişir. Bu dairelerin aranılan daire ile teğetliği aynı tipten olduğunda (ikisi de içten veya ikisi de dıştan) yarıçap değişiklikleri aynı yönde olur ya iki çap da büyür veya iki çap da küçülür. Aksi halde yarıçaplardan biri büyüdüğünde diğeri küçülür.

Verilen dairelerin değişmesinden sonra — Γ_1 in A ya, Γ_2 ve Γ_3 ün Γ_2' ve Γ_3' dairelerine — genel Apollonius problemi şu özel hali alır: *Verilen bir A noktasından geçen ve verilen Γ_2' ve Γ_3' dairelerine teğet olan bir daire çizmek.* Bu problemi daha

evvel ele almıştık. Buna göre Apollonius probleminin çözümünde takip edilen yol şu olmuş olur:

Verilen Γ_1, Γ_2, Γ_3 dairelerinin merkezleri O_1, O_2, O_3 ve yarıçapları r_1, r_2, r_3 olsun. Ayrıca $r_1 < r_2$, $r_1 < r_3$ şartları cari bulunsun. Merkezi O_2, yarıçapları $r_2 + r_1$ ve $r_2 - r_1$ olan Γ_2', Γ_2'' daireleriyle merkezi O_3 ve yarıçapları $r_3 + r_1$ ve $r_3 - r_1$ olan Γ_3', Γ_3'' dairelerini çizelim. Sonra, O_1 den geçip Γ_2', Γ_3' dairelerine aynı neviden teğet olan dairelerle, O_1 den geçip Γ_2'', Γ_3'' dairelerine aynı neviden teğet olan daireleri çizelim. Bu bize dört çözüm verir.

Şimdi de O_1 den geçip Γ_2' ve Γ_3'' daireleriyle Γ_2'' ve Γ_3' dairelerine teğetlikleri farklı neviden olan teğet daireler çizelim. Bu suretle de dört ayrı çözüm buluruz.

Bulduğumuz sekiz daire (genel halde) aranılan dairelerle eş merkezli olan daireler olup yarıçapları kolaylıkla elde edilir. Problemin sekizden fazla çözümü yoktur.

Okuyucunun, Apollonius probleminin [3], [2] ve [1] de verilen muhtelif çözüm usullerine kendisini alıştırması hararetle tavsiye olunur.

ÜÇÜNCÜ KISIM

UZUNLUK, ALAN VE HACIMLARIN ÖLÇÜLMESİ

BÖLÜM IX

UZUNLUK, ALAN VE HACIM ÖLÇME GENEL PROBLEMİ

Bölüm IX da büyüklüklerin mukayesesi incelenecak ve doğru parçalariyle basit çokgenlerin alanlarını ölçme problemi ele alınacaktır. Ayrıca düzlemsel şekillerle yüzeylerin alanlarının ölçülmesi hakkında bazı fikirler verilecek ve hacım ölçme probleminin kısa bir incelemesi yapılacaktır.

53. Doğru parçalarının mukayesesi

Uzunluk kavramını ithal etmeden bile doğru parçalarını birbiriyle mukayese etmemiz, diğer bir deyimle, doğru parçalarının eşit olup olmadıkların, hangisinin daha küçük olduğuna hüküm vermemiz, bir doğru parçasını iki eşit parçaya bölmemiz, v.s. mümkündür.

Doğru parçalarının eşitlik kavramı doğrudan doğruya tarif edilemiyen ilkel bir kavramdır. Aşağıdaki *doğru parçalarının eşlik* (1) *aksiyomları* (2), doğru parçalarının eşitlik kavramını veya eşliğini sapa olarak tarif etmeğe yarar.

---

(1) «Congruent» ve «congruence» terimlerinin karşılıkları olarak «eş» ve «eşlik» terimleri alınmıştır.

(2) Bu kitabın IV. kısmında geometriye ait aksiyomların tam bir listesini bulacağız. Burada kullanılan numaralar bu listedeki numaralardır.

III_1. *A ve B noktaları a doğrusunun iki noktası ve A' de bir a' doğrusunun bir noktası ise (bu a' doğrusu a ile çakışır veya çakışmıyabilir), a' üzerinde, AB doğru parçası A'B' doğru parçasiyle eş yani eşit olacak şekilde A' nün istenilen tarafında daima bir B' noktası alınabilir.*

AB ve $A'B'$ doğru parçalarının eşliğini

$$AB \equiv A'B'$$

semboliyle gösteriyoruz.

Bu aksiyom bir doğru üzerinde, verilen şartları sağlıyan bir doğru parçasının *alınabileceği* ni ifade etmektedir. *Yalnız bir* doğru parçasının alınabileceği ise teorem olarak ispatlanabilir [15].

III_2. *A'B' ve A"B" doğru parçaları aynı AB doğru parçasına eş ise, A'B' doğru parçası A"B" doğru parçasına eş olur, veya daha kısa olarak, bir üçüncüsüne eş olan iki doğru parçası aralarında eştirler.*

III_1, III_2 aksiyomlarından faydalanılarak bir doğru parçasının kendisine eşit olduğunu ifade eden teoremi ispatlıyacağız.

İspat. Bir AB doğru parçası düşünüp herhangi bir doğru üzerinde AB doğru parçasına eşit bir $A'B'$ doğru parçasını alalım. Bu, III_1 aksiyomundan dolayı mümkündür. Şu eşliği yazabiliriz :

$$(\alpha) \qquad AB \equiv A'B'$$

Bu eşliği tekrar yazalım

$$(\beta) \qquad AB \equiv A'B'$$

(α) ve (β) eşliklerinden şunları ifade edebiliriz : AB ve AB doğru parçaları (bu halde iki doğru parçası çakışıktır) bir üçüncü $A'B'$ doğru parçasiyle eştirler. Ohalde III_2 aksiyomiyle biri-

birlerine eş bulunurlar: $AB = AB$ burada, «aşikâr» lığı en basit aksiyomunkinden az olmıyan bir teoremin ispatına ait bir misal elde etmiş bulunuyoruz.

Bir doğru parçasının şimdi isbat edilen kendisine eşit olma özeliğine *reflektiflik* denir. Doğru parçalarının eşitliğinin *simetri* ve *tanzitiflik* özeliklerini haiz olduğu da kolayca gösterilebilir.

Simetri deyince

$$AB \equiv A'B'$$

eşitliğinin

$$A'B' \equiv AB$$

eşitliğini (veya eşliğini) gerektireceği anlaşılır.

Bunu ispatlıyalım. Refleksiflik özeliğinden $A'B' \equiv A'B'$ yazılabilir. Ayrıca $AB \equiv A'B'$ cari bulunmaktadır. Bu da $A'B'$ ve AB doğru parçalarının üçüncü bir $A'B'$ doğru parçasına eşliğini ifade eder. III_2 aksiyomundan da

$$A'B' \equiv AB$$

bulunmuş olur.

Tranzitiflik deyince de

$$AB \equiv A'B', \quad A'B' \equiv A''B''$$

eşitliklerinin

$$AB \equiv A''B''$$

eşitliğini gerektireceği anlaşılır.

İspat, ikinci $A'B' \equiv A''B''$ eşitliği ve simetri ile elde edilen $A''B'' \equiv A'B'$ eşitliğinden ve III_2 aksiyomunun tatbikinden elde edilir.

Üçüncü aksiyom doğru parçalarının eşitlik özelikleriyle ilgili bulunmaktadır:

III_3. *AB ve BC bir a doğrusuna ait ortak iç noktaları bulunmıyan iki doğru parçası, A'B' ve B'C' ise aynı doğru veya başka*

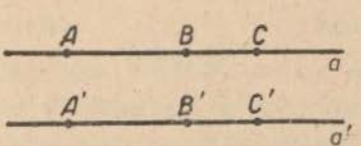
bir a' doğrusuna ait yine ortak iç noktaları bulunmıyan iki doğru parçası olduğunda (Şekil 216)

$$AB \equiv A'B' \text{ ve } BC \equiv B'C'$$

eşitlikleri varsa

$$AC \equiv A'C'$$

eşitliği de vardır.



Şek.216

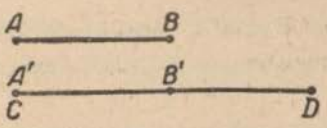
Bu aksiyom doğru parçalarının *toplanabilme* imkânını vermektedir.

Şimdi doğru parçalarına ait *daha büyük* ve *daha küçük* kavramlarını tarif edelim.

CD doğru parçalarının AB doğru parçasından daha büyük olması, veya sembolle

$$CD > AB$$

yazmak demek, CD doğru parçası üzerinde (III_1 aksiyomuna göre) AB ye eşit $A'B'$ doğru parçası alındığında, B' noktasının C ve D noktaları *arasına* düşmesi demektir (Şekil 217).



Şek. 217

CD doğrusu üzerinde AB ye eşit $A'B'$ doğru parçası alındığında B' noktasının CD doğru parçasının *dışına* düşmesi halin-

de (ki bu takdirde D noktası C ile B nin *arasında* olur) CO doğru parçasına AB doğru parçasından *daha küçük* tür deriz.

a ve b gibi iki doğru parçası verildiğinde aşağıdaki hallerden ancak biri doğru olur:

1. $a < b$ ve $b > a$
2. $a \equiv b$
3. $a > b$ ve $b < a$ (1)

Doğru parçalarının, büyüklüklerine göre mukayesesi *tranzitiflik* özeliğini haizdir, diğer bir deyimle,

1. $a > b,\ b > c$
2. $a > b,\ b \equiv c$
3. $a \equiv b,\ b > c$

den her biri

$$a > c$$

eşitsizliğini gerektirir.

Bunların ispatını vermiyoruz.

Tamamen benzer tarzda, *açıların mukayesesi* ni yapmak ve ayrıca *üçgenlerin eşliğini* temin edecek aksiyomları kurmak da mümkündür (2).

Eşliğe ait aksiyomları kullanarak misal olmak üzere aşağıdaki teoremi ispatlıyacağız:

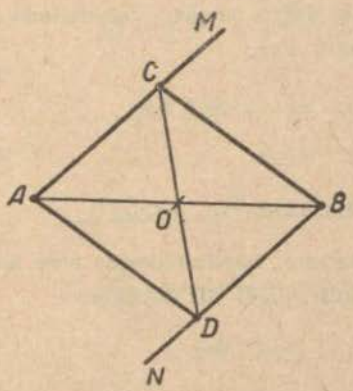
Teorem. *Her doğru parçası iki eşit parçaya bölünebilir ve bu, bir türlü mümkündür.*

---

(1) Burada doğru parçalarını basitçe harflerle gösterdiğimizi belirtmek gerekir; bundan da harflerin hiçbir şekilde sayı ifade ettiği anlamı çıkmaz.

(2) Eşliğe ait aksiyomların tam listesi bu kitabın IV. kısmında mevcuttur.

Varlığın ispatı: İki eşit parçaya bölmek istediğimiz doğru parçası AB olsun (Şekil 218).



Şek. 218

AM ve BN kenarları aynı düzlemde ve AB doğrusunun birer tarafında olmak üzere eş olan MAB ve NBA açılarını çizelim. Böyle bir çizim, açılara ait doğru parçalarının (III_1) ine benziyen bir aksiyomla mümkündür.

AM ve BN ışınları üzerinde $AC \equiv BD$ yi sağlıyan C ve O noktalarını alalım (III_1 aksiyomu). AB ve CD doğrularının O arakesiti AB nin orta noktası olur. İspat: (İki kenar ve aralarındaki açı) ile eş olan ABC ve ABD üçgenlerinden $CB \equiv AD$ elde edilir.

Bundan, ACD ve BCD üçgenlerinin («üç kenar») ile eş oldukları çıkar ve

$$< ACD \equiv < BDC$$

bulunur.

Elde edilen bu eşliklerden ise («bir kenar ve iki açı») ile ACD ve BDO üçgenlerinin eşliği görülür ve $AO \equiv OB$ bulunur.

Doğru parçasının ancak bir orta noktası olduğunun ispatını

vermiyoruz [24]. Doğru parçalarını ölçme genel probleminin çözümünde bu teoremden faydalanacağız.

Doğruların eşitliği kavramını ele alarak hareket kavramını artık geometrik anlamda tarif edebiliriz.

Hareket kavramının doğru parçalarının eşitliği kavramına ircaı yukarıda madde 29 ve 34 de icra edilmişti.

Bu iş başka türlü de yapılabilir. *Hareket* e esas ve tarif edilmiyen bir kavram olarak bakılabilir. «Hareket» kavramiyle ilgili aksiyomları ifade edebilir ve bunlarla, *doğru parçalarının eşitliği* ile *açıların eşitliği* ni «hareket» cinsinden tarif edebiliriz. Meselâ doğru parçaları için şunu ifade ederiz: *Birinciyi ikinciye götüren bir hareket mevcut olduğunda bu iki doğru parçasına eşittir veya eştir denir.* Bu şekil mutalâada III_1 ve III_2 aksiyomları teorem halini alır.

Hareket aksiyomları bu kitabın IV. kısmında verilmiş bubulunmaktadır. Aynı yerde iki aksiyom sınıfının denkliği'de gösterilmiştir. İki sistemin denkliği deyince bir sistem yerine diğeri alındığında geometrik keyfiyetlerin tümünün değişmiyeceğini anlıyoruz.

Misalimizde aksiyomların birinci sistemi geometrinin bütün aksiyomlarından ibarettir — IV. kısmında birinci listede gösterilen eşlik aksiyomları dahil — halbuki ikinci sistem birinci sistemden yalnız eşlik aksiyomları yerine hareket aksiyomlarının alınmış olmasıyla fark etmektedir.

Aksiyomların bu iki sisteminin denkliğini isbat için şöyle hareket edilir: Birinci sistem akaiyomları alarak, ikinci sistemin birincide olmıyan aksiyomlarını ve karşıt olarak ikinci sistemin aksiyomlarını alarak birinci sistemin aksiyomlarını ispatlamak.

