

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 23

B. I. ARGUNOV - L. A. SKORNYAKOV

KONUM TEOREMLERİ

Çeviren:

Şükûfe YAMANTÜRK

İSTANBUL — 1964

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı : 23

B. I. ARGUNOV - L. A. SKORNYAKOV

KONUM TEOREMLERİ

Ceviren:

Şükûfe YAMANTÜRK

İSTANBUL — 1964

İSMAİL AKGÜN MATBAASI
Cağaloğlu, Servili Mescit Sokak, No. 24
İSTANBUL—1964

BU KİTAP HAKKINDA

Bu küçük kitapta bir kaç mühim konum teoremi verilmekte ve bu teoremler uygulanarak şekillere ait özelliklerin incelenmesi ile bir takım pratik problemlerin çözümleri yapılmaktadır. Bunlar yapılırken, kitabın yazarları, geometrinin bazı temel kaidelerini — uzayda merkezsiz izdüşüm ve ideal elemanları — okuyucuya tanıtmaktadırlar. Düzlem geometri ve uzay geometriye ait yalnız en basit bilgilerin önceden öğrenilmiş olduğu kabul edilmektedir.

Bölüm 2 ve 3, en mühim iki konum teoremine (Pappus-Pascal ve Desargues Teoremlerine) ayrılmış ve daha sonraki bölümlerde bu teoremler üzerine uygulamalar yapılmıştır. Bölüm 6, konum teoremlerinin cebirsel tefsiri ve bizi bu teoremlere götüren genel metod hakkında kısa bir fikir verir.

Bu konu üzerinde daha geniş bilgi edinmek isteyenler, kitabın sonunda verilen bibliyografya'dan faydalanabilirler.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dola-yısıyle mühendislik, askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod, gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir milli eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sun'i olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak

seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Milli Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

1. Bir Konum Teoremi Nedir?	1
2. Bir Konum Teoremi Örneği	3

BÖLÜM 1

MERKEZSEL İZDÜŞÜM VE İDEAL ELEMANLAR

3. Düzlemde Merkezsel İzdüşüm Ve İdeal Elemanlar	5
4. İstisnai Hallerin Ortadan Kaldırılması	8
5. Projektif Doğrularla İlgili Temel Teoremler	9
6. Uzayda Merkezsel İzdüşüm	10

BÖLÜM 2

PAPPUS - PASCAL TEOREMİ

7. Pappus - Pascal Teoremi	14
8. Pappus - Pascal Teoreminin İspatına Hazırlık	16
9. Pappus - Pascal Teoreminin İspatı	19
10. Brianchon Teoremi	20

BÖLÜM 3

DESARGUES TEOREMİ

11. Desargues Teoremi	22
12. Desargues Teoreminde Karşılaşılan Değişik İspatlar	26
13. Desargues Teoreminin Karşıtı	34

BÖLÜM 4

ÇOKGENLERE AİT BAZI ÖZELLİKLER

14. Dörtgenlere Ait Bazı Özellikler	36
15. Beşgenlere Ait Bazı Özellikler	38
16. Dörtgenlerin Daha Başka Özellikleri	39

BÖLÜM 5
PROBLEMLER

17. Yanına Varılamıyan Nokta Veya Doğrular	42
18. Yanına Varılamıyan Nokta Veya Doğruları İhtiva Eden Çizimler	43
19. Okuyucu İçin Çözülecek Problemler	49

BÖLÜM 6
KONUM TEOREMLERİNİN CEBİRSEL ANLAMI

20. Cebirsel Özdeşliklerin Konum Teoremleri Olarak Alınabilmeleri	53
21. Konum Teoremleri İçin Şematik Notasyon	55
BİBLİYOGRAFYA	59

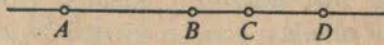
GİRİŞ

1. Bir Konum Teoremi Nedir?

Bir konum¹ teoremi; sonlu sayıda noktalar, doğrular² ve bunlar arasında ortaya çıkan bağıntılarla ilgili bir teoremdir. Bir konum teoremi, çok defa, bir takım noktaların bir doğru üzerinde bulunmaları veya bir takım doğruların bir noktadan geçmelerinden ötürü, diğer bazı noktaların bir doğru üzerinde olmaları gerektiği veya diğer bazı doğruların bir noktadan geçtiklerini ifade eder.

Konum teoremlerine ait bazı basit örnekler:

1. *A, B ve C noktaları bir doğru üzerinde A, B ve D noktaları da bir doğru üzerinde olmak üzere A, B, C ve D gibi farklı dört nokta alınmış olsa; B, C ve D noktaları bir doğru üzerinde olurlar (Şek. 1).*



Sekil: 1

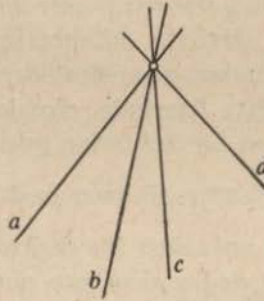
2. *a, b ve c doğruları bir noktadan a, b ve d doğruları da bir noktadan geçmek üzere a, b, c ve d gibi farklı dört doğru alınmış olsa; b, c ve d doğruları bir noktadan geçerler (Şek. 2).*

- 1 Konum, konfigürasyon karşılığı alınmıştır (Cevirenin notu). Konfigürasyon (Lâtince, configuratio), birbiriyle ilgili elemanlardan meydana gelen bir şekil demektir.
- 2 Bu kitapta, bir «doğru» diyince, daima her iki taraftan sonsuz olarak uzatılmış bir doğru anlaşılacaktır.

Geometri derslerinde incelenen teoremler arasında, bir üçgenin özel noktaları¹ ile ilgili olanlar, konum teoremlerine en çok benzeyen teoremlerdir.

Bazı konum teoremleri eskiden de bilinirlerdi. Bu teoremler, daha yakın zamanlarda geometrinin en ilgi çekici kollarından birinin — Projektif Geometri'nin — temeli oldular.

Keza, projektif geometri de, tasarı geometri'nin — yani; üç boyutlu şekillerin, düzlemler üzerinde gösterilmeleriyle ilgili çalışmaların — temelini teşkil eder.



Şekil: 2

Bu kitabın son kısmında kısmen açıklandığı gibi; cebir ile meşgul olanlar, son on yıl içinde konum teoremleri ile ilgilendiler.

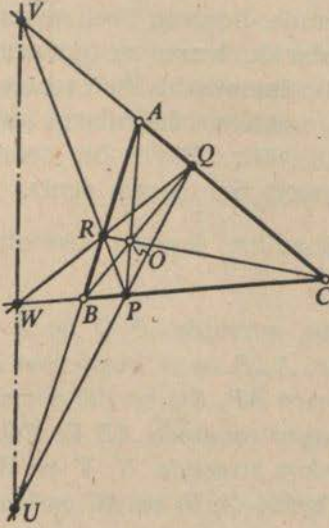
Konum teoremleri, çokgenlere ait özelliklerin incelenmesi ve bu özelliklerle ilgili problemlerin çözülmesinde başarıyla uygulanabilir. Bu teoremler, özellikle, muhtelif sınırlayıcı şartları haiz çizim problemlerinin çözülmesinde faydalı olur: Yalnız cetvel kullanarak yapılan çizimler,

1 Bir üçgenin kenar ortaylarının kesim noktası, yüksekliklerinin kesim noktası, üçgenin içine ve dışına çizilen dairelerin merkezleri; üçgene ait bazı özel noktalardır.

düzlemin sınırlanmış bir kısmı içinde yapılan çizimler, yanına varılamıyan noktaları bulunan çizimler, v.s... de olduğu gibi.

2. Bir Konum Teoremi Örneği.

Bir ABC üçgeni çiziniz ve bu üçgenin içinde bir O noktası alınız. O yu köşelere birleştiren doğruları, karşı kenarları P , Q ve R noktalarında kesinciye kadar uzatınız (Şek. 3). AB ve PQ doğrularının kesim noktasını, U ile;



Şekil: 3

AC ve PR doğrularının kesim noktasını, V ile; BC ve QR doğrularının kesim noktasını da, W ile gösteriniz. Çizim itina ile yapılır ve bütün noktalar, şekil düzleminin sınırları içinde kalırlarsa; bu U , V ve W noktaları bir doğru üzerinde olmak üzere ortaya çıkacaklardır. Eğer başka bir üçgen ve başka bir O noktası seçilirse, sonuç yine de değişmeyecektir.

$BC \parallel QR$ alınırsa, o zaman $UV \parallel QR$ olacaktır. $BC \parallel QR$ ve $AC \parallel PR$ ise, daha ileride gösterileceği gibi, $AB \parallel PQ$ olması gerekir.

Bu işlerin tesadüfen böyle olduklarına inanmak kolay değildir. Görünüşe göre, burada bir düzene uygunluk vardır ve bir teorem doğru olmalıdır. Teoremin sonucu ise « U, V ve W noktalarının hep bir doğru üzerinde bulunmaları»dır. Bu teorem, yukarıda da söylendiği gibi, daha önceki geometri derslerinde rastlanan ve bir üçgenin özel noktalarıyla ilgili olan teoremlerle karşılaştırılabilir. Fakat, ele aldığımız teoremde, üçgenin özel noktalarına ait teoremlerden farklı olarak, kenar ve açıların büyüklükleri için bir şart ileri sürülmemiştir. Hem teoremin şartlarında hem de sonucunda, nokta ve doğruların birbirine nazaran durumlarından bahsedilir. Böyle bir teoreme, *konumla ilgili (konfigürasyonel)* bir teorem denir.

Yukarıda bahsedilen konum teoremi şöyle ifade edilebilir.

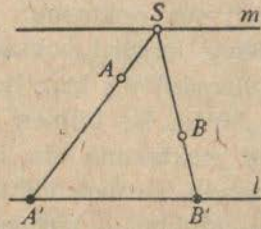
PQR üçgeninin, sırasıyla, P, Q ve R köşeleri, ABC üçgeninin, sırasıyla, A, B ve C köşelerine karşı kenarları üzerinde iseler; ayrıca AP, BQ ve CR doğruları bir noktadan geçiyorlar ve aynı zamanda AB ile PQ, AC ile PR ve BC ile QR doğruları sırasıyla U, V ve W noktalarında kesişiyorlarsa; o halde U, V ve W noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar.

Konum teoremlerini ispat edebilmek için; merkezsiz izdüşüm alma işini ve «ideal» veya «sonsuzdaki» nokta ve doğrular kavramını bilmemiz gerekir.

