

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 21

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT III)

Çeviren

Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1964

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 21

B. V. KUTUZOV

GEOMETRİ
(CİLT III)

Çeviren

Hüseyin DEMİR

İSTANBUL — 1964

Bu kitabın telif hakkını Türk Matematik Derneğine bağışlayan
YALE ÜNİVERSİTESİ'ne
teşekkürlerimizi sunarız.

Türk Matematik Derneği

Matbaa Teknisyenleri Basımevi
Divanyolu, Biçkiyurdu Sokak 12
İSTANBUL — 1964

BU KİTAP HAKKINDA

Bu kitap tamamen orta öğretim müfredatına paralel olup müstakbel öğretmenlerin mesleki ihtiyaçlarını karşılamak ve özel olarak matematik kültürlerini genişletmek ve geometri öğretimindeki gerekli tekniği geliştirmek amacıyla hazırlanmıştır.

Önce, cümle teorisine dayanan kavramlar, soyut fonksiyon (LOBACHEVSKI anlamında) kavramının tatbikatı, dönüşüm gurupları kavramı, guruplar teorisinin ana hatları incelenmiştir. Bugün LOBACHEVSKI geometrisinin esaslarını ele almadan geometriyi başarılı bir şekilde öğretmek mümkün değildir.

Kitapta bol sayıda temrin bulunmaktadır. Okuyucuların bu temrinler dışında çalışma yapmaları da kaçınılmaz bir zarurettir. Her bölümde bu gibi çalışmalar için konular verilmiş ve bunlarla ilgili yayınlara atıflar yapılmıştır. Böylece, yeniliğine rağmen bu programa öğretmenin ve öğrencinin hızla intibakı kolaylaştırılmıştır.

Orta öğretim ders kitaplarının bünyesine uygun temrinlere özel önem verilmiştir. Geometrinin sistemli olarak incelenmesinin orta öğretim ileri sınıflarında ele alınması temayülü, buna mukabil ilk iki yıl bunun yerine bir nevi mantık ve «sezgiye dayanan tümünden gelim» in konması savunulacak bir hareket değildir. Mevcut geometri programı çerçevesi içinde öğretmenin, modern ilmin önemli fikirlerini — cümle teorisine dayanan kavramları, soyut fonksiyon kavramını, geometrik dönüşümleri, grup kavramını, aksiyomatik metodu, v.s. — işleme bakımından imkânları artmıştır. Kanaatımızca müfredat programında, meselâ yeteri kadar temel hazırlanmaksızın diferansiyel ve integral hesabın okutulması gibi değişiklikler bugün modası geçmiş görünmektedir.

Bu kitap, orta öğretim ders kitaplarıyla birlikte programın hemen hemen tam olarak incelenmesine imkân verecektir. Yer darlığı dolayısıyla trigonometrinin geometriye tatbikatiyle ilgili iki bölümden sarfı nazar edilmiştir. Bu noksanlık diğer ders kitaplarından faydalanılarak telafi edilebilir.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematik'in kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısıyla mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir milli eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı suni olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevk etmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar ol-

mayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Milli Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

KISIM IV. GEOMETRİNİN TEMELİNİN ANAHTARI VE LOBACHEVSKİ GEOMETRİSİ.

BÖLÜM X. EUKLİD'İN «ELEMANTLAR» I

61. Euklid'in «Elemanlar» adlı eserine bir bakış.....	3
62. «Elemanlar» ın tarihsel önemi ve tenkidi.....	18

BÖLÜM XI. LOBACHEVSKİ GEOMETRİSİ

63. Üçgen açılarının toplamına dair teorem.....	27
64. Euklid geometrisinde paralellik aksiyomunun değişik şekilleri.....	35
65. Lobachevski aksiyomu.....	44
66. Lobachevski geometrisinin ana hatları.....	46
67. Lobachevski düzleminde doğruların izafi durumları..	48
68. Alan ölçme kavramı.....	65

BÖLÜM XII. GEOMETRİNİN AKSİYOMATİK YAPISI

69. Geometrinin esas nesneleri. Nesneler arasındaki esas bağıntılar.....	69
70. Birinci grup aksiyomlar: İlgili (ait olma) aksiyomları	72
71. İkinci grup aksiyomlar: Sıra aksiyomları.....	75
72. Üçüncü grup aksiyomlar; eşlik aksiyomları.....	78
73. Dördüncü grup aksiyomlar: Paralellere dair aksiyomlar.....	83
74. Beşinci grup aksiyomlar: Süreklilik aksiyomları....	85
75. Aksiyomların denkliği kavramı.....	86
76. Hareket aksiyomları.....	88

BÖLÜM XIII. GEOMETRİK BİR SİSTEMİ TEFSİR ETME FİKRİ

77. Euklid'in düzlem geometrisinin değişik tefsirleri.....	91
--	----

{ 78. Fuklid uzay geometrisinin Feodorov tarafından yapı- lan tefsiri	99
79. Lobachevski geometrisinin Euklid düzlemindeki tef- sirleri	102

NETİCE

80. Bir aksiyom sisteminden beklenenler	113
---	-----

BİBLİYOGRAFYA

DÖRDÜNCÜ KISIM

GEOMETRİNİN TEMELİNİN ANAHTARI VE LOBACHEVSKI GEOMETRİSİ

BÖLÜM X

EUKLİD'İN «ELEMANLAR» I

Bölüm X da Euklid'in «Elemanlar» adlı eseri kısaca gözden geçirilmiş ve değeriyle kusurları ortaya konmuştur. Bazı sıra ve süreklilik aksiyomları ifade edilmiş ve birçok teoremler Euklid'in paralellere dair olan beşinci aksiyomuna baş vurulmadan ispatlanmıştır.

61. Euklid'in «Elemanlar» adlı eserine bir bakış.

Geometrinin Milattan önce dördüncü yüzyılda ne kadar ilerlemiş olduğu bu bilim üzerinde sistemli olarak ozamanlarda yazılmış eserlerden anlıyoruz.

Tarihsel delillerle bilinen bu ilk asıl eserler zamanımıza kadar ulaşamamıştır. Bu eserler İskenderiyeli geometrici *Euklid*'in (M. Ö. 300) «elemanlar» adlı meşhur eserinin meydana çıkmasıyle unutulup gitmişlerdir.

Elemanter geometri üzerine geniş ve bilgince yazılmış olan bu eserde Euklid bir kaç prensipten hareket ederek geometriye mantiki bakımından sağlam gelişim vermeğe çalışmıştır. Euklid in «Elemanlar» ı onbeş kitaptan veya bölümden ibarettir. Son iki kitabın bugün Euklid tarafından yazılmış olmadığı kab l edilmektedir.

Euklid'in «Elemanlar» ını kısaca gözden geçirelim :

Kitap I. Birinci kitap tarifelerle başlar.

1. *Nokta, parçasız nesnedir.*
2. *Çizgi, eni olmıyan uzunluktur.*
3. *Çizginin uçları noktadır.*
4. *Doğru, kendi üzerindeki noktalara göre düzgün yayılan nesnedir.*
5. *Yüzey, yalnız uzunluk ve eni olan nesnedir.*
6. *Yüzeyin sınırları çizgilerden ibarettir.*
7. *Düzlem, kendi üzerindeki doğrulara göre düzgün yayılan nesnedir.*

Bundan sonra doğrular arasındaki açıların, doğru açının, dik, geniş ve dar açıların, dairenin merkez ve yarıçapının, ... tarifleri gelir.

Aşağıdaki tarifler kayda değer :

13. *Sınır, herhangi bir şeyin müntehası olan nesnedir.*
14. *Şekil, sınır veya sınırlarla çevreli bir veya birçok sınırın içinde kalan nesnedir.*
15. *Daire, içindeki noktaların belli birinden, üzerine indirilen doğruların eşit oluğu [çember denilen] bir eğri ile çevrili olan düzlemsel bir şekildir.*
20. *Üç kenarlı şekillerden eşkenar üçgen üç kenarı eşit olan üçgen; ikizkenar üçgen yalnız iki kenarı eşit olan üçgen ve çeşit kenar üçgen ise üç kenarı farklı olan üçgendir.*
22. *Dört kenarlı şekillerden kare, kenarları eşit ve açıları dik olan; dik dörtgen, kenarları eşit olmayıp açıları dik olan; eş-*

kenar dörtgen, açıları dik olmayıp kenarları eşit olan; paralelkenar ise karşılıklı kenar ve açıları birbirine eşit olan fakat eşkenarlı ve dik açılı olmayandır. Dörtkenarlılardan diğerlerine dörtgen denir.

Birinci kitaptaki son tarif şudur :

23. *Paralel doğrular, aynı düzlemde bulunan ve iki tarafa doğru uzatıldıklarında birbirini kesmiyen doğrulara denir.*

Paralel kelimesi *yangana duruşu* ifade eder.

Sonraki bahis, postülaların bir listesini ihtiva etmektedir.

Postülâlar (¹). Aşağıdaki postülâları kabul edelim :

1. *Herhangi bir noktadan herhangi bir noktaya bir doğru geçirmek [mümkündür].*

2. *Sonlu bir doğruyu doğru olarak istenildiği kadar uzatmak [mümkündür].*

3. *Herhangi bir merkez ve yarıçapla bir daire çizmek [mümkündür].*

4. (Aksiyo m 10) *Bütün dik açılardan birbirine eşit olduğu.*

5. (Aksiyo m 11) *İki doğru üzerine indirilen bir doğru aynı tarafta iki dik açıdan küçük açıları teşkil ederse, iki doğrunun sonsuz olarak uzatıldıklarında açılardan iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişecekleri.*

Son iki postülâ diğer listelerde aksiyo m 10 ve aksiyo m 11 olarak gösterilmiştir.

Parantezler içindeki ifadeler eserin Yunanca aslında mevcut bulunmamaktadır.

(¹) Bu terim metne sadık kalmak amacıyla aynen alınmıştır. Bugün «postülâ» ile «aksiyo m» terimleri arasında fark gösterilmemektedir.

Sonra şunlar gelmektedir :

Genel kavramlar (aksiyomlar) :

1. Aynı şeye eşit olan iki şey birbirine eşittir.
2. Eşit şeylere eşit şeyler katılsa [elde edilen şeyler] bütünler de eşit olur.
3. Eşitlerden eşitler çıkarılsa kalanlar eşit olur.
4. [Ve eşitlere farklılar katılsa toplamalar farklı olur.]
5. Ve aynı şeyin iki katına eşit olan iki şey birbirine eşittir.
6. Ve aynı şeyin yarısı birbirine eşittir.
7. Biribirigle çakışan şeyler birbirine eşittir.
8. Bütün, parçalarından büyüktür.
- [9. İki doğru bir şekli sınırlamaz].

İlk altı aksiyom aritmetiğe, aynı zamanda eşliğe ait aksi-yomların örneğini teşkil etmektedir.

Köşeli parantezler içinde gösterilen ifadelerin yazarının Euklid olduğu şüphelidir.

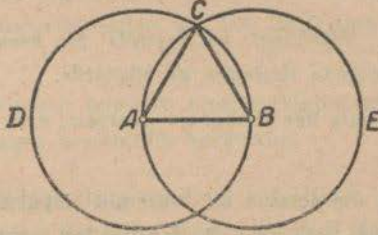
Daha sonra 1 den 48 e kadar olan teoremler gelir.

«Elemenlar»daki üslup hakkında fikir vermek üzere teorem 1 ve ispatını aynen buraya alıyoruz.

Teorem 1. Sonlu bir doğru üzerine eşkenar bir üçgen çizmek.

AB , verilen sonlu doğruyu göstere (Şekil 249). AB doğru-su üzerine eşkenar bir üçgen çizimi istenmektedir. Merkezi A ve yarıçapı AB olan BCD daireyiyle merkezi B , yarıçapı BA olan

ACE dairelerini çizelim (aksiyom 3) ve dairelerin kesiştiği C noktasını A ve B noktasına birleştirelim (aksiyom 1).



Şek. 249

A noktası CDB dairesinin merkezi olduğundan AC doğrusu AB ye eşittir (tarif 15); B de CAE dairesinin merkezi olduğundan BC de BA ya eşittir (tarif 15). CA nın AB ye eşitliği gösterilmiş bulunmaktadır, veya CA ve CB nin ikisi de AB ye eşit bulunmaktadır. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşit olduğundan (aksiyom 1) CA da CB ye eşittir.

Bundan dolayı üç CA , AB ve BC doğrusu birbirine eşittir. Ohalde ABC üçgeni eşkenardır (tarif 20) ve sonlu AB doğrusu üzerine çizilmiş olup bulunması istenilen üçgendir.

«Elemanlar» ın ilk 28 teoremi hakkında bir fikir edinmek üzere bu 28 teoremin Euklid tarafından paraleller üzerindeki beşinci aksiyoma başvurulan ispat edildiği hatırla tutulmaktadır.

Euklid bundan başka bir doğru üzerinde nasıl doğru parçası alındığını ve doğru parçalarının nasıl toplanıp çıkarıldığını göstermektedir (teorem 2 ve 3). Sonra iki kenarı ve bunlar arasındaki açıları eşit olan üçgenlerin eşitliğine ait teorem (teorem 4), taban açıları eşit olan ikizkenar üçgenlerin eşitliğine ait teorem (teorem 5) ve karşı teorem (teorem 6) gelmektedir. Sekizinci teoremden birer kenarıyla komşu açıları eşit olan üçgenlerin eşitliği ispat edilmektedir. Açı ve doğru parçalarının iki eşit parçaya

bölünmesi, dik doğru çizimi, komşu ve ters açılara ait teoremlerden sonra (teorem 9-15) üçgenin dış açısına ait teorem gelmektedir.

Teorem 16. *Herhangi bir üçgende bir kenar uzatıldığında dış açısı karşı iç açılardan ikisinden de büyüktür.*

Euklid'in ispatı her elemanter geometri ders kitabında mevcuttur.

Bir üçgenin dış açısına ait teoremin ispatının Euklid tarafından yine beşinci aksiyom kullanılmadan yapıldığını tebarüz ettirmek isteriz.

Sonra şu teorem gelir.

Teorem 17. *Herhangi bir üçgenin herhangi bir tarzda alınan iki açısı birlikte iki dik açıdan küçüktür.*

Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunduğunu, ikişer kenarı eşit olup aralardaki açıları farklı olan iki üçgende büyük açı karşısındaki kenarın daha büyük olduğunu ifade eden teoremlerden sonra şu teorem gelir :

Teorem 27. *İki doğru üzerine indirilen bir doğru birbirine eşit iç ters açılar meydana getirirse, doğrular birbirine paralel olur. Beşinci aksiyoma dayanmadan yapılan ispatı bilmekteyiz (2, şekil 2).*

Teorem 28. *İki doğruya indirilen bir doğru, dış açısı aynı taraftaki karşı iç açılara eşit kılırsa veya aynı taraftaki iç açıları iki dik açığa (birlikte) eşit kılırsa bu doğrular birbirine paralel olur.*

Bu teorem, teorem 27 nin bir neticesi olup ispatında yine beşinci aksiyom kullanılmamıştır.

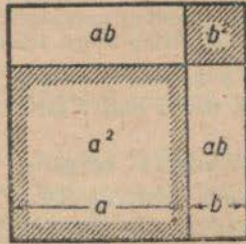
Teorem 29 dan başlayarak Euklid paralellere ait beşinci aksiyomdan istifade etmektedir.

Teorem 29. *Paralel doğrulara indirilen bir doğru eşit iç ters açılar meydana getirir...*

Bu, teorem 27 nin karşıtıdır. Teorem 29 un geri kalan kısmı aynı tarafta bulunan iç açılar vs. ile ilgili olup teorem 28 in karşıtıdır.

Teorem 47 Pitagor teoremi, birinci kitabın son teoremi olan teorem 48 de Pitagor teoreminin karşıtıdır.

Kitap II. İkinci kitap cebirsel özdeşlikler diyebileceğimiz geometrik izahlardan ibarettir. Meselâ kitap II deki teorem 4 ün



Şek. 250

İfadesi şudur: *Bir doğru keyfî olarak ikiye bölünse, bütünü üzerine çizilen kare, doğru parçaları üzerine çizilen karelerle doğru parçalarının teşkil ettiği dikdörtgenin iki katına (toplamına) eşittir (Şekil 250).*

Bu,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

özdeşliğinden başka birşey değildir.

Şekil 250 de bugünkü işaretler kullanılmıştır.

Bütünüyle ikinci kitap, 2 tarif ve 14 teoremden ibarettir. Meselâ bunlardan teorem 11 bir doğru parçasının orta ve yan oran üzerine bölünmesiyle ilgilidir.

Teorem 11. *Bir doğruya, bütünle parçalardan birinin teşkil ettiği dik dörtgen, diğer parçası üzerine çizilen kareye eşit olacak şekilde iki parçaya bölmek.*

Bu kitaptaki (kitap II) son teoremin (teorem 14) ifadesi şudur: *Verilen bir çokgene eşit bir kare çizmek.*

Burada bir çokgenin kuadratürü problemi çözülmüş bulunuyor.

Kitap III. Üçüncü kitap dairenin, kirişlerin, çevrel ve dış açılarının, teğetlerin esas özelliklerinden bahsetmekte olup 11 tarif ve 37 teorem ihtiva etmektedir.

Kitap IV. Dördüncü kitap daire içine ve dışına çizilen eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen, altıgen ve 15 kenarlı çokgenlerle ilgili teoremlerden ibaret olup 7 tarif ve 16 teoremi havidir.

Kitap V. Beşinci kitapta eskilerin aritmetiği geometrik olarak işlenmiştir. Değil irrasyonellerin hatta kesirlerin dahi Euklid'ce sayı olarak bilinmediği unutulmamalıdır.

Yedinci kitapta ikinci tarif şöyle ifade edilmektedir: *Sayı birimlerden meydana gelmiş bir çoklaktır.*

Ohalde Euklid'e göre geometrik büyüklükler ile sayılar arasında bire-bir tekabül mevcut bulunmaktadır. Euklid iki doğru parçasının, alan veya hacmin oranına irca etmemiş olup bir olarak görünen iki teori kurmuştu: Kitap V de büyüklükler teorisi ve kitap VII de sayılar teorisi.

Kitap V de özel olarak ilgi çekici olan şudur:

Tarif 5. *Büyüklüklerden birincinin ikinciye ve üçüncünün dördüncüye aynı katları, ayrıca ikinci ile dördüncünün başka aynı katları alınsa ve ilk benzer katlar son benzer katlardan sıra ile büyük, eşit ve küçük olsa, oranlar eşittir.*

Bunu anladığımız dille ifade edersek :
her tam m ve n sayıları için

$mc > nd$ iken $ma > nb$ olduğunda

$mc = nd$ iken $ma = nb$ olduğunda

$mc < nd$ iken $ma < nb$ olduğunda

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

dir.

Euklid'in tarifi pozitif reel sayıların tarifiyle aynı olup modern şekilde tamamen Dedekind'in kesim usulüne tekabül etmektedir [18].

Birinci kitap 18 tarif ve 25 teoremi ihtiva etmektedir.

Kitap VI. Altıncı kitapla düzlem geometrinin etüdü sona ermektedir. Bu kitapta alanların oran teorisi, şekillerin benzerliği ve orantılardan bahsedilmektedir. Meselâ, **teorem 12** şu problemden ibarettir : *Üç doğru parçası verildiğinde bir dördüncü oranlığı bulmak.*

Teorem 13. *Verilen iki doğru parçasının orta orantılasını bulmak.*

Modern ders kitaplarında bunlar ve buna benzer teoremler cebirin geometriye tatbikatının esasını teşkil etmekte olup

$$x = \frac{ab}{c}, \quad x = \sqrt{ab}$$

vs. gibi doğru parçalarının çizimini vermektedir.

Descartes, *geometri* sine (1635) Euklid'in işte bu çizimleriyle başlar ve bunlara sayısal anlam verir [19].

Altıncı kitap 5 tarif ve 33 teorem ihtiva etmektedir.

Kitap VII. Yedinci kitap 23 tarif ve 39 teorem'i havi olup burada asal sayının tarifine rastlıyoruz.

Tarif 12. *Yalnız birim ile ölçülen sayıya asal sayı denir.*

Aynı kitapta iki tam sayının en büyük ortak kalını veren bildiğimiz usul açıklanmıştır — Euklid algoritması.

İlgili teoremler şunlardır :

Teorem 1. *Verilen farklı iki sayıdan küçüğü daimi olarak büyüğünden çıkarıldığında kalan sayı kendisinden evvelkini, kalan birim oluncaya kadar hiç ölçmezse bu iki sayı aralarında asal olur.*

Teorem 2. *Aralarında asal olmayan iki sayı verildiğinde en büyük ortak ölçüyü bulmak.*

Bugün Euklid algoritması bir denklem sistemiyle ifade edilmektedir :

$$a = bq + r_1$$

$$b = r_1 q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3$$

$$.$$

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n$$

$r_n = 1$ halinde teorem 1, a ve b sayılarının aralarında asal olduğunu, $r_n = 0$ halinde ise teorem 2, a ve b sayılarının en büyük ortak böleninin r_{n-1} olduğunu ifade etmektedir.

Yedinci kitapta aynı zamanda, bir sayının bir türlü olarak asal çarpanlarına ayrılmasına ait esas teoremi veren bölünebilme teorisi de yer almaktadır. Buna ait birkaç teorem aşağıda verilmiştir :

Teorem 23. *Aralarında asal olan iki sayıdan birini bölen bir sayı diğeriyle asaldır.*

Modern dilde bu şöyle ifade edilebilir:

$$(a, b) = 1 \text{ ve } a = mc \text{ ise } (c, b) = 1 \text{ dir [12].}$$

Teorem 24. *İki sayı herhangi bir sayı ile asal ise çarpımları da aynı sayı ile asal olur.*

Bu, $(a, c) = 1$ ve $(b, c) = 1$ halinde $(ab, c) = 1$ olmasını ifade eder.

$$(a, b) = 1 \text{ ise } (a^n, b^n) = 1 \text{ dir;}$$

$$(a, b) = 1 \text{ ise } (a + b, b) = 1 \text{ ve } (a + b, a) = 1 \text{ dir;}$$

$$p \text{ sayısı } a \text{ yı bölmeyen asal bir sayı ise } (p, a) = 1 \text{ dir,}$$

gibi birkaç teoremden sonra bölünebilme teorisinin esas teoremi-ne gelir;

Teorem 30. *İki sayının birbiriyle çarpımı bir sayı verse ve herhangi asal sayı bu çarpımı bö'se ilk sayılardan birini de böler.*

Bu, şu demektir: p asal olmak şartıyla $ab = mp$ ise ya $a = m_1 p$ veya $b = m_2 p$ dir, diğer bir deyimle, iki sayının çarpımını bölen asal bir sayı bu sayılardan en az birini böler.

Sonra şu teoremler gelir:

Teorem 31. *Herhangi bileşik sayı asal bir sayı ile bölünür.*

Teorem 32. *Herhangi sayı ya asaldır veya asal bir sayı ile bölünür.*

Bu teoremlerden sonra bir sayının bir türlü olarak asal çarpımlara ayrılması gelmektedir.

Kitap VIII. Sekiz'inci kitapta 27 teorem mevcut olup hiç

tarif ihtiva etmemektedir. Bu kitap özel olarak karesi tam sayı olan kesirlerin mevcut olmadığını ifade eden teoremlerle, küble ilgili benzer teoremi ihtiva etmektedir. Euklid bu teoremleri kendine has geometrik tarzda ifade etmektedir.

Kitap IX. Burada asal sayılar cümlesinin sonsuz olduğuna ait teorem ispat edilmektedir.

Teorem 20. *Verilen her çoklaktaki asal sayıdan daha fazla asal sayı vardır.*

Dokuzuncu kitapta 36 teorem mevcut olup hiç tarif ihtiva etmemektedir.

Kitap X. Bu kitap 4 tarif ve 115 teoremlerle irrasyonel teoriyi bazı irrasyonellilerin bir sınıflandırılmasını vermektedir. Euklid'in eserinin öğrenci için en zor olan kısmını bu onuncu kitap teşkil etmektedir. Bu kitabın ilk 18 teoremiyle Euklid büyüklüklerin ortak birimle ölçülebilmesi ⁽¹⁾ ve ölçülememesi ile meşgul olmuştur. Kitabın geri kalan kısmı, ikinci derece ve ikinci dereceye indirilebilen dördüncü derece denklemlerinin çözümünde rastlanan şimdi ise irrasyonel diyebileceğimiz bir teoriyi ihtiva etmektedir.

Misal olarak konudan birinci tarifi, üçüncü tarifi bir kısmını ve bir kaç teorem alalım.

Tarif 1. *Aynı ölçü ile ölçülebilen büyüklere ortak birimle ölçülebilen (commensurable), ortak ölçüsü olmayan büyüklere ortak birimle ölçülemiyen (incommensurable) büyüklükler denir.*

Tarif 3.... *Ohalde verilen doğruya (doğru parçasına) rasyonel,*

⁽¹⁾ «commensurable» ve «incommensurable» terimlerinin karşılığı olarak «aynı birimle ölçülebilen» ve «aynı birimle ölçülemeyen» ifadeleri alınmıştır.

ister uzunluk ister kare vega yalnız kare olarak bununla ölçülebilen doğrulara rasyonel ve bununla ölçülemiyenlere de irrasyonel denilsin.