54. Doğru parçalarını ölçme genel problemi

Doğru parçalarını ölçme problemi, AB doğru parçasına, aşağıdaki şartları sağlıyan ve AB doğru parçasının uzunluğu adı verilen negatif olmıyan biricik $\varrho(AB)$ sayısını tekabül ettirmekten ibarettir:

1. $\varrho(AB)=0$ *eşitliği ancak* A, B *noktaları çakıştığından mümkündür.*

2. $\varrho(AB)=\varrho(BA)$

3. $AB\equiv CD$ *ise* $\varrho(AB)=\varrho(CD)$ *dir, veya eşit doğru parçalarına eşit uzunluklar tekabül eder.*

4. AB *ve* BC, *bir doğrunun ortak - noktaları olmıyan iki parçası ise*

$$\varrho(AB)+\varrho(BC)=\varrho(AC)$$

cari olur, diğer bir deyimle, iki doğru parçasının toplamının uzunluğu, toplanan doğru parçalarının toplamına eşit olmalıdır (toplanabilme şartı).

Her doğru parçasına 1 — 4 şartlarını sağlıyan bir sayıyı tekabül ettirme problemine *doğru parçalarını ölçme teorisinin esas problemi* denir.

İfade edilen bu şartlardan şu neticeler çıkar:

1) *Sonlu sayıda doğru parçalarının toplamının uzunluğu, doğru parçalarının uzunlukları toplamına eşit olmalı, demek ki bu toplamı teşkil eden herhangi bir parçadan küçük olmamalıdır.*

2) *Daha büyük doğru parçası daha büyük uzunluğu haiz olmalıdır.*

Bu teoremlerin ispatının yapılmasını bir temrin olarak tavsiye ederiz.

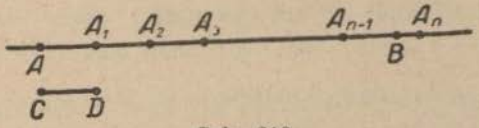
Her AB doğru parçasıyla 1 — 4 şartlarını sağlıyan bir $\varrho(AB)$ sayısının tekabülü kurulabilmişse *bir doğru parçaları ölçme sistemi* veya *bir doğru parçaları uzunluk sistemi* elde edilmiştir denir.

Bu hususla ilgili olarak iki sorunun cevaplandırılması zarurîdir : Bir tane olsun bir ölçme sistemi mevcut mudur, mevcut ise bütün ölçme sistemlerini nasıl elde ederiz?

Ölçme sisteminin elde edilebilmesi için ayrı bir aksiyoma ihtiyacımız var. Bu maksat için âdet olarak Arşimed aksiyomunu kullanacağız:

V_1 (Ölçme aksiyomu veya Arşimed aksiyomu): *AB ve CD herhangi iki doğru parçası ise, AB doğrusu üzerinde AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$ doğru parçalarından her biri CD ye eşit olmak ve B noktası A ile A_n arasında bulunmak üzere sonlu sayıda A_1, A_2, A_3, ... A_n noktaları alınabilir* (Şekil 219).

Arşimed aksiyomuna ekseriya, kolay anlaşılabilen şu ifade



Şek. 219

verilir: Her hangi CD doğru parçası kendi kendisiyle kâfi sayıda toplanmak suretiyle elde edilen toplam uzunluk keyfî bir AB doğru parçasından büyük yapılabilir.

Şimdi, *1 e eşit bir sayı P, Q uçları farkları PQ doğru parçasına tekabül ettirildiği takdirde, 1 — 4 şartlarının bir doğru parçasının uzunluğunu bir türlü olarak belirliyeceğini ispatlıyacağız.*

PQ doğru parçasına *uzunluk ölçme birimi* veya *birim doğru parçası* adını veriyoruz.

Evvelâ şunu ispatlıyalım: *Bir PQ doğru parçasının birim doğru parçası olduğu bir ölçme sistemi mevcutsa, böyle bir sistem bir tanedir.*

Ohalde sıfırdan farklı her AB doğru parçasına bir a sayısının tekâbül edeceğini ve bu sayıların 2 — 4 şartlarını sağlıyacağını ve verilen bir PQ doğru parçasına 1 sayısının tekabül ettiğini veya $\varrho(PQ)=1$ olduğunu kabulle başlıyoruz.

O noktası PQ doğru parçasının orta noktası olsun (53) PO ve OQ eşit doğru parçalarının $\varrho(PO)$ ve $\varrho(OQ)$ uzunluklarının eşitliğinden (Şart 3) ve 4. şarttan

$$1=\varrho(PQ)=\varrho(PO)+\varrho(OQ)=2\,\varrho(OQ)$$

elde eder ve PO ve OQ doğru parçaların herbirinin uzunluğunun 1/2 ye eşit olduğunu çıkarmış oluruz. Aynı şekilde PO nun PO_1 ve O_1O yarılarının uzunlukları da $1/2^2$ ye eşit olur, vs...

AB nin bulunduğu AB doğrusu üzerinde, A dan itibaren B yönünde PQ birim doğrusuna eşit AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... doğru parçalarını alalım (III_1 aksiyomu). A_n noktalarından birinin B ile çakışması halinde AB nin a uzunluğu, doğru parçaları ölçü sisteminin 1 — 4 şartlarından elde edilmiş olan 1) neticesine göre

$$a=\varrho(AB)=\varrho(AA_1)+\varrho(A_1A_2)+\ldots+\varrho(A_{n-1}A_n)=n$$

ye eşit olur.

Şayet A_1, A_2, A_3, ... noktalarından hiç birisi B ile çakışmıyorsa, bu takdirde, Arşimed aksiyomuna göre B yi aralarına alan A_n ve A_{n+1} noktaları mevcut olur. AA_n doğru parçası AB den küçük ve AA_{n+1} doğru parçası da AB den büyük olduğundan, doğru parçaları ölçme sisteminin 1—4 şartlarından elde edilen 2) neticesine göre

$$\varrho(AA_n)=n,\qquad \varrho(AA_{n+1})=n+1$$

$$n<a<n+1$$

elde edilir.

O halde *birim uzunluk yaklaşıklığı* ile AB doğru parçasının a uzunluğunu elde etmiş oluyoruz.

Şimdi $A_n A_{n+1}$ doğru parçasını P_1 noktasiyle iki eşit parçaya bölelim. Üç hal vardır:

1. B noktası P_1 ile çakışır. Bu takdirde

$$a = \varrho(AB) = \varrho(AP_1) = \varrho(AA_n) + \varrho(A_nA_1) = n + \frac{1}{2}$$

olup AB doğru parçasının ölçme işi neticelenmiş bulunur.

2. B noktası A_n ile P_1 arasındadır. Bu halde AB doğru parçası AA_n den büyük ve AP_1 den küçük olduğundan

$$n < a < n + \frac{1}{2}$$

elde edilir.

3. B noktası P_1 ile A_{n+1} arasındadır. Bu halde ise AB doğru parçası AP_1 den büyük ve AA_{n+1} den küçük olacağından

$$n + \frac{1}{2} < a < n + 1$$

yazılır.

Son iki halde AB doğru parçasının ölçme işi bitmemiş durumda olup AB nin a uzunluğu 1/2 birim yaklaşıklığı ile belirlidir deriz. Ölçme işine devam ederek A_nP_1 ve P_1B_{n+1} doğru parççası P_2 noktasiyle iki eşit kısma bölünür ve burada da üç hal varid olur, vs...

Ölçünün neticesi

$$a = n + \frac{n_1}{2} \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + \cdots + \frac{n_k}{2^k} + \cdots$$

şeklinde yazılabilir.

Burada n — tam kısım — AB doğru parçasında kaç tane ölçme birimi bulunduğunu göstermektedir. $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ sayıları ise B nin ardışık yarım-doğru parçalarına dahil olup

olmamasına göre 0 veya 1 e eşittirler. Meselâ B noktası P_1 ucu hariç $A_n P_1$ doğru parçasına aitse $n_1 = 0$; eğer B noktası, A_{n+1} doğru parçasına aitse $n_1 = 1$ alınır. Bu şekilde herhangi n_k sayısının değerini bulabiliriz.

a nın yukarıdaki ifadesi; B noktasının AB doğru parçasının ölçülmesi işinde «P_8 orta nokta»larından biriyle çakışıp çakışmamasına göre *sonlu* veya *sonsuz* terim ihtiva eder.

İhtar. Tatbikatta PQ birim doğru parçası iki eşit parçaya değil de $P_1, P_2, \ldots P_8, P_9$ noktalariyle on eşit parçaya bölünür ve ölçümün neticesi

$$a = n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n^3}{10^3} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} + \cdots$$

şeklinde yazılır.

Burada n tam kısım olup $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ sayılarından herbiri B noktasının her ardışık alt bölmedeki (1) on doğru parçasında ait olduğu parçaya göre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 değerlerinden birini gösterir. Meselâ, B noktası A_n ve A_{n+1} noktaları arasında ise ve alt bölme sonunda B noktası birinci $A_n P_1$ parçasına düşerse $n_1 = 0$, $P_7 P_8$ parçasına düşerse $n_1 = 7$ olur vs.

Evvelki ifade tabiî ondalık sayı şeklinde yazılabilir:

$$a = n\, n_1\, n_2\, n_3 \ldots n_k \ldots$$

Aynı şekilde $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$sayıları 0 veya 1'i ve n negatif olmıyan bir sayı olmak üzere

$$a = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + \cdots + \frac{n_k}{2^k} + \cdots$$

sayısı da tabanı 2 olan sayı sisteminde

(1) «Altbölme» terimi «subdivision» karşılığında alınmış olup bir bütünün parçalara bölünmüş şeklini ifade eder.

$$a = n \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots n_k \cdots$$

olarak yazılabilir.

AB doğru parçasının yukarıda verilen *ölçme işlemi* ile, *a* uzunluğunun ikili (veya ondalık) sayı sistemindeki ifadesinde istenilen rakamı bulmak mümkündür.

Bütün bunlardan, doğru parçalarının uzunluğunun 1 — 4 şartlariyle *bir türlü* olarak belirleneceği neticesi çıkar. Daha açık olarak ifade edersek, uzunluğu 1 e eşit olan sıfırdan farklı *PQ* doğru parçasını ihtiva eden doğru ölçme sistemi mevcutsa bu sistem bir tanedir.

Geriye, doğru parçalarını ölçme sistemini *varlığı*nın ispatı, diğer bir deyimle, her doğru parçasına 1 — 4 şartlarını sağlıyan bir sayının tekabül ettirebileceğinin ispatı kalır.

Sıfır olmıyan keyfî bir *PQ* doğru parçasına 1 sayısını tekabül ettirelim. Ölçme işlemi *PQ* ye tatbik edildiğinde 1 sayısını verir. Genel olarak her *AB* doğru parçasına, incelemiş olduğumuz ölçme işlemi sonunda elde edilen sayıyı tekabül ettirelim.

Bu ölçme işlemiyle, önce sıfır doğru parçasına sıfır sayısını verilerek her doğru parçasına hakikaten bir sayı tekabül etmiş olur.

Şimdi doğru parçalarına tekabül ettirilen bu sayıların 1—4 şartlarını sağladığı gösterilmelidir.

1 ve 2 şartlarının sağlandığı açıktır. Eşit doğru parçalarına tatbik edilen ölçme işleminin eşit sayılar vereceği de açık olduğundan 3. şart da sağlanmaktadır.

4. şartın sağlandığını göstermek için yardımcı iki teorem ispatlayacağız [24].

Yardımcı teorem 1. *PQ birim doğru parçasının* 2^n *tane eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen her parça, verilen*

bir MN doğru parçasından küçük olacak şekilde kâfi derecede büyük olan n tam sayısı daima bulunabilir.

İspat : Herhangi n için PQ birim doğru parçasının 2^n eşit parçasından birinin MN doğru parçasına eşit veya bundan büyük olduğunu kabul edecek olursak, MN yi 2^n defa kendisiyle toplamakla PQ yü aşacak olan bir doğru parçası bulmağa imkân olamaz ve Arşimed aksiyomu ile çelişmezliğe varılır.

Yardımcı teorem 2. *$A^* B^*$ doğru parçası AB doğru parçasından küçükse ve b^* ile b, sırayla ölçme işleminin bu doğru parçaları için verdiği sayılar ise $b^* < b$ dir.*

İspat :

$$b^* = n^* + \frac{n_1{}^*}{2} + \frac{n_2{}^*}{2^2} + \frac{n_3{}^*}{2^3} + \cdots + \frac{n_k{}^*}{2^k} + \cdots$$

ve

$$b = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + \cdots + \frac{n_k}{2^k} + \cdots$$

olsun.

$A^* B^* < AB$ olduğundan, III_1 aksiyonuna ve doğru parçalarına ait «daha küçük» tarifine göre AB doğru parçası üzerinde $AB' = A^* B^*$ olacak şekilde bir B' noktası vardır.

A dan başlayıp B yönünde PQ birim uzunluğa eşit AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... doğru parçalarını alalım. Bir A_i noktası B ile B' arasına düşecek olursa b^* sayısının n^* tam kısmı b sayısının n tam kısmından küçük olur ve $b^* < b$ bulunur. Eğer B' ve B nin her ikisi de bir $A_i A_{i+1}$ içine düşecek olursa b^* ve b nin tam kısımları aynı olur: $n^* = n$. A_iA_{i+1} i iki eşit parçaya bölelim. Ya B' ve B bu doğru parçasının ayrı yarımlarına düşer ve bu takdirde $n_1{}^* < n_1$ ve dolayısiyle $b^* < b$ olur, veya B' ve B noktaları $A_i A_{i+1}$ doğru parçasının aynı yarımına rastlar. Bu durumda A_iA_{i+1} tikrar iki eşit parçaya bölünür ve ölçme işlemine böyledevam olunur. B' ile B ölçme işleminde her ikiye bölmede dai-

ma aynı yarımda bulunmadığı takdirde $b^* < b$ eşitsizliği elde edilir. Halbuki B ile B' nün bu şekilde bulunması mümkün değildir, zira, bu takdirde $B'B$ nün her n için birimin 2^n de birinden küçük olması gerekir ki bu, yardımcı teorem 1 ile çelişmezlik yaratır.