1. MERKEZSEL İZDÜŞÜM VE İDEAL ELEMANLAR

3. Düzlemde Merkezsel İzdüşüm Ve İdeal Elemanlar.

Bir l doğrusu ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir S noktası verilmiş olsun (Şek. 4). Öyle bir A noktası alalım ki, SA doğrusu l doğrusuna paralel olmasın. O halde SA doğrusu, l doğrusunu bir A' noktasında keser. A' noktasına, A noktasının l üzerindeki *izdüşüm*'ü diyeceğiz. S nok-

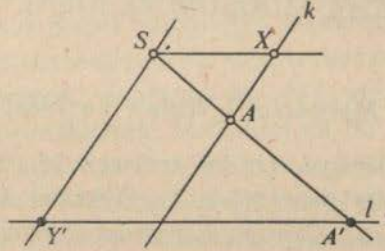


Şekil: 4

tasından geçen l doğrusuna paralel doğru m ile gösterilsin. m doğrusu üzerinde olmayan düzlemin her B noktasının bir B' izdüşümünün bulunacağı açıktır. Böylece, S noktasını kullanarak, düzlemdeki noktaların l doğrusu üzerinde izdüşümlerini alırız. Böyle bir izdüşüme *merkezsel izdüşüm* ve S noktasına da *izdüşüm merkezi* denir.

S noktasından geçmeyen herhangi bir k doğrusu alırsak; o zaman merkezsel izdüşüm, k doğrusunun noktalarını l doğrusu üzerine resmeder (Şek. 5). k doğrusu l

doğrusuna paralel değilse, bu halde k doğrusu üzerindeki bazı noktaların izdüşümleri yoktur. $SX \parallel l$ ise, X noktasının l üzerinde bir izdüşümü bulunamaz. $SY' \parallel k$ ise, l üzerindeki Y' nün diğer bir istisnai nokta olacağı Şek. 5 den



Şekil: 5

kolayca görülür. Bu Y' noktası, l doğrusu üzerinde olup k doğrusunun herhangi bir noktasının izdüşümü olmıyan yegâne noktadır. Böyle istisnai noktaları, öteki noktalar gibi, aynı tarzda kullanabilmek için; her doğrunun bilinen noktaları yanında, bütün bu bilinen noktalara ilâveten, doğrunun bir *ideal* noktasının da bulunacağını kabul edeceğiz. Aynı zamanda, paralel doğruların da *ortak* bir ideal noktaya sahip olduklarını şart koşacağız ¹.

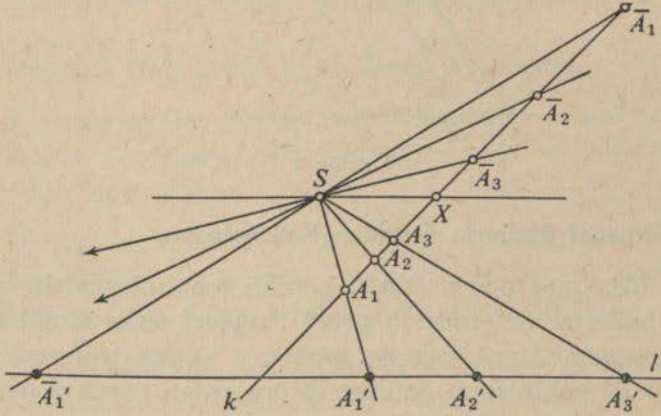
Artık şimdi, Şek. 5 deki X noktasının bir izdüşümü bulunacak ve bu izdüşüm l doğrusunun ideal noktası olacaktır. Keza, Y' noktası, k doğrusuna ait ideal noktanın da izdüşümüdür. k ve l doğrularının paralel olması halinde, bu doğruların ortak ideal noktasının, kendi izdüşümü olacağına dikkati çekeriz.

Şimdi şunu belirtelim: A noktası soldan X noktasına yaklaşırsa (Şek. 6 da A nın bu konumları A_1, A_2, A_3 , v.s... ile gösterilmişlerdir); o zaman, A noktasının izdüşümü, l

1 Düzlemde olduğu gibi, uzaydaki paralel doğruların ortak bir ideal noktaya sahip olduklarını kabul ederiz.

doğrusu üzerinde sağa doğru ötelere ve çok ötelere gider. Bu sebepten ideal noktaya, aynı zamanda *sonsuzdaki nokta* da denir.

Bundan başka, X noktası sağdan A noktasına yaklaşırken (Şek. 6 da A nın bu konumları $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$, v.s... ile gösterilmiştir); A noktasının izdüşümü, l doğrusu üzerinde sola doğru uzaklaşır. Her doğrunun sonsuzda yalnız bir noktası bulunduğunu kabul ettiğimize göre, doğruyu kapalıymış gibi gözönüne alabiliriz.



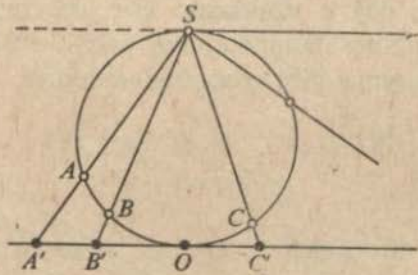
Şekil: 6

İdeal noktasiyle beraber alınan bir doğruya bir *projektif doğru* denir.

Bir düzlemin bütün doğrularının ideal noktalarının bir *ideal projektif doğru* üzerinde bulundukları fikrini kabul edelim. Bu ideal projektif doğruya *sonsuzdaki doğru* da denir. İdeal noktaları ve ideal doğrusu ile beraber alınan bir düzleme *projektif düzlem* diyeceğiz *.

* Düzlemin bütün ideal noktaları, ideal doğrusu üzerinde bulunurlar. O

İhtar. Bir projektif doğru bir daireye «benzer» dir. Gerçekten de, projektif doğrunun noktalarıyla dairenin noktaları arasında öyle bir tekabül kurulabilir ki, doğrunun farklı noktalarına dairenin farklı noktaları tekabül eder. Şek. 7 de, O noktası kendisine ve S noktası da doğrunun ideal noktasına tekabül ettirilirse; doğru ile daire arasındaki tekabülün kuruluş tarzı açıkça görülür.



Şekil: 7

4. İstisnai Hallerin Ortadan Kaldırılması.

İdeal noktaların ithali, konum teoremlerindeki istisnai hallerin teoremlerin genel ifadeleri içine alınabilmesini sağlar. 2 nci kısımda gözönüne alınan teoremde; U , V ve W noktalarını belirten doğrulardan bazıları paralel iseler, yukarıda bahsedilen istisnai haller ortaya çıkar. Bu ise, uygun olan istisnai noktanın bir ideal nokta olması demektir. Bu halde, şu imkânlar vardır:

- | | | |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| (a) $AB \parallel PQ$ | $AC \parallel PR$ | $BC \parallel QR$ |
| (b) $AB \nparallel PQ$ | $AC \nparallel PR$ | $BC \parallel QR$ |
| (c) $AB \nparallel PQ$ | $AC \parallel PR$ | $BC \nparallel QR$ |
| (d) $AB \parallel PQ$ | $AC \nparallel PR$ | $BC \nparallel QR$ |

halde, «ideal doğrusu ile beraber alınan bir düzleme projektif düzlem» demeliyiz. İdeal noktaları tekrar ayrıca almak gerekmez (Çevirenin notu).

Daha önce (2 nci kısımda) belirtildiği ve daha sonra (11 inci kısım 1 inci halde) ispat edileceği gibi; doğrulardan iki çiftin paralel olmaları ile üçüncü çiftin de paralel olması gerektiğine göre, bir diğer imkân ortaya çıkamaz.

(a) halinde, üç noktanın hepsi de ideal noktalar ve dolayısıyla bu noktalar bir ideal doğru üzerinde bulunurlar. (b) halinde, 2 nci kısımda belirtildiği gibi, $UV \parallel QR$ dir ve W noktası bir ideal nokta olur. $UV \parallel QR$ olduğuna göre; UV doğrusunun, W noktasından geçeceğini, yani U , V ve W noktalarının bir doğru üzerinde bulunacaklarını görürüz. (c) ve (d) halleri (b) haline analogdur.

5. Projektif Doğrularla İlgili Temel Teoremler.

Teorem 1. *Farklı iki noktadan — ideal veya herhangi * (ordinary) iki noktadan — bir ve yalnız bir projektif doğru geçer.*

Üç imkân vardır: (1) iki nokta, herhangi iki nokta olabilir; (2) iki nokta ideal iki nokta olabilir; (3) noktalardan biri ideal, diğeri herhangi bir nokta olabilir.

(1) inci hal için, elemanter geometrinin aksiyomlarına göre farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçtiğini hatırlıyalım. İdeal doğrunun herhangi bir noktası bulunmayacağına göre, böyle ideal bir doğru, verilen noktaların hiç birinden de geçemez ve böylece (1) inci haldeki teorem ispat edilmiş olur.

(2) nci halde, noktalar düzlemin sonsuzdaki doğrusu üzerinde bulunurlar. Düzlemin diğer geri kalan doğrularının her birinin yalnız bir ideal noktası olduğuna göre; verilen noktaların her ikisi birden, bu çeşit doğrulardan herhangi biri üzerinde olamazlar.

* Bu kitapta; herhangi bir nokta deyimi ile, ideal olmıyan bir nokta ifade edilmektedir (Çevirenin notu).

(3) üçüncü halde; A noktası, herhangi bir nokta ve B noktası da, ideal bir nokta olsun. B noktası, herhangi bir k doğrusu ile belirtilir (ve çizimde de gösterilebilir). A dan geçen ve k ya paralel olan doğruya l doğrusu dersek; projektif olan bu l doğrusu ve ancak bu doğru, A ve B noktalarından geçebilir. Bilindiği gibi, böyle bir l doğrusu vardır ve bu l doğrusunun ancak *bir tek* olacağı, paralel doğrularla ilgili aksiyomlardan anlaşılır.

Teorem 2. *Farklı iki projektif doğru, bir ve yalnız bir noktada (ideal veya herhangi) kesişirler.*

(İspatı okumadan önce, kendi kendinize ispat etmiye çalışınız.)

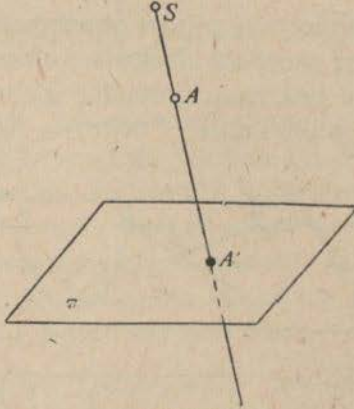
Teorem 2 yi ispat etmek için, mümkün iki hal bulunduğunu önceden hatırlatalım: (1) iki doğru herhangi iki doğru olabilir; (2) doğrulardan biri herhangi ve diğeri bir ideal doğru olabilir. Düzlemin sonsuzda ancak bir doğrusu olacağı fikrini kabul ettiğimize göre, iki ideal doğru almak mümkün değildir.

(1)inci halde; alınan iki doğru paralel değilse, o zaman bu doğrular herhangi bir noktada kesişirler. Verilen doğrular paralel iseler, o halde doğruların ortak *bir tek* ideal noktası vardır.