Teorem 1. Eşit olmayan iki büyüklük verildiğinde büyük olanından kendisinin yarısından fazlası çıkarılsa, elde edilenden yine yarısından fazlası çıkarılsa ve bu işleme daimi olarak devam olursa, verilen büyüklüklerin küçük olanından küçük bir büyüklük elde edilir.

Teorem 2. Eşit olmayan iki büyüklüğün büyüğünden daimi olarak küçüğü çıkarılarak böylece devam olursa ve kalan, kendisinden evvelkiyle hiç bir zaman ölçülemese büyüklükler ortak birimle ölçülemiyen olurlar.

Teorem 5. Aynı birimle ölçülebilen büyüklükler bir sayının bir sayıya oranındadır.

Euklid'ce irrasyonel sayıların mevcut olmadığı hatırdan çıkarılmamalıdır.

Teorem 6. İki büyüklüğün oranı bir sayının bir sayıya oranı ise bu miktarlar ortak birimle ölçülebilirler.

Teorem 7. Ortak birimle ölçülemiyen büyüklüklerin oranı bir sayının bir sayıya oranı değildir.

Bu son keyfiyet kakikaten «Elemanlar» dan (bugün aritmetik kitapları dediğimiz) kitapların çıkışının sebebini teşkil eder.

Teorem 8. İki büyüklüğün oranı bir sayının bir sayıya oranı değilse bu büyüklükler ortak birimle ölçülebilen değildirler.

Onbirinci, onikinci ve onüçüncü kitaplar uzay geometriyle ilgilidir.

Kitap XI. Bu kitap 31 tarif ve 40 teorem ihtiva etmektedir. Burada kürenin, koninin, silindirin ve özel olarak düzgün beş tane çokyüzlünün tariflerini buluyoruz. Kitap, uzaydaki doğ-

ruların, doğru ve düzlemlerin izafi durumlarıyla ilgili teoremleri içine akmaktadır. Eşdeğerli paralelyüzlülerin özelliklerinin incelenmesi de ele alınmıştır.

Kitap XII. Bu kitap 18 teoremden ibaret olup eşdeğerli prizma ve piramitlerden bahsetmekte ve kürelerin hacimlerinin oranına ait bir teoremlerle sona ermektedir. Özel olarak bu kitapta şu teoremleri görüyoruz :

Teorem 5. *Tabanları üçgen ve yükseklikleri aynı olan piramitler tabanlarla aynı orantıdadır.*

Teorem 7. *Tabanı üçgen olan her prizma, tabanları üçgen olan birbirine eşit üç piramide ayrılabilir.*

Kitap XIII. 18 teoremden ibaret olup düzgün çokyüzlü teorisinin esaslarını ihtiva etmektedir.

Bu kitaptaki teoremlerden bir misâl alalım.

Teorem 13. *Verilen bir küre içine bir dörtyüzlü çizmek.*

Teorem 14. *Verilen bir küre içine bir sekizyüzlü çizmek.*

Teorem 15. *Verilen bir küre içine bir küb çizmek.*

Teorem 16. *Verilen bir küre içine bir yirmiyüzlü çizmek.*

Teorem 17. *Verilen bir küre içine bir onikiyüzlü çizmek.*

Teorem 18. *Evveldi teoremlerdeki beş cismin yüzlerini bulmak.*

Bu teoremler uzay şekillerin çizim usullerini ve bunların doğru olduklarının ispatını vermektedir.

Euklid, kitap XIII deki teorem 1 e ait dikkate değer bir hususa işaret etmektedir:

«İhtar. Bir teoremi *tahlil yolu* ile ispat etmek demek, aranan şeyi bilinir kabul edip elde edilen neticelerden bilinenlere ulaşmak, *terkip yolu* ile ispat ise bilinenlerden hareket ederek arananı elde etmek demektir.»

Sonra, aynı teoremin hem tahlil hem terkip yolu ile ispatının bir örneği gelir.

Kitap IX. Bu kitap 7 teorem ihtiva etmekte olup düzgün çokyüzlülerin özelliklerini vermektedir. Bazı tarihçiler tarafından bu kitabın da kitap XV gibi Euklid tarafından yazılmamış olduğu kabul edilmekte ve her iki kitap İskenderiyeli Hypsicles'e atfedilmektedir.

Kitap XV. Bu kitap 7 teorem ihtiva etmekte ve düzgün çokyüzlü içine düzgün bir çokyüzlünün çizimi problemi ele almaktadır. Meselâ:

Teorem 5. *Düzgün bir yirmi yüzlü içine düzgün bir oniki-yüzlü çizmek.*

Bununla, bu meşhur kitabın kısaca gözden geçirilme işini bitirmiş oluyoruz.

«Elemanlar» in Euklid zamanında bilinen geometri ilminin hepsini ihtiva etmediğine işaret edelim. «Elemanlar» bile Euklid tarafından yazılan tek eser değildir. Euklid tarafından yazılmış fakat tarihin bize ulaştıramadığı diğer kitaplar da vardır: «Konik Kesitlere Dair» dört kitap, «Yüzeylere dair» iki kitap, «Porizm» ve «Hatalı Hükümler.»

Konik kesitler teorisi, Perga'lı Apollonius tarafından geliştirilmiştir (M. Ö. 200). «Konik Kesitlere Dair» yedi kitabı hariç, eserlerinden bir çoğu kaybolmuştur.

Eski zamanın büyük matematikçisi Arşimed (M. Ö. 212 de ölmüştür) şu eserleri yazmıştır: «küre ve silindire dair,» «Daire-

nin Çevresinin Ölçülmesi», «Helezonlara dair», «Sferoid ve Konoidlere Dair», «Düzlemsel Şekillerin Dengesine Dair», «Parabolün kuadratürü» ve diğer bazı eserler.

62. «Elemanlar» ın tarihsel önemi ve tenkidi.

Euklid'in «Elemanlar» ını gözden geçirmiş olmakla bu eserin matematik bilimlerin ilerleyişinde ne kadar büyük etkisi olduğu görülebilir.

Orta öğretim geometrisinin, «Elemanlar» ın modernce bir şekilde tekrarından ibaret olduğunu düşünersek bu eserin genel kültür için de önemini anlamış oluruz.

Euklid geometrisinin, onsekizinci yüzyılın sonlarıyla ondokuzuncu yüzyılda gelişmiş ileri kollar da dahil olmak üzere astronomi, mekanik, bir çok fizik kolları ve dolayısıyla teknolojinin da temelinin bir kısmını teşkil ettiğini belirtmemiz gerekir.

«Elemanlar» ın muhtevasının modern hayata ne derece nüfuz ettiği hakkında bir fikir edinmek için yapı tekniği, makina dinamiği, elektroteknik, radyo teknolojisi, optik, gaz dinamiği, hidrodinamik - özel olarak kanat ve pervane teorisi - ve diğer bir çok teorik ve tatbiki eserlerden herhangi birine göz atmak yeter.

«Elemanlar» Kopernik, Galile, Descartes, Newton, Lomonosov, Lagrange, Lobachevski, Ostrogradski, Chebychev, Liapunov, Zhukovski'nin ve hatta geçmiş yüzyılların ve günümüzün bütün matematik bilginlerinin eğitiminin bir kısmını teşkil etmiştir.

Geometri ilminin farklı bir vechesi ve Euklid'inkinden farklı yeni geometrinin gelişimini, büyük Rus matematikçisi Nikolai İvanovich Lobachevski'ye borçluyuz. Geometri tarihinin Euklid'den Lobachevski'ye ve Lobachevski'den bu yana olmak üzere iki devresi mevcuttur.

Geometrinin Lobachevski'nin eserinden sonraki gelişmesini ve aynı zamanda Lobachevski'nin çalışmasını kavramak için «Elemanlar»ın meziyet ve eksikliklerini kısaca gözden geçirelim.

«Elemanlar»ın esaslı meziyetlerinden birinin, geometri ilminin mantikî bünyesine şekil vermesi olduğu şüphesizdir.

«Elemanlar» yüzyıllarca mantikî mükemmelliğin örneği olarak alındı. Her nekad bu iddia «Elemanlar»ın her satırı için doğru değilse de eserin büyük bir kısmı kusursuzdur. «Elemanlar»ın mantık cephesinden önemi, geometri ilminin sağlam ve mantikî olarak gelişmesinin bir program içine alınmış olmasıdır. Bu gelişmenin yirminci yüz yılın başlarına kadar tamamlanmış olduğu söylenemez ve bu gelişmede Lobachevski'nin kurduğu geometri hayati bir rol oynamıştır. «Elemanların» ikibin yıl denenmiş olan *tatbiki* önemi onun kati değerini teşkil eder.

Kusurlarına gelince, herşeyden evvel Euklid'deki esas kavramlara ait «tarif»lerin açık olmadıklarını ve hatta ekseriya hiçbir şeyi tarif etmediklerini söyleyebiliriz. Birinci kitaptaki bir çok «tarif», meselâ nokta, çizgi doğru ve diğer nesnelerin tarifleri eserin sonraki kısımlarında *mantikî işleme tabi tutulmaktadır*, diğer bir deyimle, Euklid bu «tarif»leri teoremlerin ispatında kullanmamaktadır. Meselâ «nokta, parçasız nesne olduğundan ... «veya» çizgi, eni olmıyan uzunluk olduğundan ... neticesine varılır» gibi ifadelere rastlanmamaktadır. Bu tarifler metinden çıkarılmakla ispatlar, başlangıçta *mantikî* iseler, ne anlamlarından ne de doğruluklarından bir şey kaybederler.

Sonra, tarif 4 ten ne anlıyoruz? «doğru, üzerindeki noktalara göre düzgün yapılan nesnedir.» Bu tariftten bir şey anlaşılmamaktadır. Bu tarifi bir dairenin çemberi de sağlamaz mı? Bazıları, «noktalarına göre düzgün yayılan» derken doğrultu ile birlikte doğrunun bütün özelliklerinin Euklid'in hatırında olduğunu [22] iddia ederler. Fakat bu hususta kati bir mutabakat yoktur.

Bu gibi «tarif» ler için Lobachevski şöyle yazmaktadır :

«... tarihi değerine ve matematikte sonraki parlak başarılarına rağmen Euklid'in «Elemanlar» ının ilk kusurları zamanımıza kadar gelmiştir.

«Hakikaten, hiçbir matematik ilminin, Euklid ile geometriye başladığımız gibi müphem kavramlardan hareket etmemesi gerektiğini herkes kabul etmelidir [32].

Ondokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında Euklid'de hiçbir konup aksiyomunun mevcut olmadığına farkına varıldı. «Arasında olma», «içinde olma», «dışında» gibi kavramlar Euklid tarafından mantikî olarak işlenmemiş, sezgiye dayanıp açık şekilde belirli olmıyan kavramlar olarak kullanılmıştır. Meselâ, Euklid'de Pasch tarafından ifade edilen aksiyoma benzer aksiyom yoktur.

Pasch aksiyomu : *A, B ve C doğrusal olmıyan üç nokta, a da ABC düzleminde bu noktaların hiçbirinden geçmiyen bir doğru ise, a doğrusu, AB doğru parçasının bir noktasından geçtiği takdirde AC doğru parçasının bir noktasından veya bu olmazsa BC doğru parçasının bir noktasından geçmek zorundadır.*

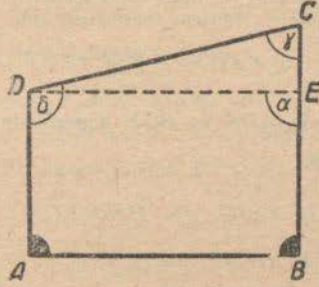
Bu aksiyom, *arasında, içinde, dışında* vs. gibi fikirlerle işlemler için esaslı bir alet olmuştur.

İlerisi için bize lüzumlu bazı teoremleri ele alalım. Bu teoremlerin ispatında *paralel aksiyomundan faydalanmıyacağız.*

Teorem. *A ve B açıları dik olan ABCD dörtgeninde (şekil 251) AD ve BC kenarları $AD > BC$, $AD = BC$ veya $AD < BC$ yi sağlarsa $\gamma = \angle C$ ve $\delta = \angle D$ açıları da karşıt olarak $\gamma > \delta$, $\gamma = \delta$ ve $\gamma < \delta$ yi sağlar.*

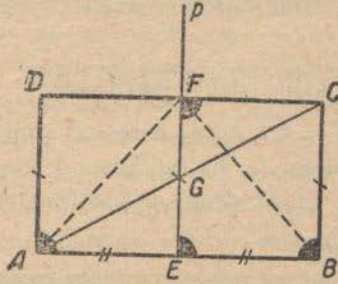
İspat. Evvelâ $AD = BC$ alarak (Şekil 252) D ve C açılarının eşitliğini gösterelim. E noktası AB nin orta noktası, p de

AB ye E noktasında dik olan doğru olsun. Bu dikme CD yi keser. Bunu şöyle ispatlarız. A ve C noktalarını birleştirerek AC



Şek. 251

üçgeniyle p doğrusuna Pasch aksiyomunu tatbik edelim: 1) p doğrusu A, B, C noktalarının hiç birinden geçmemektedir. 2) p



Şek. 252

doğrusu BC yi kesmez, zira, aynı doğruya çizilen iki dikmenin ortak noktası yoktur; ohalde p doğrusu AC yi A ile C arasında bir G noktasında keser.

Şimdi aynı aksiyomu ACD üçgeniyle p doğrusuna tatbik edelim. Evvelâ, p doğrusu AD yi kesmez, sonra p doğrusu A, C ve D noktalarının hiçbirinden geçmez. Ohalde p doğrusu CD yi C ile D arasındaki bir F noktasında keser.

F nin CD nin ortası olduğunu göstereceğiz.

AEF ve BEF üçgenlerinin eşitliğinden

$$AF = BF, \angle FAE = \angle FBE$$

yazarak

$$\angle FAD = \angle FBC$$

elde eder ve dolayısıyla ADF ve BCF üçgenlerinin eş olduklarını buluruz. Bundan da

$$\angle D = \angle C \text{ ve } DF = FC$$

neticesine varırız.

Ayrıca, adı geçen üçgenlerin eşitliğinden EFC açısının komşu EFD açısına eşitliği ve dolayısıyla p doğrusunun $ABCD$ dörtgeninin CD üst tabanını dik açılar altında kestiğini buluruz.

C ve D açılarının eşit olduğunu göstermiş oluyoruz. Bu açıların dik oldukları ancak Euklid'in paralel aksiyomu kullanılarak ispatlanabilir.

Şimdi $AD < BC$ halini alalım (Şekil 251).

BC üzerinde $BE = AD$ doğru parçasını alıp D ve E noktalarını DE doğru parçasıyla birleştirelim. (Okuyucu DE doğru parçasının ADC açısı içinde olduğunu ispatlamalıdır).

Evvelki neticeden

$$\alpha = \angle BED = \angle ADE < \delta$$

bulunur.

α açısı DEC üçgeninin dış açısı olduğundan

$$\delta > \alpha > \gamma$$

elde edilir.

Aynı şekilde $AD > BC$ hali için de $\delta > \gamma$ cari olduğu ispatlanabilir.

Şu

$$AD < BC, AD = BC, AD > BC$$

bağıntılarından, her durumda, ancak birisi doğru olacağından aşağıdaki teorem ispatlanmış bulunur :

Karşıt teorem. A ve B açıları dik olan ABCD dörtgeninde (Şekil 251) δ ve γ açıları $\delta > \gamma$, $\delta = \gamma$ veya $\delta < \gamma$ yı sağlasa BC ve AD kenarları da karşıt olarak $BC > AD$, $BC = AD$ veya $BC < AD$ yi sağlar.

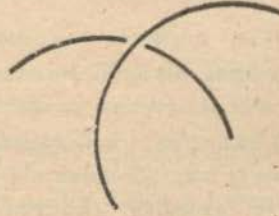
İhtar. A ve B açıları dik ve AD, BC kenarları eşit olan ABCD dörtgenine *Saccheri dörtgeni* denir. *Saccheri dörtgeninde üst tabanın açılarının eşit, ve alt tabanın orta dikmesinin üst tabanı dik olarak ortalağığını* ispat etmiş bulunuyoruz.

«Elemanlar» daki esaslı kusur hiçbir süreklilik aksiyomu ihtiva etmemesidir. Bu nevi aksiyomlar geometriye ancak ondokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında ithal edilmiştir. Süreklilik ile ilgili kavram ve ifadelerin mantikî olarak ele alınışı sadece «Elemanlar» da değil, aynı zamanda, Dedekind'in sürekliliğe ait aksiyomunun veya buna denk olan Kantor'un kiyle birlikte Arşimed'in aksiyomunun ithal edildiği tarihe kadar geometrik hiç bir eserde mevcut bulunmamaktadır. Son iki aksiyomu bilmekteyiz. Şimdi Dedekind'in kiinin ifadesini verelim [18].

Süreklilik aksiyomu (Dedekind'in). *Bir doğruyun bütün noktaları iki sınıfa ayrılrsa ve her sınıf, nokta ihtiva etse ve bir sınıfın bütün noktaları diğer sınıfın bütün noktalarının aynı tarafında olrsa, doğruyu iki ışına ayıran bir nokta mevcut olur ve bu ışınlardan biri üzerinde sınıflardan birinin bütün noktaları, diğeri üzerinde de ikinci sınıfın bütün noktaları bulunur ve doğruyu iki ışına ayıran nokta ise ya birinci veya ikinci sınıfa ait olur. Bu nokta bir Dedekind kesimi tarif ediyor denir.*

Dedekind aksiyomunu kullanarak Arşimed ve Kantor aksiyomlarını ispatlamak mümkündür, fakat bunun için geometrinin bütün aksiyomlarının tam listesine ihtiyaç vardır. Karşıt olarak Arşimed ve Kantor aksiyomlarından da teorem olarak Dedekind aksiyomu elde edilir. Evvelce bahsedilen özdeşlik ileride ispatlarını vereceğimiz esas ve karşıt teoremlerin doğruluğunun ifadesinden ibarettir.

«Elemanlar» ın daha birinci teoremi önemli bir boşluk ihtiva etmektedir. İki dairenin (A ve B merkez ve AB yarıçaplı, şekil 249) C arakesit noktasının varlığı, sağlanmadan kabul edilmiştir. Bir süreklilik aksiyomu ithal etmeden adı geçen dairelerin kesişeceğini iddia etmek imkânsızdır. C nin bulunduğu yerde dairelerden birinde (veya ikisinde de) bir boşluk bulunabilip dairelerin ortak noktası olamıyabilir.



Şek. 253

Euklid aksiyomlarından bazılarının ispatlanabileceğine ötedenberi işaret edilmiştir. Böyle bir ispat için tabii esas aksiyomların tam bir listesi elimizde mevcut olmalıdır. Aksi takdirde ispatın nereye dayandırıldığı açık olarak bilinmez.

Meselâ dördüncü aksiyom — dik açıların eşitliği — daha onsekizinci yüzyılda ispat konusu olmuştur ve bunda açılarının sürekli büyüklükler sistemi teşkil ettiği sezgiye dayanılarak kabul edilmiştir. Yirminci yüzyıla geçerken Hilbert, «Geometrinin temelleri» adlı eserinde süreklilik aksiyomunu kullanmadan bir ispatı vermiştir.

Bunun gibi Euklid'in paralel aksiyomunu ispat için de gayret sarfedilmiştir. Bu aksiyomu ispat için yapılan teşebbüsler menşe itibariyle oldukça eskidir. Euklid bizzat bu aksiyomu mümkün merteye geç kullanmıştır. «Elemanlar» da ilk 28 teoremin bu aksiyoma dayanmadan ispatlanmış olduğunu görmüştük.

Düzlem ve uzay geometriden bu aksiyoma dayanmadan ispat edilen veya edilebilen büyük bir ilâve teorem listesi çıkarmak mümkündür.

Labachevski, paralel aksiyomunun ikibin küsur yıla ait ispat teşebbüsleri hakkında 1823 de şöyle yazmaktadır :

«Bu gerçeğin doğruluğunu gösteren sağlam bir ispat bugüne kadar verilememiştir. Verilenler de izah mahiyetinde olup tam anlamıyla matematik bir ispat olmaktan uzaktır. [30].

Lobachevski'nin 1829 da yayınlanan ve «Fizik - Matematik Bilimleri Bölümü Toplantısında verilen Konferanslar, 11 Şubat 1826» dan alınmış kısımlardan ibaret ve Lochevski tarafından keşfedilen yeni geometrinin prensiplerini içine alan «Geometrinin Anahatlarına Dair» adlı eserinden şunları okuyoruz :

«... Matematikğin hiçbir yerinde paralel teorisinde olduğu gibi ciddiyetten uzak kalmaya tahammül edemeyiz. Hernekadar nesnelerin bizatihi kafamızdaki idraki, bizi geometrinin genel ve ilkel kavramların müphemliğinden dolayı yanlış neticelere varmaktan korur ve elde edilen gerçeklerin doğruluğuna, sadelikleriyle ve meselâ astronomik gözlemlerde olduğu gibi deneyle kendimizi inandırabilirsek de bütün bunlar ciddi muhakemeye alışkın zekâyı tatmin etmekten uzaktır. Gerçekten zekânın, bir sorunun cevapsız kaldığı ve bizi daha ileri neticelere ulaştıramıyacağını bilmediğimiz müddetçe cevabını bulma işini ihmal etmeğe hakkı yoktur.

«Geometrideki bu boşlukları ne tarzda kapatmayı tasarladı-

ğımı burada izah etmek istiyorum. Bütün araştırmalarımı tabii sırada ve irtibatlarıyla vazetmem hem çok yere lüzum gösterir hem de bütün geometri ilmini tamamen yeni b'ir şekilde takdim etmemi gerektirir».

BÖLÜM XI

LOBACHEVSKI GEOMETRİSİ

Bölüm XI de üçgen açıların toplamına dair teoremden sonra Euklid'in paralel aksiyomunun değişik şekilleri incelenmiştir.

Lobachevski aksiyomunu ifadeden sonra bölümde Lobachevski geometrisinin büyük sayıda en basit özellikleri ile Lobachevski düzlemindeki doğrunun halleri, etrafı bir şekilde etüd edilmiş ve bölümün sonunda da Lobachevski geometrisinde alan ölçme hakkında bazı fikirler verilmiştir.

63. Üçgen açılarının toplamına dair teorem.

Lobachevski, «Geometrinin Prensiplerine Dair,» (1829) eserinden sonra 1835 de «Hayali Geometri» adıyla bir makale yayınlamıştır. Bu makale şöyle başlamaktadır:

«Matematikçilerin tam bir ispat vermeleri için ikibin yıl boşuna uğraştıkları Euklid'in «Elemanlar»ındaki teorem XII [XI] geometride aşikâr bir doğruluk olarak kabul edilmiştir. Özel olarak Legendre bu problemle meşgul olmuş ve kendisine oldukça tatmin edici gelen her şeyi Fransız Akademisi dergilerinde toplamıştır.» (Burada Lobachevski, Legendre'in 1833 de yayınladığı ilgili eserinden bahsetmektedir.) «Bu güç probleme cevap buldugunu düşünenler istisnasız hataya düşüyorlar, zira, «Geometrinin Prensiplerine Dair» adlı eserimde şüphesiz olarak gösterdiğime inandığım gibi gözleme dayanmaksızın cisim kavramından doğrudan doğruya elde edilemeyen şeylerin doğruluğuna evvelden inanıyorlar. Paralellere ait yeni bir teoriyi izah ettikten sonra

fiili ölçmeye dayanmadan bir üçgenin açılarının toplamının yarım daireden küçük olduğunun kabul edilebileceğini ve bu kabule dayanarak tabiatla mevcut olmasa bile hiç olmazsa analizde yer alabilecek *hayali* dediğim yeni bir geometri ileri sürdüm.

Sadece geometrik çizimler yardımıyla çizgisel bir üçgenin kenar ve açıları arasında fonksiyonel bağıntı ifade eden bazı denklemler elde ettim; nihayet bir doğru, bir yüzey ve hacim elemanları için ifadeler verdim ve bu suretle matematik ilminin yeni bir kolu olarak hayali geometri, prensiplerinin doğruluğu ve uygunluğu hiç bir şüphe götürmemek üzere tam manasiyle kabul edilmiş oldu.

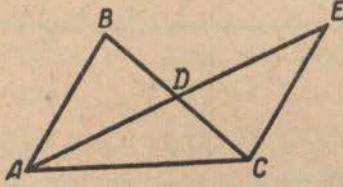
1832 de Macar matematikçisi Janos Bolyai (1802 - 1860), babası Farkas Bolyai'nin kitabına ek olmak üzere latince önemli bir eser yayınladı. Oğul'un eserinin tam başlığı şudur: «Euklid'in XI. aksiyomunun doğruluk veya yanlışlığından bağımsız olarak (buna önceden karar verilemez) tamamen doğru olan uzay ilmini ve buna ilâve olarak, yanlışlığı halinde dairenin geometrik kuadratürünü içine alan ek» [10].