Şimdi tekrar, doğru parçaları ölçme sisteminin varlık teoreminin ispatına geçelim. Dördüncü şartın sağlanacağını göstereceğiz. Her AB doğrusuna AB nin ölçme neticesini — $\varrho(AB)$ yi — tekabül ettirdiğimize işaret edelim.

AB herhangi bir doğru parçası, C de A ile B arasında bir nokta olsun. Doğru parçalarının toplam işlemine göre

$$AB = AC + CB$$

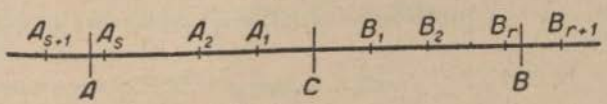
yazabiliriz.

$\varrho(AB)$, $\varrho(AC)$ ve $\varrho(CB)$ sayılarının

$$\varrho(AB) = \varrho(AC) + \varrho(CB)$$

eşitliğini sağladığını göstereceğiz.

n sabit bir tam sayı ve $PQ/2^n$ ise PQ birim doğru parçasının 2^n de bir parçası olsun. C noktasından itibaren A ya doğru PQ birim doğru parçasının 2^n de birine eşit olan CA_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$, $A_sA_{s+1}, \ldots$ (Şekil 220) doğru parçalarını alalım.



Şek. 220

Arşimed aksiyomu dolayısiyle, A nın çakışacağı bir A_s noktası veya arasına düşeceği A_s ve A_{s+1} noktaları mevcut olur. Her iki hal için

$$CA_s \leq AC < CA_{s+1}$$

yazılabilir. Yardımcı teorem 2 den de sayılara geçerek

$$(*) \qquad \frac{s}{2^n} \leq \varrho(AC) < \frac{s+1}{2^n}$$

bulunur.

Şimdi C den itibaren B ye doğru yine PQ birim doğru parçasının 2^n de birine eşit CB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... B_rB_{r+1}, ... doğru parçalarını alalım. Arşimed aksiyomundan

$$CB_r \leq CB < CB_{r+1}$$

ve yardımcı teorem 2 den sayı olarak

$$(**) \qquad \frac{r}{2^n} \leq \varrho(CB) < \frac{r+1}{2^n}$$

elde olunur.

Mevcut olan

$$A_sB_r \leq AB < A_{s+1}B_{r+1}$$

eşitsizliklerinden de yine yardımcı teorim 2 yi kullanıp sayılara geçmekle

$$(***) \qquad \frac{s+r}{2^n} \leq \varrho(AB) < \frac{s+r+2}{2^n}$$

yazarız.

(*) ve (**) eşitsizliklerini terim terim toplayacak olursak

$$\frac{s+r}{2^n} \leq \varrho(AC) + \varrho(CB) < \frac{s+r+2}{2^n}$$

elde eder ve (***) eşitsizliklerini göz önünde tutmak suretiyle

$$|\varrho(AC) + \varrho(CB) - \varrho(AB)| < \frac{1}{2^n - 1}$$

bulunur. n ise her hangi tam sayı olduğundan

$$\varrho(AB) = \varrho(AC) + \varrho(CB)$$

neticesi elde edilmiş olur.

Toplanabilme özeliği cari olmaktadır. Her AB doğru parçasına tekabül eden $\varrho(AB)$ sayısına doğru parçasının *uzunluk* u denir.

Doğru parçaları ölçme sisteminden hiç olmazsa bir tanenin mevcut olup olmadığına dair sorulan sorunun cevabı «evet» olmuş oluyor. Hatta her keyfî PQ doğru parçasının birim doğru parçası olarak seçimi bir doğru parçaları ölçme sistemi vermektedir. Dolayısiyle sonsuz ölçme sistem cümlesi mevcuttur.

Şimdi *doğru parçaları ölçme teorisinin karşıt teoremi* ni ele alalım.

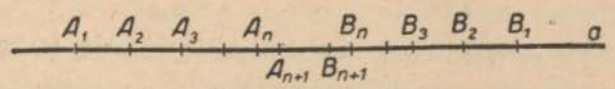
Yukarıdaki incelemelerden bütün doğru parçalarının cümlesinin negatif olmıyan reel sayılar cümlesine tasvir edildiğini veya her doğru parçasına reel bir sayının — doğru parçasının uzunluğunun — tekabül ettiğini görmüş bulunuyoruz. Bir sayı verilen bir doğru parçasının uzunluğu olarak alınırsa bütün eşit doğru parçalarının tasvirleri aynı sayı olur. Şimdi sıfır olmıyan bütün doğru parçalarının negatif olmıyan bütün reel sayıları tüketip tüketmediği sorusu açık kalmaktadır. Bu sorunun cevabı doğru parçaları ölçme teorisinin karşıt teoriminin konusunu teşkil etmektedir. Bu soruya evet cevabının verilmesi ancak yeni bir aksiyomun ithal edilmesiyle mümkündür.

İçiçe bulunan kapalı doğru parçalariyle ilgili aşağıdaki *Kantor aksiyomunu* kabul etmek yeter:

V_2. **Kantor Aksiyomu.** *A_1A_1, A_2B_2, A_3B_3, ... bir a doğrusu üzerinde sonsuz bir kapalı doğru parçaları dizisi olsa ve bunun ardışık her $A_{n+1}B_{n+1}$ terimi bir evvelki A_nB_n teriminin içinde bulunsa* (Şekil 221) *ve ayrıca bütün terimlerin içinde bulunan hiçbir doğru parçası mevcut bulunmasa, dizinin bütün terimlerinde ortak olan bir ve ancak bir X noktası mevcuttur.*

Bu aksiyomda bütün doğru parçalarının sıfırdan farklı olduğunu veya farklı uc noktalarını haiz olduğu kabul ediliyor.

Bu şekilde ifade edilen aksiyomun oldukça kuvvetli bir netice ile sonuçlandırılmış olduğuna işaret etmek gerektir.



Şek. 221

Dizide, bütün doğru parçalarında ortak olan *en aşağı bir X* noktasının varlığının belirtilmesi kâfi idi ve bundan da *X* noktasının *biricik* olduğu neticesine varılırdı.

Şekillerin arakesit kavramına başvurarak aksiyomdaki netice şöyle de ifade edilebilir: *Verilen* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... *dizisinin bütün doğru parçalarının arakesiti X noktasıdır.*

İhtar. Arşimed ve Kantor aksiyomlarına *süreklilik aksiyomları* denilmektedir. Bunlarla aşağıdakine benzer teoremleri ispatlamak mümkündür: *Bir Γ dairesinin bir A iç noktasından geçen bir a doğrusu dairegi iki noktada keser.*

Doğru parçaları ölçme teorisinin karşıt teoremi şu teoremle ispatlanmış olur: *Hangi* $a>0$ *reel sayısı alınırsa alınsın, verilen herhangi bir ölçme sisteminde uzunluğu a olan bir doğru parçası* mevcuttur.

İspat: *a* sayısını

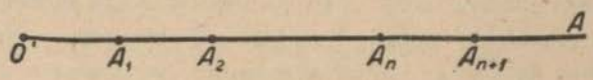
$$a=n+\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2^2}+\cdots+\frac{n_k}{2^k}+\cdots$$

şeklinde ifade edelim. Bu ifadede *n* tam bir sayıyı veya sıfırı, $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ ise 0 veya 1 e eşit olan sayıları gösteriyor. Bunu ikili sayı sisteminde

$$a = n \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots n_k \cdots$$

sayısı olarak yazmak mümkündür.

OA doğrusu üzerinde, PQ birim doğru parçasına eşit OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... A_nA_{n+1} doğru parçalarını alalım (Şekil 222) ve



Şek. 222

A_nA_{n+1} doğru parçasını B_1 noktasiyle iki eşit parçaya bölelim. $n_1 = 0$ halinde A_nB_1 doğru parçasını, $n_1 = 1$ halinde ise B_1A_{n+1} doğru parçasını seçelim.

Seçilen s_1 doğru parçasını da B_2 noktasiyle iki eşit parçaya bölelim. $n_2 = 0$ halinde bu yarım parçalardan O noktasına yakın olanını, $n_2 = 1$ halinde ise diğerini seçelim.

Bu ikinci s_2 doğru parçasını B_3 noktası ile iki eşit parçaya bölelim ve böylece devam edelim.

Bu suretle elde edilen sıfırdan farklı kapalı $s_1, s_2, \ldots s_k$ doğru parçaları, içiçe sonsuz kapalı doğru parçaları dizisi teşkil eder. Bu dizide her terim bir evvelki terimin içinde bulunduğundan ve yardımcı teorem 1 den dolayı bu dizinin bütün terimlerinde ortak olmak üzere sıfırdan farklı bir doğru parçası bulunmadığından Kantor aksiyomunun şartları sağlanmış bulunmaktadır. Bundan da, X noktası dizinin bütün terimlerinde ortak olan nokta olduğuna göre, OX doğru parçasının ölçme işleminin a uzunluğunu vereceği çıkar ve teorem ispatlanmış olur.

İhtar. Anlatılan bu ispat a sayısını temsil eden ikili sayı sistemindeki sayının sonlu veya sonsuz olmasına göre değişmez.

Sonlu olduğu takdirde alt bölmelerde elde edilen B

noktalarından biri, uzunluğu tam a ya eşit olan bir OB doğru parçasını verir. Bu halde Kantor aksiyomundan sarfı nazar edebiliriz.

Hatta, p ve q tam sayılar gösterdiğine göre $a = p/q$ ise veya a rasyonel bir sayı ise, PQ birim doğru parçasını q eşit parçaya bölüp q katını alıp uzunluğu a olan doğru parçasını elde ederiz. Uzunluğu p/q olan doğru parçasını veren bu usul de Kantor aksiyomuna başvurmadan yürütülebilir.

Doğru parçaları ölçme teorisinin bu izahında reel sayıların mevcut teorisinden faydalanılmıştır [37], [34]. Tarihsel bakımından evvelâ ölçme teorisi, sonra her iki teori beraber gelişmiştir.

Ancak ölçme teorisinin teorem ve karşıt teoreminin ispatından sonra, ölçü birimi seçilmek suretiyle, reel sayılar cümlesi ile bir doğru üzerindeki noktalar arasında bire-bir bir tekabül kurmak mümkündür.

Bu tekabül bir doğru üzerinde koordinat sistemi kurmayı sağlamaktadır. Bu noktadan hareket ederek koordinatların düzleme ve uzaya teşmili güçlük arzetmez.

Gelecek bahiste göreceğimiz veçhile, doğru parçalarını ölçme teorisinin ispatı, aynı zamanda, doğru parçaları ölçme sistemlerinin tamamının cümlesini bulmayı ifade eden problemin çözümünü de vermektedir.

55. Bir doğru parçasının uzunluğunun ölçü biriminin seçimine bağlılığı

AB doğru parçasının $\varrho(AB)$ uzunluğu ancak ölçü birimi — PQ doğru parçası — seçildiğinde belirli olur. Birim doğru

parçasının ikinci bir şekilde seçiminde AB doğru parçasının uzunluğu değişmektedir.

Şu problemi ortaya atalım : Birim ölçüsü PQ olan ölçme sisteminde bir AB doğru parçasının uzunluğu x olduğunda, birim ölçüsü $P'Q'$ olan ölçme sisteminde aynı AB doğru parçasının y uzunluğunu bulmak.

Tabiî y uzunluğu x in bir fonksiyonu olup

$$y = f(x)$$

fonksiyonu negatif olmıyan bütün sayıları cümlesinde tarifli bulunmaktadır.

Hakikaten, her $x \geqq 0$ sayısına uzunluğu x olan bir AB doğru parçası tekabül eder. AB yi $P'Q'$ birimiyle ölçerek yeni ölçme sisteminde AB doğru parçasının uzunluğunu veren biricik y sayısını elde ederiz. Açık olarak $f(0) = 0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunu $x \neq 0$ halinde bulmak kalır.

Evvelâ, $f(x)$ fonksiyonunun monoton olarak çoğalan bir fonksiyon olduğunu görürüz, zira, x uzunluğu arttıkça buna tekabül eden doğru parçası da büyür ve dolayısıyla y artar. Sonra, $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ koyarak, 4 şarttan

$$y_1 + y_2 = f(x_1 + x_2)$$

veya

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

elde ederiz.

(α) denklemi *fonksiyonel denklem*'lere en basit bir misal teşkil eder.

Şimdi (α) ile ifade edilen özeliği haiz f fonksiyonunu bulalım. Problemin açık ifadesi şudur: *Negatif olmayan reel sayılar cümlesinde tarifli ve bütün* $x_1 \geqq 0$ ve $x_2 \geqq 0$ *değerleri için*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

fonksiyonel denklemini sağlıyan monoton artan bütün $f(x)$ *fonksiyonlarını bulmak*

Matematik indüksiyonla

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

elde ederiz.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$$

koymakla da herhangi n tam sayısı ve herhangi $x \geq 0$ için

$$(\beta) \qquad f(nx) = nf(x)$$

ve bunda da $x = 1$ koyarak, herhangi n tam sayısı için

$$f(n) = nf(1)$$

buluruz.