6. Uzayda Merkezsel İzdüşüm.

Bir π düzlemi ve düzlemin dışında bir S noktası verilmiş olsun (Şek. 8). SA doğrusunun π düzlemini deldiği A' noktasına, A noktasının π düzlemi üzerindeki *izdüşüm*'ü diyelim. Düzlemde yapılan izdüşümde olduğu gibi, S noktasına yine *izdüşüm merkezi* deriz. π düzleminin ideal noktaları, S den geçen ve π düzlemine paralel olan bir π düzleminin üzerinde bulunan noktaların izdüşümleridir. π

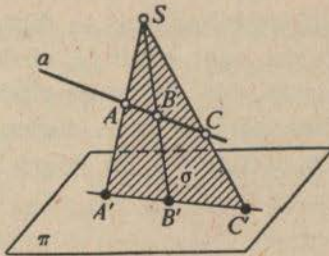
düzlemine (yani noktaların izdüşümlerini ihtiva eden düzleme) *izdüşüm düzlemi* diyeceğiz.



Şekil: 8

Teorem 3. *Bir doğru üzerindeki noktaların izdüşümleri, yine bir doğru üzerinde bulunurlar.*

İspat için, bir a doğrusu üzerinde A , B ve C gibi üç nokta verildiğini farzedelim (Şek. 9). O halde SA , SB ve

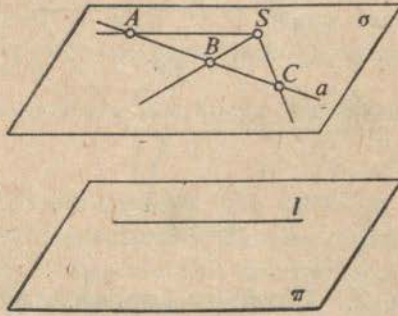


Şekil: 9

SC doğruları; S noktası ile a doğrusunun belirttiği σ düzlemi üzerindedirler.

σ ve π düzlemleri paralel değillerse; A' , B' ve C' noktaları, σ ve π düzlemlerinin her ikisi üzerinde yani σ ve π düzlemlerinin arakesit doğrusu üzerinde bulunurlar.

σ ve π düzlemlerinin paralel olmaları halinde (burada σ ve π düzlemleri *projektif düzlemler* olarak alınıyor), SA doğrusunun ideal noktasını gözönüne alalım (Şek. 10). π düzleminde SA ya paralel her l doğrusu, SA nın ideal nok-



Şekil: 10

tasından geçmelidir. Demek ki, bu halde, A noktasının izdüşümü, π düzleminin bir A' ideal noktası olacaktır. B ve C noktalarının izdüşümlerinin, π düzlemine ait ideal noktalar olacakları da ispat edilir. π düzlemi üzerindeki bütün ideal noktaların, bir doğru üzerinde bulundukları fikri kabul edildiğine göre; σ ve π düzlemlerinin paralel olmaları halinde de, Teorem 3 ün doğru olacağı ortaya çıkar.

2. PAPPUS-PASCAL TEOREMİ

Tarihi bilgi. İskenderiye'li Pappus, Milâttan sonra 3. Yüzyılın ikinci yarısında yaşıyan bir Yunanlı matematikçi idi. Pappus'un *matematik koleksiyonu* (mathematical collection) isimli kitabında; diğer herhangi bir tarzda bize kadar gelmemiş olan Yunanca yazılardan bir çok parçalar vardır. Bu sebepten, bu kitap, eski Grek matematik tarihi için değerli bir kaynaktır.

Blaise Pascal (1623-1662), tanınmış bir Fransız matematik bilgini, fizikçi ve filozof idi. Pascal, ilk matematik tahsilini, babasının — meşhur matematikçi Etienne Pascal'ın — nezareti altında yaptı ve ilk ilmi eserini 16 yaşında iken yazdı. Bu bölümde gözönüne alınan Pappus-Pascal teoremi, Pascal'ın ilk ilmi çalışmasında ispat edilen teoremlerden birinin özel bir halidir. Bu özel hali, İskenderiye'li Pappus'ün, ideal noktayı kullanmaksızın önceden bildiği bir gerçektir.

Pascal'ın matematik ilgisi geometriye münhasır değildi. Toplama yapan bir makina plânu çizdi ve onu gerçekleştirdi. Aritmetik, cebir, sayılar teorisi ve probabilité üzerinde bir seri çalışmalar yazdı. Özellikle, matematik indüksiyon metodunu kesin olarak tarif etti ve bu metodu ispatlarda kullandı. Fizikte de, barometrik basınç ve hidro-statik problemler üzerinde çalıştı. Örneğin, dış kuvvetler tarafından sıvının yüzeyi üzerinde hasıl olan basıncın, sıvı vasıtasıyla bütün doğrultulara eşit bir tarzda intikal ettiğini ifade eden hidro-statik'in temel kanununu keşfetti.

7. Pappus-Pascal Teoremi.

Düzlemde 1, 2, 3, ..., n sayıları ile gösterilen n farklı nokta alındığına göre 1 ile 2, 2 ile 3, ..., $n-1$ ile n ve n ile 1 noktalarını birleştiren n doğrudan meydana gelen şekle bir n -gen diyeceğiz. Noktalara, n -genin köşeleri ve müteakip iki köşeyi birleştiren doğrulara n -genin kenarları denir. Bu tarz bir n -gen tarifinin, alışlagelen bir n -gen tarifinden, sadece kenarlar bakımından fark edeceği açıktır: Kenarlar, doğru parçaları değil de, doğrular olarak alınmaktadır.

A, B, C, D, E ve F noktaları, bir altıgenin sırayla alınan köşeleri iseler (Şek. 11 e bakınız), o halde A ile D, B ile E ve C ile F köşelerine, yani aralarında ikişer köşe atlıyarak alınan çiftlere, karşılıklı köşeler denir. Bir altıgende, karşılıklı iki köşe çiftini birleştiren iki kenara, karşılıklı kenarlar denir. Yukarıda gözönüne alınan $ABCDEF$ altıgeninde, AB ile DE , BC ile EF ve CD ile FA karşılıklı kenarlardır.

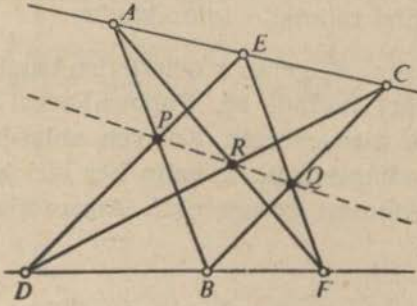
PAPPUS-PASCAL TEOREMİ. *Bir altıgenin köşeleri, birer atlıyarak, iki doğru üzerinde iseler*; altıgenin karşılıklı kenarlarının kesim noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar.*

Altıgenin bütün köşeleri, ideal olmıyan herhangi noktalar olsalar bile; teoremin yukarıdaki basit ifadesi, ideal noktalar ile ideal doğruları ithal etmeden elde edilemez. İdeal nokta ve ideal doğrular ithal edilmeseydi, Teoremin sonunda aşağıdaki üç halden ayrı ayrı bahsetmemiz gerekecekti:

Birinci hal. Her karşılıklı kenar çifti herhangi bir

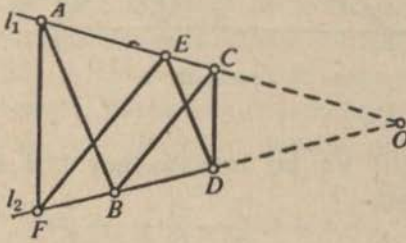
* $ABCDEF$ altıgeninde A, C, E köşeleri bir doğru üzerinde ve B, D, F köşeleri diğer bir doğru üzerindedirler (Çevirenin notu).

noktada kesişirlerse, kesim noktaları (Şek. 11 de P , Q ve R noktaları) bir doğru üzerinde bulunurlar.



Şekil: 11

İkinci hal. Altıgenin karşılıklı kenarları paralel olabilirler (Şek. 12).



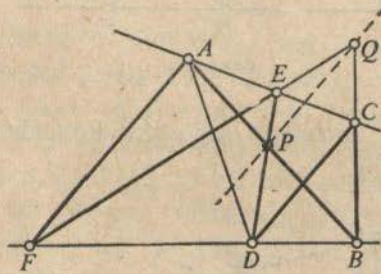
Şekil: 12

Üçüncü hal. Altıgenin karşılıklı kenar çiftlerinden ikisi, P ve Q gibi herhangi iki noktada kesişebilir ve üçüncü kenar çifti, PQ doğrusuna paralel olabilir (Şek. 13).

İkinci halde, karşılıklı kenarların kesim noktalarının hepsi de ideal noktalar olduklarından ve dolayısıyla bu noktalar verilen düzlemin ideal doğrusu üzerinde bulunduklarından; üçüncü halde ise, paralel doğruların ortak bir ideal noktası bulunduğundan karşılıklı kenar çiftlerin-

den üçüncüsünün kesim noktası olan ideal nokta PQ doğrusu üzerinde olacaktır. O halde bu ideal elemanlar, bu hallerin üçünü de, yukarıda verilmiş olan *bir* ifade içine alabilmemizi mümkün kılmaktadır.

Bundan başka, altıgenin köşelerinden bazılarının ideal noktalar olmaları halinde de, Pappus-Pascal teoreminin doğru olduğunu göstereceğiz. Kolayca anlaşılır ki; ideal noktalar ithal edilmeseydi, üç halin her biri için ayrı bir teorem ifade edilmesi gerekecekti. Ama, düşünelim kaç



Şekil: 13

hal bulunacaktı! Ve bu hallerin her biri için ayrı bir ispat istenecekti.

8. Pappus-Pascal Teoreminin İspatına Hazırlık.

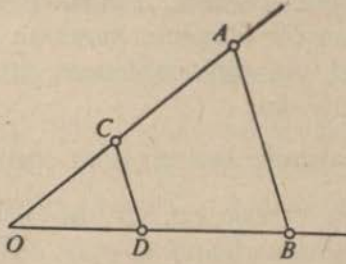
Pappus-Pascal teoremini ispata başlamadan önce, bu ispatta lâzım olan bir yardımcı teorem ispat edeceğiz:

Yardımcı Teorem 1. AOB açısının OA kenarı üzerinde bir OC doğru parçası ve OB kenarı üzerinde de bir OD doğru parçası alındığına göre $OA/OB = OC/OD$ ise, $AB \parallel CD$ dir (Şek. 14).

O açısı, AOB ile COD üçgenlerinin her ikisinin de ortak bir açısı olduğundan ve bu açının kenarları üzerinde

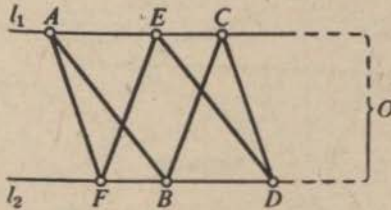
bulunan üçgen kenarları orantılı bulunduklarından bu iki üçgen benzerdir. Buna göre, OCD açısı DAB açısına eşittir. Dolayısıyla $CD \parallel AB$ olur.