Bu eserde Janos Bolyai Lobachevski'den bağımsız olarak fakat bir kaç yıl sonra gayet güzel bir şekilde gayri euklidyen geometrinin esaslarını ifade etmiş olup bunun ilk fikirleri Lobachevski tarafından 23 Şubat 1826 da Kazan Üniversitesi Matematik Fizik Fakültesinin toplantısına sunulmuştur. Büyük Rus bilgininin keşfini ilk açıkladığı «Geometrinin Prensiplerine Dair» adlı eser 1839 da yayınlanmıştır.

Bugün *Lobachevski'nin gayri euklidyen* geometrisi diye anılan bu yeni geometrinin esaslarını vermek için, kısmen bizzat Lobachevski'nin yolundan giderek [31] bir üçgenin açılarının toplamına ait bazı önemli teoremleri ele alacağız ve bu teoremleri paralel aksiyomuna başvurmadan ispathyacağız.

Teorem 1. Çizgisel bir üçgende üç açının toplamı iki dik açıyı aşamaz.

İspat. ABC üçgeninde (şekil 254) üç açının toplamının $\alpha + \pi$ ye eşit olduğunu kabul edelim (burada π , iki dik açıyı gösteriyor). Kenarlar birbirine eşit değilse BC en küçükünü



Şek. 254

gösterebiliriz. BC yi D ile iki eşit parçaya bölelim ve AD yi çizerek bu doğru üzerinde D in ötesinde $DE = AD$ olmak üzere E noktasını alalım. E ile C yi birleştirelim. Eşit ADB ve CDE üçgenlerinde ABD açısı DCE açısına, BAD açısı ise DEC açısına eşit olduğundan ACE üçgeninde de açılarının toplamı $\pi + \alpha$ ya eşit olur.

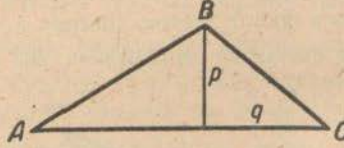
ABC üçgeninin en küçük BAC açısı

$$\angle BAC = \angle EAC + \angle AEC$$

olarak iki kısma bölünmek suretiyle AEC üçgeninin iki açısı olur. Bu kısımlardan biri BAC açısının yarısından büyük değildir. Bu suretle devam ederek açılarının toplamı $\pi + \alpha$ olan ve iki açısı da $\alpha/2$ den küçük olacak bir üçgen elde edebiliriz. Bu üçgende üçüncü açı π den büyük olamayacağından α nın sıfırdan büyük olamayacağı çıkar.

Teorem 2. Eğer çizgisel bir üçgende üç açının toplamı iki dik açıya eşitse, bütün üçgenlerde toplam iki dik açıya eşittir.

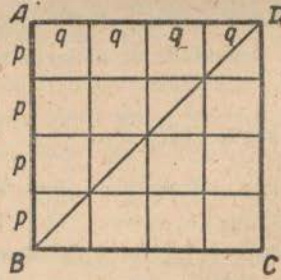
İspat. ABC üçgeninde (Şekil 255) açılar toplamı π ye eşit olsun. Bu üçgende açılardan en aşağı ikisi dar açıdır. Üçüncü açının B tepe noktasından karşı kenara dik doğru çizelim.



Şek. 255

ABC üçgeni dik iki üçgene ayrılmış olup her birinde açılar toplamı π ye eşittir, zira bu dik üçgenlerden birinde toplam π den küçük olduğunda diğerinde π den büyük olur, bu ise imkânsızdır.

Bu suretle dik kenarları p ile q ve açıları toplamı π olan dik bir üçgen elde etmiş oluyoruz. Bu üçgenden açıları dik ve karşı kenarları eşit bir dörtgen elde ederiz (şekil 256).



Şekil 256.

Bu dörtgenin kenarları üzerine, aynı şekilde, açıları dik ve karşı kenarları eşit olan dörtgenler çizebiliriz. Böylece elde edilecek dörtgenin kenarları np ve mq ye eşit kılınabilir, diğer bir deyimle, m ve n keyfi tam sayılar olmak üzere

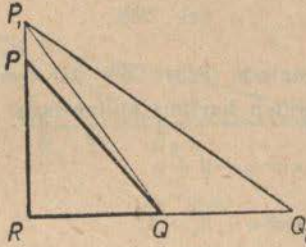
$$AB = np \text{ ve } AD = mq$$

alınabilir (şekil 256). Bu dörtgen BD köşegeniyle, her birinin açıları toplamı π olan BAD ve BCD dik üçgenlerine ayrılmış bulunmaktadır.

Ohalde, eğer bir üçgende açılar toplamı π ye eşitse, açıları toplamı π olan ve dik kenarları istenilen büyüklükte olan bir dik üçgen daima çizilebilir.

Şimdi şu kolaylıkla gösterilebilir: Herhangi verilen bir ABC üçgeninde açılar toplamı π ye eşitse, her PQR dik üçgeninde açılar toplamı π ye eşittir.

Açıları toplamı π olan ve dik RP_1 , RQ_1 kenarları PQR üçgeninin karşıt olarak RP , RQ dik kenarlarından büyük olan dik P_1RQ_1 üçgenini çizelim (şekil 257) P_1Q doğru parçasını çizerek



Şek. 257

elde edilen P_1RQ dik üçgeninde (şekil 255 deki aynı muhakeme ile) açıları toplamı π ye eşit olur. Aynı suretle PRQ de de açıları toplamı π ye eşittir.

Herhangi $A_1B_1C_1$ üçgeni en büyük açısının tepe noktasına ait yükseklikte iki dik üçgene ayrılabilirdiğinden, verilen bir üçgende açıları toplamı π ye eşit olduğunda, herhangi bir üçgende açıları toplamının π ye eşit olacağı çıkar ve teorem sabit olur.

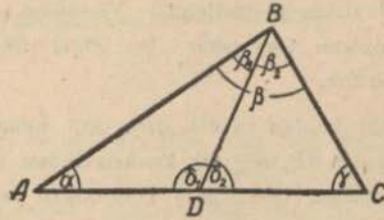
Şimdi ispatlanmış olan iki teoremden teorem 3 elde edilir:

Teorem 3. Ancak iki imkân vardır: Ya her çizgisel üçgen-

de açılar toplamı π ye eşittir veya her üçgende toplam π den küçüktür.

Teorem 4. Bütün çizgisel üçgenlerde açılar toplamı aynı ise toplam π ye eşittir.

İspat. Her üçgenin açıları toplamını x ile gösterelim.



Şek. 258

Keyfi ABC üçgeninde (Şekil 258) BD kesenini çizelim. Açılar için şekilde gösterilen harfleri kullanırsak

$$x = \alpha + \beta + \gamma$$

$$x = \alpha + \beta_1 + \delta_1$$

$$x = \gamma + \beta_2 + \delta_2$$

yazabilir ve son iki eşitliği toplayarak

$$2x = \alpha + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma + (\delta_1 + \delta_2)$$

veya

$$2x = \alpha + \beta + \gamma + \pi$$

bundan da

$$x = \pi$$

elde ederiz.

Bundan şu netice bulunur.

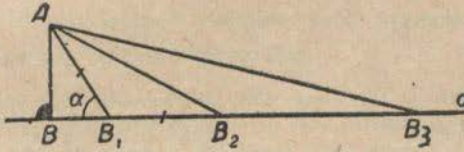
Teorem. Her üçgende açılar toplamı π den küçükse bu top-

lam bütün üçgenlerde aynı olamaz. Diğer bir deyimle bu toplam üçgenden üçgene değişir.

Şimdi önceki bir yardımcı teorem ispatlayacağız.

Yardımcı teorem. Verilen bir noktadan geçmek ve verilen bir doğru ile keyfi küçük bir açı teşkil etmek üzere daima bir doğru çizilebilir.

Verilen A noktasından verilen a doğrusuna dik AB doğrusunu çizelim (Şekil 259). a üzerinde keyfi bir B_1 noktası alıp A noktasına birleştirelim ve dik ABB_1 üçgeninin AB_1B açısına α diyelim. BB_1 doğrultusunda B_1 den itibaren AB_1 doğru parçasına eşit B_1B_2 doğru parçasını alıp AB_2 yi çizelim.



Şek. 259

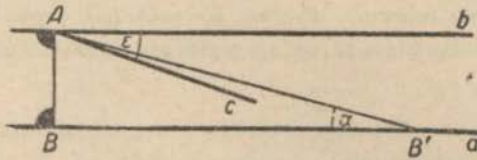
AB_1B_2 ikizkenar üçgeninde AB_2B_1 açısı, bir üçgende açılar toplamının durumuna göre ya $\alpha/2$ ye eşit veya bundan küçük bulunur. Bu suretle devam ederek neticede, verilen herhangi bir açıdan küçük olan AB_nB açısı elde edilir.

Teorem 6. Bir noktadan verilen bir doğruya ancak bir paralel doğru çizilebilirse, herhangi bir üçgende açılar toplamı π ye eşit olur.

İspat bilinmektedir.

Teorem 7. Bir üçgende açılar toplamı π ye eşitse, bir noktadan bir doğruya ancak bir paralel doğru çizilebilir.

İspat. a , verilen doğru A da a üzerinde bulunmuyan nokta olsun. a ya dik AB doğrusuyla AB ye dik Ab doğrusunu çizelim (Şekil 260). a ve b doğruları, açıları toplamı π yi aşan üç-



Şek. 260

gen teşkil etmedikçe kesişmiyeceklerinden paralel olurlar. c doğrusunun da a doğrusuna paralel olduğunu farzedelim. Dar açı BAC olsun ve

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

değerine eşit bulunsun. $AB'B = \alpha$ açısı ε dan küçük olacak ve CAB dar açısıyla AB nin aynı tarafında bulunacak şekilde a üzerinde B' noktasını alalım.

Dik ABB' üçgeninin açıları toplamı farzımız gereğince π ye eşit olduğundan ve $\alpha < \varepsilon$ dan

$$\angle B'AB = \frac{\pi}{2} - \alpha > \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \angle CAB$$

bulunur ve bundan ABB' içine giren Ac doğrusunun BB' tabanını veya a yı keseceği anlaşılır. Elde edilen çelişmezlikten teorem ispatlanmış bulunur. b doğrusu A dan geçip a doğrusuna paralel olan yegâne doğrudur.

Teorem 8. Bir üçgende açılar toplamı π den küçükse, bir noktadan verilen bir doğruya paralel olmak üzere birden fazla doğru çizmek mümkündür.

İspat. Bir üçgende açılar toplamı π den küçük olsun. Verilen bir A noktasından verilen bir doğruya ancak bir paralel çizildiğini farz ettiğimizde bir üçgende açılar toplamı π ye eşit olacağından (teorem 6) çelişmezliğe varılır ve teorem sabit olur.

Ohalde iki hal veya varsayım mümkündür.

A. Verilen bir noktadan verilen bir doğruya ancak bir paralel doğru çizilebilir.

B. Verilen bir noktadan verilen bir doğruya *birden fazla* paralel doğru çizilebilir.

Birinci halde bir üçgende açılar toplamı π ye eşit, ikinci halde ise π den küçüktür.

Karşıt olarak, A ve B ifadeleri de bir üçgende açılarının toplamına ait karşıt hallerden elde edilir.

Lobachevski, «Birinci hal, adi geometri ve düzlemsel trigonometrinin esasını teşkil eder.

«İkinci hal de hiçbir çelişmezlik yaratmaksızın kabul edilebilir. Bu hal «hayali geometri» dediğim yeni geometrinin esasını teşkil eder. Burada bu geometriyi, çizgisel ve küresel üçgenlerin kenarları ve açıları arasındaki bağıntıları ifade eden denklemleri çıkaracak kadar izah etmek niyetindeyim» der.

64. Euklid geometrisinde paralellik aksiyomunun değişik şekilleri.

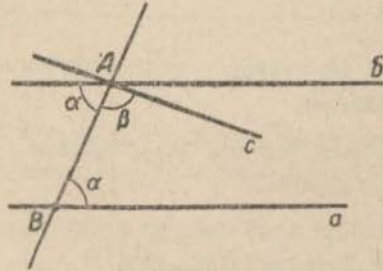
Evvelki inceleme, paralel aksiyomu yerine bir üçgende açılarının toplamına dair bir teorem alınabileceğini göstermektedir. Meselâ, herhangi bir üçgende açılar toplamı ispatsız olarak π ye eşit kabul edildiğinde, paralel aksiyomu teorem şeklini alır.

Paralel aksiyomun yerine alınabilecek birçok teorem mev-

cuttur. Lobachevski geometrisinin izahı için önemli olanlardan bir kaçını zikrederim.

Evvelâ, paralellerin birtekliliğine ait aksiyomundan Euklid'in beşinci aksiyomu elde edilir; bunun karşısı da doğrudur.

Bunu ispatlamak için A noktasından a doğrusuna bir tek b paralelini geçirelim (Şekil 261).



Şek. 261

Bir kesen, paralel doğrularla eşit iç ters açılar meydana getirdiğinden ve b doğrusu A dan geçip a ya paralel olan birtek doğru olduğundan AB doğrusu b ve a doğrularıyla eşit iç ters açılar meydana getirir. Ohalde AB kenariyle $\alpha + \beta < \pi$ şartı altında β açısı teşkil eden c doğrusu a yı keser. Ayrıca bir üçgende açılar toplamı π den büyük olmadığından a yı AB nin aynı taraftaki iç açılarının toplamı π den küçük bulunduğu tarafında keser. Bu teoremin karşısı da kolayca ispatlanabilir.

Aynı doğruya çizilen dik doğru ile yatık doğrunun daima keşiceceklerini ifade eden teorem de paralel aksiyomunun yerine alınabilir.

Okuyucu, verilen bir A noktasından verilen bir a doğrusuna çizilen paralellerin birtekliliğinin yeter olduğunu kendisi ispatlamalıdır. Bu takdirde herhangi bir doğru ve herhangi bir nokta için bir teklik netice olarak çıkar.

Euklid'in beşinci aksiomunun doğrulağı halinde benzer üçgenlerin varlığı liseden malûmumuzdur.

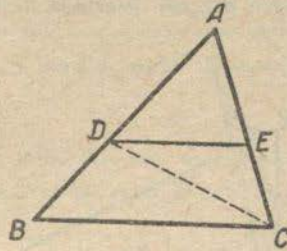
Karşıt teorem, beşinci aksiom yerine eşit olmıyan benzer üçgenlerin varlığının alınabileceğini göstermektedir.

Teorem. (Wallis). *Eşit olmıyan benzer iki üçgenin varlığından Euklid'in paralel aksiyonu ispat edilebilir.*

İspat. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C' \text{ ve } AB > A'B'$$

olsun. ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde $AD = A'B'$ ve $AE = A'C'$ doğru parçalarını alalım (Şekil 262).



Şek. 262

$AD = A'B' < AB$ olduğundan D noktası A ile B arasına düşer. E noktası C noktası ile çakışsaydı $AED (= \angle A'C'B')$ açısına eşit olan ACD açısı C açısından küçük bulunurdu. Eğer E noktası AC nin dışında olsaydı AED yine C açısından küçük bulunurdu. Halbuki AED açısı C açısına eşit olduğundan E noktasının A ile C arasında olduğu anlaşılır.

Bu takdirde $BCED$ dörtgeninde açılar toplamı 2π ye eşit olur. Ohalde BDC ve DCE üçgenlerinin herbirinde açılar toplamı π ye eşit olur, zira hiçbirinde toplamı π yi aşamaz.

Bir üçgende bile açılar toplamının π ye eşit oluşu beşinci aksiyonu verdiğinden ispat sabit olur.

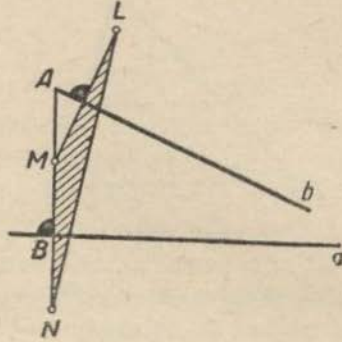
Bundan, benzerlik teorisinin paralel aksiyomuna nasıl sıkıca bağlı olduğu açık olarak görülmektedir.

Teorem. *Euklid'in beşinci aksiyomu doğru ise bir üçgenin çevrel dairesi daima çizilebilir.*

İspat liseden malûmumuzdur.

Karşıt teorem (F.Bolyai). *Herhangi bir üçgenin çevrel dairesi çizilebilirse Euklid'in beşinci aksiyomu ispatlanabilir.*

İspat. Her üçgenin çevrel dairesinin çizilebileceğini kabul edelim. Bir AB doğrusuna çizilen aB dik doğrusıyla bA eğik doğrusunun daima kesişeceğini ispatlıyacağız.. Bu ise beşinci aksiyoma denktir. AB doğru parçası üzerinde keyfi bir M noktasını



Şek. 263

alıp M nin b ve a dğrularına göre olan L ve N simetriklerini düşünelim. ML doğrusu b ye dik ve MA ise eğik olduğundan ⁽¹⁾ MA ve ML farklı doğrular olur ve netice olarak, L, M, N noktaları doğrusal olmaz. a doğrusu LMN üçgeninin N ve M tepe noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri

⁽¹⁾ Eğer MA ve ML nin her ikisi de b ye dik olsalardı birbirlerine paralel bulunurlardı (bu teorem beşinci aksiyomdan bağımsızdır).

olduğundan bu üzgenin çevrel dairesinin O merkezi a doğrusu üzerinde bulunur. b doğrusu da M ve L noktalarından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olduğundan bu O merkezi aynı zamanda b üzerinde bulunur. Ohalde a ve b doğruları kesişirler ve teorem sabit olur.

Ohalde bir üçgen dışına daire çizilebileceğine dair olan teorem paralel üzerine olan beşinci aksiyomun yerine geçebilir.

Teorem. *Euklid'in beşinci aksiyomu doğru ise bir doğrudan eşit uzaklıkta olup bu doğrunun aynı tarafında alınan üç nokta doğrusaldır.*

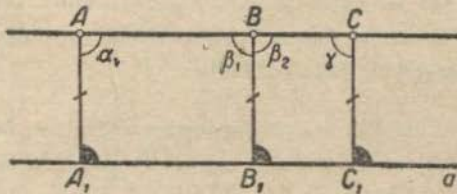
İspat liseden bilinmektedir.

Karşıt teorem. *Bir doğrunun aynı tarafında bulunup bu doğrudan eşit uzaklıkta olan üç nokta doğrusalsa Euklid aksiyomu ispatlanabilir.*

İspat. A, B, C noktaları bir a doğrusunun aynı tarafında olan ve A_1, B_1, C_1 noktaları $A_1B_1C_1$ nin a üzerindeki ayakları olmak üzere

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

eşitlikleri sağlanan üç nokta olsun (Şekil 264).



Şek. 264

A_1B_1BA , A_1C_1CA ve B_1C_1CB dörtgenleri Saccheri dörtgenleri olduğundan üst tabanlarının $\alpha_1, \beta_1; \alpha_1, \gamma; \beta_2, \gamma$ açıları

$$\alpha_1 = \beta_1; \quad \alpha_1 = \gamma; \quad \beta_2 = \gamma$$

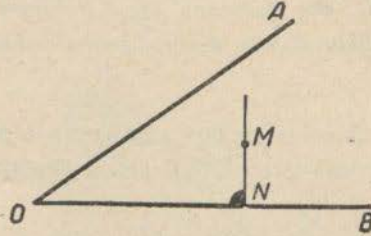
yı sağlamakla

$$\beta_1 = \beta_2$$

elde edilir. Eşit komşu açılar dik açı olduğundan $A_1 B_1 BA$ dörtgenindeki bütün açılar diktir. Bundan da $A_1 B_1 B$ ve $A_1 B A$ üçgenlerinin herbirinde açılar toplamı π olur ve beşinci aksiom elde edilmiş bulunur.

Bu teoremden de paralel iki doğrunun her noktada birbirinden eşit uzaklıkta olmasının paralel aksiyomunun diğer bir şekli olduğunu anlarız.

Şimdi dar bir AOB açısı ile bunun içinde olan bir M noktası alalım (Şekil 265). OB kenarına MN dikmesini çizerek NM



Şek. 265

dik doğrusuyla OB ye yatık olan OA doğrusunun, beşinci aksiyonu kabul ettiğimizde, daima kesişeceklerini görürüz. Bu netice diğer bir şekilde de ifade edilebilir.

Teorem. *Euklid'in beşinci aksiyonu doğru ise, herhangi bir açının içindeki bir noktadan daima açının iki kenarını da kesen bir doğru çizmek mümkündür.*

Açının dar olma şartını kaldırabiliriz. Açı geniş olduğunda açortayını çizmek kâfi gelip buna çizilen bir dik doğru verilen açının iki kenarını da keser.

A açısına ait şarta göre A' noktası cAb açısının içine düşer. A' den geçmek ve cAb açısının her iki ACc ve ABb kenarını kesmek üzere PQ doğrusunu çizelim.

A' noktasını B ve C noktalarıyla birleştirip Şekil 266 da gösterilen harfleri kullanarak

$$\delta(ABC) = \delta = \pi - (x + \beta + \gamma),$$

$$\delta(BCA') = \delta = \pi - (x + \beta + \gamma),$$

$$\delta(A'BQ) = \delta_1 = \pi - (x_1 + \beta_1 + \mu),$$

$$\delta(A'CP) = \delta_2 = \pi - (x_2 + \beta_2 + \lambda),$$

yazar ve taraf tarafa toplamak suretiyle

$$2\delta + \delta_1 + \delta_2 = 4\pi - (\gamma + \gamma + \gamma_2) - (\beta + \beta + \beta_1)$$

$$- (x + x_1 + x_2) - (x + \lambda + \mu)$$

$$= 4\pi - \pi - \pi - \pi - (x + \lambda + \mu)$$

$$= \pi - (x + \lambda + \mu)$$

veya

$$\delta(APQ) = \pi - (x + \lambda + \mu) = 2\delta + \delta_1 + \delta_2$$

buluruz.

Bundan da, $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ dolayısıyla

$$\delta(APQ) > 2\delta(ABC)$$

elde olunur.

Elde ettiğimiz bu netice kelimelerle şöyle ifade edilebilir.

Bir açının içindeki bir noktadan bu açının iki kenarını birden kesen bir doğrunun çizilebileceği ve aynı zamanda beşinci aksiyomun cari olmadığı kabul edildiğinde herhangi bir ABC üçgeni verilmişken, $\delta(APQ)$ noksanlığı $\delta(ABC)$ noksanlığının iki katından büyük olacak şekilde bir APQ üçgeni bulunabilir.

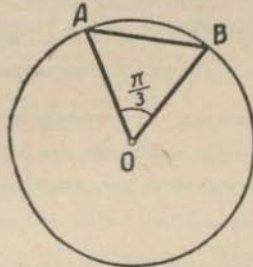
Bundan da noksanlığı keyfi derecede büyük olan üçgenlerin varlığı çıkar. Bu ise imkânsızdır, zira, π ile π den küçük pozitif bir sayının farkı π den büyük olamaz. Bu çelişmezlik teoremin ispatını verir.

Euklid'in paralel aksiyomu yerine geçebilen bir teorem daha zikrederim. Bu maksatla şu iki teoremi ele alıyoruz.

Teorem. *Euklid'in beşinci aksiyomu cari ise bir daire içine çizilen düzgün altıgenin kenarı dairenin yarıçapına eşittir.*

İspat lise geometrisinden bilinmektedir.

Karşıt teorem. *Bir daire içine çizilen düzgün altıgenin kenarı dairenin yarıçapına eşitse Euklid'in beşinci aksiyomu ispatlanabilir.*



Şek. 267

İspat: (Şekil 267) de daire içine çizilen düzgün altıgenin kenarı yarıçapa eşit veya

$$AB = OA = OB$$

olsun. Eşkenar bir üçgende açılar eşit ve

$$\angle AOB = \pi/3$$

olduğundan AOB üçgenin açıları toplamı π ye eşit bulunur. Bu ise beşinci aksiyomu verir ve ispat sabit olur.

Bununla, Euklid geometrisinin paralel aksiyomunun değişik şekillerinin tetkini bitirmiş oluyoruz.

65. Lobachevski aksiyomu.

Bir a doğrusu ile bunun üzerinde olmıyan bir A noktası verilmişken A dan geçen ve A ile a nın belirlediği düzlem üzerinde bulunan ve a yı kesmiyen bir doğru çizilebileceğini biliyoruz.

Bu, doğrudan doğruya üçgenin dış açısına ait teoremden elde edilir (2).

Euklid geometrisi bu doğrunun *bir tek* oluşu üzerine kurulmuştur.

Lobachevski, A dan geçip a yı kesmiyen böyle birden fazla doğrunun varlığını kabul ederek tezat yaratmayan yeni bir geometri kurmuştur.