$f(1)$ açık olarak, birinci ölçme sisteminin PQ birim doğru parçasının ikinci ölçme sisteminin $P'Q'$ birim uzunluğu cinsinden ifade edilen uzunluğudur. Bu uzunluğu a ile gösterirsek veya

$$f(1) = a$$

koyarsak

$$(1) \qquad f(n) = an$$

elde ederiz

Şimdi (β) denkleminde $x = 1/n$ koyarak

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

yazalım ve bundan da

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = a\frac{1}{n}$$

elde edelim.

(β) denkleminde, $m \geq 0$ ve $n > 0$ tam sayı olmak üzere $x = m/n$ koyarak

$$f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right)$$

yazalım ve (1) denkleminden

$$am = nf\left(\frac{m}{n}\right)$$

veya

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n} \tag{3}$$

elde edelim.

Yukarıda bulduğumuz neticelerden $f(x)$ fonksiyonunun bütün rasyonel $x = m/n \geq 0$ değerleri için

$$f(x) = ax$$

şeklinde olduğunu bulmuş oluyoruz.

z pozitif ve irrasyonel bir sayı olsun. Keyfî $n > 0$ tam sayısına mukabil

$$\frac{m}{n} < z < \frac{m+1}{n}$$

olmak üzere bir $m \geq 0$ tam sayısı bulunabilir.

$f(x)$ fonksiyonu monoton çoğalan bir fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{m}{n}\right) < f(z) < f\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

veya

$$\frac{m}{n}a < f(z) < \frac{m+1}{n}a$$

yazılır ve $n \to \infty$ için limite geçilerek

$$f(z) = az$$

elde edilir.

Bu suretle her $x \geq 0$ için

$$f(x) = ax$$

veya

$$(\gamma) \qquad y = ax$$

neticesine varılmış olur.

Burada x, verilen doğru parçasının «eski» uzunluğu, y «yeni» uzunluğu ve $a = f(1)$ ise «eski birim» in «yeni birim» cinsinden değeridir.

Fonksiyonel (α) denklemi çözülmüş ve aynı zamanda doğru parçasının uzunluğunun ölçü birimi seçimine bağlılığı (γ) gösterilmiş bulunmaktadır. Bunu şöyle ifade ederiz: *Bir ölçme sisteminden diğer bir ölçme sistemine geçildiğinde bütün doğru parçalarının uzunlukları, yeni birimin eski birim cinsinden değerini ifade eden sayı ile çarpılmış olur.*

Bir ölçü sistemindeki uzunlukları x_1 ve $x_2 > 0$ ve ikinci ölçü sistemindeki uzunlukları ise y_1 ve y_2 olan iki AB ve CD doğru parçası alalım.

(γ) denkleminden

$$y_1 = ax_1, \; y_2 = ax_2$$

ve

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

elde ederiz.

Buna göre, iki doğru parçasının uzunluklarının oranı ölçü biriminin seçimine bağlı olmamaktadır.

Doğru parçalarının uzunluklarının ölçü birimine bağlı olmıyan oranına *doğru parçalarının oranı* denir:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}.$$

İhtar: Problemimizde, *eğri yayları uzunluk ölçme sistem*'inin elde edilmesine temas etmemiş bulunuyoruz. Bu hususa dair ancak şunu söyliyeceğiz: Herhangi bir eğri yayına bir sayı tekabül ettirilmiş olsa, bu sayıya bu durumda henüz eğri yayının uzunluğu diyemeyiz. Diyebilmemiz için, hepsi doğru parçalarını ihtiva eden eğrilerin belirli bir sınıfının her yayına bir sayı tekabül etmesi ve bu sayıların aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

A. Eşit iki yaya eşit iki sayı tekabül etmelidir (değişmezlik özeliği).

B. Ortak noktaları olmıyan iki yayın toplamına tekabül eden sayı, toplanan yaylara tekabül eden sayıların toplamına eşit olmalıdır (toplanabilme özeliği).

Ancak bu şartların sağlanması halinde adı geçen sayılara, tekabül ettikleri yayların *uzunluk*'ları denir.

Meselâ bir daireye; bu daire içine ve dışına çizilen basit çokgenlerin, kenar uzunlukları sıfıra gidip kenar sayıları sonsuza yaklaştığında, çevrelerinin ortak limiti tekabül ettirilse, bu sayı, bazı eğri sınıfları için *bir uzunluk ölme sistemi* elde etmedikçe dairenin *uzunluk*'u olarak alınamaz ve bu ad verilemez [34].

56. Bir düzlemde alanların mukayesesi

Madde 53 de doğru parçalarının büyüklüklerini mukayese ederken doğru parçalarının *uzunluk* kavramını ithal etmek gerekmemişti.

Bazı düzlemsel şekiller için *eşit*, *daha büyük*, *daha küçük* kavramlarını ithal etmek mümkündür.

Burada eşlik ve eşitlik kavramları doğru parçalarının etüdünde olduğu gibi aynı anlama gelmiyebilir.

Şekillerin eşliği meselâ şöyle tarif edilebilir: *Düzlemdeki bir hareketle* (bu hareket birinci veya ikinci neviden olabilir) *biri diğerine tasvir edilebilen düzlemsel iki şekle eş şekiller denir.*

Düzlemin kendisine olan hareket dediğimiz dönüşümlerinin eşlik aksiyomları vasıtasiyle tarif edilebileceğini bilmekteyiz. Bu aksiyomlar *doğru parçası* ve *açı* kavramlariyle ilgili olanlardır.

Şekillerin eşliğine ait vermiş olduğumuz bu tarif, «eşitlik» kavramının bütün şartlarını sağlıyan (şekillerin arasında mevcut) bağıntıyı tarif etmiş olur. Bu şartlar şunlardır:

1. **Refleksivlik:** Her şekil kendisiyle eştir.

2. **Simetri:** Bir şekil ikinci bir şekle eş ise ikinci şekil de birinci şekle eştir.

3. **Tranzitiflik:** Bir şekil ikinci bir şekle ikinci şekil de bir üçüncü şekille eş ise birinci şekil üçüncü şekille eş olur.

Yalnız eş olan şekillere eşit diyecek olursak bir çok önemli şekil sınıflarının büyüklüklerini mukayese etmekten mahrum kalırız, zira, şekil sınıfı bir büyüklük sınıfı olacak şekilde eşlik bağıntısına ekseriya *daha büyük* ve *daha küçük* sıfatlarını ekliyemeyiz.

Meselâ, verilen şekiller sınıfı karelerden ibaret olsun. İki kareye ancak eş olduklarında eşit diyelim ve kenarları daha büyük olan kareyi, kenarları daha küçük olandan daha büyük itibar edelim. vs. Bu şartları kullanarak kareler sınıfı, *eşit, daha büyük, daha küçük*'ün anlamlarına göre büyüklük sınıfı olarak düşünülebilir.

İkinci bir misal alalım. Verilen şekiller sınıfı bütün dairelerin sınıfı olsun. *Eşit, daha büyük ve daha küçük* sıfatlarına, daireler sınıfını bu sıfatlara göre bir büyüklük sınıfına çevirecek şekilde anlam vermek kolaydır.

Bu defa, verilen şekiller sınıfı bütün dik dörtgenlerin cümlesi olsun. Yalnız eş olan dörtgenleri eşit diye kabul edersek, *daha büyük* ve *daha küçük* sıfatlarına, dörtgenler sınıfını mukayese edilebilen büyüklükler sınıfına çevirme şartlarının hepsini sağlıyacak şekilde nasıl bir anlam verileceği sorusu ortaya çıkar.

Buna benzer sorular, bütün dikdörtgenler ile bütün dairelerden ibaret olan *A* sınıfı veya bütün düzlemsel sonlu şekillerin sınıfından ibaret *B* sınıfı için de sorulabilir.

A sınıfına ait şekillerin yalnız eş olmaları şartiyle eşitlikleri kabul edildiğinde, büyüklüklerin mukayese şartlarını sağlayacak şekilde *daha büyük* ve *daha küçük* sıfatlarına anlam verilemiyeceğini göstermek güç değildir.

Diğer bir deyimle, *A* sınıfının bir büyüklükler sınıfı olması için *eşit* sıfatına evvelce verilen anlam (eşlik) karşısında, *daha büyük* ve *daha küçük* kavramlarına ne suretle olursa olsun bir anlam vermek imkânsızdır.

B sınıfı için de hiçbir surette, büyüklüklerin mukayese şartlarını sağlıyan *eşit*, *daha büyük* ve *daha küçük* kavramlarını ithal etmek mümkün değildir. Bu iddianın ispatını vermiyoruz.

Eşbileşim (1) ve *eşdeğerlilik* kavramları düzlemsel iki boyutlu şekil sınıflarına ve özel olarak basit çokgenlere ait *eşit*, *daha büyük* ve *daha küçük* sıfatlarının elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır.

Tarif. Bütün tepe noktaları farklı olan, hiçbir tepe noktası çokgenin bir kenarının iç noktası olmıyan ve herhangi iki kenarının ortak hiçbir noktası bulunmıyan bir çokgene *basit çokgen* denir.

Basit çokgenlere ait aşağıdaki önemli teoremi veriyoruz.

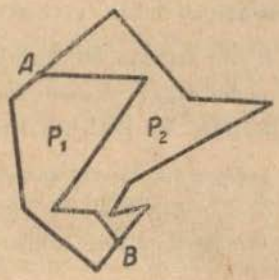
---

(1) *Eşbileşim* kelimesi «equicomposition» karşılığında alınmıştır.

Teorem. *Her basit çokgen, üzerinde bulunduğu düzlemin basit çokgene* (doğru parçalarından ibaret olan sisteme) *ait olmıyan noktalarını, aşağıdaki özelikleri haiz olan iç ve dış olmak üzere iki bölgeye ayırır :* A iç bölgeye, B de dış bölgeye ait birer nokta ise, A ve B noktalarını birleştiren ve çokgenin düzleminde bulunan her kırık çizginin çokgenle en aşağı bir ortak noktası vardır; A ve A' çokgenin içinde B ve B' de çokgenin dışında ikişer nokta ise düzlemde daima A yı A' ye ve B yi B' ye birleştiren ve çokgenle ortak noktaları bulunmıyan kırık çizgiler mevcuttur.

Bu teoremin ispatını vermiyoruz [15].

Bir P çokgeninin A ve B gibi iki noktası, kendi kendisini kesmiyen ve tamamen çokgenin içinde olan kırık bir çizgi ile birleştirilirse P_1 ve P_2 gibi yeni iki çokgen elde edilir (Şekil 223). Bu takdirde P çokgeni P_1 ve P_2 *bileşenlerine ayrılmış* veya P_1 ve P_2 *bileşenlerinden elde edilmiştir* denir.



Şek. 223

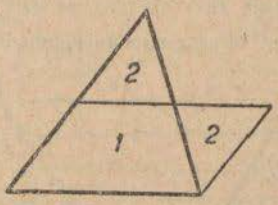
Tarif: Basit iki çokgen sonlu sayıda bileşenlerine ayrılsa ve birindeki herhangi bir çokgene diğerinde eş olan bir çokgen bulunsa bu iki çokgene *eşbileşenli* veya *ayrışımla eşdeğerli* denir.

Sezişe dayanarak eşbileşenli iki çokgenin, bunlardan biri kesilip parçalara bölündüğünde ve bu parçalar uygun şekilde eklendiğinde ikinci çokgeni verecek neviden olduğunu söyliyebiliriz.

Bazı basit çokgenlerin bileşenlerine ayrılmasına dair birçok teorem vereceğiz.

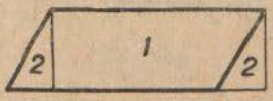
Teorem. *Bir üçgen, tabanı üçgenin tabanına ve yüksekliği üçgenin yüksekliğinin yarısına eşit olan bir paralelkenarla eşbileşenlidir.*

İspat açıktır (Şekil 224).



Şek. 224

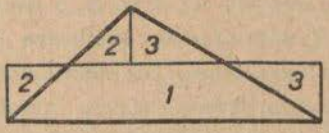
Teorem. *Bir paralelkenar, tabanı paralelkenarın uzun kenarı ve yüksekliği paralelkenarın bu kenarına ait yüksekliği olan dikdörtgenle eşbileşenlidir* (Şekil 225).



Şek. 225

Okuyucunun bunu ispatlaması tavsiye olunur. Neden uzun kenar kaydı konulmuştur?

Teorem. *Bir üçgen, tabanı üçgenin en büyük kenarı ve yük-*



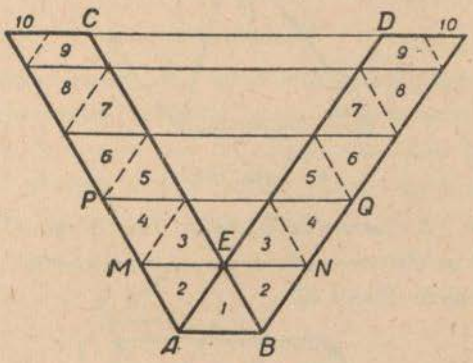
Şek. 226

sekliği üçgenin yüksekliğinin yarısı olan dikdörtgenle eşbileşenlidir (Şekil 226).

Okuyucunun bunu ispatlaması tavsiye olunur.

Teorem. *Tabanları ve yükseklikleri eşit olan paralelkenarlar eşbileşenlidir.*

AD ile BC kenarlarının E arakesit noktasından AB ye MN paralelini çizelim (Şekil 227) ve AM ye eşit MP, ... alalım. İspatın tamamlanmasını okuyucuya bırakıyoruz.