Şimdi, *Pappus-Pascal Teoremini ikinci hal için* ispat edeceğiz. $AB \parallel DE$ olduğunu farzedelim $AF \parallel CD$ olduğunu



Şekil: 14

göstermemiz gerekir. Üzerinde altıgenin köşeleri bulunan l_1 ve l_2 doğruları paralel iseler (Şek. 15) $AB \parallel DE$ ve $BC \parallel EF$ olduğundan $BD = AE$ ve $BF = CE$ olacağı açıktır (Zira bu doğru parçaları, paralelkenarların karşılıklı kenarlarıdır). Bu ise, AC ve DF doğru parçalarının eşit olmaları



Şekil: 15

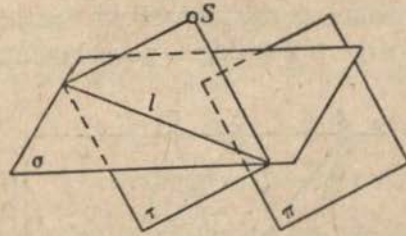
demektir. O halde, $ACDF$ dörtgeni bir paralelkenardır ve $AF \parallel CD$ olur. Eğer l_1 ve l_2 doğruları bir O noktasında kesişirlerse (Şek. 12 ye bakınız), o zaman, üçgenlerin benzerliğini düşünerek

$$\frac{OE}{OD} = \frac{OA}{OB} \quad \text{ve} \quad \frac{OC}{OE} = \frac{OB}{OF}$$

elde ederiz. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa $OC/OD = OA/OF$ bulunur. Son eşitlikten, Yardımcı Teorem 1'e göre, $AF \parallel CD$ çıkar. Böylece, Pappus-Pascal teoreminin şartlarını sağlayan bir altıgenin karşılıklı kenar çiftlerinden ikisi paralel ise, üçüncü kenar çiftinin de paralel olacağı gösterilmiş olur.

Bir başka yardımcı teorem ispat edelim:

Yardımcı Teorem 2. *Bir σ düzlemi üzerinde keyfi bir l doğrusu alındığına göre, öyle bir S izdüşüm merkezi ve öyle bir π izdüşüm düzlemi bulunabilir ki; π düzleminin ideal doğrusu, l doğrusunun izdüşümü olur. Bu halde π düzlemi, S noktası ile l doğrusunun belirttiği τ düzlemine paralel olacaktır.*



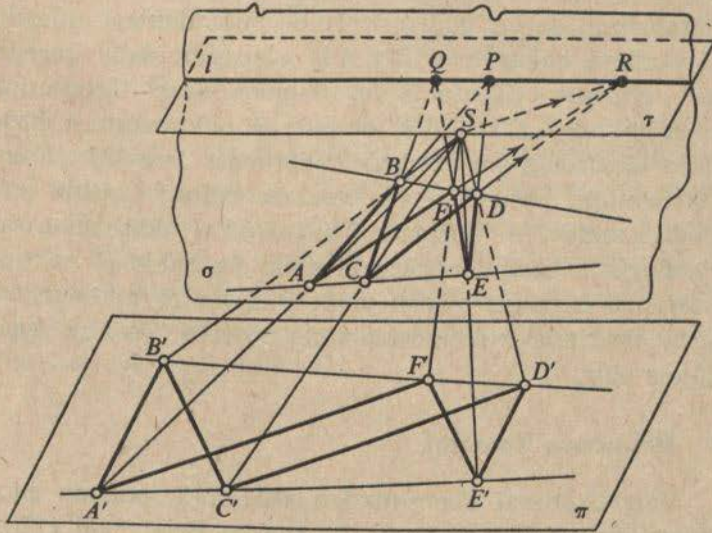
Şekil: 16

İspat için, σ düzlemi üzerinde bulunmayan bir S noktasını, izdüşüm merkezi olarak alırız (Şek. 16). S noktası ile l doğrusunun belirttiği düzlem, τ düzlemdir. (l doğrusunun bir ideal doğru olması ihtimali, bize herhangi bir güçlük tevhit etmez. Zira bu halde, S noktası ile l doğrusunun belirttiği düzlem, S noktasından geçen ve σ düzlemine paralel olan düzlemdir.) π düzlemi, S noktasından

geçmiyen ve τ ya paralel bir düzlem olsun. A noktası l doğrusu üzerinde ise, o zaman SA doğrusu τ düzlemi üzerindedir ve dolayısıyla SA , π düzlemine paralel olur. Demek ki, A nın izdüşümü, π düzleminin bir ideal noktasıdır. l doğrusunun keyfi bir noktası için böyle bir sonuç elde edildiğine göre; S noktası ve π düzlemi, yardımcı teoremden istenen sonucu sağlayacaktır.

9. Pappus-Pascal Teoreminin İspatı.

Verilen $ABCDEF$ altıgenini üzerinde bulunduran düzleme, σ düzlemi ve PQ doğrusuna da l doğrusu diyelim (Şek. 17). Yardımcı Teorem 2 ye göre, öyle bir S izdüşüm



Şekil: 17

merkezi ve öyle bir π izdüşüm düzlemi vardır ki, l doğrusunun izdüşümü, π düzleminin ideal doğrusu olabilir. Bundan başka, S noktası ve PQ doğrusunun belirttiği τ

düzlemi, π düzlemine paraleldir. A', B', C', D', E' ve F' noktaları, altıgenin köşelerinin izdüşümleri ve P', Q', R' noktaları da sırasıyla P, Q, R noktalarının izdüşümleri olsunlar. P noktası, AB ve DE doğrularının kesim noktası olduğuna göre; P' noktasının, $A'B'$ ve $D'E'$ doğrularının kesim noktasında olacağı Teorem 3 den anlaşılır. Aynı düşünce tarzı ile, Q' noktasının, $B'C'$ ile $E'F'$ doğrularının kesim noktasında ve R' noktasının da $C'D'$ ile $A'F'$ doğrularının kesim noktasında olacağını gösterebiliriz. Fakat P' ve Q' noktaları ideal noktalardır ve dolayısıyla $A'B' \parallel D'E'$ ve $B'C' \parallel E'F'$ olur.

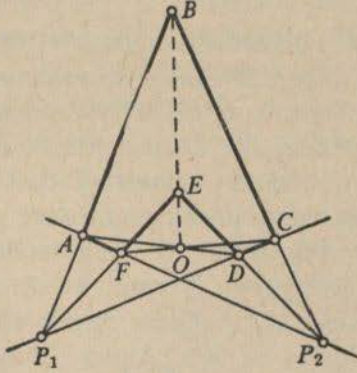
Ayrıca, problemimizin şartlarına ve Teorem 3 e bakarak; A', C', E' noktalarının bir doğru üzerinde ve B', F', D' noktalarının da bir doğru üzerinde bulundukları anlaşılır. Bu şartlara bakarak, $C'D' \parallel A'F'$ olacağını daha önceden ispat etmiştik (Kısım 8 de, Pappus-Pascal Teoreminin ikinci halinde). $C'D' \parallel A'F'$ olması; R' noktasının, π düzleminin ideal doğrusu üzerinde bulunması demektir. Fakat π düzleminin ideal doğrusu üzerinde bulunan bütün noktalar, çizimde, σ düzlemi üzerindeki l doğrusuna ait noktaların izdüşümleri olacaklardır. Şu halde R noktası, l doğrusu üzerinde olacak yani; P, Q ve R noktaları bir doğru üzerinde bulunacaklardır. Böylece Teorem ispat edilmiş olur.

10. Brianchon Teoremi.

Pappus-Pascal Teoreminden aşağıdaki sonucun çıkarılması zor değildir ve bazan bu sonuca Brianchon (1785-1864) Teoremi de denir.

Teorem 4. *Bir altıgenin kenarları, birer atlıyarak verilen iki noktadan geçerlerse, o halde karşılıklı köşeleri birleştiren üç doğru bir noktadan geçerler.*

A, B, C, D, E, F noktaları, bir altıgenin sırayla köşeleri olsunlar. AB, CD, EF kenarları P_1 noktasından ve BC, DE, AF kenarları da P_2 noktasından geçsinler (Şek. 18). AD ve CF doğrularının kesim noktasına, O



Şekil: 18

noktası diyelim. BE doğrusunun O noktasından geçtiğini, veya başka bir deyimle; O, B ve E noktalarının bir doğru üzerinde olduklarını ispat etmemiz gerekmektedir. Pappus-Pascal teoremini ADP_2CFP_1 altıgenine uyguluyarak ve altıgenin kenarlarının doğru parçaları değil de doğrular olarak gözönüne alınacaklarını hatırlıyarak, teorem doğru-
dan doğruya ispat edilebilir.

3. DESARGUES TEOREMİ

Tarihi bilgi. Gérard Desargues (1593-1662 de veya bazı otoritelere göre 1591-1661 de yaşamıştır), projektif ve tasarı geometrinin temellerini kuran tanınmış bir Fransız matematikçisi idi. İdeal nokta ve ideal doğrularla ilgili tartışmaları, ilk defa Geometriye ithal eden Desargues idi. Sağlığında, zamanın ancak en meşhur matematikçileri onun fikirlerini anlayabildi ve değerlendirebildirler. Bu matematikçiler Descartes, Fermat ve Blaise Pascal idi. Desargues'ın fikirleri, genellikle, ancak 19. Yüzyıl başlarında kabul edilmeye başladı. Almış olduğu tahsile göre bir askeri mühendis olan Desargues, pratik işlerin sıhhatli matematik esasları ile ilgilendi. Desargues'ın taş-yontma ve güneş saatına ait çalışmaları, bu çeşit sorulara hasredilmiştir.

11. Desargues Teoremi.

Şimdi de, Desargues Teoremi denilen ikinci mühim Teoremi ele alalım:

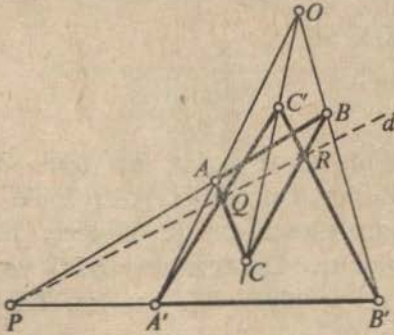
DESARGUES TEOREMİ. *Düzlemde ABC ve $A'B'C'$ gibi iki üçgen alındığına göre, bu üçgenlerin karşılıklı köşelerini birleştiren AA' , BB' ve CC' doğruları bir O noktasından geçerlerse, o halde üçgenlerin karşılıklı kenarlarının¹ kesim noktaları, bir doğru üzerinde bulunurlar (Şek. 19).*

1 Tarife göre, A ile A' , B ile B' ve C ile C' köşeleri, karşılıklı köşeler olarak göz önüne alınırlar. Karşılıklı köşeleri birleştiren kenarlara, karşılıklı kenarlar denir.

Sırası gelmişken, Giriş'in 2 nci kısmında ifade edilen teoremin, Desargues Teoreminin ABC ve PQR üçgenlerine uygulanan özel bir hali olduğunu kaydedelim.