Lobachevski aksiyomu. *a herhangi bir doğru, A da bu doğru üzerinde bulunmıyan bir nokta ise, a doğrusıyla A noktasının belirlediği düzlem üzerinde A noktasından geçip a doğrusunu kesmiyen en aşağı iki doğru vardır.*

Lobachevski geometrisinde Euklid geometrisinin aksiyomlarından yalnız bir tanesi — Euklid'in beşinci aksiyomu — hariç bütün aksiyomlar aynen kalmakta ve sadece beşinci aksiyomun yerini Lobachevski aksiyomu almaktadır.

Evvelki bilgilerimizden dolayı Lobachevski aksiyomu yerine aşağıdaki alınabilir :

Açıları toplamı π den küçük olan bir üçgen mevcuttur.

Lobachevski, ölümünden bir yıl önce 1855 de yayınladığı «Pangeometry» adlı eserinde şöyle denmektedir :

«Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien,

Berlin, 1840. In der Finke'schen Buchhandlung» başlığı altında paralellerin tam bir teorisini yayınladım.

«Bu eserde paralel doğruların yardımını gerektirmiyen bütün teoremlerin ispatlarını verdim. Bu teoremler arasında küresel üçgenin alanının bütün kürenin alanına oranını veren teorem dikkate değer (Geometr. Unters. 27) A, B, C küresel üçgenin alanının üçgenin ait olduğu kürenin bütün alanına oranı,

$$\frac{1}{2} (A + B + C - \pi)$$

nin dört dik açıya oranına eşittir. Burada π iki dik açıyı ifade etmektedir.

Burada Lobachevski küresel geometriden bahsetmekte ve adı geçen teoremin paralel aksiyomuna bağlı olmadığını, diğer bir deyimle, bu teoremin küresel geometride beşinci aksiyom veya Lobachevski aksiyomundan hangisi alınır alınsın doğru kaldığını göstermektedir.

Lobachevski devamla «Sonra», diyor «Çizgisel bir üçgende üç açının toplamı iki dik açıdan büyük olamaz (Geometr. Unters. 19) ve bu toplam çizgisel bir üçgende iki dik açıya eşitse bu, çizgisel bütün üçgenlerde doğrudur. Ohalde iki imkân vardır: Ya her çizgisel üçgende üç açı toplamı iki dik açıya eşittir — bu adı geometriyi vermektedir — veya çizgisel her üçgende toplam iki dik açıdan küçüktür; bu son hal hayalî geometri adını verdiğim özel geometrinin temelini teşkil eder. Bu geometriye daha doğrusu «pangeometry» denilebilir, zira, bu ad adı geometriyi özel hal kabul eden genel geometriyi ifade eder» [32]. Lobachevski tarafından yaratılan bu yeni geometri bugün *gayri Euklidyen geometri* adı ile bilinmektedir.

66. Lobachevski geometrisinin ana hatları.

Euklid'in beşinci aksiyomu yerine Lobachevski aksiyomunu alarak Lobachevski geometrisinin aşağıdaki teoremleri elde edilir:

Teorem. Çizgisel bir üçgende üç açının toplamı iki dik açıdan küçük olup üçgenden üçgene değişen bir miktardır.

Teorem. Verilen bir doğruya dik ve yatık olarak çizilen iki çizgi daima kesişmez.

Teorem. Benzer olup eşit olmıyan üçgen mevcut değildir. Bir üçgenin üç açısı diğer bir üçgenin buna karşı açılarna eşitse bu üçgenler eşittirler (kongrüent).

Eğer benzer olup da eşit olmıyan üçgen mevcut olsaydı beşinci aksiyom cari olurdu. Bu ise Lobachevski geometrisinde imkânsızdır.

Ohalde Lobachevski geometrisinde benzer (ve eşit olmıyan) şekiller mevcut değildir.

Teorem. Dışına daire çizilmesi imkân olmıyan üçgenler mevcuttur.

Zira, bir üçgen dışına daire çizilmesi beşinci aksiyoma denk bulunmaktadır.

Yukardaki teoremden kenarlarının orta dikmeleri paralel olan veya kesişmiyen üçgenler mevcut olduğu neticesi çıkar.

Teorem. Bir düzlemde bir doğrunun aynı tarafında olup uzaklıkları verilen bir doğru parçasına eşit olan noktaların geometrik yeri herhangi üç noktası doğrusal olmıyan bir eğridir.

Çünkü, eğer bu geometrik yerin üç noktası doğrusal olsaydı Euklid'in beşinci aksiyomu cari olurdu (64); halbuki bu cari bulunmamaktadır.

Bu eğriye eşit uzaklıklı eğri veya eşuzaklıklı eğri denilmektedir. Eşuzaklıklı eğri deyince bir a doğrusundan sabit h uzaklığında bulunan ve doğrunun yalnız bir tarafında bulunmaları gerekmeyen noktaların geometrik yeri anlaşılır. Bu eşuzaklıklı eğrinin alt ve üst olmak üzere iki kolu vardır. a doğrusuna eşuzaklıklı eğrinin tabanı denir.

Teorem. Bir daire dışına çizilen düzgün altıgenin kenarı dairenin yarıçapından büyüktür.

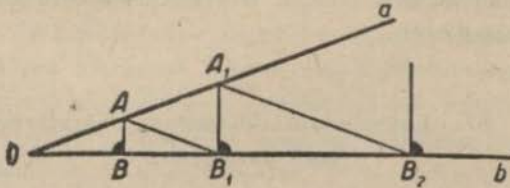
İspat: AOB üçgeninin (Şekil 267) üç açısı toplamı iki dik açıdan küçük olduğundan $\pi/3$ e eşit olan AOB açısı AOB üçgeninde en büyük açı olur. Halbuki en büyük kenar en büyük açı karşısında olduğundan

$$AB > OA$$

olur.

Teorem. Herhangi dar bir açının bir kenarına dik olup diğer kenarını kesmeyen daima bir doğru vardır.

İspat: $\angle aOb$ herhangi bir dar açı olsun (Şekil 268). b



Şek. 268

kenarına dik olan her doğrunun a kenarını kestiğini kabul edelim. a kenarının keyfi A noktasından b kenarına AB dikmesini indirip b üzerinde O noktasının AB ye göre simetrisi olan B_1 noktasını alalım. B_1 noktasından b ye dik doğru çizelim. Kabulümüze göre bu doğru a kenarını bir A_1 noktasında keser. OA_1B_1

üçgeninin $\delta(OA_1B_1)$ noksanlığının OAB üçgeninin $\delta(OAB)$ noksanlığının iki katından büyük olduğu hesaplanabilir:

$$\delta(OA_1B_1) > 2\delta(OAB)$$

b üzerinde O noktasının A_1B_1 e göre B_2 simetrisini alarak B_2 den b ye bir dikme çıkalım. Kabulümüze göre bu dikme a doğrusunu bir A_2 noktasında keser. Evvelki gibi

$$\delta(OA_2B_2) > 2\delta(OA_1B_1)$$

buluruz.

Bu suretle devam ederek

$$\delta(OA_nB_n) > 2\delta(OA_{n-1}B_{n-1}) > 2^2\delta(OA_{n-2}B_{n-2}) > \dots$$

$$\dots > 2^{n-1}\delta(OA_1B_1) > 2^n\delta(OAB)$$

elde olunur. Bir üçgenin noksanlığı π den büyük olamayacağından ve $\delta(OAB) > 0$ olan *dar bir açıda bir kenara çizilen bütün dikmelerin diğer kenarı geçmiyeceği* neticesi elde edilir ve ispat sabit olur.

Bundan sonra bu önemli teoremden *kesmiyen dikme teoremi* olarak bahsedeceğiz.

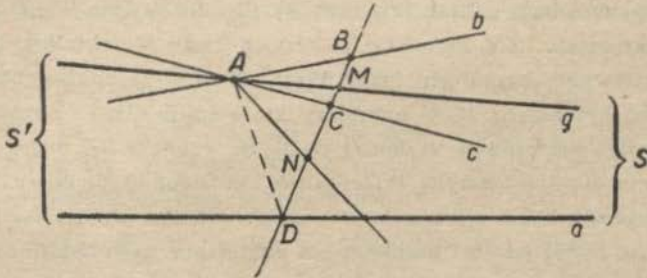
67. Lobachevski düzleminde doğruların izafi durumları.

Lobachevski geometrisinde düzlem *Lobachevski düzlemi* olarak adlandırılır. Bu düzlemde Lobachevski aksiyomu hakimdir. Adi geometrinin düzlemine Euklid düzlemi denilmekte olup bu düzlemde Euklid'in beşinci aksiyomu caridir.

Şimdi Lobachevski düzleminde doğruların izafi durumlarını inceliyeceğiz.

Verilen bir a doğrusunun dışındaki bir A noktasından bu doğruyu kesmiyen sonsuz sayıda doğru geçeceği aşikârdır.

Bunu ispatlamak üzere A noktasından geçip a doğrusunu kesmiyen iki doğruyu b ve c ile gösterelim (Şekil 269); böyle iki doğrunun varlığı Lobachevski aksiyomundan bilinmektedir.



Şek. 269

b doğrusu üzerinde, c doğrusunun, a doğrusuna ait noktalar bulunmayan tarafında olacak şekilde alınan B noktasından ve a doğrusunun keyfi D noktasından geçen BD doğrusunu çizelim. BD doğru parçası c yi C de kessin. M noktası BC doğru parçasının keyfi bir noktası ise AM doğrusu a doğrusuna kesmez. Şayet $g (= AM)$ doğrusu ile a doğrusu g doğrusu üzerinde A dan M ye doğru olan yönde bir S noktasında kesişecek olurlarsa MDS üçgeniyle c doğrusuna Pasch aksiyomu tatbik ederek c nin a yı keseceği neticesi çıkmış olur. Halbuki c doğrusu a yı kesmez. Diğer taraftan g ve a doğrularının M den A ya olan yönde bir S' noktasında kesiştikleri kabul edilirse Pasch aksiyomunun MDS' üçgeniyle b doğrusuna tatbikinde b nin a yı keseceği çıkar; bu da imkânsızdır. Ohalde BAC açısının içindeki g doğrularından hiç birisi a yı kesmez.

Merkezi A olan demetin doğruları a doğrusuna göre iki sınıfa ayrılır. Birinci sınıftaki doğrular, demetin a yı kesen ikinci sınıftakiler a yı kesmiyen doğrulardır.

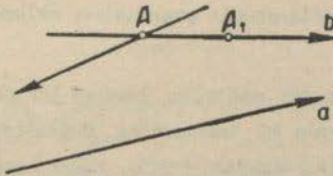
mektedir. AR doğrusu a yı bir S noktasında kesmiş olsaydı DS doğru parçasının dışında D den S ye doğru olan yönde a doğru-su üzerinde bir T noktası alarak birinci sınıfa ait bir AT doğrusu elde etmiş olurduk. Bu ise imkânsızdır.

Lobachevski de Euklid gibi ne süreklilik ne de konum aksi-yomu ithal etmiştir. Sezîşe dayanarak Lobachevski şöyle yaz-maktadır :

«Bir noktadan geçen ve verilen düzlemde bulunan bütün doğrular bu düzlemin bir doğrusuna göre *bu doğruya kesen ve kesmeyen* olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Bu iki sınıfın sınır doğrusu, verilen doğruya paraleldir denir» (1).

Lobachevski'nin verilen bir doğruya paralel olan bir doğ-ruyu, a yı kesmeyen herhangi bir doğru olarak değil sadece sınır doğrusu olarak aldığını görüyoruz.

A noktasından (Şekil 270) a doğrusuna bir dik doğru çizil-diğinde AR doğrusunun bu dikmeye göre simetriği olan AR' doğrusu Lobachevski anlamında yine a ya paralel dir. Lobachevski ayrıca, *paralellik'e taraf veya yön* de atfetmektedir. AR doğrusu a ya bir taraftan, AR' ise diğer taraftan paraleldir.



Şek. 271

Paralelliğin yönünü usulen oklarla göstereceğiz (Şekil 271).

(1) Bu ifadeler esas itibarıyla yarım yüzyıl sonra Dedekind tara-fından tam kesinlikle ifade edilen süreklilik aksiyomundan başka bir şey değildir.

Verilen bir A noktasının dışındaki her A noktasından verilen a doğrusuna Lobachevski anlamında iki ve ancak iki paralel geçer.

a yı kesmiyen ve a ya göre sınır veya paralel olmiyan g doğrularına (Şekil 269) a ya süperparalel dir denir.

Lobachevski başka terimler kullanmaktadır [33]:

«Bir noktadan geçen doğrular ya aynı düzlemde verilen bir doğruyu keserler veya nekad ar uzatılırlarsa uzatılınsalar bu doğruyu kesmezler. O halde bu doğruları a doğrusuna göre ayırdetmek gerekmektedir: birleşen veya yakınsayan doğrular ve bir gruptan diğerine geçişi sağlayan paralelleri de içine alan birleşmiyen veya yakınsamıyan doğrular - ıraksayan doğrular»,

İraksayan doğrular Lochevski anlamında süperparalel dediklerimize tekabül eder. Bu terimin Lobachevski tarafından kullanılan anlamı sonra anlaşılacaktır.

Bir a doğrusunun belirli bir doğrultusunu, daha doğrusu belirli bir yönünü göz önüne alırsak bir A noktasından verilen doğrultuda Lobachevski anlamında yalnız bir paralel geçer.

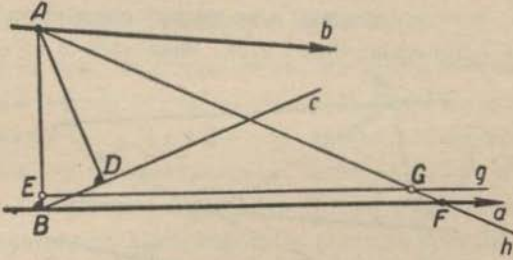
Lobachrvski, bundan böyle, «bir doğrunun bir doğruya paralelliği denilince, bu doğruların birer noktasını birleştiren üçüncü bir doğrunun aynı tarafında uzandıkları halinin kastedildiğini» yazmaktadır.

«O halde verilen bir noktadan verilen bir doğruya bir paralel çizilebilir; şu farkla ki bir tarafta doğrultunun ufak bir değişimi bu doğruyu yakınsayan doğru, diğer tarafta değişimi ise ıraksayan doğru kılar.

«Bu suretle paralelliği en genel şekliyle mütalâa etmiş bulunuyoruz. Euklid, tatmin edici bir ispat verecek durumda olmadığundan, adi geometride yalnız, iki paralelin bir doğruya dik olması özel halini kabul etmiştir.

«Geometrinin yapısı itibariyle ispatı mümkün olmadığı hal-

nı yönde b ye paralel olduğunu göstereceğiz. b doğrusu üzerinde keyfî bir A noktasından a ya AB dikmesini indirelim



Şek. 274

(Şekil 274). a doğrusu b yi kesmediğinden a nın B de b ye paralelligini göstermek yeter. aBA açısı içinde keyfî Bc doğrusunu çizerek c nin b yi keseceğini ispatlıyalım. A dan c ye AD dikmesini çizelim. ADB dik üçgeninin AB hipotenüsü AD kenarından büyük olduğundan AB doğru parçası üzerinde $AE = AD$ olacak şekilde bir E noktası mevcuttur. E den de AB doğru parçasına gE dikmesini çıkaralım.

A noktası etrafında DAB açısı kadar bir dönme sonunda AD doğru parçası AE durumunu alır, DC doğrusu Eg üzerine yatar ve b doğrusu Ah durumunu alır ve a doğrusunu F noktasında keser, zira b doğrusu a ya paralel bulunmaktadır.

ABF üçgeniyle g doğrusuna Pasch aksiyomunu tatbik edersek g doğrusunun AF yi A ile F arasında bulunan bir G noktasında kestiği anlaşılır; a ve g doğruları da AB ye dik olduklarından kesişmezler.

A noktası etrafında birinciye ters olan bir dönme sonunda AE doğrusu AD ye, g doğrusu c ye, h doğrusu b ye dönüşür ve dolayısıyla g ve h nın G ortak noktası dönme ile c ve b nin G^* ortak noktasına dönüşür, diğer bir deyimle, c doğrusu b yi C^* noktasında keser. Teorem bu suretle sabit olur.

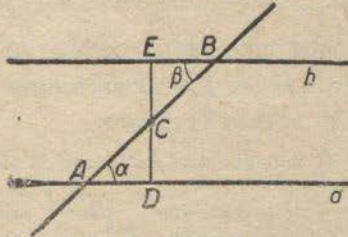
kesişselerdi bu noktadan aynı yönde a ya paralel iki doğru geçmiş olurdu. Bu ise imkânsızdır. a doğrusu üzerinde keyfî A noktasını alıp b ve c doğrularının herhangi B ve C noktalarını sırasıyla ve AC doğru parçalarıyla birleştirelim.

aAB ve aAC açılarının ortak Aa kenarı mevcut olduğundan A noktasından her iki açı içinde bulunan bir g doğrusu çizmek mümkündür. a nın b ve c ye paralel olmasından g doğrusu b ve c yi B_1 ve C_1 noktalarında keser. Fikirleri tespit için B_1 noktası A ile C_1 arasında olsun. C_1 den geçen ve cC_1A açısı içinde alınan keyfî bir h doğrusu c nin a ya paralel olmasından a yı bir D noktasından keser. AC_1D üçgeni ile b doğrusuna Pasch aksiyomunu tatbik edersek h nın b yi kestiğini buluruz. Bu ise c nin b ye paralellliğini gösterir ve teorem ispatlanmış olur.

Bu ve evvelki teoremden aynı yönde olan paralelliliğin transitifliğı, bundan da düzlemde bütün yönlü doğruların cümlesinin aralarında paralel olan doğru sınıflarına ayrılacağı netice çıkar. Her yönlü doğru, kendisine paralel olan doğruların sınıfını belirler - paralel, yönlü doğrular demeti. Ters yönde alınan doğru diğerk bir demet belirler.

Teorem. Bir üçüncüsüyle eşit iç ters açılar meydana getiren iki doğru süperparaleldir.

İspat. a ve b üçüncü bir AB doğrusuyla eşit iç ters açılar

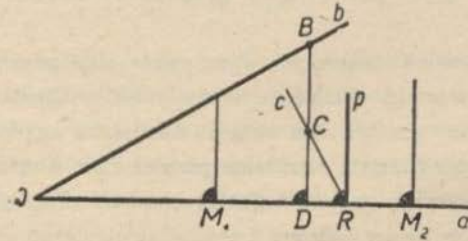


Şek. 277

meydana getiren doğrular olsun (Şekil 277). AB doğru parçasının C orta noktasından a ve b doğrularına CD ve CE dikmelerini indirelim. ADC ve BEC dik üçgenleri, eşit hipotenüs ve eşit dar açıları olduğundan, birbirine eşittir. $\angle ACD = \angle BCE$ olur ve E, C, D noktaları bir doğru üzere düşer. Ohalde a ve b doğruları aynı ED doğrusuna dik bulunmakla süperparalel olurlar ⁽¹⁾.

Teorem. Her hangi dar bir açıda kenarlardan birine dik diğerine paralel olan daima bir doğru mevcuttur.

İspat. aOb dar bir açı olsun (Şekil 278). Kesişmeyen dik teoreminden dolayı (66) Oa ışınının noktaları iki sınıfa ayrılır. Birinci sınıf a ya dik ve b yi kesen doğruların çizildiği M_1 nok-



Şek. 278

talarından, ikinci sınıf ise a ya dik olup b yi kesmeyen doğruların çizildiği M_2 noktalarından ibarettir. Birinci sınıfa ait bütün M_1 noktaları ikinciye ait M_2 noktalarının aynı tarafında bulunur.

Dedekind kesimi dolayısıyla Oa ışını üzerinde, OR doğru parçası birinci sınıfın ve Ra ışını ikinci sınıfın noktalarını havi olacak şekilde bir R noktası mevcuttur.

a doğrusuna R den çizilen p dikmesi b yi kesmez. Hakika-

⁽¹⁾ b doğrusu a ya paralel olamaz. Eğer b doğrusu a ya paralel olsaydı, simetriden dolayı iki yönde paralel olurdu ve dolayısıyla E den a ya ancak bir paralel çizilebilirdi.

ten eğer p dikmesi b yi bir K noktasında kesseydi, b üzerinde ve K nın ötesinde bir L noktası alarak ve L den b ye bir dikme indirerek b yi kesen ve ikinci sınıfa ait olan bir dikme elde ederdik. Bu ise mümkün değildir.

Şimdi şunu ispatlıyacağız: bOa dar açısının b kenarını kesmeyip Oa kenarına dik olan birinci p doğrusu b kenarına paraleldir.

ORp açısı içinde Rc doğrusunu çizelim. Rc nin Ob yi keseceğini göstereceğiz. Rc üzerindeki keyfi bir C noktasından a ya CD dikmesi çizerek CD dik doğrusunun D ayağının OR doğru parçasına ait olduğunu ve dolayısıyla CD nin OB yi bir B noktasında kestiğini göstereceğiz. Pasch aksiyomunun ODB üçgeni ve c doğrusuna tatbikiyle c nin b yi kestiği neticesi elde edilir ve teorem sabit olur.

Bundan şu netice elde olunur: Lobachevski geometrisinde her dar aOb açısı, R noktasında OR ye çizilen dikme diğer kenara paralel olacak şekilde, bir türlü olarak bir OR doğru parçası belirler. Karşıt olarak, her OR doğru parçasına birtek ROb açısı tekabül eder, o suretle ki OR ile birlikte bu açığı teşkil eden Ob doğrusu R den OR ye çizilen dikmeye paralel bulunur.

Bu açığı bulmak için sadece OR doğru parçasının O uc noktasından p ye, R uc noktasından OR doğru parçasına çizilen dikmeye b paralelini çizmek yeter.

OR doğru parçasının ölçüsünü x ile, bOR açısınınkini de α ile gösterirsek α nın x in bir fonksiyonu olduğunu görürüz.

Lobachevski bu fonksiyonu

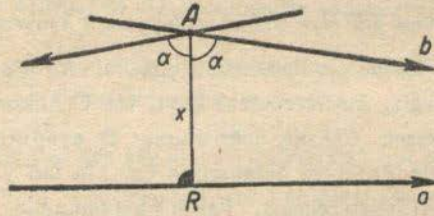
$$\alpha = \pi(x)$$

şeklinde yazmaktadır.

α açısına A ve a nın paralellik açısı denir (Şekil 279). $\pi(x)$ fonksiyonuna Lobachevski fonksiyonu denilmektedir.

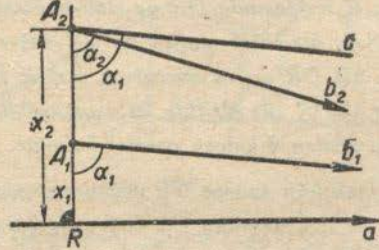
A noktasının a doğrusuna olan x uzaklığı büyüdükçe paralellik açısı daima küçülür :

$$\pi(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty$$



Şekil 279

İspat için $RA_1 = x_1$ ve $RA_2 = x_2$ yazıp (Şekil 280) $x_1 < x_2$



Şek. 280

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\alpha_1 = \pi(x_1)$ ve $\alpha_2 = \pi(x_2)$ buluruz. A_2 noktasından A_2R ile α_1 açısını teşkil eden c doğrusunu çizerek bu c doğrusu evvelki bir teoremden dolayı b_1 doğrusuna süperparalel olur ve dolayısıyla b_1 doğrusu A_2R ile α_1 den küçük olan bir α_2 açısı teşkil eder.

Ohalde $x_1 < x_2$ halinde $\pi(x_2) < \pi(x_1)$ eşitsizliği mevcuttur. Lobachevski fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.

Keyfi olarak küçük ε açısına mukabil $\pi(x) = \varepsilon$ olacak şe-

kilde bir x bulunabildiğinden $x \rightarrow 0$ için $\pi(x)$ in sıfıra gittiği neticesi çıkar.

Gayri euklidiyen geometride doğru parçalarıyla açılar arasındaki mutlak bağıllık ile ilgili olarak Lobachevski, «Geometrinin Prensipleri», 1829 adlı eserinde şöyle demektedir:

«Açıklamış olduğumuz paraleller teorisi doğrularla açılar arasındaki bağıllığını göstermekte olup bu bağıllığın tabiatı varlığını hiç bir kimse ispat edecek veya çürütecek durumda değildir. Her nasılsa astronomik gözlemler, ölçebildiğimiz bütün doğruların hatta yıldızlar arasındaki uzaklıkların teorideki birim doğruya kıyasla, çizgisel düzlem trigonometride şimdiye kadar kullanılan denklemlerin hatta hissedilmeyecek derecede doğruluğu ile, küçük olduğuna bizi inandırmaktadır». Lobachevski sonra, tepe noktaları yıldız olan astronomik üçgenlerin açılarının ölçme neticelerini kıyas edip şöyle devam etmektedir:

«Bunu gördükten sonra artık doğruların ölçüsünün açılara bağlı olduğu kabulünde ısrar etmek mümkün değildir (bu kabulü birçok geometriciler ispatı gerekmiyen mutlak gerçek olarak görmek istemişlerdi). Bu kabulün görünen kâinatın sınırları ötesine gittiğimiz gün yanlış olduğu anlaşılacaktır.»