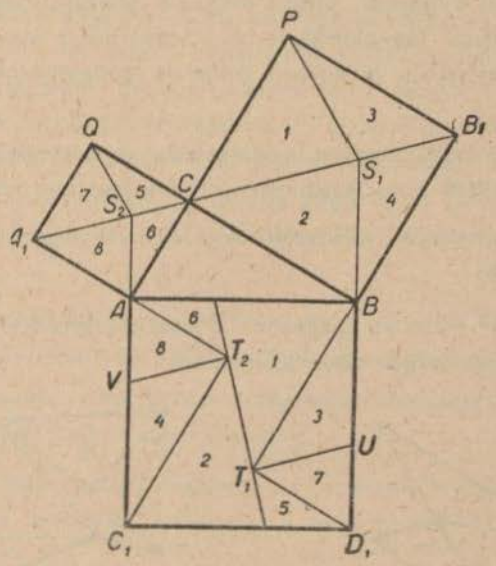


Şek. 227

Pitagor teoremi. *Bir dik üçgende dik kenarlar üzerine çizilen iki kareden ibaret şekil, hipotenüs üzerine çizilen kare ile eşbileşenlidir.*

İspat: Dik kenarlar üzerine çizilen karelerin A_1C ve CB_1 köşegenlerini çizerek A_1B_1 doğru parçasını elde edelim. Hipotenüs üzerine çizilen karenin C_1A ve D_1B kenarlarını A_1B_1 doğru parçasını S_2, S_1 noktalarında kesinceye kadar uzatalım ve S_1, S_2 noktalarını sırasıyla P, Q noktalariyle birleştirelim. Bu suretle dik kenarlar üzerine çizilen karelerden ibaret şekil sekiz üçgene ayrılmış olur. BB_1PC karesinin BB_1 kenarını uzatıp D_1 den BC ye çizilen D_1T_1 paraleli ile T_1 noktasında kesişti-

relim. Bunun gibi, A_1A kenarının C_1 den AC ye çizilen paraleli kestiği T_2 noktasını elde edelim. T_1 ve T_2 yi birleştirip A_1B_1 doğrusuna paralel olan T_1U ve T_2U doğrularını çizelim.



Şek. 228

Çizilen bu doğru parçaları, hipotenüs üzerine çizilen kareyi, ilk karelerle eş olan sekiz kareye ayırır. Bu üçgenlerin ikişer ikişer eş olduklarının ispat edilmesini tavsiye ederiz.

Eşitlik bağıntısı olarak eşbileşimi veya ayrışımla eş değerliliği alırsak, bu bağıntı basit çokgenler sınıfında şu özelikleri haiz olur:

1. **Refleksiflik:** Her basit çokgen kendisiyle eşbileşenlidir.

2. **Simetri:** Basit bir çokgen ikinci basit bir çokgenle eşbileşenli ise ikinci basit çokgen de bir üçüncü basit çokgenle

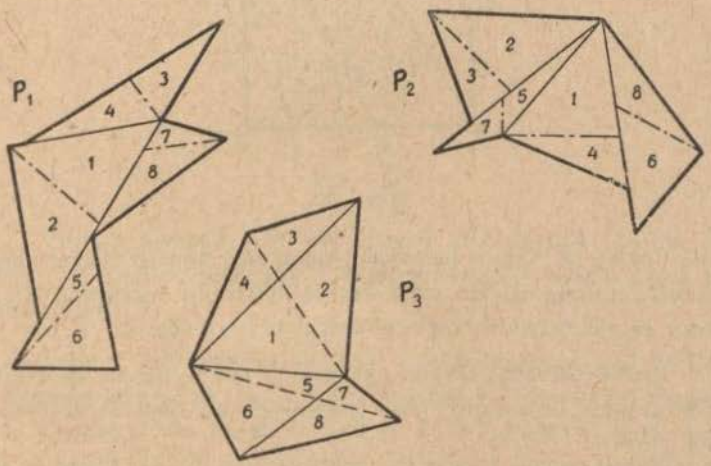
eşbileşenli ise, birinci basit çokgen üçüncü basit çokgenle eşbileşenlidir.

Bu son özelik tamamen açık değildir, zira, meselâ, ikinci çokgenin bir ayrışımla birinci çokgenle eşbileşenli olması ve birinci ayrışımın üçgenlerine eş olan üçgen ihtiva etmemek üzere ikinci bir ayrışımla da üçüncü çokgenle eşbileşenli olması mümkündür.

İlk iki özelik kolayca ispatlanabilir; ikincisi ispat edilince üçüncü özeliğin ispatı aşağıdaki teoremin ispatına irca edilir.

Bir üçüncüsüyle eşbileşenli olan basit iki çokgen, aralarında eşbileşenlidir.

İspat: P_1 ve P_2 çokgenleri P_3 basit çokgeniyle eşbileşenli olan basit iki çokgen olsun (Şekil 229).



Şek. 229

P_1 çokgeni P_3 çokgeniyle eşbileşenli olduğundan P_1 ve P_3 ün, ikişer ikişer eş üçgenler ihtiva eden ayrışımları mevcut olur.

Bunun gibi P_2 ile P_3 ün de ikişer ikişer eş üçgenleri olan ayrışımları vardır.

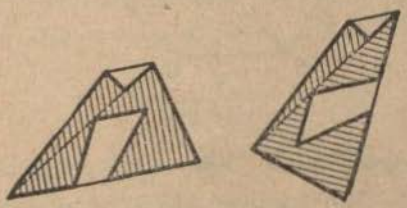
P_3 çokgeninin ayrışımlarını incelersek ikinci ayrışıma ait doğru parçalarının birinci ayrışıma ait üçgenleri çokgenlere ayırdığını görürüz. P_3 ün ikinci ayrışımının doğru parçalarını, P_3 deki herhangi üçgenin ayrışımına giren doğru parçaları P_1 deki eş üçgene aynı tarzda girecek şekilde, P_1 çokgeninin ayrışımına ekliyelim. Aynı şeyi P_2 çokgeninin ayrımı için de yapalım.

P_1 ve P_2 çokgenlerinin bu suretle ikişer ikişer eş çokgenler ihtiva eden ayrışımlar olacağından eşbileşenli olurlar ve bu, teoremi ispatlar.

Ohalde, basit çokgenler sınıfında, ayrışımla olan eşdeğerliliğin *eşitlik* bağıntısının şartlarını haiz olduğu görülmüş olur.

Böyle olmakla beraber basit çokgenler sınıfındaki eşitlik bağıntısını başka türlü de tarif edebiliriz.

Tarif. Verilen basit iki çokgenden herbirinin sonlu sayıdaki eş çokgenler çiftinden herbirine ait bir çokgenle birleşmesi



Şek. 230

halinde eşbileşenli iki bileşke çokgeni meydana geldiğinde bu basit iki çokgene *tamamlama suretiyle eşdeğerli* veya sadece *eşdeğerli* çokgenler denir.

Lobachevski, «Paraleller teorisine dair geometrik incelemeler» adlı kitabında şöyle demektedir. «İki yüzeyin eşitliğine ge-

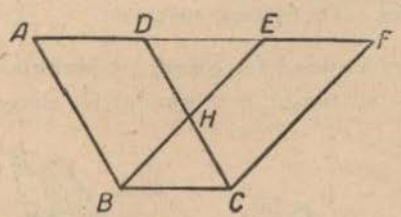
nel olarak hüküm vermek için şu teorem esas alınır: Eşit parçaların bileşemiyle meydana gelen veya eşit parçalara ayrışımı mümkün olan iki yüzey biribirine eşittir».

Lobachevski bu tarifi düzlemsel ve küresel basit çokgenlere ve Lobachevski geometrisinin basit çokgenlerine tatbik etmektedir.

Verilen basit bir çokgenle eşleğerli olan bütün çokgenlerden ibaret basit çokgenler sınıfı, verilen çokgenle eşbileşenli olan bütün basit çokgenlerin sınıfını bir kısmı olarak içine alır. Bunun has bir kısım olup olmadığının incelenmesi gerekir.

Teorem. *Tabanları ve yükseklikleri eşit olan iki paralelkenar eşdeğerlidir.*

Euklid'in verdiği tarzda bir ispat (1) sunuyoruz [22]. *ABCD* ve *EBCF* tabanları ortak olan iki paralelkenar olsun (Şekil 231).



Şek. 231

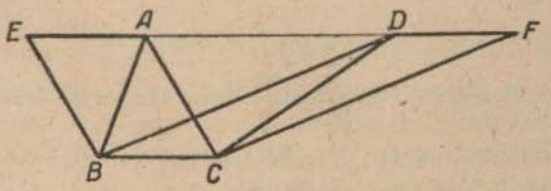
Euklid herşeyden evvel *ABE* ve *DCF* üçgenlerinin eşliğini ispat etmektedir. *DCF* üçgenine *ABCD* paralelkenarının, eklenmesi ile aynı *ABCF* yamuğu elde edilir ve verilen paralelkenarların eşdeğerliliği ispatlanmış olur.

İhtar. Euklid ne eşbileşim ve ne de eşdeğerlilik kavramını ithal ediyor. Sadece alan'a göre üçgenlerin eşitliği

(1) Daha evvel bu şekil paralelkenarların eşbileşenli, dolayısıyle eşdeğerli oldukları ispatlanmıştı. Yazar burada Arşimed aksiyomuna dayanmıyan bir ispat vermeği tercih ediyor.

kavramını kullanıyor. Alan kavramı Euklid tarafından ilkel ve tarif edilmez olarak kabul edilmiştir.

Aşağıdaki teorem de benzer tarzda ispatlanır: *Tabanları ve yükseklikleri eşit olan iki üçgen eşdeğerlidir.*

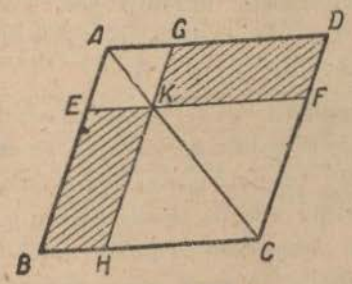


Şek. 232

Euklid, (teorem 37 sinde) *AEBC* ve *DFCB* eşdeğerli paralelkenarları düşünüp (Şekil 232) bunların yarıları olan *ABC*, *DBC* üçgenlerine geçmektedir. Yalnız eşdeğerlilik kavramına dayanan bir ispatın verilmesini bir temrin olarak tavsiye ediyoruz.

Euklid'in «Elemanlar» adlı eserindeki teorem 43 şöyle ifade edilebilir.

Teorem. *ABCD paralelkenarının* (Şekil 233) *herhangi bir K noktasından paralelkenarın kenarlarına EF* ve *GH paralelleri çizi-*



Şek. 233

lirse, ABCD nin bileşenlerini teşkil eden dört paralelkenardan AC köşegeninin geçmediği ikisi eşdeğerli olur.

Bu, Euklid'in alan teorisinin esas teoremlerinden birini teşkil etmektedir. Bu teoremden meselâ, herhangi bir çokgeninin bir kareye eşdeğerliliği elde edilebilmektedir. Bu teorem buraya sırf bir misal olmak üzere konulmuş ve ispat okuyucuya bırakılmıştır.

Aşağıdaki esas özelikler cari bulunmaktadır.

1. **Refleksiflik :** Her basit çokgen kendisiyle eşdeğerlidir.

2. **Simetri :** Basit bir çokgen bir ikincisiyle eşdeğerli ise bu ikincisi de birinciyle eşdeğerlidir.

3. **Tranzitiflik :** Basit bir çokgen bir ikincisiyle, ikinci çokgen de bir üçüncüsüyle eşdeğerli ise, birinci çokgen üçüncüsüyle eşdeğerlidir.

İlk iki özelik açıktır. Üçüncüsünün ispatını vermiyoruz [41], [15].

Süreklilik aksiyomlarını, özel olarak, Arşimed aksiyomunu kullanmadan bütün alan teorisini elde etmek için eşbileşim ve eşdeğerlilik kavramlarına ihtiyaç vardır. Hilbert [15], eşdeğerli basit iki çokgenin, Arşimed aksiyomu kullanılmaksızın, eşbileşenli olacağını ispat etmenin imkânsızlığını göstermiştir. Bu sebeple daha genel olan «tamamlama ile eşdeğerlilik kavramının ithali zarurî görülmüştür.

Taban ve yüksekleri eşit iki paralelkenarın, taban ve yükseklerı eşit iki üçgenin eşdeğerli oldukları ve dik kenarlarından biri verilen ve basit bir çokgenle eşdeğerli olan dik üçgenin çiziminin yapılabileceği, sıra ile ispatlandıktan sonra Hilbert, bu teoremlerin, ancak *bütün basit çokgenler eşdeğerli değildir* şeklindeki özeliğin ispatından sonra önem kazanacağına işaret etmiştir.

Hilbert'in bu görüşünü aydınlatmak için cebirsel işlem tarif edilmiş evvelce bilmediğimiz bir cümlenin bir gurup teşkil

ettiğini ve cümlenin gurup olmasından da önemli neticeler, kısacası, bir teori çıkarıldığını kabul edelim.

Bu teori, tabiatiyle gurupun sonradan, sadece bir elemanından ibaret olduğu ispat edilse idi bütün önemini kaybetmiş olurdu.

Bununla beraber Hilbert, Arşimed aksiyomunu kullanmaksızın *tamamlama ile eşdeğerli olan ve tabanları eşit olan iki üçgenin yüksekliklerinin eşit olduğunu* ispatlamaya muvaffak olmuştur. Bundan, tabanları eşit olan iki üçgenin eşdeğerli olamıyacağı; dolayısıyla bütün basit çokgenlerin eşdeğerli bulunmadığı elde edilmiş bulunur.