Şimdi, Desargues Teoreminin ispatına geçebiliriz:

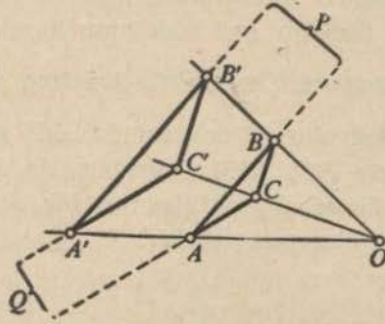
AB , $A'B'$ doğruları P noktasında, AC , $A'C'$ doğruları Q noktasında ve BC , $B'C'$ doğruları da R noktasında kesişsinler. P , Q ve R noktalarının bir doğru üzerinde olduklarını ispat etmemiz gerekir.



Şekil: 19

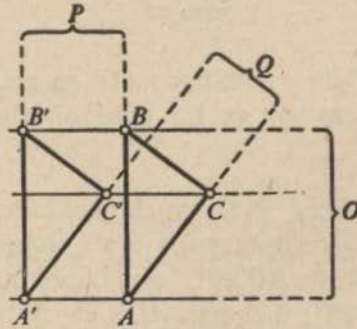
İki hal gözönüne alabiliriz: (1) en az iki nokta ideal nokta olabilir, (2) en az iki nokta herhangi iki nokta olabilir.

(1) inci halde; P , Q ve R noktalarından ikisinin (örneğin, P ve Q noktalarının) ideal olduğunu farzederiz. O halde $AB \parallel A'B'$ ve $AC \parallel A'C'$ dir. O noktası herhangi bir nokta ise (Şek. 20); o zaman AOB ile $A'OB'$ üçgenlerinin benzerliğinden, $OB/OB' = OA/OA'$ ve AOC ile $A'OC'$ üçgenlerinin benzerliğinden de $OA/OA' = OC/OC'$ olduğu görülür. Bunların neticesi olarak $OB/OB' = OC/OC'$ bulunur. Bu bulunan son eşitlikten ve Kısım 8 de ispat edilmiş olan Yardımcı Teoreminden $BC \parallel B'C'$ olduğu, yani; R noktasının da bir ideal nokta olduğu anlaşılır.



Şekil: 20

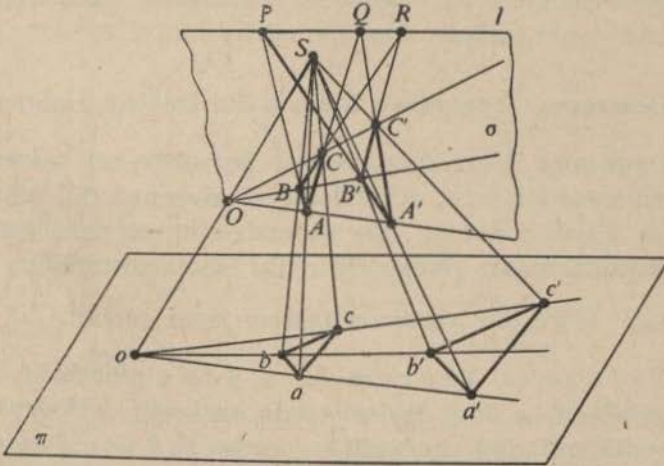
O noktası bir ideal nokta ise (Şek. 21), bu halde $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ olur. Demek ki, $AA'B'B$ ile $AA'C'C$ dörtgenleri birer paralelkenardır. Böylece, $BB' = AA'$ ve $AA' = CC'$ bulunur. Dolayısıyla, BB' ve CC' doğru parçaları eşit ve paraleldirler. Bu ise, $BC \parallel B'C'$ olması



Şekil: 21

demektir. Şu halde, R noktası bir ideal noktadır ve P, Q, R noktaları bir ideal doğru üzerinde bulunurlar. Böylece; P ve Q noktalarının ideal noktalar olmaları halinde, Desargues Teoremi ispat edilmiş olur.

İkinci hal için; P , Q ve R noktalarından ikisinin (örneğin, P ve Q noktalarının) herhangi iki nokta olduklarını farzedelim (Şek. 22). PQ doğrusuna, l doğrusu ve verilen üçgenin belirttiği düzleme de, σ düzlemi diyelim. Kısım 8 de ispat edilmiş olan Yardımcı Teorem 2 ye göre, öyle bir S izdüşüm merkezi ve öyle bir π izdüşüm düzlemi vardır ki π düzleminin ideal doğrusu, l doğrusunun izdüşümü olur. Büyük harflerle gösterilen noktaların izdüşümlerini, mütakabil küçük harflerle göstereceğiz. AB



Şekil: 22

ve $A'B'$ doğrularının kesim noktası, P noktası olduğuna göre; Kısım 6 daki Teorem 3 den, ab ve $a'b'$ doğrularının kesim noktasının p noktası olacağı anlaşılır. Benzer düşüncelerle; ac ve $a'c'$ doğrularının kesim noktasının, q noktası; bc ve $b'c'$ doğrularının kesim noktasının da r noktası olacağı gösterilebilir. aa' , bb' ve cc' doğruları O noktasında kesişirler. Ayrıca, p ve q noktaları ideal noktalar olduklarına göre; $ab \parallel a'b'$ ve $ac \parallel a'c'$ olur. Bu ise; daha önce (1) inci halde ispat ettiğimiz gibi, $bc \parallel b'c'$ olduğunu

gösterir. $bc \parallel b'c'$ olması da; r noktasının, π düzleminin ideal doğrusu üzerinde bulunması demektir. Fakat; l doğrusu üzerindeki noktaların izdüşümleri, çizime göre π düzleminin ideal doğrusu üzerindedirler. Dolayısıyla R noktası, l doğrusu üzerinde bulunur, yani; P, Q ve R noktaları bir doğru üzerinde olurlar.

P, Q ve R noktaları için mümkün olan diğer haller, bu iki halden, sadece notasyon bakımından farketmektedirler. Zira; bu noktalar aralarında tamamiyle denk özellikler göstermektedirler. Böylece, Desargues Teoreminin tamamen ispat edilmiş olduğunu söyleyebiliriz.

12. Desargues Teoreminde Karşılaşılan Değişik İspatlar.

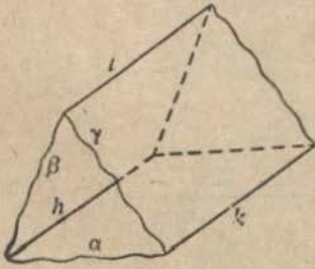
Desargues Teoreminin, benzer üçgenlere ait teoremleri kullanmadan ispat edilebileceğini söylemek ilgi çekici olabilir. Fakat o zaman, uzay geometrinin, çok daha geniş olarak kullanılması gerekecektir. Bu ispatı gösterelim.

(a) Önce, bir yardımcı teorem ispat edelim:

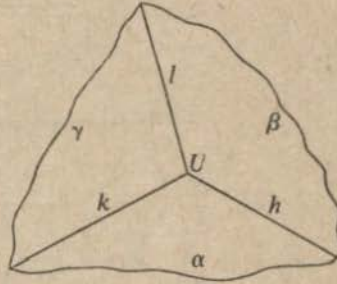
Yardımcı Teorem 3. α, β ve γ gibi farklı üç düzlem alalım. α ile β düzlemlerinin arakesiti, h doğrusu; α ile γ düzlemlerinin arakesiti k doğrusu ve β ile γ düzlemlerinin arakesiti de, l doğrusu olsun. h, k ve l doğruları farklı doğrular iseler; bu doğrular bir noktadan geçerler.

İspatı yapmak için, h ve k doğrularını gözönüne alırız. Mümkün olan haller şunlardır: (1) üç doğru herhangi üç doğru ve $h \parallel k$ olabilir (Şek. 23); (2) üç doğru herhangi üç doğru olabilir ve h, k doğruları, bir U noktasında kesişebilirler (Şek. 24); (3) üç doğrudan biri ideal doğru olabilir (Şek. 25 de h doğrusu). (Bir düzlemin ancak bir ideal doğrusu olduğuna göre h, k ve l doğrularından ancak biri ideal doğru olabilir.)

(1) inci hal için, geometri derslerinde ispat edilen bir teoremi kullanırız: Verilen bir doğru, bir düzlemde bulunan diğer bir doğruya paralel ise; o zaman verilen doğru, bu düzleme de paraleldir. Demek ki, k doğrusu β düzlemine paralel olmalı (Şek. 23) ve bu halde β düzlemine paralel olan k doğrusu, γ düzlemi üzerinde bulunmalıdır. Geometri derslerinden bilineceği gibi; k nın γ düzleminde olması, β ve γ düzlemlerinin arakesitinin (yani l doğrusunun), k doğrusuna paralel olması demektir. Böylece, $h \parallel k \parallel l$ olur. Dolayısıyla bu doğrular, bir U ideal noktasından geçerler.



Şekil: 23

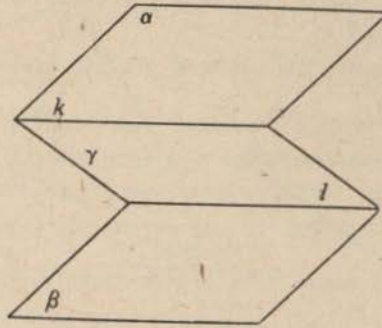


Şekil: 24

(2) nci halde; U noktası, h doğrusu üzerinde olduğuna göre; bu noktanın, α ve β düzlemleri üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. Fakat; U noktası, k doğrusu üzerinde de bulunur. O halde bu nokta α ve γ düzlemleri üzerinde olacaktır. Bu ise; U noktasının, β ve γ düzlemlerinin her ikisi üzerinde bulunan bir nokta olması demektir. Böylece, U noktasının, β ve γ düzlemlerinin arakesit doğrusu (yani, l doğrusu) üzerinde olması gerekir. Şu halde Yardımcı Teorem, bu 2 nci hal için de ispat edilmiş olur.

(3) üçüncü halde; h doğrusunun bir ideal doğru olduğunu farzedelim (Doğrulardan diğer biri ideal ise, benzer bir muhakeme yapılır). O halde $\alpha \parallel \beta$ dır (Şek. 25). İleri

sürülen şarta göre, k ve l doğruları herhangi iki doğrudur, yani; γ düzlemi, α ve β düzlemlerinin ikisini de keser. Derslerden bilinir ki; $\alpha \parallel \beta$ olduğuna göre, γ nın α ile olan arakesit doğrusu, γ nın β ile olan arakesit doğrusuna paralel olması (yani, $k \parallel l$ olması) gerekir. k ve l doğrularının ortak bir U ideal noktası vardır ve tabii bu nokta, α nın ideal doğrusu (yani, h doğrusu) üzerindedir. Demek ki bu üçüncü halde de; h , k ve l doğrularının ortak bir U ideal noktası bulunur ve Yardımcı Teorem tamamen ispatlanmış olur.