Süperparalellik bağıntısının simetri özeliği kolaylıkla elde edilir.

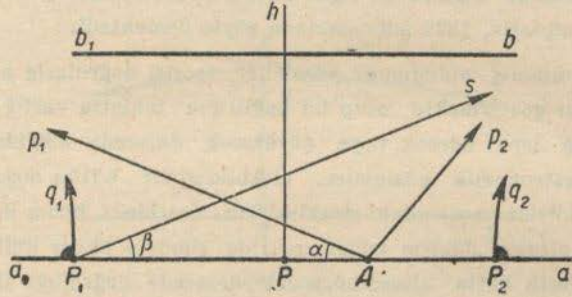
Teorem. *Bir doğru ikinci bir doğruya süperparalelse ikinci doğru da birinciye süperparaleldir.*

İspat: a doğrusu b doğrusuna süperparalel olsun. b nin a ya paralel olduğu kabul edildiğinde a nın b ye paralelliği çıkar. Bu ise doğru olmadığından teorem ispatlanmış olur.

Bununla beraber süperparalellik tranzitiflik özeliğini haiz değildir.

Teorem. Süperparalel iki doğrunun bir ve ancak bir ortak dikmesi vardır.

İspat. a ve b doğruları süperparalel olsunlar (Şekil 281). a



Şek. 281

doğrusu üzerinde bir A noktası alarak A dan b doğrusuna ters yönde p_1 ve p_2 paralel doğrularını çizelim [29].

aP_2 , ve a_1Ap_1 açılarından biri muhakkak dardır. Dar açı $a_1Ap_1 = \alpha$ olsun. Ayrıca $\pi(AP_1) = \alpha$ olacak şekilde AP_1 doğru parçasını alalım. Bu takdirde a ya P_1 noktasındaki q_1 dikmesi p_1 doğrusuna ve dolayısıyla verilen yönde b_1b doğrusuna da paralel olur. P_1 den b ye b_1b yönünde s paralel doğrusunu çizelim. $sP_1a = \beta$ açısı dardır ve dolayısıyla $\beta = \pi(P_1P_2)$ olacak şekilde P_1P_2 doğru parçası bulunabilir.

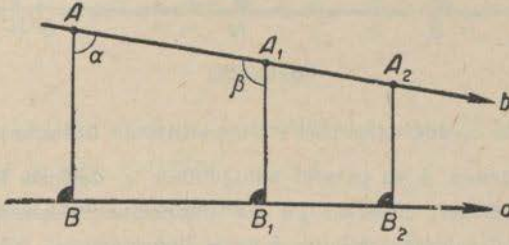
a doğrusuna P_2 de dik olan q_2 doğrusu s doğrusuna paralel olduğundan b_1b yönünde b ye de paraleldir.

Ohalde, süperparalel doğrulardan birinde, a üzerinde, a ya dik b ye paralel doğruların çizilebildiği P_1 ve P_2 noktaları mevcut olur. Bu doğrulardan biri bb_1 , diğeri ise b_1b yönündedir. P_1P_2 doğru parçasının orta P noktasını alarak P den a ya h dikmesini çizelim. a doğrusu, q_1 ve q_2 dikmeleri ve b den ibaret şeklin h doğrusuna göre simetrik oluşundan h nın b yi dik açı altında keseceği neticesine varılır.

İki doğrunun ortak iki dikmesi olamaz, zira, olduğu takdirde dört açısı da dik olan bir dörtgen mevcut olmuş olur; bu ise imkânsızdır.

Teorem. *Paralel iki doğru paralellik yönünde sonsuz olarak yakınsar, zıt yönde ise sonsuz olarak ıraksar.*

İspat. a ve b paralel iki doğru olsun (Şekil 282). b doğrusunun A ve A_1 noktalarından a doğrusuna AB ve A_1B_1 dik doğrularını çizerek B ve B_1 açıları dik $A = \alpha$ açısı dar ve $B = \beta$



Şek. 282

açısı geniş olan BB_1A_1A dörtgenini elde eder ve

$$A_1B_1 < AB$$

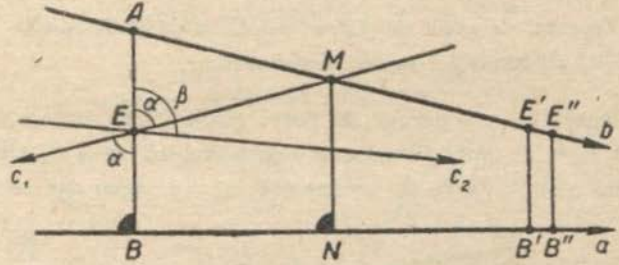
buluruz.

Aynı tarzda $A_2B_2 < A_1B_1$ olduğundan bir paralelin noktalarının diğerine uzaklığının paralellik yönünde azaldığı, ters yönde ise arttığı gösterilmiş olur.

Şimdi paralellerin sonsuz olarak veya alışılmış dille söylenirse *asimetrik olarak yakınsadığını* göstereceğiz.

Keyfi derecede küçük bir ε doğru parçasını alalım. b doğrusunun A noktasından (Şekil 283) b ye paralel a doğrusuna AB dikmesini indirelim. AB , ε dan küçük veya buna eşitse teorem ispatlanmış olur. Öyle ise $AB > \varepsilon$ olsun. BA üzerinde $BE = \varepsilon$

doğru parçasını alalım ve E den a ya ters yönlerde c_1 ve c_2 paralellerini çizelim. c_1 doğrusu EB doğru parçasıyla dar α açısı, c_2 ise EA ışınıyla geniş β açısını teşkil eder.



Şek. 283

Ohaldé c_1 doğrusu $c_2EA = \beta$ açısı içinde bulunur.

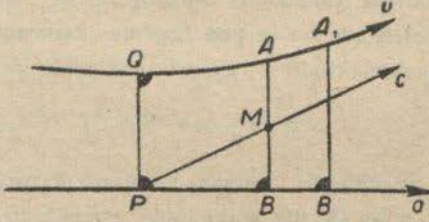
c_2 doğrusu b ye paralel olduğundan c_1 doğrusu b yi bir M noktasında keser. M den a ya Ma dikmesini indirirsek, M den a ya paralel olarak çizilmiş b ve c_1 doğrularının NM ye göre simetrisi olan $E'B'$ doğru parçası b nin E' noktasının b ye paralel a doğrusuna uzaklığını verir ve ϵ 'a eşit olur. $E''B''$ uzaklığı (Şekil 283) ϵ dan küçüktür ve iddia sabit olur.

Paralel doğruların diğer yönde sonsuz olarak ıraksamaları da aynı şekilde ispatlanabilir.

Teorem. Süperparalel iki doğru ortak dikmelerinden itibaren iki yöne doğru sonsuz olarak ıraksar.

İspat. Herhangi a ve b süperparalel doğruların ortak bir PQ dikmesi mevcuttur (Şekil 284). b doğrusu üzerindeki keyfi bir A noktasından a ya AB dikmesini indirelim. $PBAQ$ dörtgeninde P, B ve Q açıları dik olduğundan A açısı dardır ve dolayısıyla $AB > PQ$ eşitsizliği mevcuttur. Bunun gibi, QA ışını üzerinde QA nın dışındaki bir A_1 noktasından A_1B_1 dikmesini indirerek $A_1B_1 > AB$ elde ederiz.

Ohalde süperparalel doğrulardan birincinin noktalarının diğerine uzaklıkları ortak dikmeden itibaren iki yönde büyümektedir.



Şek. 284

Süperparalel iki doğrunun PQ ortak dikmesi bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklıktır.

P noktasından b doğrusuna c paralelini çizelim. Pasch aksiyomunun tatbikiyle c doğrusunun Qb ışınına ait noktalardan a ya çizilen bütün AB dikmelerini kestiği bulunur. Ohale $AB > MB$ dir. Halbuki MB dar cPa açısının Pc kenarının M noktasından çizilen dikme olmakla, M noktası açının c kenarı üzerinde sonsuz olarak P tepe noktalarından itibaren uzaklaştıkça, sonsuz olarak artar. Bu da A nın Q den artan uzaklığı ile beraber AB nin de sonsuz olarak artacağını ifade eder ve teorem sabit olur.

Lobachevski dilinde paralel ve süperparalel doğruların izafi durumları *yakınsayan* ve *ıraksayan* olarak ifade olunur.

68. Alan ölçme kavramı.

Doğru parçalarını ölçme teorileri, Euklid ve Lobachevski geometrilinde birbirinin aynısıdır.

Lobachevski geometrisindeki alan ölçme sistemi Euklid geometrisine benzer bir tarzda icra edilir. Basit çokgenlerin

eşbileşim ve tamamlama ile eşdeğerlilik kavramları tıpkı Euklid geometrisinde olduğu gibi Lobachevski geometrisine ithal olunur. Bütün teoremler yalnız biri hariç aynen caridir: Bir üçgene, tabaniyle yüksekliğin çarpımıyla orantılı bir sayı değil — Lobachevski geometrisinde bu çarpım üçgenin kenarının seçiminden bağımsız bulunmamaktadır — *üçgenin noksanlığı ile orantılı*

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C)$$

sayısı tekabül etmektedir. Burada k^2 orantı katsayısı, A, B, C üçgen açıları, π ise iki dik açıyı ifade etmektedir. Δ sayısı bu takdirde üçgenin alanını vermektedir.

Lobachevski geometrisindeki üçgen alanının ifadesi küresel üçgenin alan ifadesini (65) hatırlatmaktadır ve bu bir tesadüften ibaret değildir. Basit çokgenlerin alan ölçme sistemini kısaca gözden geçirelim.

1. Her üçgene, üçgenin alanı diyeceğimiz

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C)$$

pozitif sayısını tekabül ettirelim.

2. Yönlü üçgenleri inceliyerek (58) aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Yönlü bir üçgenin düzleminde keyfi bir O tepe noktası seçilse ve verilen üçgenin tepe noktalarına birleştirilse, verilen üçgenle aynı yönde olan üçgenlerin alanlarının toplamı ile ters yönlü olanların alanlarının toplamı arasındaki fark verilen üçgenin alanına eşit olur.

Bütün mümkün halleri bir tarafa bırakarak sadece O noktasının verilen üçgenin dışında ve açılardan birinin içinde olma halini ele alalım (Şekil 285). Bu hali daha basitine ıera etmeden bütün hesapları ıera edelim. Şekildeki harfleri kullanarak pozitif yönlü üçgenler için

$$\triangle(OAB) = k^2 (\pi - \alpha - \alpha_1 - \beta_1 - o_1)$$

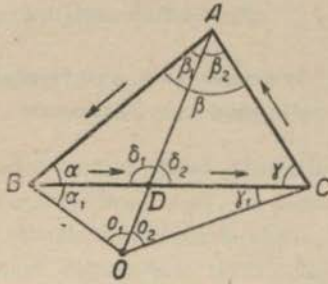
$$\triangle(OCA) = k^2 (\pi - \gamma - \gamma_1 - \beta_2 - o_2)$$

ve negatif yönlü olanlar için de

$$\triangle(OBD) = k^2 (\pi - \alpha_1 - \delta_2 - o_1)$$

$$\triangle(ODC) = k^2 (\pi - \gamma_1 - \delta_1 - o_2)$$

elde ederiz.



Şek. 285

Aranılan fark

$$\triangle(OAB) + \triangle(OCA) - \triangle(OBD) - \triangle(ODC)$$

$$= k^2 (\delta_1 + \delta_2 - \alpha - \beta_1 - \beta_2 - \gamma)$$

$$= k^2 (\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

$$= \triangle(ABC)$$

olur.

3. Basit çokgenlere ait olan hesapları tamamen Euklid geometrisindeki gibi yapılır (58).

Okuyucu evvelkilerle ilgili bütün muhakemeleri bir temrin olarak tam ve etraflı bir şekilde yapmalıdır.

BÖLÜM XII

GEOMETRİNİN AKSİYOMATİK YAPISI

Bölüm XII. geometrik aksiyomların tam listesini ve aksiyomatik usulün esas fikrini aydınlatıcı misaller vermektedir. Süreklilik aksiyomlarının aynı olduğu elde edilmekte ve hareket aksiyomu ithal edilmektedir.

69. Geometrinin esas nesneleri. Nesneler arasındaki esas bağıntılar.

Geometriyi aksiyomatik olarak geliştirirken bazı *temel kavram* ları ve *bu kavramlar arasındaki esas bağıntılar*'ı seçeriz. Bunlardan her ikisi tarifsiz ve izahsız bırakılır. Temel kavramların ve bunlar arasındaki bağıntıların tarifi dolaylı olarak aksiyomlarla ifade edilir. Bu suretle meydana gelen soyut geometri, *muh-telif neviden nesne cümlelerine* tatbik edilebilir.

Özelden ve somuttan temel kavramlarla bunlar arasındaki bağıntılara geçmek suretiyle soyutlama yaparken, geometri, uzay şekillerin tabi olduğu kanunları ve intizamı muhafaza ederek gelişir. Hatta müteakip soyutlaştırma işleminde geometri incelediği nesnelerin özel şeklinden de sıyrılır ve bu şekilciliğin sınırlarını yırtarak tabiatı daha derinden ve tam olarak aksettirme imkânına kavuşur.

Madde, tabiat kanunu, kıymet ve benzeri soyutlaştırmalar, tek kelime ile *bütün* ilmi (Doğru, ciddi, saçma olmıyan) soyutlaştırmalar tabiatı daha derinden, daha hakikî, *daha tam* olarak aksettirirler. Tabiatın somut gözleminden soyut düşünceye *ve baradan tatbikata* objektif realitenin tanınmasının, *hakikatın* kavranmasının diğalektik yolu budur.

Somut geometrinin mahiyetini daha iyi aydınlatmak için geometri ile gramer arasındaki şu mukayeseye işaret edebiliriz.

«Gramerin mümeyyiz vasfı kelimelerin (özel birkaç kelimenin değil, genel olarak kelimelerin) değişme kaideleriyle cümle teşkili kaidelerini [(yine özel olarak somut cümleler değil, somut bir özneyi, somut bir yüklem v.s. olan değil) herhangi bir cümlenin somut şekline bakmaksızın genel olarak bütün cümleler] vermesidir. Böylece kelime ve cümle bakımından özel ve somuttan kendisini soyutlaştırarak gramer, kelimelerin değişmelerine ve bunların cümle haline getirilmelerine esas teşkil eden hassaları alır ve bu hassaları gramer kaideleri ve gramer kanunları haline getirir. Gramer, insan düşüncesinin ezeli bir soyutlaştırma gayretinin bir neticesidir ve bu düşüncenin muazzam başarısını gösterir.

«Bu bakımdan gramer özel, somut nesnelerden soyutlama yoluyla kendi kanunlarını yaratan, nesnelere hiçbir özeliği olmayan varlıklar olarak bakan ve bunlar arasındaki bağıntıları tarif ederken bu bağıntıların belli nesneler arasında belli bağıntılar olmasını şart koşmayıp bunları varlıklar arasında hiçbir somut anlamı olmayan genel bağıntılar olarak alan geometriye benzer».

Geometri ilminin yapısını doğru olarak anlayabilmek için geometrinin «insan düşüncesinin devamlı soyut çalışmasının bir neticesi olduğu» nu ve «insanın hayattaki faaliyetinde, karşısında somut dünya bulunduğunu, buna bağlı olduğunu, faaliyetini bununla belirlediği» ni hatırlamalıdır.

Geometrinin aksiyomları bizatihi, mantık aksiyomları gibi, insanın pratik faaliyetinin neticeleridir.

«... İnsanın pratik faaliyeti; beşer şuurunu, mantık şekillerini aksiyom haline getirinceye kadar milyonlarca çeşit değişik şekilde ifade etmişti...», «gayretleriyle insan, fikirlerinin, kavramlarının, bilgisinin, ilminin objektif sağlamlığını göstermeye muktediridir.»

Aksiyomatik metod ve soyut geometrinin muhtelif neviden nesnelere tatbiki ettü edilirken bütün aksiyomların sağlanması beklediği hatırdan çıkarılmamalıdır. Aksiyomlardan çıkarılan neticeler — elde edilen teoremler — kendiliğinden sağlanır. Aksiyomatik olarak kurulan geometrinin pratikte kullanılmasında her durumda aksiyomların sağlanıp sağlanmadığı ve ne derece sağlandığı araştırılmalıdır.

Burada (bazı değişikliklerle) kabul ettiğimiz Hilbert'in aksiyom sisteminde üç nesne cümlesi esas olarak alınmıştır.

Birinci cümleye ait nesneler *nokta* lar olup $A, B, C, \dots$ harfleriyle, *ikinci* cümledeki *doğru* lar olup $a, b, c, \dots$ ile ve *üçüncü* cümleye ait olanlar *düzlem* ler olup $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ile gösterilir.

Bu esas nesneler arasında *üzerinde olma*, *arasında olma*, *eş olma* veya *eşit olma*, ifadeleriyle isimlendirilen belirli bağıntılar kurulur.

Bu bağıntıların sahih ve matematik maksadı tam izahı *geometrinin aksiyomları* ile yapılır.

Buna göre *nokta*, *doğru* ve *düzlemler* Hilbert'in aksiyom sisteminde kendi kendilerine yeterdirler ve diğer nesneler cinsinden tarif edilmemişlerdir.

Meselâ, *düzlemin*, buna ait noktaların cümlesi olması gerekli değildir. Bu görüş noktasından *şekil* deyimi *noktaların*, *doğru* ların ve *düzlem* lerin cümlesini ifade edebilir.

Esas nesnelerle bunların esas bağıntıları tarif, izah ve tavsif edilmezler. Bununla beraber bu nesneleri (cinsi ve ait olduğu bilgi kolu ne olursa olsun) ve özelliklerini bunlarla ilgili aksiyomlar sağlanacak kadar bilmek yeter.

Aynı geometrik sistem, başka esas nesne ve başka bağıntılarla ilgili başka aksiyomatik sistemlerle de geliştirilebilir.

Hilbert'in aksiyom sisteminde beş gruba ayrılan yirmi aksiyom mevcuttur.

Lobachevski geometrisi, matematikte ve özel olarak geometride usulün gelişmesinde kesin bir etki yaratmıştır.

70. Birinci grup aksiyomlar : İlgi (ait olma) aksiyomları

Esas bağıntı şudur: *üzerinde olmak veya ait olmak.*

I_1 . *A ve B gibi herhangi iki nokta verildiğinde, bu A ve B noktalarının ikisine de ait olan bir a doğrusu vardır.*

I_2 . *A ve B gibi herhangi iki nokta verildiğinde, bu A ve B noktalarının ikisine de ait olan birden fazla doğru yoktur.*

Ait olma terimi yerine diğer ifadeler de kullanılabilir. Meselâ, a doğrusu A ve B noktalarının ikisine de aittir yerine a doğrusu A ve B noktalarından geçer veya a doğrusu A ve B noktalarını birleştirir, ve A noktası a ya aittir yerine de A noktası a üzerindedir veya A noktası a nın bir noktasıdır, v.s. diyebiliriz.

I_3 . *Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır. Bir doğru üzerinde bulunmayan en az üç nokta vardır.*

I_4 . *Aynı doğru üzerinde bulunmayan A, B, C gibi herhangi üç nokta verildiğinde bu A, B, C noktalarının hepsine ait en aşağı bir α düzlemi vardır. Her hangi bir düzlemde, buna ait daima bir nokta mevcuttur.*

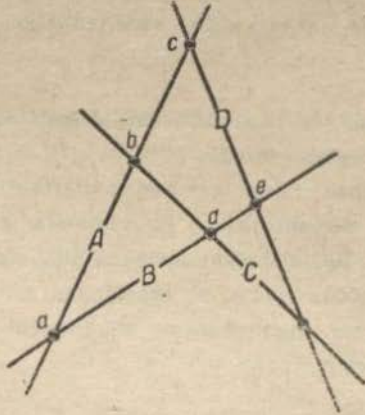
I_5 . *Aynı doğru üzerinde bulunmayan A, B, C gibi her hangi üç nokta verildiğinde bu noktaların hepsine ait olan birden fazla düzlem yoktur.*

I_6 . *Bir a doğrusunun A ve B gibi iki noktası α düzleminde ise, a doğrusunun her noktası α düzleminde.*

1₇. α ve β gibi iki düzlemin ortak bir A noktası varsa B gibi en aşağı bir ortak noktası daha vardır.

1₈. Aynı düzlemde bulunmayan en aşağı dört nokta vardır.

Geometrinin soyut gelişme esas fikrini kısaca anlatmak için aşağıdaki misali alalım. Şu şekilde bir *model* teşkil edelim. Aynı düzlemde bulunup ikişer ikişer kesişen adi dört doğru alarak bunları birinci cümleye ait elemanlar olarak düşünelim ve bunlara *nokta* adını vererek A, B, C, D ile gösterelim (Şekil 286).



Şek. 286

Bu dört doğrunun altı arakesit noktasını ikinci cümleden add ederek bunlara *doğru* diyelim a, b, c, d, e, f ile gösterelim.

Esas elemanları gösterdikten sonra (sadece düzleme ait olan 1₁₋₈ aksiyomlarını alacağız) aşağıdaki tarzda ait olma bağıntısını ithal edelim. Birinci cümlemin her çiftine aşağıda olduğu gibi ikinci cümlemin elemanlarını tekabül ettirelim:

$$(A, B) \rightarrow f; \quad (B, C) \rightarrow c; \quad (C, D) \rightarrow a;$$

$$(A, D) \rightarrow d; \quad (B, D) \rightarrow b; \quad (A, C) \rightarrow e.$$

Modelimizde her adi doğru çiftine bunlar üzerinde bulunamıyan adi nokta tekabül ettirilmiştir.

Şimdi, bir «doğru» nun, buna tekabül eden «nokta» ya «ait olduğu» nu düşüneceğiz.

Misalimizde I_{1-5} aksiyomlarının sağlandığını görürsek de ne esas elemanların bildiğimiz temsili, ne de «ait olma» bağıntısının bildiğimiz anlamı mevcuttur.

a «doğru» sunun C ve D «nokta» larından «geçtiği» ni; C ve D «nokta» larının a «doğru» su «üzerinde bulunduğu» nu; a ve b «doğru» larının D «nokta» sında «kesiştikleri» ni, v.s. söyleyeceğiz.

Bundan sonra, bir modelin teşkilini tarif ederken caize işaretlelerinden sarfı nazar edeceğiz.

İkinci bir misal alalım. x, y reel sayılarının (x, y) sıralı çifti *birinci* cümleinin elemanı olsun. Bu cümleinin elemanları *noktalardan* ibarettir. İlk ikisi aynı zamanda sıfır olamayan u, v, w reel sayılarının bütün $(u : v : w)$ oranlarının cümlesi *ikinci* cümleinin elemanlarının cümlesi olsun. Bu cümleinin elemanları da *doğru* lardan ibarettir.

(x, y) noktasına,

$$ux + vy + w = 0$$

cari olduğunda, $(u : v : w)$ doğrusuna «aittir» diyeceğiz. Meselâ, $(1, 3)$ noktası $(2 : -1 : 1)$ doğrusu üzerindedir.

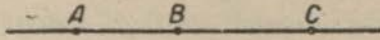
Bu modelde I_{1-8} aksiyomlarından herbiri sağlanmaktadır.

Birinci model (Şekil 286) örnek bir misal teşkil etmek üzere ithal edilmiştir. İkincisinin — sayısal model — daha fazla ilmi ve pratik önemi vardır, bunda I - V düzlemsel gurup aksiyomları sağlanmaktadır; bunun için de tabii «arasında olmak» ve «eşit» terimlerinin uygun olarak tarifi gerekir.

71. İkinci grup aksiyomlar :
Sıra aksiyomları

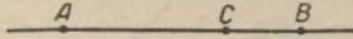
Bu gruba dahil aksiyomlar «arasında» kavramıyla ilgilidir.

II₁. Bir B noktası bir A noktası ile bir C noktasının arasında ise, A, B, C noktaları farklı üç noktadır ve B de C ile A arasındadır (Şekil 287).



Şek. 287

II₂. Bir AC doğrusu üzerinde A ve C gibi iki nokta verildiğinde, C noktası A ile B arasında olmak üzere en aşağı bir B noktası vardır (Şekil 288).



II₃. Doğrusal olan üç noktadan en fazla biri diğer ikisi arasında bulunur.

Tarif. Bir a doğrusu üzerindeki A ve B noktalarından ibaret sisteme bir doğru parçası denir. A ve B noktaları arasında bulunan noktalara AB doğru parçalarının noktaları veya AB doğru parçasının iç noktaları ve A ile B noktalarına da doğru parçasının uç noktaları denir. a doğrusunun kalan noktalarına AB doğru parçalarının dış noktaları adı verilir.

II₁₋₃ aksiyomları bir doğrudaki sıra aksiyomların' dan ibarettir.