Adı geçen bu teorem Euklid'in «Elemanlar» ındaki 39. teoremden başka birşey değildir. Alanların büyüklük olması fikrine dayanan Euklid'in ispatının, basit çokgenlerin «eşit», «daha büyük» ve «daha küçük» bağıntıları ithal edilmedikçe kabul edilmiyeceğini görüyoruz. Hilbert, Arşimed aksiyomunu kullanmaksızın şu teoremi ispat etmiştir: *Bir dikdörtgen doğru parçalariyle üçgenlere bölünse ve bu üçgenlerden biri atılsa, bu dörtgenin geri kalan üçgenlerle teşkili mümkün değildir.*

Hilbert, Arşimed aksiyomunu kullanmadan basit çokgenler sınıfında «daha büyük» ve «daha küçük» kavramlarını ithal ve alan ölçüsünü tarif etmiştir. Alan teorisi süreklilik aksiyomunu kullanmadan elde edilmiş olarak kabul edilebilir. Bundan sonra da bütün basit çokgenler sınıfına büyüklükler sınıfı olarak bakılabilir. Bunun gibi bütün alan teorisinin de gerek Euklid'in gerekse Lobachevski'nin paralel aksiyomlarını kullanmadan elde edilebileceği gösterilmiştir.

57. Çokgenlerin dönüşümü

Tamamlama ile eşdeğerli olan iki üçgenin tabanları eşit olduğunda yükseklerinin de eşit olacağını ispatsız olarak kabul-

edersek şu teorem ispatlanabilir: *Eşdeğerli herhangi basit iki çokgen eşbileşenlidir* (1).

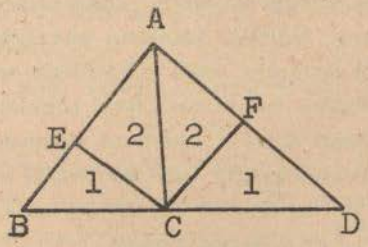
Bu teoremi ispatlarken aksiyomların kullanılması hususunda kendimizi sınırlamıyacağız ve hareketin temel özeliklerinin bilindiğini kabul edeceğiz.

İspat birçok teoremlere bölünmüştür:

Birinci teorem. *Bir üçüncüsüyle eşbileşenli olan iki çokgen aralarında eşbileşenlidir.*

Bunun ispatı evvelki maddede verilmişti.

İkinci teorem. *A tepe noktalariyle AC kenarları ortak olan*



Şek. 234

ve aynı doğru üzerinde bulunan BC ve CD tabanları eşit olan ABC ile ADC üçgenleri eşbileşenlidir (Şekil 234).

İspat: *BD* doğru parçasının *C* noktasından *AD* ve *AB* kenarlarına sırayla paralel *CE* ve *CF* doğrularını çizersek verilen üçgen, ikişer ikişer eş olan

(1) Bu teorem, biraz başka türlü ifade olunarak 19. yüzyılın ilk yarısında ilk defa macar matematikçisi F. Bolyai tarafından ispat edilmiştir. İspat sonradan birkaç kere basitleştirilmiş ve bu ispatlardan biri çok basit bir şekilde B. F. Kagan tarafından verilmiştir [25]. Burada verdiğimiz bu son ispatın az çok değişmiş bir şeklidir.

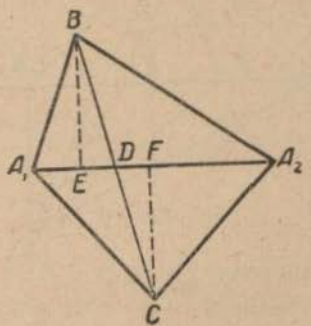
$$\triangle BEC = \triangle CFD$$

$$\triangle AEC = \triangle CFA$$

bileşenlerine ayrılmış ve teorem ispatlanmış olur.

Üçüncü teorem. *Eşdeğerli iki üçgenden birinin bir kenarı diğerinin bir kenarına eşit ise bu iki üçgen eşbileşenlidir.*

İspat. Verilen üçgenleri, A_1BA_2 ve A_1CA_2 yi, taban olarak düşündüğümüz eşit kenarları ortak olacak ve üçgenler ortak tabanın birer tarafında bulunacak ve A_1 deki açıları dar olacak şekilde çizelim (Şekil 235).



Şek. 235

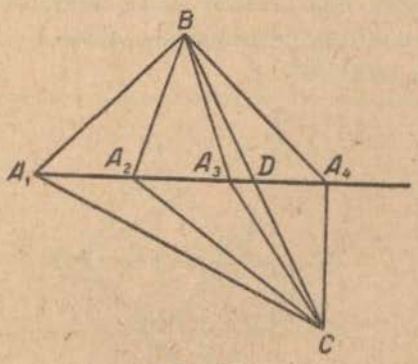
Üçgenler eşdeğerli olduğundan BE ve CF yükseklikleri birbirine eşit olur ve dolayısiyle meydana gelen dörtgenin BC köşegeni A_1A_2 ortak tabaniyle D noktasında iki eşit kısma bölünür.

Üçgenlerin teşkil ettiği dörtgen ya konvekstir veya değildir.

1. A_1BA_2C dörtgeninin konveks olduğunu farz edelim. BC köşegeni tamamen dörtgenin içinde kalacağından A_1BA_2 ve A_1CA_2 üçgenlerini A_1BD, BDA_2, A_1DC ve DCA_2 üçgenlerine ayırır.

İkinci teoremden dolayı A_1BD ve A_1DC üçgenleri eşbileşenlidir. Aynı sebepten BDA_2 ve DCA_2 de eşbileşenlidir. Okuyucunun, A_1BA_2 ve A_1CA_2 üçgenlerine «kesilebilecek» bütün eş üçgen çiftlerinin çizimini yapması tavsiye olunur.

2. A_1BA_2C dörtgeninin A_2 açısı 180° dereceden büyük olabilir. Bu takdirde BC köşegeni dörtgenin dışında bulunur (Şekil 236). A_1A_2 doğrusu üzerinde A_1 den A_2 ye doğru ve A_1A_2 ye eş A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ doğru parçalarını alalım.



Şek. 236

Arşimed aksiyomuna göre, D noktası A_{n-1} ile A_n noktalarının arasında bulunacak ve dolayısiyle $A_{n-1}BA_nC$ dörtgeni konveks olacak şekilde bir n tam sayısı (şekilde $n=4$) bulunabilir. Biraz evvelki ispata göre de A_3BA_4 ve A_3CA_4 üçgenleri eşbileşenlidir. İkinci teoreme göre de

$$A_1BA_2,\ A_2BA_3,\ \ldots,\ A_{n-1}BA_n$$

üçgenleri bir taraftan,

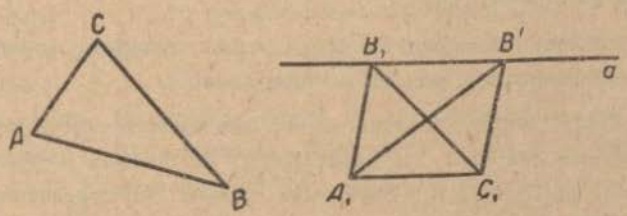
$$A_1CA_2,\ A_1BA_3,\ \ldots,\ A_{n-1}CA_n$$

üçgenleri diğer taraftan aralarında eşbileşenli bulunmaktadırlar.

Bunlardan ve eşbileşimin tranzitiflik özeliğinden $A_1 BA_2$ ve $A_1 CA_2$ üçgenlerinin eşbileşenli oldukları çıkmış olur.

Dördüncü teorem. *Eşdeğerli herhangi iki üçgen eşbileşenlidir.*

İspat. ABC ve $A_1 B_1 C_1$ üçgenleri eşbileşenli olsunlar (Şekil 237). AB kenarı A_1B_1 kenarına eşitse iddiamız üçüncü teoremden dolayı doğrudur. AB nin $A_1 B_1$ den büyük olduğunu farzedelim. $A_1 B_1 C_1$ üçgeninin B_1 tepe noktasından $A_1 C_1$ kenarına paralel a doğrusunu çizip a üzerinde $A_1 B' = AB$ olacak şekilde bir B' noktası alalım.



Şekil 237

$A_1 B_1 C_1$ ve $A_1 B' C$ üçgenleri tabanları ve yükseklikleri eşit olduğundan eşdeğerli, ortak $A_1 C_1$ kenarları olduğu için de üçüncü teoremden dolayı eşbileşenlidirler.

$A_1 B' C_1$ üçgeni $A_1 B_1 C_1$ üçgeniyle ve beriki de ABC üçgeniyle eşdeğerli olduğundan eşdeğerliliğin tranzitiflik özeliğinden ABC ve $A_1 B' C_1$ üçgenleri eşdeğerli olurlar. Bu üçgenlerin AB ve $A_1 B'$ kenarları da eşit olduğu için eşbileşenli oldukları çıkar. Ohalde eşbileşimin tranzitiflik özeliği dolayısiyle verilen ABC ve $A_1 B_1 C_1$ üçgenlerinin eşbileşkenli oldukları ispatlanmış olur.

Beşinci teorem. *Her çokgen, kendisiyle eşdeğerli olan bir üçgenle eşbileşenlidir.*

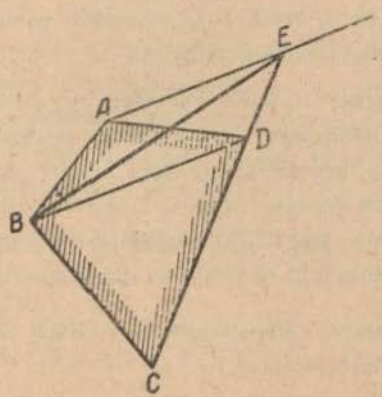
İspat. Evvelâ, keyfî iki ABC ve $A_1 B_1 C_1$ üçgeninin topla-

miyle (bu ikisinden ibaret şekille) eşbileşenli olan konveks bir dörtgenin nasıl çizileceğini gösterelim.

ABC ve $A_1B_1C_1$ üçgenlerinde birinin hiçbir kenarı diğerinin bir kenarına eşit değilse $AB > A_1B_1$ farzedip $A_1B' = AB$ eşitliğini kullanarak $A_1B_1C_1$ üçgeniyle eşbileşenli olan $A_1B'C_1$ üçgenini çizelim (Şekil 237). ABC ve $A_1B'C_1$ üçgenlerinin eşit kenarlarını üstüste ve C ile C_1 tepe noktalarını ortak tabanın birer tarafında alalım. Bu suretle konveks bir dörtgen elde edildiğinde (Şekil 235 deki gibi) çizim bulunmuş olur. Dörtgenin konveks olmaması halinde üçüncü teoremin ispatındaki çizim tatbik edilir (Şekil 236).

Bu usulle herhangi iki üçgen yerine, bunların toplamıyla eşbileşenli olan konveks bir dörtgen alınabilir.

Euklid usulünü kullanarak konveks dörtgeni eşbileşenli bir üçgene irca edebiliriz. Konveks $ABCD$ dörtgeninin A tepe noktasından (Şekil 238) BD köşegenine paralel AE doğrusunu çizelim. AE ile CD nin arakesitine E diyecek olursak ABD ve BDE üçgenlerinin eşbileşenli olmalarından (üçüncü teorem dolayısıyla) BCE üçgeni $ABCD$ dörtgeniyle eşbileşenli olur.



Şek. 238

Bu suretle şu neticeyi elde etmiş oluruz: *Herhangi iki üçgen yerine bunların toplamiyle eşbileşenli olan bir üçgen alınabilir.*

Herhangi basit bir çokgeni üçgenlere ayırarak ve bu üçgenlerden ikisi yerine bunlara toplamiyle eşbileşenli olan üçgeni alarak ve bu üçgene ayrışımın üçgenlerinden birini daha katarak ve böylece devam ederek nihayet verilen çokgeni eşbileşenli bir üçgene irca etmiş oluruz.

Altıncı teorem. *Eşdeğerli basit herhangi iki çokgen biribiriyle eş bileşenlidir.*

İspat. P_1 ve P_2 eşdeğerli basit iki çokgen olsun. P_1 ve P_2 ile sırayla eşbileşenli $\triangle_1$ ve $\triangle_2$ üçgenlerini çizelim. Tranzitiflik özeliğinden $\triangle_1$ ile $\triangle_2$ eşdeğerli, dördüncü teoremden dolayı da eşbileşenlidir. Eşbileşimin simetri ve tranzitifliğinden dolayı P_1 çokgeninin $\triangle_1$ ile eşbileşenli, dolayısiyle $\triangle_2$ ile ve P_2 ile eşbileşenli olduğu elde edilir ve ispat sabit olur.

Yapmış olduğumuz bu incelemeden, *Arşimed aksiyomunun kullanılmasiyle* verilen basit bir çokgenle eşbileşenli olan basit çokgenler sınıfının, verilen çokgenle eşdeğerli olan basit çokgenler sınıfıyla aynı olduğu görülmüş olur.

Hilbert, Arşimed aksiyomunun ele almadan sadece geri kalan aksiyomlar kullanıldığında bu sınıfların özdeşliğinin cari olamadığını ispatlamıştır.

Bundan sonra, eşbileşimle eşdeğerli olan veya *eşbileşenli* basit çokgenlerle; tamamlama ile eşdeğerli olan veya sadece *eşdeğerli* olan basit çokgenler arasında fark gözetmiyebileceğiz. Herhangi bir hareketle biri diğerine götürülebilen çokgenlere «eş» diyeceğiz.

Lobachevski bu farkı şöyle ifade etmektedir: «Biri yerine fark gözetmeksizin diğeri alınabilen geometrik büyüklüklere eş denir. Eşliğin kriteri biri diğerinin üzerine konulduğunda birin-

cinin tepe noktalariyle doğrularının ikincinin tepe noktaları ve doğrulariyle çakışmasıdır. Eğer geometrik iki büyüklük eş ise sadece kısım kısım eşittir» [30].

58· Basit çokgenlerin alanlarını ölçme problemi

Doğru parçaları halinde olduğu gibi, basit şekillerin her hangi sınıfının ölçme problemi, verilen sınıfın her şekline aşağıdaki şartları sağlıyacak şekilde bir sayı tekabül ettirmekten ibarettir.

1. *Eş şekillere bir tane sayı tekabül eder* (hareketlere göre değişmezlik özeliği).

2. *İki şeklin toplamına tekabül eden sayı, şekillerden herbirine tekabül eden sayıların toplamına eşittir* (toplanabilme özeliği).