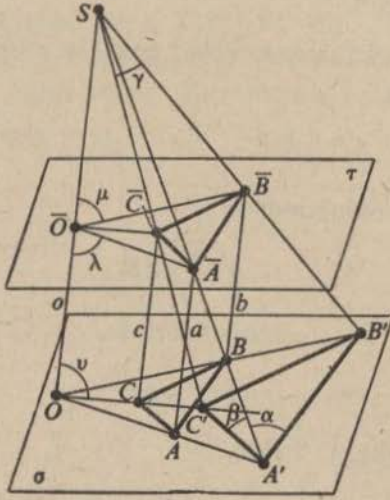


Şekil: 25

(b) Şimdi, Desargues Teoreminin yeni bir ispatını verelim. P , Q ve R noktalarından yalnız ikisinin ideal nokta olmaları halini gözönüne alacağız. Daha önce gösterilmiş olduğu gibi, bu son halden, benzer üçgenlerle ilgili teoremleri kullanmaksızın Desargues Teoremi'nin diğer hallerini çıkarmak mümkündür. Farzedelim ki, P ve Q noktaları ideal noktalardır. R nin de bir ideal nokta olduğunu ispat etmeliyiz.

Önce, O noktasının herhangi bir nokta olduğunu farzedelim. Üzerinde verilen üçgenin bulunduğu düzleme, σ düzlemi diyelim (Şek. 26). τ düzlemi, σ ya paralel

(fakat, σ dan farklı) bir düzlem olsun. Ayrıca, A noktasından geçen ve σ düzleminde olmiyan bir a doğrusu alalım. B, C ve O noktalarından a doğrusuna paralel doğrular geçirelim. Bu doğrulara, sıra ile b, c ve o doğruları diyelim. a, b, c ve o doğruları, τ düzlemini, sırasıyla A, B, C ve O noktalarında detsinler. AB ve $\overline{AB}$ doğruları,



Şekil: 26

a ve b doğrularının belirttiği düzlemin, σ ve τ paralel düzlemleriyle olan arakesit doğrularıdır. Buna göre,

$$AB \parallel \overline{AB}$$

dir. Bunun gibi

$$AC \parallel \overline{AC} \quad \text{ve} \quad BC \parallel \overline{BC}$$

olur.

Şu düzlemler de belirtilebilirler:

a ve o doğrularından ve $O, A, \bar{O}, \bar{A}, A'$ noktalarından geçen λ düzlemi;

b ve o doğrularından ve $O, B, \bar{O}, \bar{B}, B'$ noktalarından geçen μ düzlemi;

c ve o doğrularından ve $O, C, \bar{O}, \bar{C}, C'$ noktalarından geçen ν düzlemi.

P ve Q noktalarının ideal noktalar olduklarını farzet-tiğimize göre,

$$AB \parallel A'B' \quad \text{ve} \quad AC \parallel A'C'$$

dir. $AB \parallel \bar{A}\bar{B}$ olduğundan,

$$A'B' \parallel \bar{A}\bar{B}$$

olduğu ve $AC \parallel \bar{A}\bar{C}$ olduğundan da,

$$A'C' \parallel \bar{A}\bar{C}$$

olacağı anlaşılır. O halde,

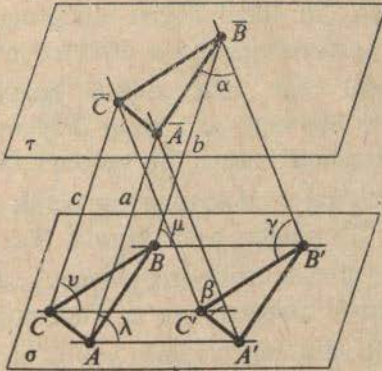
$A', B', \bar{A}$ ve $\bar{B}$ noktalarından geçen α düzlemi ile

$A', C', \bar{A}$ ve $\bar{C}$ noktalarından geçen β düzlemi gözönüne alınabilir.

α, λ ve μ düzlemleri ile $A'\bar{A}, B'\bar{B}$ ve $O\bar{O}$ doğruları Yardımcı Teorem 3 ün şartlarını sağlarlar. Buna göre $A'\bar{A}, B'\bar{B}$ ve $O\bar{O}$ doğruları bir S noktasından geçerler. Yardımcı Teorem 3; β, ν ve λ düzlemleri ile $A'\bar{A}, C'\bar{C}$ ve $O\bar{O}$ doğrularına uygulanabilir. Bu uygulama yapılırsa; $A'\bar{A}, C'\bar{C}$ ve $O\bar{O}$ doğrularının da bir noktadan geçtikleri anlaşılır. Fakat, evvelce gösterdiğimiz gibi; S noktası,

$A'\bar{A}$ ve $O\bar{O}$ doğrularının kesim noktasıdır. O halde $C'\bar{C}$ doğrusu da S noktasından geçer. Şimdi,

« S , B' ve C' noktalarından geçen γ düzlemi» ni göz-önüne alalım. $\bar{B}$ ve $\bar{C}$ noktalarının γ düzlemi üzerinde oldukları açıktır. Şu halde γ düzlemi, σ düzlemini $B'C'$ doğrusu boyunca ve τ düzlemini de, $\bar{B}\bar{C}$ doğrusu boyunca keser. $\sigma \parallel \tau$ olduğuna göre, $B'C' \parallel \bar{B}\bar{C}$ dir. Fakat $\bar{B}\bar{C} \parallel BC$ olduğu yukarıda gösterilmişti. Böylece $B'C' \parallel BC$ dir ve R noktası bir ideal nokta olur. İspatı istenen de zaten bu idi.



Şekil: 27

Şimdi, O noktasının bir ideal nokta olduğunu farzedelim (Şek. 27). Demek ki $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ dür ve bu halde O dan geçen ve a doğrusuna paralel olan doğruyu çizmek mümkün olamaz. Bunun için, teoremin ispatında, bir hayli değişiklik yapmak gerekir. Bir evvelkinde olduğu gibi, P ve Q noktalarının ideal noktalar olduklarını farzedelim. Demek ki, $AB \parallel A'B'$ ve $AC \parallel A'C'$ dür. R nin bir ideal nokta olduğunu ispat etmek için, $BC \parallel B'C'$ olduğunu ispat etmemiz gerekir.

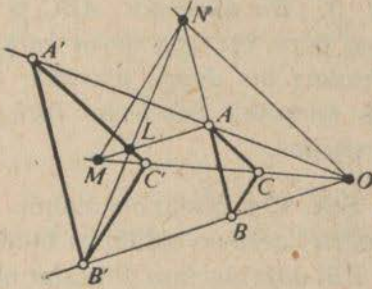
Yine üzerinde verilen üçgenin bulunduğu düzleme, σ düzlemi ve σ ya paralel (fakat, σ dan farklı) herhangi keyfi bir düzleme de τ düzlemi diyelim. Evvelkinde olduğu gibi; A, B ve C noktalarından geçen ve τ düzlemini $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ noktalarında delen üç doğru (paralel doğrular) sırasıyla a, b ve c olsun. Yine öncekinde olduğu gibi; ABC ve $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ üçgenlerinin karşılıklı kenarları paraleldirler ve aynı zamanda $\bar{AB} \parallel A'B'$ ve $\bar{AC} \parallel A'C'$ olur.

$\bar{A}\bar{A}\bar{A}'$ düzlemi, λ ile; $\bar{B}\bar{B}\bar{B}'$ düzlemi, μ ile ve $\bar{C}\bar{C}\bar{C}'$ düzlemi de ν ile gösterilsin. α, β ve γ düzlemleri öncekinde olduğu gibi belirtileceklerdir. λ ve μ düzlemlerinin arakesit doğrusu, bir ideal doğru olduğuna göre (biz bu doğruyu p ile göstereceğiz¹⁾); α düzleminin, λ ve μ düzlemlerini, paralel olan $A'\bar{A}$ ve $B'\bar{B}$ doğruları boyunca keseceği açıktır. Böylece; α, λ ve μ düzlemleri, Yardımcı Teorem 3 ün üçüncü haline ait şartları sağlarlar. Dolayısıyla; $A'\bar{A}, B'\bar{B}$ ve p doğrularının ortak bir S (ideal) noktası vardır. Tamamen aynı tarzda, Yardımcı Teorem 3 ü β, λ ve ν düzlemlerine uygulayarak, $A'\bar{A}, C'\bar{C}$ ve p doğrularının bir S' noktasından geçtiklerini de gösterebiliriz. Fakat, $A'\bar{A}$ ve p doğrularının yalnız bir ortak noktası olduğuna göre (Kısım 5 deki Teorem 2 ye bakınız); S ve S' noktalarının çakışmaları gerekir. S, B' ve C' noktaları, γ düzlemini belirtirler. γ üzerinde $\bar{B}$ ve $\bar{C}$ noktaları da bulunmaktadır. Demek ki γ düzleminin paralel olan σ ve τ düzlemleriyle arakesitleri, $B'C'$ ve $\bar{B}\bar{C}$ doğrularıdır. O halde bu $B'C'$ ve $\bar{B}\bar{C}$ doğruları paralel olmalıdır. Fakat $BC \parallel \bar{B}\bar{C}$ olduğuna göre, $B'C' \parallel BC$ olur ve R noktası bir ideal noktadır. İspatı istenen de zaten bu idi.

1 μ, ν ve λ düzlemleri paralel oldukları için; p ideal doğrusu, bu düzlemlerin her üçünün de ortak arakesit doğrusudur.

(c) Desargues Teoreminin, benzer üçgenlere ait teoremleri açıkça kullanmadan, Pappus-Pascal Teoreminin de çıkarılabileceğini ispat edelim (Mamafih, Pappus-Pascal Teoreminin ispatını yaparken, benzer üçgenlerle ilgili teoremlerin kullandıklarını hatırlayınız). Yukarıda yapıldığı gibi, P ve Q noktalarının ideal noktalar olduklarını gözönüne almak kâfidir.

AA' , BB' , CC' doğrularının bir O noktasında kesiştikleri; $AB \parallel A'B'$ ve $AC \parallel A'C'$ oldukları verilmiş olsun (Şek. 28). $BC \parallel B'C'$ olacağını ispat etmeliyiz. A dan geçen ve OB ye paralel olan doğruyu çizelim. Bu doğru, $A'C'$ doğrusunu L noktasında, OC doğrusunu M noktasında



Şekil: 28

kessin. AB ve $B'L$ doğrularının kesim noktasına, N noktası diyelim. N noktasını, O ve M noktalarına birleştirelim. Pappus-Pascal Teoremini $ONALA'B'$ altıgenine uygulayarak ve $AN \parallel A'B'$ (böyle farzedilmişti), $AL \parallel B'O$ (çizimden dolayı böyledir) olduklarını kullanarak $ON \parallel LA'$ olacağını buluruz. O halde $ON \parallel CA$ dır. Buradan, $ONMACB$ altıgeninde $ON \parallel AC$ olduğunu ve çizimden dolayı $MA \parallel BO$ olacağını buluruz. O halde Pappus-Pascal Teoremine göre, $MN \parallel BC$ olmalıdır. Nihayet; $ONMLC'B'$ altıgeninde de Pappus-Pascal Teoreminin şartlarının sağ-

landığını, ispat edildiğine göre $ON \parallel LC'$ olduğu ve ayrıca çizimden de $ML \parallel B'O$ olacağını hatırlatırız. Buna göre, $MN \parallel B'C'$ olur. Fakat, $MN \parallel BC$ olduğunu daha önce göstermiştik. O halde, $BC \parallel B'C'$ dir ve ispatı istenen de zaten budur.