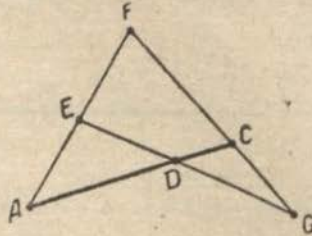
II₄. (Pasch aksiyomu) A, B, C doğrusal olmayan üç nokta ve a da ABC düzleminde bu A, B, C noktalarının hiç birinden geçmi-

yen bir doğru ise, a doğru AB doğru parçasının noktalarının birinden geçtiği takdirde ya AC doğru parçasının veya BC doğru parçasının noktalarının birinden geçer.

Aşağıdakiler teoremlerin aksiyomlar yardımıyla ciddi ispatlarına dair misalleri teşkil eder [15].

Teorem. AC doğru üzerinde A ve C gibi iki nokta verildiğinde A ve C arasında bulunan en aşağı bir D noktası mevcuttur.

İspat. I_1 aksiyomundan dolayı AC doğrusunun dışında bir E noktası mevcuttur (Şekil 289). II_2 aksiyomu dolayısıyla de AE doğru üzerinde, E noktası A ile F arasında olacak şekilde bir F noktası vardır. Yine II_2 dolayısıyla FC doğru üzerinde FC



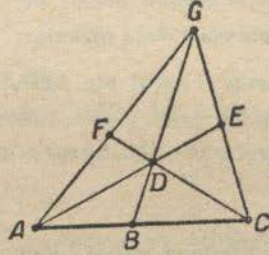
Şek. 289

doğru parçasına ait G noktası vardır. EG doğrusunun A , F veya C noktalarının hiç birinden geçmediği gösterilebilir. Ohalde II_1 aksiyomundan, EG doğrusunun AC doğru parçasını D noktasında keseceği neticesi elde olunur.

Teorem. Aynı doğru üzerinde alınan A , B , C noktalarından biri daima diğer ikisi arasında bulunur.

İspat. A nın B ile C arasında ve C nin de A ile B arasında olmadığını farz edelim. AC üzerinde bulunmıyan D nokta-

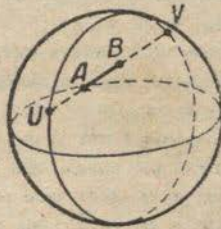
sını B ye birleştirelim ve II_2 aksiyomuna göre D noktası B ve G arasında olmak üzere bu doğru üzerinde bir G noktası alalım (Şekil 290). BCG üçgeniyle AD doğrusuna II_4 aksiyomu-



Şek. 290

nu tatbik ederek AD ve CG doğrularının C ve G arasında olan bir E noktasında kesiştiklerini, CD ve AG doğrularının da A ve G arasında bir F noktasında kesiştiklerini buluruz. AEG üçgeniyle CF doğrusuna II_4 aksiyomunun tatbikiyle D nin A ile E arasında olduğu bulunur. Aynı aksiyomun AEC üçgeniyle BG doğrusuna tatbikiyle B nin A ve C arasında olduğu neticesi elde edilir.

I_{1-8} ve II_{1-4} gruplarının bütün aksiyomları, meselâ, aşağıdaki modele uygulanabilir. *Nokta* diyeceğimiz elemanların cümlesi belirli bir kürenin iç noktalarının cümlesi olsun (Şekil 291). Kü-



Şek. 291

renin üzerindeki ve dışındaki noktaları birinci kategoriye dahil etmiyelim. *Doğru* cümlesi kürenin bütün kirişlerinin cümlesi olarak alınsın. *Düzlemler* de, çemberleri verilen küre üzerinde olan küre içindeki açık diskler olsun. *Ait olmak* ve *arasında* kavramları bildiğiniz anlamları haiz olsunlar.

Bu modelde gurup I ve II nin bütün aksiyomlarının cari olduğu kolaylıkla sağlanabilir. Bunu, okuyucu, mezkûr modelin bu aksiyomların her birini sağladığını göstermek suretiyle ispatlamalıdır.

72. Üçüncü gurup aksiyomlar : Eşlik aksiyomları.

Bu aksiyomlar «*eşlik*» kavramıyla ⁽¹⁾ ilgili olup *hareket* kavramını tarife yararlar (29,34).

III₁. *A ve B bir a doğrusu üzerinde iki nokta, A' de aynı doğru veya diğer bir a' doğrusu üzerinde bulunan bir nokta ise, a' doğrusu üzerinde ve A' nün verilen bir tarafında* ⁽²⁾, *AB doğru parçası A'B' doğru parçasına eş olacak, diğer bir deyimle, eşit bu-*

⁽¹⁾ «Eşlik» kelimesi daha evvel de «congruence» anlamında alınmıştı.

⁽²⁾ *A, B, C, D aynı l doğrusu üzerinde herhangi dört noktayı gösterebiliriz. A noktası B ile C nin arasında olmadığı takdirde (B, C) nokta çiftine, A nın aynı tarafındadır deriz. Pasch aksiyomunu kullanarak aşağıdakileri ispatlayabiliriz : 1. (B, C) ve (C, D) nokta çiftlerinden her biri A nın aynı tarafında ise (B, D) nokta çifti de A nın aynı tarafındadır; 2. (B, C) nokta çifti A nın aynı tarafında değilse ya (C, D) veya (B, D) nokta çifti A nın aynı tarafında olur. 1) ve 2) yi ve aynı zamanda II₂ aksiyomunu kullanarak l nin A dan farklı noktalarının; her hangi iki noktanın aynı sınıfa ait olması için bu noktaların A nın aynı tarafında olma gerek ve yeter şartı cari olacak şekilde; ayrık iki sınıfa ayrıldığını gösterebiliriz. Bu sınıflardan herbirine (A dahil A dan geçen ışın adı verilir. Işın üzerindeki A dan farklı noktalara da A nın aynı tarafında bulunan denir.*

lanacak şekilde daima bir B' noktası bulunabilir. AB doğru parçasının $A'B'$ doğru parçasına olan eşliği

$$AB \equiv A'B'$$

semboliyle gösterilir.

III₂. $A'B'$ ve $A''B''$ doğru parçaları aynı AB doğru parçasına eş iseler, $A'B'$ doğru parçası $A''B''$ doğru parçasına eş olur; diğer bir deyimle, iki doğru parçası bir üçüncüsüne eş ise birbirine eş olurlar.

III₃. AB ve BC bir a doğrusunun ortak noktaları olmayan iki doğru parçası, $A'B'$ ve $B'C'$ de aynı veya diğer bir a' doğrusunun yine ortak noktaları olmayan iki doğru parçası ise (Şekil 216),

$$AB \equiv A'B' \quad \text{ve} \quad BC \equiv B'C'$$

olduğu takdirde

$$AC \equiv A'C'$$

olur.

Evvelce III₁₋₃ aksiyomlarını kullanmıştık (53).

Tarif. α keyfî bir düzlem, h ve k bu düzlemde aynı O noktasından geçen ve farklı iki doğruya ait olan ışınlar olsun. h ve k ışınlarının böyle bir sistemine *açı* deyip bunu $\angle(h, k)$ veya $\angle(k, h)$ olarak göstereceğiz. h, k ışınlarına açının kenarları ve O noktasına *tepe noktası* denir.

h ışın $\bar{h}$ doğrusuna, k ışını da $\bar{k}$ doğrusuna ait olsun. O noktası ile birlikte h ve k ışınları α düzleminin geri kalan noktalarını iki bölgeye ayırır: Bölgelerden biri k kenarının h tarafıyla (') $\bar{h}$ kenarının k tarafına ait noktalardan ibaret olup bu

(') l verilen herhangi doğru A, B, C de l üzerinde olmyan noktalar olsun. (A, B) çiftine, AB doğru parçası l yi kesmediği takdirde, l nin aynı tarafındadır denir. Pasch aksiyomunu kullanarak şunları is

noktalara $\angle (h, k)$ ile gösterilen açının içine aittir denir; kalan noktalar ikinci bölgeyi teşkil etmekte olup bu açının dışına aittir denir.

III₄. α düzleminde bir (h, k) açısı, α' düzleminde bir a' doğrusu ve aynı zamanda α' nün α' doğrusuna göre belirli bir tarafı verilmiş olsun. h' de a' doğrusunun O' den geçen bir ışını gösterin. Bunlar verilmişken α' düzleminde aşağıdakileri sağlayan bir ve ancak bir k' ışını mevcuttur: $\angle (h, k)$ açısı $\angle (h', k')$ açısına eş, diğer bir deyimle, eşittir; halbuki $\angle (h', k')$ açısının bütün iç noktaları α düzleminde a' nün verilen tarafında bulunur.

Açıların eşliği

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$$

olarak gösterilir.

Her açı kendisine eştir, diğer bir deyimle, her halde

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h, k)$$

Hülâsa, her açı, bir ışımdan itibaren ve bu ışının bir tarafında olmak üzere bir ve ancak bir tarzda alınabilir.

P. K. Rashevski [15] aşağıdaki izahı vermektedir:

«Hilbert'e göre, bir açının alınması'ndan açının cetvel ve pergeli gibi bir aletle çizimini değil, verilen bir açıya eş olan açığı tarif eden ışının varlığı keyfiyetini anlıyoruz. Buna göre biricik olarak çizimden de böyle, ancak bir açının varlığını anlayacağız.»

patlayabiliriz: 1. (A, B) ve (B, C) çiftinin herbiri l nin aynı tarafında ise (A, C) çifti l nin aynı tarafındadır; 2. (A, B) çifti l nin aynı tarafında değilse ya (B, C) veya (A, C) l nin aynı tarafında bulunur. Bu ve II₂ aksiyomundan, düzlemin l ye alt olmayan noktalarının iki sınıfa ayrılacağı neticesi çıkar. Herhangi A, B noktaları (A, B) çifti l nin aynı tarafında ise, aynı sınıfta olurlar. Her sınıf l nin aynı tarafında bulunan yarım-düzlem teşkil ediyor denir.

III₅. ABC ve $A'B'C'$ gibi iki üçgende

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

eşlikleri mevcutsa,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

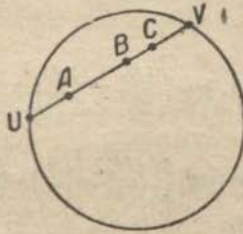
eşliği cari olur.

Verilen üçgenlerin tepe noktaları için kullandığımız harfleri uygun olarak değiştirerek, III₅ aksiyomunun şartları baki kaldığı takdirde daima iki eşlik mevcut olur.

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \text{ve} \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Ohalde Hilbert, üçgenlerin eşitliğinin birinci kriteri adı ile bilinen iddianın bir kısmını aksiyom olarak almaktadır.

I₁₋₃, II₁₋₄, III₁₋₅ aksiyomları hem Euklid geometrisinin bildiğimiz lise modelinde hem de Lobachevski geometrisinde nokta, doğru, düzlem ve üzerinde olma, arasında, eş doğru parçaları olma, eş açılar olma bağıntılarında cari bulunmaktadır.



Şek. 292

Başka bir misal olarak, bir kürenin iç noktalarından kurulan modelde (71) eşlik kavramını ithal edelim. UV doğrusunun (Şekil 292) her A, B nokta çiftine

$$e(AB) = k \log \left(\frac{UB}{BV} \cdot \frac{UA}{AV} \right)$$

sayısını tekabül ettirelim ve tekabül eden sayıları mutlak değerce eşit olan doğru parçalarını eş veya eşit itibar edelim. Bu sayılara doğru parçalarının uzunluk'u diyeceğiz. Denklemden k pozitif bir katsayıdır.

İthal edilmiş olan eşlik kavramıyla, grup III ün bütün ilgili aksiyomlarının cari olduğu kolayca sağlanabilir.

III₂ aksiyomunun doğruluğunu sağlamak için uzunlukların toplanabileceğinin gösterilmesi yeter:

$$e(AC) = e(AB) + e(BC)$$

Burada B noktası A ile C arasında bulunmaktadır.

Şekil 292 den

$$e(AB) = k \log \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right)$$

$$e(BC) = k \cdot \log \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UA}{AV} \right)$$

elde ederek toplayalım:

$$e(AB) + e(BC) = k \cdot \log \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) + k \cdot \log \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right)$$

$$= k \cdot \log \left\{ \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) \cdot \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right) \right\}$$

$$= k \cdot \log \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UA}{AV} \right)$$

$$= e(AC)$$

Bundan sonra III₂ aksiyomunu ve doğru parçalarının eşliğiyle ilgili kalan bütün aksiyomları sağlamak güç değildir.

Bir doğru parçasının üç noktaları çakıştığında $e(AA)$ uzunluğunun sifıra eşit olduğuna işaret edelim. A noktası sabit kalmak

şartıyla B noktası V noktasına yaklaştığında $\rho(AB)$ uzunluğu sonsuza gider.

Bu modele açıların eşliği de ithal edilebilecek birinci üç gurupun bütün aksiyomlarının cari kalacağı sağlanabilir. *Model inşa etme* fikri yalnız sırf ilim problemlerinde değil aynı zamanda teknoloji problemlerinde de büyük rol oynar. Gayri Euklidiyen geometri ile geometrinin temellerinin etüdü bu fikri en iyi şekilde teyid eder.

73. Dördüncü gurup aksiyomlar :

Paralellere dair aksiyomlar

Daha evvel paralellere dair olan aksiyom sorusunu etraflı olarak incelemiştik. Paralellik aksiyomu olarak ya *Euklidiyen geometriyi* veren Euklid aksiyomunu (veya buna denk olan) veya *hut Lobachevski geometrisi* ni veren Lobachevski aksiyomunu alabiliriz. Bu iki geometriye ait aksiyom cümleleri arasındaki yegâne fark paralel aksiyomlarından ileri gelmektedir.

Konuyu tamamlamak için herbirinin ifadesini bir defa daha verelim."

IV. (*Euklid aksiyomu*) *a herhangi bir doğru, A da a doğrusuna ait olmayan bir nokta ise, a doğrusuyla A noktasının belirlediği düzlemde A dan geçen ve a yı kesmiyen birden fazla doğru yoktur.*

Şimdiye kadar vermiş olduğunuz dört gurup aksiyoma sürekliliğe ait V -gurup aksiyomlarını eklersek cümlesinin tamamını elde etmiş oluruz.

Lobachevski geometrisinde I_{1-8} , II_{1-4} , III_{1-5} ve V_{1-2} aynen baki kalmakta olup Euklid'in aksiyom IV ü yerine Lobachevski'nin aksiyom IV* ı alınmaktadır.

IV.* (*Lobachevski aksiyomu*) *a herhangi bir doğru, A da bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta ise, a doğrusuyla A noktası-*

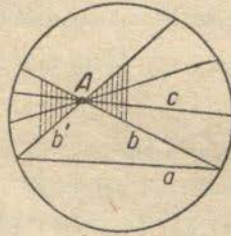
*n*ın belirlediği düzlem üzerinde *A* noktasından geçip *a* doğrusunu kesmiyen en aşağı iki doğru vardır.

I_{1-8} , II_{1-4} , III_{1-5} , IV^* ve V_{1-2} aksiyomlarının hepsinin cari olduğu birden fazla model inşa edilebilir.

Bir kürenin iç noktalarından teşkil edilmiş modelde I, II, III ve V aksiyom guruplariyle birlikte Lobachevski aksiyomu cari bulunmaktadır.

Şekil 293 de *a* doğrusuyla *A* noktasının belirlediği bir düzlem verilmiştir. *b* doğrusu *a* ya bir yönde *b'* doğrusu da diğer yönde paraleldir ve *c* ise *a* ya süperparaleldir.

Bu düzlemsel modelde Lobachevski düzlemindeki doğruların izafi durumlarını sezgiye dayanarak görmek güç değildir. Bu model Lobachevski düzleminin bir tasviri olarak ilk defa İtalyan matematikçisi Beltrami tarafından incelenmiştir.



Şek. 293

Lobachevski geometrisinin uzaysal modelinden (Şekil 291) doğru, düzlem ve doğru ile düzlemlerin izafi durumlarını kavramak da güç değildir. Lobachevski geometrisi Euklid nesnelerinden teşkil edildiğinden Lobachevski anlamında açı ve doğru parçaları olduğu hatırd tutulmalıdır. Bununla beraber, Lobachevski geometrisinde doğru parçaları ve açıların ölçüsü genel olarak Euklid anlamındaki ölçü ile aynı değildir. Euklid anla-

mında eşit olan iki doğru parçası Lobachevski anlamında genel olarak eşit olmazlar.

74. Beşinci gurup aksiyomlar : Süreklilik aksiyomları.

Süreklilik aksiyomları gördüğünüz veçhile şunlardır :

V_1 . (Ölçme aksiyomu, veya Arşimed aksiyomu) AB ve CD herhangi iki doğru parçası ise, AB doğrusu üzerinde $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ doğru parçalarından herbiri CD ye eşit olmak ve B noktası A_{n-1} ile A_n arasında bulunmak üzere sonlu sayıda $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ noktaları alınabilir (Şekil 219).

V_2 . (Cantor aksiyomu) $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ bir a doğrusu üzerinde sonsuz bir kapalı doğru parçaları dizisi olsa ve bunun ardışık her $A_{n+1}B_{n+1}$ terimi bir evvelki A_nB_n teriminin içinde bulunsa (Şekil 221) ve ayrıca bütün terimlerin içinde bulunan hiç bir doğru parçası mevcut bulunmasa, dizinin bütün terimlerinde ortak olan bir ve ancak bir X noktası mevcuttur.

Bu aksiyomun geometrinin bünyesindeki rolü evvelki bölümlerde açıklanmıştı (54,67). Hilbert'in sisteminde Cantor aksiyomu V_2 numarasıyla *tamamlik aksiyomu* ⁽¹⁾ olarak görülmektedir.

Hilbert «Geometrinin temelleri» nde özel olarak süreklilik aksiyomlarını ve dolayısıyla Arşimed aksiyomunu kullanmadan elde edilebilecek bütün neticelerin mümkün mertebe tam olarak incelenmesi üzerinde durmuştur. Hilbert, çalışmalarının birinde Lobachevski geometrisinin, süreklilik aksiyomunu kullanmaksızın sırf düzlemle ilgili aksiyomlardan ibaret temel üzerine kurulabileceğini göstermektedir. Meselâ, Hilbert dar bir açının bir kenarına dik olup diğer kenarını kesmiyen doğrunun varlığına

(1) «axiom of completeness» karşılığı olarak alınmıştır.

ait teoremin V-gurup aksiyomlarına dayanmayan bir ispatını vermiştir. Diğer taraftan 66 da verilen ispatlar süreklilik aksiyomlarına dayanmaktadır.

«Geometrinin temelleri» adlı eserin hedefi geometrinin aksiyomlarını tertip etmek ve aralarındaki bağılılıkları incelemekten ibarettir.

75. Aksiyomların denkliği kavramı

Euklid aksiyomu yerine başka ifadeler, meselâ, çizgisel bir üçgende açılar toplamının iki dik açıya eşit olması alınabilir. Lobachevski aksiyomu yerine de buna denk olan çizgisel bir üçgende açılar toplamının iki dik açıdan küçük olması ifadesi alınabilir vs.

Bunları söylemekle beraber iddia olunan denkliği muteber kılan şartlar müphem bırakılmıştır. Hilbert ve öğrencilerinin araştırmalarının bazı sonuçlarını burada vereceğiz.

«Arşimed aksiyomunu kabul ettiğimizde paralel aksiyomun yerine bir üçgenin açılarının toplamının iki dik açıya eşitliği alınabilir.»

Bu netice 64 de elde edilmişse de Arşimed aksiyomuna önem verilmemiştir.

I-III aksiyomları alınarak, diğer bir deyimle, süreklilik aksiyomlarını kullanmayarak şu teorem ispatlanabilir. «Belirli herhangi bir üçgende açılar toplamı iki açıdan büyük, eşit veya küçük ise bunlar, herhangi bir üçgen için de doğru olur.»

«Arşimed aksiyomunu atarsak, bir noktadan geçip bir doğruyu kesmeyen sonsuz sayıda doğru çizilebileceği aksiyomundan hiç de, bir üçgenin açılarının toplamının iki dik açıdan küçük olacağı neticesi çıkmaz.»

Arşimed ile Cantor aksiyomlarının sadece Dedekind'in tek aksiyomuna denk olduğuna bir defa daha işaret edelim (62). Bu,

gurup I-III ve V aksiyomlarının kullanılmasıyla Dedekind aksiyomunun teorem olarak ispatlanabileceği, tersine, I-III aksiyomlarının ve Dedekind aksiyomunun kullanılmasıyla Arşimed ile Cantor aksiyomlarının teorem olarak ispatlanabileceği demektir.

Meselâ, Arşimed aksiyomunu I-III aksiyomlarıyla Dedekind aksiyomundan elde edelim [24].

İspatı olmayana ergi ile yapacağız. Bir AB doğru parçası için Arşimed aksiyomunun doğru olmadığını farzedelim.

Bu, AB ye ait sonsuz

$$AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \dots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \dots$$

eş doğru parçaları dizisinin mevcut olması demektir.

Doğru üzerinde A dan B ye olan yönü seçerek AB doğruyunun noktalarını iki sınıfa ayırırız. Birinci sınıfa esas bir A_n noktasından (yukarıda verilen yöne göre) evvel gelen noktaları; ikinci sınıfa da AB nin kalan bütün noktalarını dahil edelim.

Bu iki sınıfa ayırmada Dedekind aksiyomunun şartları yerine getirilmiş olur. Evvelâ, AB nin her noktası sınıflardan birine ait olup her sınıf nokta ihtiva eder ve birinci sınıf $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ noktalarını ve ikinci sınıf B noktasını içine alır. Sonra, birinci sınıfın her noktası ikincininkilerden evvel gelir.

Dedekind aksiyomuna göre, noktaları iki sınıfa ayıran bir C noktası mevcuttur. Birinci sınıfta en son nokta yoktur; o halde C noktası ikinci sınıfın birinci noktası olur. III_1 aksiyomu dolayısıyla B den A ya doğru olan yönde $AA_1, A_1A_2, \dots$ doğru parçalarının herbirine eşit bir CD doğru parçası alınabilir. D noktası birinci sınıfa aittir, Bu ise D nin evvelinde olan bir A_n noktasının bulunabilmesi demektir. Ohalde A_nA_{n+1} doğru parçası DC doğru parçasının bir has parçası olup

$$A_nA_{n+1} < DC$$

yazılır. Diğer taraftan

$$A_n A_{n+1} = DC$$

olduğundan bir çelişmezliğe varılarak Arşimed aksiyomu teorem olarak ispatlanmış olur.

İhtar. *Evvel gelme* ve *sonra gelme* terimleri, *arasında* bağılılığı esasına göre tarif edilebilir. Karşıt olarak da *evvel gelme* bağılılığı esasına göre bütün sıra aksiyomlarını tertip etmek ve *sonra arasında* terimini tarif etmek mümkündür.

76. Hareket aksiyomları.

Uzayın (veya düzlemin) uzaya bir nevi birebir tasviri olarak yaptığımız (geometrik) hareket tarifimize (29,34) dayandırdığımız eşlik aksiyomlarını 72. de tertip etmiştik. Bununla beraber bunu başka tarzda da yapabiliriz. *Eşlik* e esas bağıntı olarak bakıp eşlik aksiyomlarını tertip edeceğimize *hareket* e esas bağıntı olarak bakarak hareket aksiyomlarını tertip edebilir ve sonra elde edilen aksiyom sistemlerinin denkliliğini gösterebiliriz.

Düzlemdeki *hareket aksiyomları* nın tertibine dönelim [5].

III₁*. *Bir düzlemin bütün noktalarının cümlesinin kendisine olan bütün bire-bir tasvirlerinin gurupunda tasvirlerin hareket denilen bir alt gurupu mevcuttur.*

III₂*. *Her harekette bir doğru parçasının tasviri bir doğru parçasıdır.*

Bundan, bir harekette bir doğrunun resminin bir doğru olduğu neticesine varılır. Bunun ispatı bir temrin olarak tavsiye olunur.

III₃*. *O ve O' keyfi iki nokta, OA ve O'A' keyfi iki ışın olsun ve bu ışınlara, sırasıyla, OA ve O'A' nün düzlemi ağır-*

dıkları her yarım-düzlem çiftinden seçilen α ve α' yarım-düzlemleri tekabül etsin. Bu takdirde, aynı zamanda, O noktasını O' noktasına, OA yarım-doğrusunu $O'A'$ yarım-doğrusuna ve α yarım-düzlemini α' yarım-düzlemine götüren bir ve ancak bir hareket mevcuttur.

III_1^* , III_2^* ve III_3^* aksiyomlarıyla tarif edilen «hareket», düzlemin «teşmil edilmiş anlamdaki hareket» inden (36) başka birşey değildir.

Bu aksiyomlar yardımıyla her harekette bir açının bir açısına, bir üçgenin bir üçgene, vs. dönüşeceği kolayca ispatlanabilir.

Tarif. İki doğru parçası, iki açı, iki üçgen ve genel olarak iki şekle, bu şekillerden birini diğerine dönüştüren bir hareket mevcut olduğunda, eş tir denir.