«İki şeklin toplamı» ndan ancak sınırları üzerinde ortak noktaları olabilen iki şekilden ibaret şekli anlıyoruz (5).

Verilen bir sınıfın her şekline 1 ve 2 şartlarını sağlıyacak tarzda bir sayı tekabül ettirildiğinde verilen sınıfın şekillerine ait *ölçme sistemi* elde edilmiştir denir ve bir şekle tekabül ettirilen sayıya şeklin *ölçü* sü adı verilir.

Bir doğru parçasının *ölçüsü* nün nasıl elde edileceğini evvelden bilmekteyiz; bu ölçüye doğru parçasının *uzunluk*'u denir.

Bütün şekiller hatta bütün sonlu olanların sınıfı için ölçme sistemi elde edilmesinin imkânsız olduğuna işaret etmeliyiz. Sade basit çokgenleri mütalaa ederek bir çokgenin ölçüsüne *alan* diyeceğiz.

İhtar. Tepe noktaları bir doğru üzerinde bulunan üçgenlere daima «o» sayısını tekabül ettireceğiz.

Burada da, doğru parçalarında olduğu gibi, her şeyden evvel basit çakgenler için ölçme sisteminin mümkün olup olmadığı sorusuna cevap vermek ve mevcutsa mümkün bütün ölçme sistemlerinin bulunması gerekmektedir.

Doğru parçaları için bir ölçme sisteminin seçilmiş olduğunu kabul ederek aşağıdaki teoremleri [41], [1] elde edeceğiz:

Teorem 1. *Herhangi bir üçgende bir kenar ile karşı yüksekliğin çarpımı kenarların seçimine bağlı değildir.*

İhtar : Bundan sonra «doğru parçalarının uzunluklarının çarpımı» yerine sadece «doğru parçalarının çarpımı» diyeceğiz.

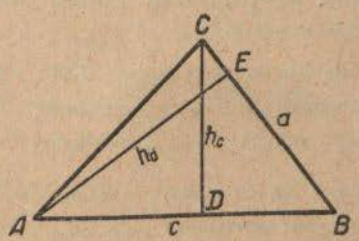
İspat. ABC üçgeninde AE ve CD yüksekliklerini çizelim (Şekil 239). B açıları ortak olan AEB ve CDB dik üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{h_a}{c} = \frac{h_c}{a}$$

veya $ah_a = ch_c$ elde eder ve

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

buluruz.



Şek. 239

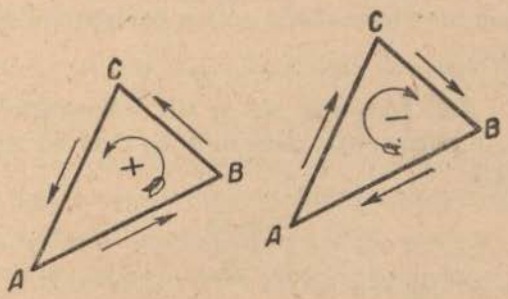
Sabit pozitif bir k sayısı seçer ve her üçgene, bir kenarının karşı yükseklikle çarpımının k katı olan

$$S = k\,ah_a$$

sayısını tekabül ettiririz.

Eş olan üçgenlere eşit olan üçgenlere *eşit sayılar* tekabül edeceği açıktır.

Herhangi bir *ABC* üçgenin çevresinde, saat yönünde ve saatin aksi yönünde olmak üzere iki yönde gidilebilir. Bir boyutlu bir üçgene bu yönlerden birini vermeğe üçgeni yönleme veya *yön* tekabül ettirme denir. Mümkün olan bu iki yönden birine pozitif diğerine negatif yön denip, (Şekil 240) da olduğu gibi, saatin aksi yönü adet olarak pozitif yön itibar edilir.



Şek. 240

ABC üçgeninin kenarlarından birinin yönü (*AB* veya *BA*) üçgenin yönünü tamamen belirler.

Bu bahiste bundan sonra geçecek bütün ifadeler bir düzlem üzerinde bulunan şekilleri ilgilendirmektedir. Verilen üçgenler, aksi söylenmedikçe, pozitif yönlü addedilecektir.

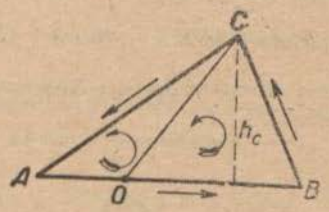
Teorem. *Keyfi bir O noktası, verilen yönlü bir ABC üçgeninin tepe noktasına birleştirilse ve elde edilen üçgenlerin yönleri ABC üçgeninin AB, BC ve CA kenarlarının yönleriyle belirlenmiş olsa, O noktasını tepe noktası kabul eden pozitif yönlü üçgenlerin «S sayıları» nın toplamı ile negatif yönlü olanların «S sayılarının» toplamı arasındaki fark verilen üçgenin «S sayısı» na eşit olur.*

Farklı beş hal ele alacağız:

1. *O noktası kenarlardan biri üzerindedir* (Şekil 241). Evvelce ithal ettiğimiz harfleri kullanırsak

$$S_{ABC} = kch_c;\ S_{AOC} = k \cdot AO \cdot h_c;\ S_{OBC} = k \cdot OB \cdot h_c$$

ve bunlardan

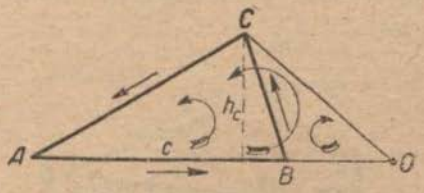


Şek. 241

$$S_{AOC} + S_{OBC} = k(AO + OB)\,h_c = kch_c = S_{ABC}$$

elde ederiz.

2. *O noktası kenarlardan birinin uzantısı üzerindedir* (Şekil 242). Şekilden



Şek. 242

$$S_{OCA} = k \cdot AO \cdot h_c;\ S_{OBC} = k \cdot BO \cdot h_c$$

ve bunlardan da

$$S_{OCA} - S_{OBC} = k(AO - BO)\,h_c = k\,ch_c = S_{ABC}$$

elde olunur.

3. *O noktası üçgenin içindedir.* (Şekil 243). Meselâ CO yu, AB yi D noktasında kesinceye kadar uzatırsak evvelki hallere göre

$$S_{OCA} = S_{DCA} - S_{DOA};\quad S_{OBC} = S_{DBC} - S_{DBO}$$

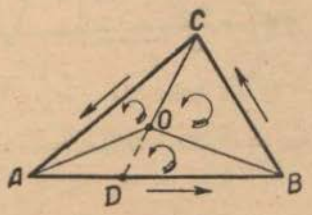
$$S_{OAB} = S_{DOA} + S_{DBO}$$

elde eder ve bunlardan

$$S_{OCA} + S_{OBC} + S_{OAB} = (S_{DCA} - S_{DOA}) + (S_{DBC} - S_{DBO}) +$$

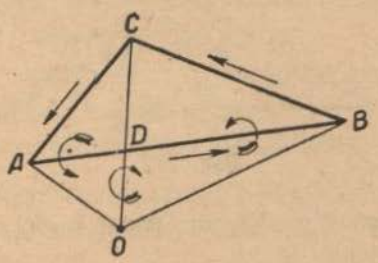
$$(S_{DOA} + S_{DBO}) = S_{DCA} + S_{DBC} = S_{ABC}$$

buluruz.



Şek. 243

4. *O noktası verilen üçgenin dışında, açılardan da birinin içindedir* (Şekil 244).



Şek. 244

Adı geçen açı C olsun. AB kenariyle OC ışınının arakesitine D deyip evvelki hallere göre

$$S_{OCA}=S_{DAO}+S_{DCA};\quad S_{OBC}=S_{DOB}+S_{DBC};$$

$$S_{OAB}=S_{DAO}+S_{DOB}$$

yazar ve

$$S_{OCA}+S_{OBC}-S_{OAB}=(S_{DAO}+S_{DCA})+(S_{DOB}+S_{DBC})$$

$$-(S_{DAO}+S_{DOB})=S_{DCA}+S_{DBC}=S_{ABC}$$

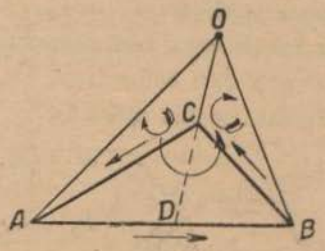
elde ederiz.

5. *O noktası verilen üçgenin iki kenarının uzantılarının açısı içindedir* (Şekil 245). Evvelki neticelerden

$$S_{OAB}=S_{DOA}+S_{DBO};\ S_{OCA}=S_{DOA}-S_{DCA};$$

$$S_{CBO}=S_{DBO}-S_{DBC}$$

ve bunlardan da



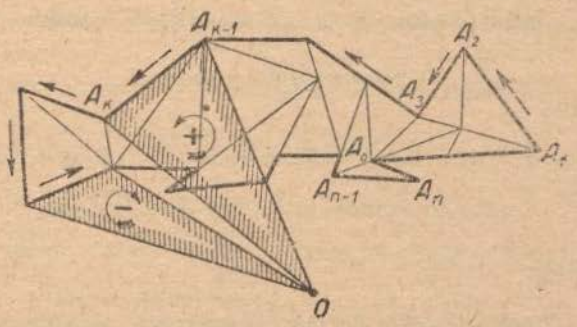
Şek. 245

$$S_{OAB}-S_{OCA}-S_{CBO}=(S_{DOA}+S_{DBO})-(S_{DOA}-S_{DCA})$$

$$-(S_{DBO}-S_{DBC})=S_{DCA}+S_{DBC}=S_{ABC}$$

elde olunur.

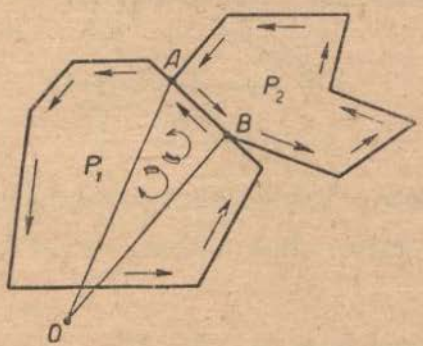
Şimdi pozitif yönlü bir $A_0A_1A_2A_3\ldots A_n$ basit çokgenini alalım (Şekil 246) ve ayrıca bu çokgenin herhangi bir tarzda N tane üçgene ayrıldığını farzedelim ve keyfî bir O noktası alalım. Bu takdirde aşağıdaki teorem cari olur:



Şek. 246

Teorem. *Tabanları çokgenin kenarları ve tepe noktaları O olan pozitif yönlü üçgenlerin «S sayıları» nın toplamı ile negatif yönlü üçgenlerin «S sayıları» nın toplamı arasındaki fark bileşimi teşkil eden üçgenlerin «S sayıları» nın Σ toplamına eşittir.*

Teoremin, komşu olan her P_1 ve P_2 çokgenleri için, diğer bir deyimle, birer kenarı veya birer kenarının bir kısmı ortak olan ve ortak iç noktaları bulunmıyan P_1 ve P_2 çokgenleri için doğru olduğunu farz edelim (Şekil 247). Bundan başka AB,



Şekil 247

bu P_1, P_2 çokgenlerinin ortak kenarı veya ortak kenarının bir kısmı olsun.

İhtar. P_1 ve P_2 çokgenlerinin ortak kenarlarının cümlesi bazı noktalardan hatta boş cümleden ibaret olabilir.

Tepe noktası O ve tabanı AB olan üçgenin P_1 çokgenine göre bir yönü mevcut olup P_2 ye göre yönü bunun tersidir. Şekil 247 de OAB nin P_1 çokgenine göre yönü pozitif, aynı OAB üçgeninin P_2 çokgenine göre yönü ise negatiftir.

Tepe noktaları O, çokgenlerden birinin kenarlarını taban kabul eden üçgenlerin «S sayıları» nın cebirsel S^* toplamında, AB kenarı ortak olan üçgenlerle ilgili terimler biribirini yokeder. Geriye P_1 ve P_2 çokgenlerinin toplamı olan P çokgeninin kenarlariyle ilgili terimler kalır. Aynı zamanda bileşim üçgenlerinin «S sayıları» nın Σ_1 ve Σ_2 toplamlarının

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

eşitliğini vereceği açık olup burada Σ, P_1 ve P_2 çokgenlerinin bileşiminden elde edilen P nin bileşimine ait üçgenlerin «S sayıları» nın toplamını göstermektedir. Yaptığımız kabülden dolayı

$$S_1^* = \Sigma_1 \quad \text{ve} \quad S_2^* = \Sigma_2$$

olup

$$S_1^* + S_2^* = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma$$

elde edilir.

Diğer taraftan, S^*, tepe noktaları O olan ve P çokgeninin kenarların taban kabul eden üçgenlerin «S sayıları» nın toplamını gösterdiğine göre yukarıda bulunan neticeden

$$S_1^* + S_2^* = S^*$$

yazar ve

$$S^* = \Sigma$$

elde ederiz.

Teorem 3 ün ispatı şöyle tamamlanır: Teorem 3, üçgen için ($n = 1$) doğrudur, zira, bu halde teorem 2 den ibarettir. Teoremi,

n üçgene ayrılan çokgenler için doğru kabul edersek, $n+1$ üçgene ayrılan çokgenler için doğru kaldığı görülür, zira, $n+1$ üçgene ayrılan bir çokgene bir üçgenle n üçgenin bileşimi olarak bakılabilir.

Netice 1. *Σ sayısı O noktasına bağlı olmadığından S^* sayısı O ya bağlı değildir.*

Netice 2. *Σ sayısı çokgenin üçgenlere ayrılması şekline bağlı değildir.*

Şimdi basit her çokgene $\Sigma = S^*$ sayısını tekabül ettirelim.