İhtar: Desargues Teoreminin ispatının, benzer üçgenlerle ilgili teoremleri kullanmadan veya üç boyutlu çizimlerden istifade etmeden yapılmasının imkânsız olacağını göstermiş olduk, hatırlatırız. Bunu, açık ve kesin olarak ispat etmek mümkündür.

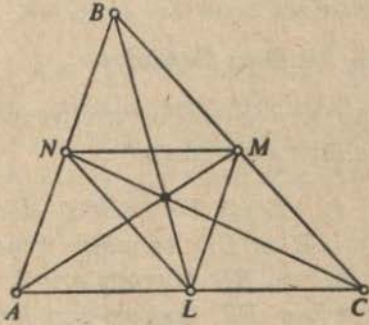
13. Desargues Teoreminin Karşıtı.

Teorem 5. *Bir düzlemde, ABC ve $A'B'C'$ gibi iki üçgen alındığına göre, bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının kesim noktaları bir doğru üzerinde iseler; o halde, bu iki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular bir noktada kesişirler.*

İspat için, Şek. 19 u gözönüne alalım. P , Q ve R noktalarının bir doğru üzerinde oldukları bilinsin. CC' doğrusunun, AA' ve BB' doğrularının O kesim noktasından geçtiğini ispat etmemiz gerekir. A ile B yi, A' ile B' yi ve Q ile R yi karşılıklı köşeler olarak alıp, $AA'Q$ ve $BB'R$ üçgenlerine Desargues Teoremini uygulayacağız. Bu üçgenlerin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular bir P noktasında kesişirler. O halde, Desargues Teoremine göre, üçgenlerin karşılıklı AA' ile BB' , AQ ile BR ve $A'Q$ ile $B'R$ kenarlarının kesim noktaları (yani O , C ve C' noktaları), bir doğru üzerinde olmalıdırlar. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Bir üçgenin kenar ortaylarının bir noktada kesiştiklerini ifade eden meşhur teorem, Teorem 5 den doğrudan doğruya elde edilebilir. Gerçekten; L , M ve N noktaları,

ABC üçgeninin kenarlarının orta noktaları iseler (Şek. 29), ABC ve LMN üçgenlerinin karşılıklı kenarları paraleldirler (Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru üçüncü kenara paraleldir), yani; bu iki üçgenin karşılıklı kenarlarının kesim noktaları, düzlemin



Şekil: 29

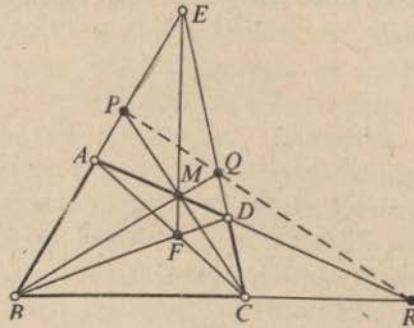
ideal doğrusu üzerinde bulunurlar. Buna ve Teorem 5'e göre; AM , BL ve CN kenarlarının, yani verilen ABC üçgeninin kenar ortaylarının, bir noktadan geçmeleri gerekecektir.

4. ÇOKGENLERE AİT BAZI ÖZELİKLER

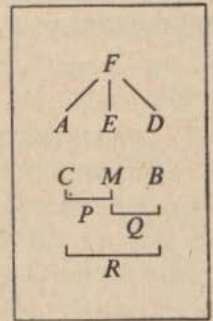
14. Dörtgenlere Ait Bazı Özellikler.

Bu kısımda, Desargues Teoremi yardımıyla dörtgenlere ait bazı özellikler elde edeceğiz.

Teorem 6. *Keyfi bir ABCD dörtgeni verilmiş olsun (Şek. 30). AB ve BD karşılıklı kenarlarının kesim noktası, E ile; AC ve BD köşegenlerinin kesim noktası, F ile; AD kenarıyla EF doğrusunun kesim noktası da M ile gösterilsin. Bu halde, AB ve CM doğrularının P kesim noktası, BM ve CD doğrularının Q kesim noktası, AD ve BC kenarlarının R kesim noktası bir doğru üzerinde bulunurlar.*



Şekil: 30



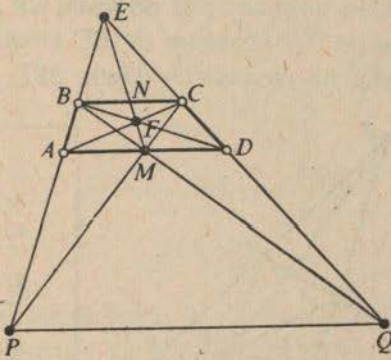
Şema 1

İspat için, AED ve CMB üçgenlerini gözönüne alalım. AC , EM ve BD doğruları F noktasında (Şema 1 e bakınız) ve üçgenlerin karşılıklı kenarları da P , Q , R noktalarında

kesişirler. Desargues Teoremine göre P , Q ve R noktaları bir doğru üzerindedirler. İspatı istenen de bu idi.

Sonuç: *Bir yamuk veya bir paralelkenarda; bir tabanın uçlarındaki köşeleri karşı tabanın orta noktasına birleştiren doğrular ile yan kenarların kesim noktaları, tabana paralel bir doğru üzerinde bulunurlar.*

Gerçekten; $ABCD$, tabanları AD ve BC olan bir yamuk ise (Şek. 31), o zaman, bilindiği gibi, Teorem 6 da verilen çizimle elde edilen M noktası, AD doğrusunun orta noktasıdır¹. Öte yandan bu durumda, AD ve BC doğru-



Şekil: 31

larının R kesim noktası sonsuzda bulunan bir noktadır. Öyleki, R noktasından geçmesi gereken PQ doğrusu, AD ve BC doğrularına paralel olacaktır.

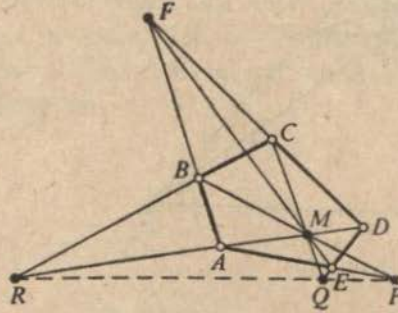
¹ Bu ifadenin doğruluğunun ispatı kısaca şöyle yapılabilir: AME üçgeni, BNE üçgenine ve MDE üçgeni de NCE üçgenine benzer olduğuna göre $AM/MD = BN/NC$ buluruz (Şek. 31). AMF üçgeni NCF üçgenine ve MDF üçgeni de BNF üçgenine benzer olduğuna göre ise $MD/AM = BN/NC$ buluruz. Bu iki eşitlikten, $AM = MD$ olduğu anlaşılır.

$ABCD$, bir yamuk değil de bir paralelkenar ise; o zaman (E nin bir ideal nokta olması hali hariç) düşünce tarzı yine de aynidir.

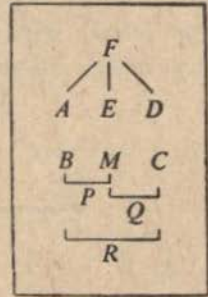
15. Beşgenlere Ait Bazı Özellikler.

Bu kısımda, Pappus-Pascal ve Desargues Teoremleri yardımıyla beşgenlere ait bir kaç özellik elde edeceğiz.

Teorem 7. *Keyfi bir $ABCDE$ beşgeni verilsin. Beşgenin bitişik olmayan AB ile CD kenarlarının F kesim noktası ve ayrıca EF doğrusu ile AD köşegeninin M kesim noktası gözönüne alınsın. O halde BM doğrusu ile AE kenarının P kesim noktası; CM doğrusu ile DE kenarının Q kesim noktası ve AD köşegeni ile BC kenarının R kesim noktası bir doğru üzerindedirler (Şek. 32).*



Şekil: 32



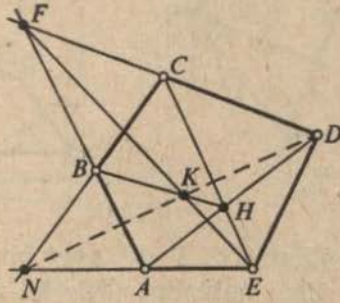
Şema 2

AB , EM ve DC doğruları F noktasında kesiştiklerine göre; AED ve BMC üçgenlerinde Desargues Teoreminin şartlarının sağlandığını söylemek, teoremi ispat etmek için kâfidir. Buradan, P , Q ve R noktalarının bir doğru üzerinde oldukları derhal anlaşılır (Şema 2 ye bakınız).

Teorem 8. *$ABCDE$ herhangi bir beşgen olsun. Beşgenin bitişik olmayan AB ve CD kenarlarının kesim*

noktası, F ile yine bitişik olmuyan diğer AE ve BC kenarlarının kesim noktası, N ile; AD ve CE köşegenlerinin kesim noktası, H ile ve nihayet EF ve BH doğrularının kesim noktası da, K ile gösterilsin. O halde, DK doğrusu, N noktasından geçer (Şek. 33).

Bu teoremi ispat etmek için; N noktasında kesişen AE ve BC , K noktasında kesişen EF ve BH , D noktasında kesişen FC ve HA kenarlarından meydana gelen $AEFCBH$ altıgeninde Pappus-Pascal Teoreminin sağlanacağını söy-



Şekil: 33

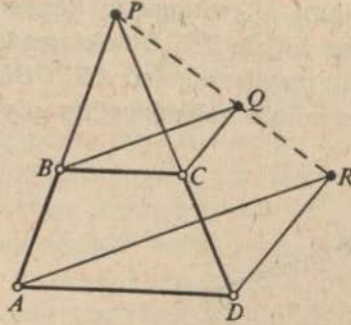
lemek kâfidir. Buna göre, N , K ve D noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar yani; DK doğrusu, N noktasından geçer. Böylece, teorem ispat edilmiş olur.

16. Dörtgenlerin Daha Başka Özellikleri.

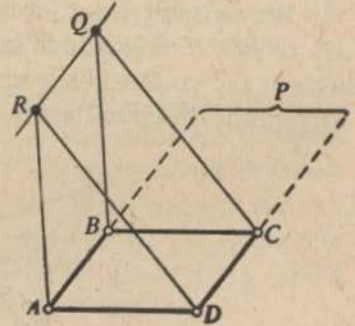
Teorem 9. Bir $ABCD$ yamuğu (veya paralelkenarı) verilmiş olsun (Şek. 34 ve 35 e bakınız). $BQ \parallel AR$, $CQ \parallel DR$ olmak üzere BQ , CQ , AR ve DR gibi dört doğru gözününe alalım. O halde, yan kenarların P kesim noktası, QR doğrusu üzerindedir.