Bu aksiyomlarla eşlik üzerine olan III_{1-3} teoremlerini kolayca ispatlayabiliriz.

Meselâ, hareketlerin grup özeliğinden bir üçüncüsüne eş olan iki doğru parçasının (veya açısının) aralarında eş oldukları kolayca ispatlanabilir.

İspat: $A'B' \equiv AB$, $A''B'' \equiv AB$ olsun. Bu. evvelâ

$$A'B' = f_1(AB),$$

$$A''B'' = f_2(AB)$$

olacak şekilde f_1 ve f_2 hareketlerinin mevcut olması demektir. Sonra grup özeliğinden

$$AB = f_1^{-1}(A'B')$$

yazılabilir. Burada f_1^{-1} hareketi f_1 hareketinin tersini göstermektedir. O halde

$$A''B'' = f_2[f_1^{-1}(A'B')]$$

eşitliği vardır. Halbuki iki hareketin çarpımı olan $f_2 f_1^{-1}$ bir hareket olduğundan $A''B'' \equiv A'B'$ elde olunur ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ III₁₋₅ teoremlerini ihtiva eden ve hareketlere dair aksiyomlar ve neticeleri V. I. Kostin'in kitabından etraflı olarak etüd edilebilir. [28].

BÖLÜM XIII

GEOMETRİK BİR SİSTEMİ TEFSİR ETME FİKRİ

Bölüm XIII de Euklid geometrisinin bazı tefsirleri etüd edilmiş ve özel olarak Euklid uzay geometrisinin Feodorov tarafından verilmiş olan tefsiri incelenmiştir. Lobachevski geometrisinin de üç tefsiri verilmiştir. Bunlardan biri gayet etraflı bir şekilde ele alınmış ve diğerleriyle olan izomorfizması elde edilmiştir. Sonuç olarak da bir aksiyom sisteminden neler beklendiği açıklanmıştır.

77. Euklid'in düzlem geometrisinin değişik tefsirleri.

Geometrik bir sistemi tefsir etmek demek, verilen geometrik sistemin bütün aksiyomları sağlanacak şekilde geometrinin bir modelini inşa etmek, diğer bir deyimle, esas elemanlarıyla *nokta*, *doğru*, *düzlem* eş bağıntılarına *ait olma*, *üzerinde olma*, *arasında*, *eş olma* somut anlam tekabül ettirmek demektir.

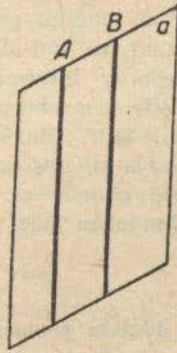
Euklid geometrisinin modellerinden biri, esas eleman, ve bağılıklarıyla birlikte bildiğimiz düzlem geometridir.

A. Euklid'in düzlem geometrisinin diğer bir modelini inşa edelim. Paralel doğru ve düzlemlerden ibaret bir demet alalım ve demetin bir doğrusuna *nokta*, her düzlemine de *doğru* diyelim. Bu suretle düzlem geometrinin esas elemanlarını elde etmiş oluruz.

Ait olma ve *arasında olma* terimlerinin bildiğimiz anlamlarını kullanalım. *Hareket* teriminden, uzayın, demetin bir doğru-

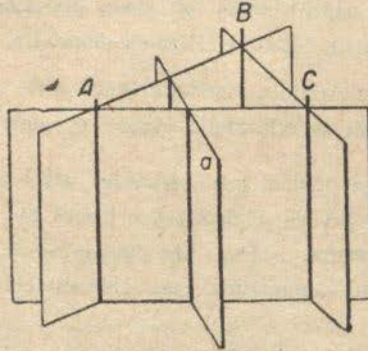
sunu dik olan her düzlemi kendi üzerinde kaydırarak şekilde doğru demetini kendine götüren bütün hareketlerin alt gurupunu anlayacağız.

I, II, III*, IV, V gurup aksiyomlarının sağlanması güçlük arzemez. (Şekil 294, 295).



Şek. 294

Meselâ, Şekil 295 de Pasch aksiyomunun ABC üçgeniyle a doğrusuna tatbiki gösterilmiştir.

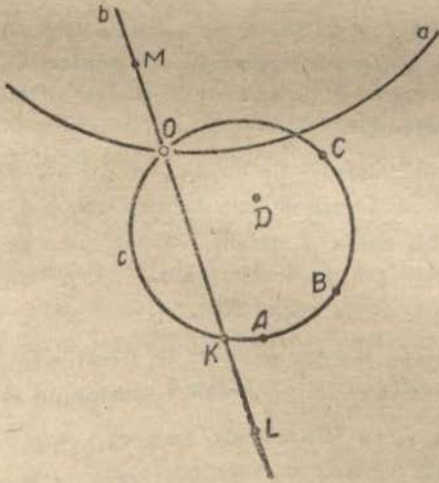


Şek. 295

B. Euklid'in düzlem geometrisinin başka bir modelini daha alalım.

Bildiğimiz π Euklid düzlemini alıp bunu bir O noktasında «delelim», diğer bir deyimle, O noktasını düzlemden atalım. Düzlemin topolojik bünyesini bozmamak için de, düzlemin, düzleme O noktasında teğet bir küreye stereografik tasvirinde kürenin S kutbunun ters resmi olarak düşündüğümüz âdi olmayan noktayı düzleme ilâve edelim (Şekil 100, 118, 124). Bu noktanın küredeki yeri evvelce delik delinen S noktasıdır.

O noktası atılan düzlemin âdi olmayan nokta ile birlikte her noktasını *nokta*, ve π düzlemindeki O delik noktasından geçen her doğru ve dairesini *doğru* olarak alalım (Şekil 296).



Şek. 296

Ait olma ve *arasında olma* terimlerini bildiğimiz anlamda alalım. Tepe noktaları âdi noktalar olan açılara, Euklid anlamında eşit olduklarında *eşit* diyelim. Bir α açısının tepe noktası âdi

nokta değilse kenarları O dan geçen ışınlar olur. α' , tepe noktası O ve iki ışınla meydana gelen açı olsun. Ohalde α açısı α' açısı vasıtasıyla diğer açılarla mukayese edilebilir. Doğru parçalarının eşitliğinin tefsirinden şimdilik sarfı nazar ediyoruz.

Modelimiz hazırdir (¹).

Modelin seçiminin keyfi olmadığı tebarüz ettirelim: seçimde aksiyomların sağlandığından emin olmak gerekir.

Geometrik bir sistem, geometrinin aksiyomlarıyla ifade edilebilip uygunluk arzeden herhangi neviden nesne ve bağılıklara tatbik edilebilir.

Yukarıda zikredilen modelde bütün aksiyomlar cari olur. Bunlardan bazılarını sağlayalım.

Aksiyom I₁. *A ve B gibi iki nokta verildiğinde A ve B noktalarına ait bir a doğrusu vardır. A ve B noktaları O ile doğrusal değilse O dan geçen bir c dairecini belirler (Şekil 296); modelimizde c bir doğru dur.*

K ve L noktaları O ile birlikte adi bir b doğrusu üzerinde olduklarında modelimizin de bir doğrusu olan b doğrusunu belirlerler. K adi bir nokta L de adi olmayan bir nokta ise O ve K ile belirlenen adi b doğrusu modelimizin O , K ve L noktalarıyla belirli bir doğrusu olur (Şekil 296).

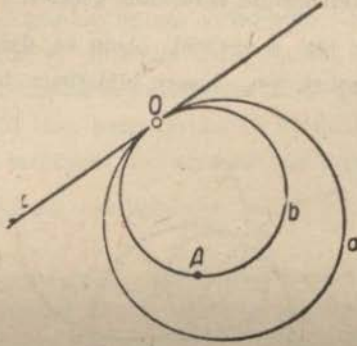
Aynı şekilde, meselâ, aksiyom II₁ i sağlayabiliriz. B noktası c doğrusu üzerinde A ile C noktaları arasındadır (Şekil 296).

L noktası K ve M noktaları arasında bulunur. Bu son halde b doğrusu O noktasında «kesilmiş» ve adi olmayan nokta ile

(¹) Okuyucunun görebileceği gibi, modelimizin nokta ve doğruları Euklid düzleminin nokta ve doğrularının O merkezli bir daireye göre evriklerinden ibaret olup adi olmayan nokta evirtiminde O nun resmi bulunmaktadır. İki açı veya iki «doğru parçası», evirtimdeki resimleri eşit olduğunda eşit itibar olunurlar.

«özdeşleştirilmiş» tir. Bu, yukarıda zikredilen stereografik izdüşümle kolaylıkla gösterilebilir.

Burada aksiyom IV. ün Euklid şekli cari olmaktadır. (Şekil 297).



Şek. 297

Şekil, bir a doğrusunu ve a ya paralel olup A dan geçen biricik E doğrusunu göstermektedir. O noktası atıldığından, a ve b noktaları kesişmezler. Diğer taraftan c doğrusu adi olmayan noktadan geçip a ya paralel olan tek doğrudur.

O dan geçen bütün adi doğruların, modelimizde adi olmayan noktadan geçen ve O delik noktasındaki açı ile aynı olan açı altında kesişen doğrular olduğunu tebarüz ettiriyoruz.

Okuyucu bu modeli kullanarak bazı elemanter teoremleri ispatlamalıdır.

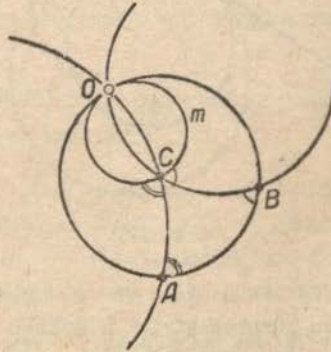
Misal yoliyle çizgisel bir ABC üçgeninde (Şekil 298) açılar toplamının iki dik açıya eşit olduğunu ispatlayalım. Bildiğimiz ispatı vereceğiz. C noktasından AB ye paralel m doğrusunu çizelim. Şekilde ters açılar eşit bulunmaktadır, vs. Bu açıların eşit olduğu da bildiğimiz yoldan yapılabilir.

m doğrusunu çizmeden de O noktasında ABC üçgeninin iç

açılarına eşit açılar bularak toplamalarını doğrudan doğruya elde etmek mümkündür.

İnşa edilen modeli daha iyi kavramak ve *hareket* veya *eşlik* den ne anlaşıldığını açıklamak için şöyle hareket ederiz. Bir modelden diğerine stereografik izdüşümle geçeriz.

Elimizde adı bir π düzlemi olsun ve üzerinde bildiğimiz nokta, doğru, hareket, vs., kısaca bildiğimiz tefsir mevcut bulunsun.



Şek. 298

Bütün π düzlemini stereografik izdüşümle S kutpunda delik küreye tasvir edelim (Şekil 117). Düzlemin her A noktasınaa kürede bir B noktası, her a doğrusuna da delik S noktasından geçen bir a' dairesi tekabül eder. π deki her adı harekete S noktasında delinmiş kürenin kendisine bir dönüşümü tekabül eder.

Ohalde, stereografik izdüşümle Euklid düzlem [geometrisinin bir modelini inşa etmiş oluyoruz. *Nokta* ları S de delik kürenin noktaları, doğruları *doğru* ları, kürenin delik S noktasından geçen dairelerinden ibarettir. *Ait olma* ve arasında olma bildiğimiz anlamları haizdir.

Evrikleri eşit olan daire yaylarını eşit olarak edeceğiz. Bunun gibi evrikleri eşit olan açılar da eşit addedilir. Stereografik izdüşümde açılar muhafaza edildiğinden açıların eşliği bildiğimiz anlamı haizdir.

Bu modelde hareket ten ne anlaşılması gerektiği de açık olarak görülmektedir. Bununla ilgili olarak, kürenin SP çapı etrafında dönmelerinden (π düzleminin bir P noktası etrafındaki dönmelere tekabül eden hareket) farklı bütün hareketler altında P noktası yerini bırakarak delinmiş kürede başka bir yere gider.

Bütün düzlemsel aksiyomların bu modeli sağladığı aşikârdır.

İkinci bir stereografik izdüşümle, başladığımız modele döneriz. Bunu da verilen küreye delik S noktasında teğet π' düzlemi çizerek ve kutup olarak alınan P noktasıyla (Şekil 117) küreyi π' üzerine izdüşürerek icra ederiz. Bire-birliği temin için π' düzlemini S değme noktasında delinmiş olarak düşünüp (bu delik ilk modelimizin O noktasıdır) adi olmayan nokta (P noktasının resmi) ile tamamlarız. Kürede S den geçen bütün daireler, π' düzleminde S deliğinden (veya O) geçen daire veya doğrulara giderler. P noktasının resmi π' düzleminin adi olmayan noktasıdır.

İlk model yeniden inşa edilmiş bulunmaktadır, Şimdi açılarının eşliğinin anlamını görmek kolay olur. Doğru parçalarının eşliği ve hareket in anlamları da kolayca anlaşılır⁽¹⁾.

(1) Euklid sisteminden bir O noktasını atarken ekseriya adi olmayan bir noktanın ilâvesi ihmal edilerek hata işlenmektedir. Meselâ, V. F. Kagan Lobachevski (USSR İlim Akademisi tarafından yayınlanan 1944) sahife 301-302 ye bak. Bu kitapta o noktasında delinmiş Euklid düzlemine «Poincaré düzlemi» diye özel bir isim bile verilmiştir. Şu eserlerde de bu büyük hata işlenmiştir. W. M. Beskin: *Geometriğin Metodolojisi*, Devlet Pedagojik Yayını, 1947, sahife 19 ve diğer yerlerde; V. Molodski: *Okulda Matematik ve Fizik de «Lobachevski geometrisi doğru mudur»* No. 1. 1936.

C Euklid düzlem geometrisinin analitik tefsirini evvelce görmüştük. Bir *model* inşa edelim.

Nokta olarak, x, y , reel sayılarının sıralı bütün (x, y) çiftlerini, doğru olarak da, u, v, w reel sayılarının bütün $\mathbb{P}(u:v:w)$ oranlarını alalım. Burada u ve v aynı zamanda sıfır olmayan reel sayılardır. Buna göre $(2:3:-1)$ ve $(4:6:-2)$ farklı olmayan doğruları gösterir.

(x, y) noktası,

$$ux + vy + w = 0$$

eşitliği halinde, $(u:v:w)$ doğrusuna *ait* olur.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ noktaları

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

halinde doğrusaldır.

$(u:v:w)$ doğrusunun (x, y) noktası,

$$x_1 > x > x_2$$

veya

$$x_1 < x < x_2$$

olduğunda, kendisiyle doğrusal olan (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarının *arasında* dır, $(x_1 = x_2)$ halinde $y_1 < y < y_2$ veya $y_1 > y_2$ olduğunda).

Doğru parçaları, açı ve hareketlerin eşliğinin sırf analitik tarifleri kolaylıkla verilebilir.

Bu tefsir mutad üzere *düzlem* de *analitik geometri* adı altında etüd edilmektedir.

78. Euklid uzay geometrisinin Feodorov tarafından yapılan tefsiri.

Meşhur Rus kristalograf ve matematikçisi Akademi üyesi F. S. Feodorov (1853—1919), kristallerin bünyesi üzerine yaptığı çalışmalarında uzayın düzlemde gösterilmesine dair olan aşağıdaki usulü vermiştir, [46], [47], [48].

Bir π düzleminde, uzayın her A noktasına, merkezi A dan π ye çizilen dikmenin A' ayağı ve yarıçapı A nın π ye olan AA' uzaklığına eşit olan ve A dan π ye bakıldığında saatin aksi yönünde yönelmiş Γ dairesini tekabül ettirelim (Şekil 299). Aksi yönde alınan aynı daire A nın π düzlemine göre simetrisi olan noktaya tekabül eder. π düzlemine ait herhangi bir C noktasına sıfır yarıçaplı daire, diğer bir deyimle, C nin kendisi tekabül eder. π düzlemine dik olan bir ışın, aynı yönde olan eş merkezli dairelerin cümlesiyle temsil olunur. π yi dik açıdan farklı olarak kesen a doğrusu da, benzerlik merkezi a doğrusunun π düzlemini kestiği nokta olan yönlü homotetik dairelerinin M' cümlesiyle gösterilir (Şekil 300).

π düzlemini kesen bir α düzlemine, yarıçapları merkezlerinin arakesit doğrusu olan uzaklıklarıyla orantılı bulunan yönlü dairelerin M'' cümlesi tekabül eder. Uzayın, düzlemdeki bütün yönlü dairelerinin cümlesiyle bire - bir tekabülünü elde ettikten sonra Feodorov'un modeli ni inşa edeceğiz.

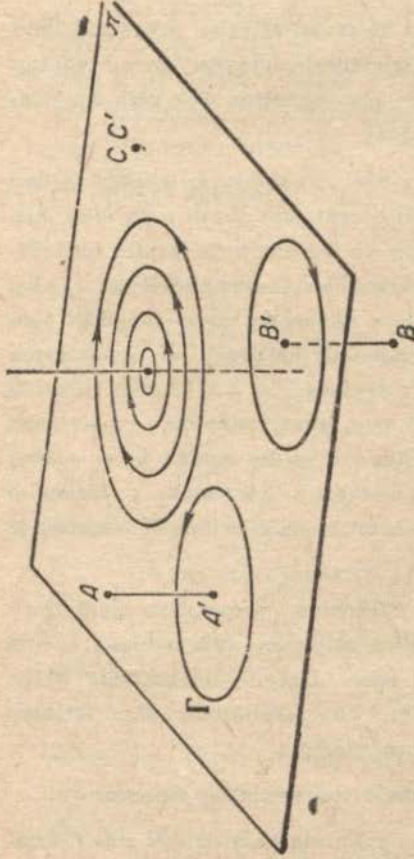
Nokta lar π düzleminin yönlü dairelerinden ibarettir.

Doğru lar yönlü dairelerin yukarıda anlatılan M' cümlelerinden ibarettir.

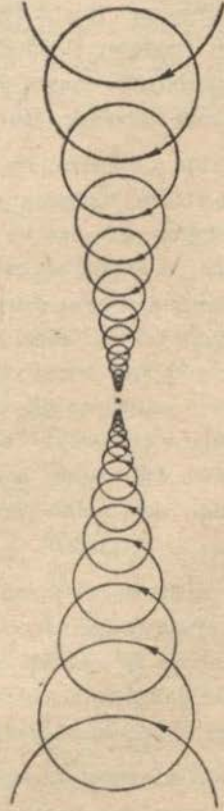
Düzlem ler yönlü dairelerin yukarıda anlatılan M'' cümlelerinden ibarettir.

Ait olmak teorik-cümle anlamında olup cümlelerin bir elemanı olmasını ifade eder.

Bir dairenin diğer iki daire arasında olması, bu dairenin merkezinin ters resminin diğer dairelerin merkezlerinin ters re-



Şek. 299



Şek. 300

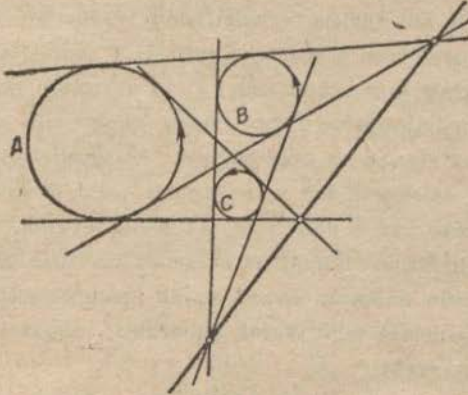
simlerinin arasında olması anlamında alınır. Tabii buna, ters resme geçmeksizin de anlam vermek mümkündür.

Ters resimleri eş olan şekillerin daire cümleleri eş addolunur. Feodorov, modelin dışına çıkmaksızın bu terimlere anlam vermekte ise de biz bu noktalara temas etmiyeceğiz.

Bütün aksiyomların, dolayısıyla bütün teoremlerin uzay geometrisinin bu modelinde doğru olduğu kolayca görülebilir.

Meselâ, bir düzlemin doğrusal olmayan üç nokta ile tamamen belirleneceğine ait aksiyom burada mutad dilde şu şekli alır: ortak bir benzerlik merkezi bulunmayan yönlü üç dairenin ikişer ikişer alınan çiftlerinin benzerlik merkezleri bir doğru üzerinde bulunur (Şekil 301).

Okuyucu dairelerin her yönü için hangi merkezlerin (benzerlik merkezi) *tekabül* edeceğini bulmalı ve bütün mümkün halleri incelemelidir.



Şek. 301

Basit bir aksiyomun bir modele tatbiki halinde mutad görüş noktasından oldukça karışık bir teorem verdiğini görüyoruz. Fe-oderov bu hususta şöyle diyor: «Bize yeni bir teorem verin, bundan sonsuz tane yeni teorem çıkaralım».

Euklid uzay geometrisinin, yönlü daireler düzlemine olan bahsettiğimiz tasviri, bire - bir olmasından dolayı bir *tefsir* dir. Diğer taraftan meselâ uzaydaki noktayı *nokta çifti* ile temsil

eden tasarı geometri, tasvirin birebirliğini bozan istisnaların varlığından dolayı bir tefsir teşkil etmez.

Bu sebebe atfen Feodorov'un modeli birçok problemlerde tasarı geometrideki Monge'un usulüne nazaran üstünlüğü haizdir [46], [47], [39].

79. Lobachevski gometrisinin Euklid düzlemindeki tefsirleri.

A. Lobachevski geometrisinin Poincaré tarafından verilen birinci tefsiri.

Euklid'in adi düzlem geometrisinin elemanlarını kullanarak aşağıdaki modeli inşa edeceğiz. Keyfi bir Γ dairesi seçip bu dairenin iç noktalarının cümlesini, Γ ya dik olup bütün iç daire yaylarının cümlesini ve Γ nın bütün çaplarının cümlesini ele alalım. Esas eleman ve esas bağılılık kategorilerini şöyle elde edeceğiz: Γ dairesinin her iç noktasına *nokta*, Γ nın her çap ve Γ ya dik olan her iç daire yayına *doğru* diyelim. *Ait olma* ve *arasında* terimlerine bildiğimiz anlamlar verelim. *Eş doğru parçaları* teriminin anlamını somut olarak sonra vereceğiz. *Eş açılar* Euklid anlamındaki eşlik olarak alınacaktır. *Hareket* terimi anlamı sonra verilecektir.

Euklid düzleminin ilk iki aksiyom gurupundaki aksiyomlarda kullanılan isimler yukardaki tarif edilmiş yeni anlamları ile alınıp bu anlamlar modelin elemanlarının mutata isimleri cinsinden ifade edildiğinde, bu aksiyomların Euklid düzleminde doğru oldukları kolaylıkla gösterilebilir.

1₁. Γ dairesinin A ve B gibi iç herhangi iki noktası verildiğinde, bu A ve B noktalarından geçen ve Γ ya dik olan bir yay (veya Γ nın bir çapı) mevcuttur.

1₂. Γ dairesinin A ve B gibi iç herhangi iki noktası verildi-

ğinde A ve B noktalarından geçip Γ ya dik olan birden fazla yay (veya Γ nin çapı) yoktur.

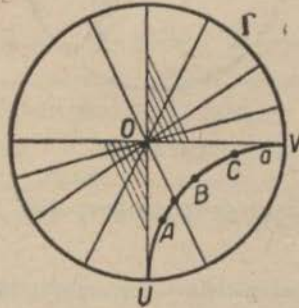
I_2 . Γ ya dik bir yay (veya Γ nin bir çapı) üzerinde Γ nin en az iki iç noktası mevcuttur. Hepsi, Γ ya dik bir yay veya aynı çap üzerinde bulunmayan, Γ nin en az üç iç noktası vardır.

Okuyucu bizzat II_{1-4} sıra aksiyomlarını sağlamalıdır.

Şimdilik eşlik aksiyomlarıyla hareket aksiyomlarını bir tarafa bırakıp paralellik aksiyomlarına dönelim. 'Lobachevski aksiyomu burada cari bulunmaktadır. Bu aksiyomu sağlamak üzere esas nesnelerin ilk anlamlarına dönelim ve Lobachevski aksiyomunun tam metni üzerinde durmayalım.

IV^* . Γ dairesinin bir A iç noktasından, Γ ya dik olarak verilen bir yayı (veya Γ nin çapını) Γ nin bir iç noktasında kesmiyen sonsuz yay cümlesi geçer. Şekil 302 de Γ dairesinin O merkezi A noktasının rolünü oynamaktadır.

Şekil 209 da — elimizdeki modelin dilinde konuşursak — A noktasından g doğrusuna paralel⁽¹⁾ iki doğru çizilmiştir. Şe-



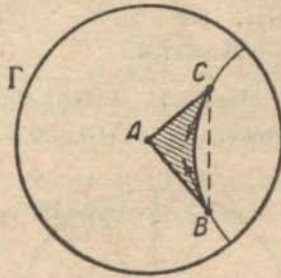
Şek. 302

⁽¹⁾ İki «doğru», Γ nin çemberinde kesiştiklerinde Lobachevski anlamında paralel olurlar.