Her basit çokgene bir Σ sayısının verilmesi basit çokgenlerin alanlarının ölçme sisteminin fiilen elde edilmesini sağlar. Bu böyledir, çünkü bu şekilde tekabül ettirilen sayılar evvelâ *değişmezlik özeliğini* — çokgenler ikişer ikişer eş üçgenlere ayrılabildiğinden eş iki basit çokgenden her birine bir ve aynı sayı tekabül eder — ve sonra *toplanabilme özeliğini* — iki çokgenin toplamı olan çokgene tekabül eden sayı toplanan çokgenlere tekabül eden sayıların toplamına eşittir — haizdir.

Yukarıda elde edilen Σ sayısından basit çokgenin *alanı* olarak bahsedebiliriz. Aynı zamanda basit çokgenlerin alanının sonsuz sayıda ölçme sistemi vardır ve mevcut olduğu da ispat edilmiş bulunmaktadır.

Her $k > 0$ sayısına özel bir ölçme sistemi tekabül etmektedir. Üçgenin alanını gösteren

$$S_\Delta = k\, a h_a$$

ifadesinde $k > 0$ sayısı istenildiği gibi seçilebilir. Bu k sayısının seçimi birim alanı tesbit etmektedir. Alan birimi olarak adet olduğu veçhile kenarları birim uzunluk olan kare alınır. Bu kareyi bir köşegeni ile iki üçgene ayırmak suretiyle

$$1 = 2 \cdot k \cdot 1 \cdot 1$$

ve dolayısiyle $k = 1/2$ elde ederiz. Üçgen alanı için de bildiğimiz

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$$

formülünü buluruz.

Alan birimi için bu seçim yapıldığında basit herhangi çokgenin alanı *birim kare* cinsinden ifade edilir. Ayrıca, açıklamış olduğumuz ölçme sisteminin, değişmezlik ve toplanabilme şartlarını sağlayan ve birim uzunluk üzerine çizilen kareye birim alan tekabül ettiren *yegâne* sistem olduğunu göstermek güç değildir.

Üçgenin alanını veren

$$S_\Delta = ka\, h_a$$

ifadesinden, herhangi pozitif k sayısı için, *tabanları eşit olan üçgenlerin alanları eşit olduğunda* yükseklerinin de eşit olduğu çıkar.

İhtar. Birim alan olarak kenarları birim uzunluk olan eşkenar üçgen alınacak olursa, k sayısı

$$1 = k \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ile belirli olur,

Üçgensel birimlerle ölçüldüğünde bir üçgenin alanı

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{3} a h_a$$

formülü ile verilir.

Birim alan olarak, yarıçapı birim uzunluk olan bir daire alanını da almak mümkündür. Böyle *dairesel* bir birimle üçgeninin alanı, sağlanabileceği gibi

$$S_\Delta = \frac{1}{2\pi} a h_a$$

şeklini alır.

Basit çokgenlerin alanlarına ait elde etmiş olduğumuz ölçme sisteminden tamamlama ile, *eşdeğerli olan basit çokgenlerin alanlarının eşit olduğu* çıkar. Bu, tamamlama ile eşdeğerli olan çokgenlerin eşbileşim dolayısiyle eşdeğerli veya eşbileşenli olmalarının neticesidir.

Her basit çokgen bir üçgenle eşbileşenli olduğundan şu netice elde edilir : *Basit iki çokgenin alanları aynı ise işbileşenli olurlar ve tamamlama ile de haydi haydi eşdeğerli olurlar.*

59. Düzlemsel bir şeklin alan kavramına dair.

Basit çokgenlerin alanlarının ölçme sisteminin elde edilmesi gibi herhangi diğer düzlemsel şekiller sınıfına ait alanların ölçme sistemi problemini de ele alabiliriz. Evvelce de söylediğimiz veçhile düzlemsel bütün şekiller için hatta bütün sonlu şekiller için diğer bir deyimle, her biri bir kare içinde olanlar için ölçme sistemi elde etmek imkânsızdır.

Düzlemsel şekillerin alanları için bir ölçme sistemi elde etmek için herşeyden evvel :

A. Bütün basit çokgenleri içine alacak kâfi derecede geniş düzlemsel şekiller sınıfı bulmak.

B. Bulunan bu sınıftaki her şekle aşağıdakileri sağlıyan pozitif bir sayı tekabül ettirmek gerekmektedir.

C. Verilen sınıfın eş iki şekline eşit sayılar tekabül eder (değişmezlik özeliği).

. Verilen sınıfa ait olup ortak iç noktaları olmıyan iki şeklin toplamından ibaret şekle, toplanan şekillerden her birine tekabül eden sayıların toplamına eşit sayı tekabül eder (toplanabilme özeliği).

Adı geçen sınıfın her şekline, *değişmezlik* ve *toplanabilme*

özeliklerini sağlıyan pozitif bir sayı tekabül ettirildiğinde, bu sayıya, buna karşılık olan şeklin *alan* ı diyeceğiz.

Yukarıda sıralanan özeliklere ilâve olarak bir özelik daha veriyoruz:

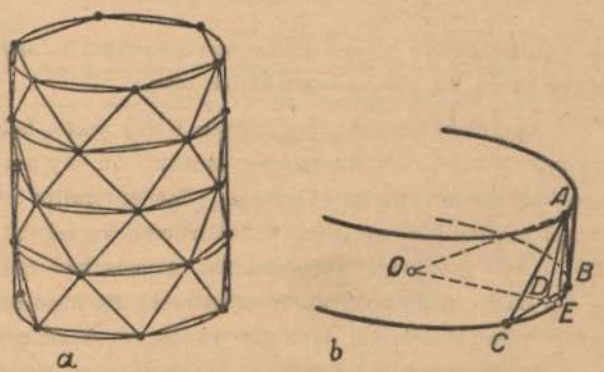
E. Verilen sınıfın bir şeklinin alanı verildiğinde, sayı veya alan tamamen ve bir türlü olarak belirli olur.

Aşağıdaki hususa işaret edelim: Bir şekle belirli bir sayının tekabül ettirilmesinden hemen bu sayının şeklin *alan* ı olduğuna hüküm veremeyiz. Seçilen sınıfın her düzlemsel şekline bir sayı tekabül ettirilmeli ve tekabül «C», «D» ve «E» şartlarını sağlamalıdır. Mesela her daireye iç ve dış basit çokgenlerin alanlarının ortak limitine eşit olan sayıyı tekabül ettirmek istesek, bu sayıyı, basit çokgenleri, daireleri, dairelerin dilim ve parçalarını v.s. içine alacak bir şekil sınıfı için bir *alan ölçme sistemi* elde etmedikçe veya edinceye kadar dairenin alanı olarak gözetemeyiz. Ancak, A, B, C, D ve E şartlarını haiz bir *alan ölçme sistemi* mevcut olduğunda, meselâ, dairenin alanından bahsedebiliriz.

Düzlemsel şekillerin alanlarının ölçme sistemine ait sayılan şartlar, tabiatiyle yüzeyler sınıfının alanlarının ölçme sistemine teşmil olunabilir [84]. Bununla ilgili olarak, yüzeylerin, yüzey *içine çizilen* çok yüzlünün alanının limit olarak alınan sezişe dayanan alan kavramının istenilen neticeyi vermiyebileceğini belirtelim. Elde edilen limit, alanların verilen ölçme sisteminde, verilen yüzeyin alanı olarak alınabilecek bir sayı vermiyebilir.

Schwartz tarafından verilen bir misali ele alalım. Bir dönel silindirin yarıçapı R ve yüksekliği H olsun. H yüksekliğini n eşit parçaya bölüp noktalardan silindirin $n-1$ tane paralelini çizelim.

Ayrıca, üst tabanın içine m kenarlı düzgün bir çokgen, yukarıdan birinci paralel içine birinci çokgene eş olan ve tepe noktaları birinci çokgenin kenarlarının ortasından geçen düzlemler üzerinde bulunan bir çokgen çizelim (Şekil 248 a).



Şek. 248

İkinci paralel içine, tepe noktaları üst taban içine çizilen çokgenin tepe noktalarından geçen meridyenler üzerinde bulunan m kenarlı bir çokgen çizelim. Üçüncü paralel içine de, tepe noktaları birinci paralel içine çizilen çokgenin tepe noktalarından geçen meridyenler üzerinde bulunan m kenarlı bir çokgen çizelim ve böylece devam edelim. Her çokgen bir üsttekinden, silindirin eksenine paralel H/n uzaklığı kadar bir öteleme ve eksen etrafında π/m açısı kadar bir dönme ile elde edilir.

m kenarlı her çokgenin tepe noktalarını komşu çokgenlerin tepe noktalarına birleştirelim ve çizdiğimiz ikizkenar ABC üçgenlerinin alanlarının toplamını hesap edelim (Şekil 248 b).

ABC üçgeninin BC tabanı

$$BC = 2R \sin \frac{\pi}{m},$$

yüksekliği ise

$$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}$$

veya

$$AD=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2+\left(R-R\cos\frac{\pi}{m}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

ye eşittir.

Ohalde silindirin yanal yüzeyi içine çizilen çokyüzlünün alanı olarak

$$S(m,n)=2R\,mn\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{m}}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ise

$$S(m,n)=2\pi R\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{\pi^2}{4}R^2\left(\frac{n}{m^2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)}$$

olarak yazılabilir.

Bu ifadeden, $S(n,m)$ nin $n\to\infty$ ve $m\to\infty$ için limitinin m ve n nin sonsuza gitme şekline bağlı olacağı neticesi çıkar.

m ve n nin n/m^2 oranı belirli q limitini haiz olacak şekilde değiştiğini kabul edersek

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} S(m,n)=2\pi R\sqrt{H^2+\frac{\pi^4}{4}R^2q^2}.$$

Meselâ, m ve n sayıları

$$\lim\frac{n}{m^2}=q=1$$

olacak şekilde değiştiğinde $S(m,n)$ nin limiti

$$2\pi R\sqrt{H^2+\frac{\pi^4}{4}R^2}$$

ifadesine eşit olur. Bu limit, paraleller içine m kenarlı çokgenler çizilmesi ve silindirin yüksekliği $n=m^2$ eşit parçaya bölünmesi halinde elde edilir.

Bu sefer, m ve n sayıları

$$\lim \frac{n}{m^2}=q=0$$

olacak şekilde değiştirilecek olursa, ki bu $m=n$ haline tekabül etmektedir,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} S(m,n)=2\pi RH$$

neticesi elde edilir. Ancak $q=0$ halinde limit, silindirin bildiğimiz yanal alanını vermektedir.

Alan ölçme sistemini elde etme probleminde edilmesi gereken itinaya dikkati çekmesi bakımından incelediğimiz misal öğretici mahiyet taşımaktadır.

60. Hacım ölçme probleminin kısaca incelenmesi.

Hacımların ölçme genel probleminin ifadesi alanların ölçme probleminin ifadesinden hiç de farklı bulunmamaktadır.

Şekillerin herhangi belirli bir sınıfının hacımlarının ölçme sisteminin elde edilmesi için,

A. Verilen sınıfa ait herhangi bir şekle aşağıdaki şartları sağlayan pozitif bir sayının tekabül ettirilebilmesi gerekmektedir:

B. Eşit şekillere eşit sayıların tekabülü (değişmezlik öze-

C. Ortak iç noktaları olmıyan iki şeklin toplamına, toplanan şekillere tekabül eden sayıların toplamına eşit olan sayının tekabülü (toplanabilme özeliği).

Ancak A. B. ve C. şartlarının sağlanması halinde adı geçen sayılara, verilen sınıfa ait şekillerin *hacmi* olarak bakılır ve bu ad verilir. Aşağıdaki şartın da sağlanması gerekir:

D. Verilen sınıfa ait bir şeklin hacmi bilindiğinde, hacmi belirten sayı tamamen ve bir türlü olarak belirli olmalıdır.

Elemanter geometride her şeyden evvel basit çokyüzlülerin hacimlerinin bir ölçme sistemi elde edilmelidir.

Herhangi bir dörtyüzlüde (düzgün olması gerekli değil) *bir yüzün alaniyle karşı yüksekliğin çarpımının yüzün seçimine bağlı olmadığı* gösterilebilir.

Basit çokyüzlülerin dörtyüzlülere ayrılmasına dair ve her dörtyüzlüye bir $k\ S\ h$ sayısı tekabül ettirerek ve... basit çokyüzlülerin hacımlarının ölçme sistemini verecek (basit çokgenlerin üçgenlere ayrılma teoremlerine tamamen benziyen) teoremler de ispatlanabilir. Bununla beraber hacımların ölçülmesi alanlarınkine tamamen benzememektedir. Meselâ, *hacımları eşit olan iki dörtyüzlü* — verdiğimiz anlamda — *ne eşbileşenli ne de tamamlama ile eşdeğerli olabilir.*

Başka türlü ifade etmek istersek, tabanları eşdeğerli ve yükseklikleri eşit olan iki dörtyüzlüyü ne ikişer ikişer eş olan dörtyüzlülere ayırmak ne de eş dörtyüzlüler ilâvesiyle eşbileşenli yapmak kabildir. Hilbert bu iddianın ispatının ... olmasını bir bir problem olarak ortaya atmıştır [15]. İlk ispat De... tarafından verilmiştir. En basit ispat da V. F. Kagan'a aittir 25].

Düzlemsel alanlar ve yüzey alanlarının ölçme sistemi hakkında madde 59 da yaptığımız ihtarlar, basit çokyüzlüler sınıfını has alt sınıf olarak kabul eden bir sınıfa ait çizimlerin hacımlarının ölçme sistemi için muteber durumdadır.

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler:

16 — Sayı sistemi
17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi:
Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü
Vezneciler — İstanbul

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler:

16 — Sayı sistemi
17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi:
Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü
Vezneciler — İstanbul

Fiatı 750 Krş.