Şekil 207 de A ve B noktalarından tek bir AB doğrusu çizilmiştir. Şekil 204 de merkezi A olan doğru demeti, a_2 doğrusuna paralel olan doğru demeti, ve süperparalel doğru demeti gösterilmiştir. Şekil 208 de A noktasından g doğrusuna bir dikme indirilmiştir. Şekil 210 ise g_1Ag_2 dar açısının g_2 kenarına paralel olup g_1 kenarına dik p dikmesiyle ilgili teoreme örnek teşkil etmektedir.

Şekil 211 de g_1 ve g_2 süperparalel doğrularının ortak dikmesinin çizimi yapılmıştır. Aynı tarzda Lobachevski geometrisinde doğruların izafi durumlarıyla ilgili bütün teoremler sağlanabilir. Bu teoremlerin herbiri aynı zamanda Euklid geometrisinde bir teorem veya güzel bir çizim problemi teşkil eder.

(Şekil 303), bir üçgende açılar toplamına ait teoremi göstermektedir. Burada BC kirişiyle BC yayına üç noktalarında çizilen



Şekil 303

zilen teğetler arasındaki açılar toplamı ABC üçgeninin noksanlık verir.

Lobachevski geometrisinin bu modelindeki bir hareketin anlamını açıklayalım.

Elimizde doğru parçalarının eşliği kavramı mevcut Euklid geometrisinin düzleminde hareket gurupunu etüd ederken (29) herşeyden evvel birinci nevi hareketi tarif etmiştik.

Birinci nevi hareket, verilen düzlemde yer alan AB ve $A'B'$ gibi eş iki doğru parçasıyla tamamen belirlidir (Şekil 147). Bu harekette A noktası A' noktasına, B noktası B' noktasına ve herhangi M noktası da AMB ve $A'M'B'$ üçgenleri eşit ve aynı yönde olacak şekilde bir M' noktasına gider. Bu çizimin tamamı Lobachevski geometrisinin bir kısmını teşkil eder. Euklid geometrisinde her hareketi bir öteleme ile bir dönmenin toplamı olarak alabiliriz (29). Lobachevski geometrisinde bir nokta etrafında dönme mevcut olduğu halde *paralel* ötelemeler yoktur.

Düzlem bir a doğrusu boyunca kaydırılabilirse de a üzerinde bulunmayan noktalar Euklid düzleminde olduğu gibi doğrular üzerinde değil a yı taban doğrusu olarak kabul eden eğriler boyunca kayarlar.

Bununla beraber, gayri Euklidiyen geometride her hareket bir doğru boyunca kayma ile (bu yönde) bir dönmenin toplamı olarak gösterilebilir. Meselâ, düzlem evvelâ A noktası A' ye gidecek şekilde AA' doğrusu boyunca (Şekil 147) kaydırılıp sonra düzlem B noktası B' ile çalışacak şekilde A' noktası etrafında döndürülebilir.

Bir nokta etrafında bir dönme, Euklid halinde olduğu gibi doğruya göre iki simetrinin toplamı olarak gösterilebilir (Şekil 177). P noktası (Şekil 304) P' ye gitmek üzere PP' doğrusu üzerinde bir kayma, p_1 ve p_2 doğrularına göre iki simetrinin toplamı olarak gösterilebilir; burada p_1 , p_2 doğruları PP' ye uç noktalarından $(1/4) PP'$ uzaklıkta bulunan noktalardan çizilen dik iki doğrudur.

Bu, Lobachevski düzleminin hareket gurupunun — birinci ve ikinci neviden — doğruya göre bütün simetrilerle banların mümkün olan bütün toplamlarından ibaret olduğunu göstermektedir.

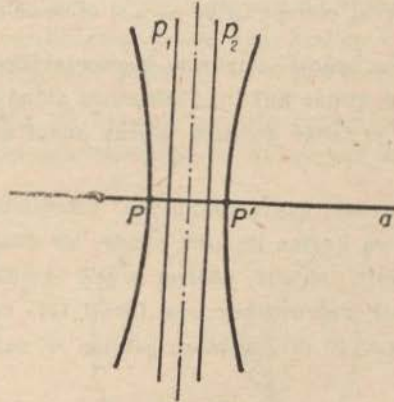
Bundan şu neticeye varırız: Poincaré modelinde Lobachevski düzlemindeki bütün hareketlerin cümlesi, yayları modelin doğruları

olan dairelere göre olan bütün evritimlerden ibarettir. Γ dairesinin bir çapına göre simetrisine evritiminin limit hali olarak bakılır.

Γ dairesinin evritim dairelerine dikliğinden dolayı Γ dairesi, bütün bu evritimlerde iç noktaları gibi kendisine dönüşür.

Böyle dönüşümlerde resimlerin nasıl elde edilebileceğini evvelce öğretmiştik (49, 51; Şekil 202, 204).

Hareket gurupunun ithalinden sonra hareketlere dair aksi-yomların tatbiki işini sağlamak, dolayısıyla bildiğimiz tarzda,



Şek. 304

şekillerin eşliğini *tarif etmek* kolaydır. Evritimde açılar muhafaza olunduğundan, Poincaré modelinde, Lobachevski anlamında olan açılar adi anlamda da eşittirler.

Poincaré modeli, Lobachevski düzleminde konform tasvir olarak düşünülebilir.

Lobachevski geometrisinin bu modelinde doğru parçalarını ölçme sistemini elde etmede güçlük doğmaz.

Dört noktanın

$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD}$$

çifte oranının evritimde (49) ve dolayısıyla modelimizde bir hareket altında *değişmez* olduğunu biliyoruz.

Hedefimizin bir AB doğru parçasının *hareketler altında değişmez* olması gereken *uzunluk* unu tarif etmek olduğunu hatırla tutarak modelimizde AB doğrusunu teşkil eden dik yayın U ve V noktalarını ele alalım (Şekil 302). $(ABUV)$ çifte oranı hareketler altında *değişmez* ise de doğru parçasının *uzunluk* u olmaz, zira, toplanabilme özeliği mevcut bulunmamaktadır. AB nin $e(AB)$ *uzunluk* u olarak

$$e(AB) \equiv k \cdot \log(ABUV)$$

veya

$$e(AB) = k \cdot \log\left(\frac{AU}{AV} \cdot \frac{BU}{BV}\right)$$

yi almalıyız.

Bu tarifle toplanabilme mevcut olur.

İspat için şöyle yazarız (Şekil 302).:

$$e(BC) \equiv k \cdot \log\left(\frac{BU}{BV} \cdot \frac{CU}{CV}\right)$$

$$e(AB) + e(BC) \equiv k \cdot \log\left\{\left(\frac{AU}{AV} \cdot \frac{BU}{BV}\right) \cdot \left(\frac{BU}{BV} \cdot \frac{CU}{CV}\right)\right\}$$

$$= k \cdot \log\left(\frac{AU}{AV} \cdot \frac{CU}{CV}\right)$$

$$= e(AC)$$

Hareket aksiyomlarıyla eşlik aksiyomlarının ele alınan modelde cari olduğu açıktır.

Modelimize süreklilik aksiyomlarının uygulanabilirliği aşıkârdır.

Euklid geometrisinin elemanlarını kullanarak Lobachevski geometrisinin bir modelinin inşası *Lobachevski geometrisinde bir*

çelişmezliğe ulaşamayacağını göstermektedir. Zira, aksi takdirde, modelimiz ile Euklid geometrisinde bir *çelişmezlik* yaratılmış olurdu.

Lobachevski geometrisi Euklid geometrisiyle aynı derecede *çelişmezlikten* azadedir. Euklid geometrisi aritmetikle aynı derecede tutarlı olduğundan — bu ise analitik modelin varlığının neticesidir — Lobachevski geometrisi aritmetikten fazla tutmazlık gösteremez.

Lobachevski geometrisinin doğrudan doğruya bir analitik (sayısal) modelinin inşa edilebileceğine de işaret edelim.

Bu mütalealardan şu önemli keyfiyet elde olunur: *Euklidin paralel üzerine olan aksiyomu, ilk üç ve beşinci grup aksiyomlarını kullanarak ispatlanamaz, zira, eğer ispat edilmiş olsa zıddı — Lobachevski aksiyomu — I_{1-3} , II_{1-4} , III_{1-2} ve V_{1-2} aksiyomlarıyla tutarlı olmamış olur. Halbuki modelim varlığı bu tutarlığı göstermektedir.*

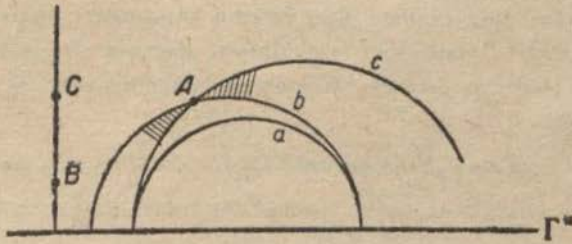
Birinci model kolayca uzay geometriye teşmil edilebilir. Esas elemanların kategorisini şöyle alırız: *Nokta* olarak — bir Γ küresinin iç noktalarını, *doğru* olarak küreye dik olup kürenin içinde kalan daire yayları ve kürenin çapları (uc noktaları hariç), *düzlem* olarak Γ ya dik olup kürenin içinde kalan küreler ve Γ nın merkezinden geçen açık diskler. *Ait olma* ve *arasında* terimleri bildiğimiz anlamı haizdir. *Hareket* olarak modelde düzlem rolündeki kürelere göre bütün evritimlerin, aynı zamanda Γ küre merkezinden geçen adı düzlemlere göre simetrilerin grupunu alırız.

B. Lobachevski geometrisinin Poincaré tarafından verilen ikinci tefsiri.

Bu model, birincisinden Γ dairesi bir Γ^a doğrusu halini aldığı ve dairenin içi yarım düzleme (Şekil 305); veya birinci

modelin esas Γ daresi üzerindeki bir noktaya göre evrildiğinde elde edilir.

Doğrular, merkezi Γ^* üzerinde olan yarım - düzlemin yarım - dairelerinden ve yarım - düzlemde Γ^* doğrusuna dik olan



Şek. 305

ışınlardan, *noktalar* ise yarım - düzlemin adi noktalarından ibarettir. *Ait olma* ve *arasında* terimleri bildiğimiz anlamı haizdirler.

Şekil 305 de a doğrusuna paralel b ve c gibi iki doğrunun çizimi yapılmıştır. Şekil 212 de g'_1 ve g'_2 süperparalellerine ortak p' dikmesi çizilmiştir.

Hareket ler tıpkı birinci modelde olduğu gibi tarif edilir.

Bu modelde Lobachevski düzleminin bütün aksiyomları tutarlık teşkil eder.

Lobachevski geometrisinin teoremlerinin Poincaré'nin bu modeline ithali, birinci model halinde olduğu gibi; Euklid görüş noktasından ilgi çekici olan geometrik problemlerin iyi bir menbainı verir.

Bu model de kolayca uzay geometriye teşmil edilebilir. Esas eleman kategorileri şunlar olur: *nokta* lar olarak — verilen bir π düzleminin *yukarı* sındaki adi noktalar, *doğru* lar olarak — π düzlemine dik olan ışınlar ile merkezi π de olan ve π ye dik düz-

lemlerde bulunan yarım daireler, *düzlem*ler olarak merkezi π de olan yarım - kürelerle π ye dik yarım - düzlemler [29].

C. Lobachevski geometrisinin Beltrami Klein tarafından verilen tefsiri.

Model i inşa edelim. Esas eleman kategorileri şunlar olur: *Nokta*lar bir Γ dairesinin iç noktaları, *doğru*lar Γ 'nin kirişleri olup *ait olma* ve *arasında* terimleri bildiğimiz anlamları haizdir (Şekil 293).

Eşlik ve *hareket*ten ne anladığımız ilerde açıklanacaktır.

Lobachevski aksiyomu bu modelde tutarlık teşkil eder.

Aksiyomların aynı cümlesinin iki tefsiri olsa ve her modeldeki elemanlara diğer modeldeki bunlara karşı elemanların birebir tekabülü mevcut olsa ve bağlılıklar muhafaza olursa bu iki tefsire *izomorfik* tir denir.

Euklid geometrisinin okulda öğretilen bilinen modeli ile sayısal modeli, analitik geometri, birbirine izomorftur. Düzlem geometrinin bilinen tefsiri ile doğruların daire ve O dan geçen doğrular olarak alındığı, O da delinmiş ve adi olmayan bir noktası ilâve edildiği düzlemdeki tefsiri (77) yine izomorftur.

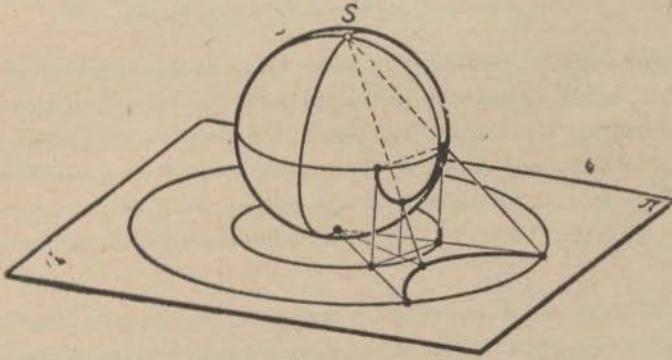
Poincaré nin her bir modelinin Beltrami-Klein modeliyle izomorf olduğunu göstereceğiz. Bu maksatla Beltrami dairesinin π düzlemine dairenin merkezinde teğet olan ve yarıçapı daireninkine eşit olan küreyi çizelim.

Evvelâ Beltrami tasvirinin tamamını alt küreye dik olarak izdüşürelim (Şekil 306). Lobachevski geometrisinin alt yarım - kürede bu suretle elde edilen tasvirini üst S' kutbiyle ilk π düzlemine stereografik olarak izdüşürürüz. Bu son izdüşümün Lobachevski geometrisinin Poincaré tarafından yapılan birinci tefsirini vereceği görülür [16], [29].

İki model arasında böylece elde edilen tekabülün izomorfik

olduğu hemen görülür. Özel olarak, Poincaré modelindeki her hareket Beltrami - modelinde müteakıl bir hareket intaç eder.

Ekvatorlu Beltrami tasvirinin çevresiyle çakışan bir yarım-küre inşa ederek bu Beltrami tasvirini yarım-küreye dik olarak



Şek. 306

izdüşürsek ve onu da ekvator üzerinde olan bir S' kutpundan S izdüşüm kutpundan geçen çapa dik α düzlemine stereografik olarak izdüşürsek α düzleminde Lobachevski geometrisinin ikinci Poincaré modelini elde ederiz [29].

Bu suretle üç modelin de izomorfik olduklarını göstermiş oluruz.

NETİCE

80. Bir aksiyom sisteminden beklenenler.

Bir aksiyom sisteminden neler beklendiğini kısaca gözden geçireceğiz. Evvelâ, bir aksiyom sisteminin *tutarlı* olması icap eder. Tutarlı bir sistemde bir teorem ve bunun zıddı birlikte ispat edilemez. Bir çelişme olmadığını göstermek için nesnelerden ve bunlar arasında var olduğu aşikâr sayılan doğru, sahih ve çelişmez bağıntılardan aksiyom sisteminin bir modeli veya tefsiri inşa edilir.

Meselâ, Euklid geometrisinde çelişme olmadığını göstermek için analitik veya sayısal bir model inşa ederiz. Böyle yapmakla aritmetiğin nesnelerini — sayıları ve bunlar arasındaki bağıntıları — doğru farzederiz.

Lobachevski geometrisinin aksiyomları arasında çelişme olmadığını göstermek için de nesneler ve bunlar arasındaki gerçek sahih, doğru, çelişmez bağıntılardan aynı şekilde bir model inşa ederiz.

Böylece bir aksiyom sisteminde *uyarlık*'in veya *çelişmezlik*'-in ispatı için somut ve iyi denenmiş nesneler ve bunlar arasındaki bağıntılara ihtiyacımız vardır (bak 2, 69).

Bir aksiyom sisteminden beklenen ikinci esas şart her aksiyomun mümkün mertebe diğerlerine bağlı *olmaması* dır. Her aksiyomun *bağımsızlık*'ı bunun diğerlerinden mantikî bir netice olarak çıkarılamaması demek olup bir aksiyom atıldığı takdirde diğer aksiyomları kullanarak atılan aksiyomun kaybını örtmek suretiyle halâ aynı sistemi elde etmek mümkün olmalıdır.

Bununla beraber geometrideki aksiyom sistemleri bütün

aksiyomların bağımsızlığından bahs etmemizi mümkün kılacak şekilde değildir. Meselâ, ikinci gurup aksiyomların ifadesinde «ait olma» kavramının evvelce verilmiş olduğu farz edilmekte ve gerçekten de bunun özellikleri birinci gurupun aksiyomları arasında açıklanmış bulunmaktadır. İncelemekte olduğumuz aksiyom sistemlerinde sadece bir aksiyomun bazı diğer aksiyomlara nazaran *bağımsızlık* sorusunu ortaya atabiliriz.

Belli bir aksiyomun diğerlerinin tümüne nazaran *bağımsızlığı*, diğer bir deyimle, bu aksiyomu bütün diğerlerini kullanarak *ispatlamanın imkânsızlığı*, bu aksiyomun (her hangi bir şekilde) *zıddı* ile değiştirmek ve böylece elde edilen aksiyom sisteminin *çelişmez* olduğunu göstermekle yapılır.

Meselâ, Euklid paralel aksiyomunun *bağımsızlığı* gerçekte bu aksiyom yerine Lobachevski aksiyomunun *tutarlı* olmasıyle gösterilmiştir. Hilbert, «Geometrinin temelleri» adlı eserinde bir çok aksiyomları hatta bütün aksiyom guruplarını *bağımsızlık* bakımından incelemektedir.

Geometrik aksiyom sistemlerinin başka bir problemi bir aksiyom sisteminin *tamamlığı*dır. Her hangi iki tefsiri izomorf olan bir aksiyom sistemine *tamam*dır denir. Bir aksiyom sisteminin tamam olması icap etmez. Meselâ, guruplar teorisinin aksiyom sistemi tam değildir, zira, izomorf olmıyan guruplar mevcuttur.

Bizim nazarı itibara almış olduğumuz geometrinin aksiyom sistemleri *tamam*dır.

Netice olarak her bilim gibi geometrinin de devamlı bir ilerleme halinde olduğunu belirtebiliriz.

Bugünün aksiyom sistemlerinin nihayet tamamlanmış «en son ve nihaî gerçekte» olduğu düşünülmemelidir. Hali hazırda mevcut sistemin bazı zayıf noktaları kendini göstermeğe başlamış durumdadır.

«..... İnsan düşüncesi yaradılıştan mutlak gerçeği vermeğe muktedirdir ve bunu verecektir. İlmî gelişmesindeki her merhale bu mutlak gerçeğin [kabına yeni damlalar ilâve etmektedir. Fakat her ilmî hükmün (önerme) gerçeklik sınırları izafî gelişmesiyle genişletilmekte ve sınırları bilginin büyümesine bağlı olarak kayıtlanmış durumdadır.»

BİBLİYOGRAFYA

1. *J. Hadamard*. Leçons de Géométrie Elémentaire. I. et II. Paris 1937 et 1932. (Türkçe tercümesi: A. Nazmi, Hendese dersleri. 1924).
2. *A. Adler*. Theorie der geometrischen Konstruktionen.
3. *P. S. Alexandrov*. Einführung in die Gruppentheorie. Berlin 1934. (Türkçe tercümesi: A. Yar, Gruplar Teorisine Giriş, İstanbul 1962.)
4. *P. S. Alexandrov*. Introduction To The Theory of Groups, Uchpedgiz 1939.
5. *P. S. Alexandrov*. What Is Non-Euclidean Geometry? «N. I. Lobachevskii» Series. (1793 — 1943). GTI, 1943.
6. *P. S. Alexandrov*. Einfachste Grundbegriffe der Topologie. Berlin 1932.
7. *P. S. Alexandrov and V. A. Efremovich*. Outline of The Basic Concepts of Topology, ONTI, 1936.
8. *S. A. Bogomolov*. Geometry (Systematic Course), Uchpedgiz 1949.
9. *S. A. Bogomolov*. Foundations of Geometry, GIZ, 1923.
10. *J. Bolyai*. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens. Maros-Vasarhelyini 1932.
11. *M. E. Vashenko - Zakharchenko*. Euclid's Elements, with an expository introduction and interpretations. Kiev, 1880.
12. *I. M. Vinogradov*. Elements of Number Theory. New-York 1954.
13. *V. M. Voronets*. Geometry With a Pair of Compasses, ONTI, 1934.

14. *A. B. Gedymin*. Cartography, Uchpedgiz 1946.
15. *D. Hilbert*. Grundlagen der Geometrie. 9. Aufl. Stuttgart 1962.
16. *D. Hilbert — S. Kohn - Vossen*. Anschauliche Geometrie. Berlin 1932.
17. *N. A. Glagolev*. Elementary Geometry, Parts I and II.
18. *R. Dedekind*. Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.
19. *R. Descartes*. La Géométrie (together with an English Translation) New - York 1954.
20. *B. Delaunay and O. Zhitomirskii*. Workbook in Geometry, Gostekhizdat 1949.
21. *B. N. Delaunay and D. A. Raikov*. Analytical Geometry, vols. I and II, Gostekhizdat 1948 — 1949.
22. *Euclid*. The Thirteen Books of Euclid's Elements (Translated by Heath) New - York 1956.
23. The Eighth Book of Euclid's Elements. Translated by *F. Petrushevskii*. St. Petersburg, 1819.
24. *N. B. Efimov*. Advanced Geometry, GTI 1949.
25. *V. F. Kagan*. On the Transformation of Polygons. ONTI, 1933.
26. *V. F. Kagan*. Lobachevskii. Acad. Sci. USSR, 1944.
27. *F. Klein*. Elementarmathematik von höheren Standpunkt aus. I, II, III. Berlin 1925 — 1928.
28. *V. I. Kostin*. Foundations of Geometry. Uchpedgiz 1948.
29. *B. V. Kutuzov*. The Geometry of Lobachevskii and the Elementary Foundations of Geometry. Uchpedgiz 1950.
30. *N. I. Lobachevskii*. Geometry. Kazan, 1909.

31. *N. I. Lobachevskii*. Geometrical Researches on the Theory of Parallel Lines. Academy of Sciences of USSR, 1945.
32. *N. I. Lobachevskii*. Complete Collected Works On Geometry. Kazan, 1883.
33. *N. I. Lobachevskii*. Complete Collected Works, vols. I, II, IV. GTI, 1946 — 1949.
34. *C. Lebesgue*. Sur la mesure des grandeurs. Paris et Genève.
35. *G. Lemaire*. Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie. Paris 1941.
36. *N. N. Luzin*. Introduction to the Theory of the Functions of Real Variables. Uchpedgiz 1948.
37. *A. I. Markushevich*. Real Numbers and the Fundamental Principles of the Theory of Limits. Acad. of Pedagogical Sciences, 1948.
38. *P. S. Modenov*. Collection of Examination Problems in Mathematics with Analysis of Mistakes Made. State Publishers of Soviet Science, 1950.
39. *G. Monge*. Géométrie Descriptive. Paris 1798.
40. *S. I. Novosiolov*. Algebra and Elementary Functions Uchpedgiz.
41. *D. I. Perepiolkin*. Course in Elementary Geometry, Parts I. and II. GTI 1948 — 1949.
42. *D. I. Perepiolkin*. Geometrical Construction in the Middle School. Acad. of Pedagog. Sciences, 1947.
43. *H. Rademacher und O. Toeplitz*. Von Zahlen und Figuren. 2. Aufl. Berlin 1938.
44. *F. Rudio*. Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Leipzig 1892.

45. *E. S. Feodorov*. Symmetry and the Structure of Crystals. Academy of Sciences of USSR 1949.

46. *E. S. Feodorov*. The Exact Representation of the Points of Space on a Plane. Memoirs of the Mining Institute, vol. I. St. Petersburg 1907.

47. *E. S. Feodorov*. Representing the Structure of Crystals by Means of Vectorial Circles. Memoirs of the Mining Institute, vol. I. 1908.

48. *E. S. Feodorov*. A New Geometry as the Basis of Drawing. St. Petersburg 1907.

49. *E. S. Feodorov*. The Simple and Exact Representation of the Points of Four-Dimensional Space on the Plane by Means of Vectors. Memoirs of the Mining Institute, vol. II, 1909.

50. *H. G. Zeuthen*. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Paris 1902.

51. *N. F. Chetverukhin*. Methods of Geometrical Construction. Uchpedgiz 1938.

52. *P. A. Shirokov*. Brief Outline of the Fundamentals of the Geometry of Lobachevskii. Series «Nikolai Ivanovich Lobachevskii (1793 — 1856)». Acad. Sci. USSR, 1943.

53. *J. Steiner*. Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833.

Yayınlanmış olan eserler :

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanîğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
- 9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
- 11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
- 18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler :

- 16 — Sayı sistemi
- 17 — Gayri Euklid geometriler

Matematik Derneğinin adresi :

Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü

Vezneciler — İstanbul

Fiatı 400 Krş.