İspat için; P , Q ve R noktalarının bir doğru üzerinde bulunduklarını göstermek yeter. BCQ ve ADR üçgenlerin-

de karşılıklı kenarlar paraleldirler. Yani; üçgenlerin karşılıklı kenarlarının kesim noktaları, ideal doğru üzerinde bulunurlar. O halde Teorem 5 e göre; AB , DC ve RQ doğrularının bir noktada kesişmeleri gerekir. Demek ki, QR doğrusu P noktasından geçer ve teorem de ispat



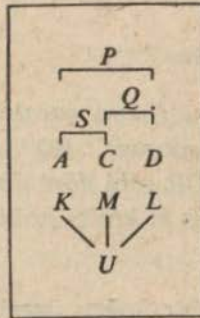
Şekil: 34



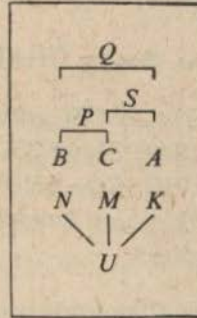
Şekil: 35

edilmiş olur. (Eğer $ABCD$ dörtgeni bir paralelkenar ise, P noktası bir ideal noktadır. Öyle ki, Şek. 35 te olduğu gibi, $QR \parallel AB$ olur. Hatırlatırız.)

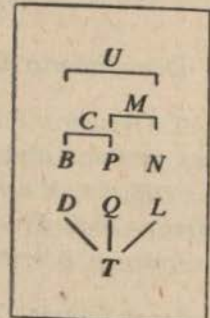
Daha karışık bir konum teoremine ait bir örnek verelim:



Şema 3

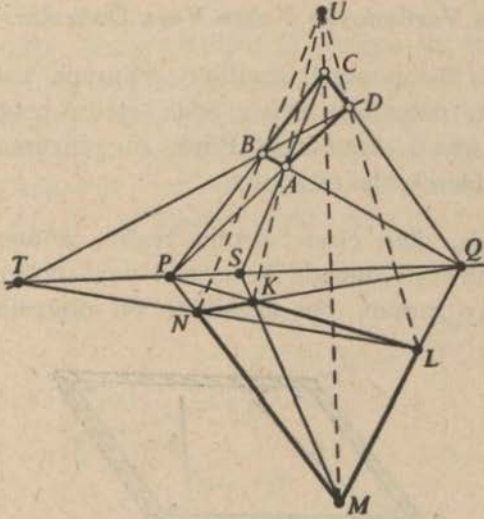


Şema 4



Şema 5

Teorem 10. Bir $ABCD$ dörtgeni verilmiş olsun (Şek. 36). Dörtgende, karşılıklı kenarların kesim noktaları P ve Q ile; AC ve PQ doğrularının kesim noktası S ile; BD ve PQ doğrularının kesim noktası da T ile gösterilsin. Ayrıca, karşılıklı kenarları P ve Q noktalarında kesişen bir $KLMN$ dörtgeni gözönüne alınsın; öyle ki, KM köşegeni S noktasından geçsin. O halde, LN köşegeni T noktasından geçer.



Şekil: 36

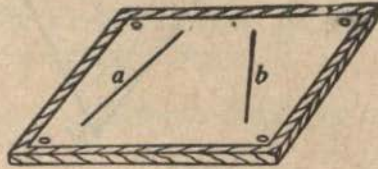
İspat için; AK , DL , CM ve BN doğrularını çiziniz. ACD ve KML üçgenlerinde Teorem 5 in şartları sağlanır (Şema 3 e bakınız). Şu halde AK , CM ve DL doğruları bir U noktasından geçerler. Teorem 5, BCA ve NMK üçgenlerine de uygulanabilir (Şema 4). Buna göre BN , CM ve AK doğruları da U noktasında kesişeceklerdir. Teorem 5 i şimdi de BPN ve DQL üçgenlerine uygulayalım (Şema 5). O halde BD , PQ ve NL doğruları T noktasında kesişirler. Teorem 10 böylece ispat edilmiş olur.

5. PROBLEMLER

17. Yanına Varılamıyan Nokta Veya Doğrular.

Konum Teoremleri, özellikle, «Yanına varılamıyan» nokta veya doğrular ihtiva eden çizim problemlerinin çözümleri için kullanılırlar. Böyle bir duruma, ekseriya pratik problemlerde rastlanır.

Örneğin, plân çizen birinin resim tahtası üzerinde tahtanın sınırları dışında kesişen a ve b doğruları varsa (Şek. 37); o zaman, her ne kadar bu doğruların kesim



Şekil: 37

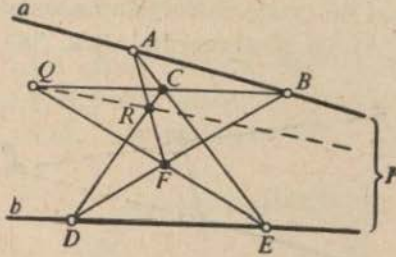
noktası mevcut ise de, hiç bir çizim aracı bu noktaya uygulanamaz. Aynı zamanda, topoğrafya tatbikatında, bataklık olan bir yerde veya yer yüzeyinin yüksek bir yerinde olması sebebiyle bir noktaya ölçme aracı ile yaklaşılması imkânsız olabilir.

Bunun gibi, iki noktayı birleştiren bir doğru çizmek de bazan imkânsız olabilir. Çizimde, olabilir ki; yerinden hareket edemiyen bir aracın (bir pantograf, bir planimetrenin) bulunduğu bir bölgeden, bir doğrunun geçmesi

kaç örnek vereceğiz. Çizim problemlerini, yalnız cetvel kullanarak çizilememiz de, çok defa bu konum teoremleriyle mümkün olabilmektedir.

PROBLEM 1. *Herhangi bir Q noktası ile yanına varılamıyan bir $P(a,b)$ noktası verildiğine göre, PQ doğrusunu çiziniz.*

BİRİNCİ ÇÖZÜM. (*Pappus-Pascal Teoremini kullanarak*). Önce a doğrusu üzerinde A, B gibi keyfi iki nokta ve b doğrusu üzerinde de D ve E gibi keyfi iki nokta seçip (Şek. 39); AE, BD, BQ ve EQ doğrularını çiziniz.



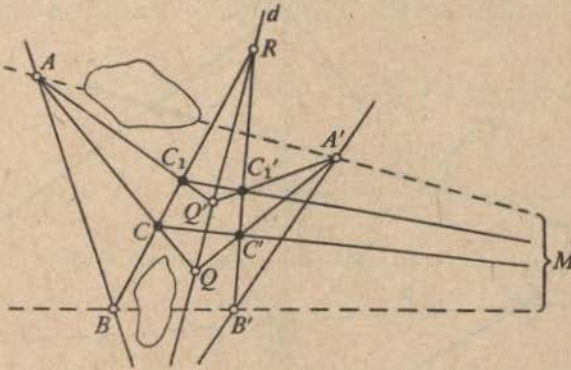
Şekil: 39

AE ve BQ doğrularının kesim noktası, C noktası olsun. Bunu ifade etmek için, $C \equiv AE \times BQ$ yazacağız. Bundan başka (şimdi verilen notasyonu kullanarak), $F \equiv BD \times EQ$ alınsın. AF ve CD doğrularını da çiziniz. $R \equiv AF \times CD$ olsun. Pappus-Pascal Teoremi, $ABCDEF$ altıgenine uygulanırsa; QR doğrusunun P noktasından geçeceği (yani; QR doğrusunun, PQ doğrusu ile çakışacağı) anlaşılır. O halde, Q ve R noktaları bir cetvel ile birleştirilirse, problem çözülmüş olur.

İKİNCİ ÇÖZÜM. (*Desargues Teoremini kullanarak*). O noktası, keyfi bir nokta (Şek. 40); p_1, p_2 ve p_3 doğruları da O dan geçen keyfi üç doğru olsun.

olsun. d doğrusu üzerinde, Q ve R gibi (P den farklı) keyfi iki nokta seçilsin. $C = AQ \times BR$ ve $C' = A'Q \times B'R$ olsun. O halde, Kısım 13 deki Teorem 5 in, ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerine uygulanmasıyla doğrudan doğruya görüleceği gibi, CC' doğrusu M noktasından geçer.

d doğrusu veya Q ve R noktalarından birinin durumunu değiştirerek, aynı tarzda, C_1 ve C_1' gibi diğer bir



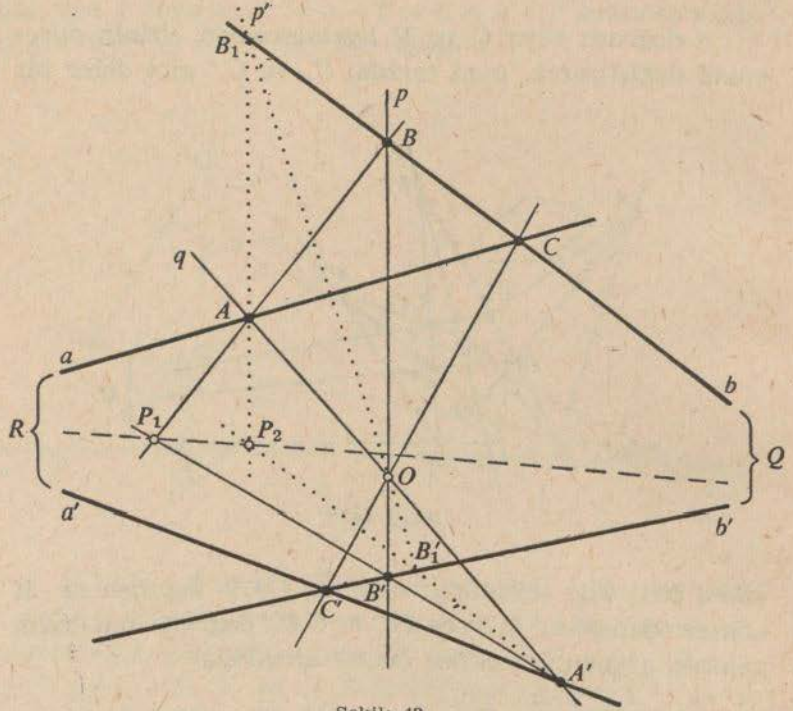
Şekil: 42

nokta çifti elde edebiliriz; öyle ki, C_1C_1' doğrusu da M noktasından geçer. O halde CC' ve C_1C_1' doğrularının kesim noktası, aranan M noktası olarak alınabilir.

PROBLEM 4. $R(a, a')$ ve $Q(b, b')$ noktaları; yanına varılmayan iki nokta olsun. RQ doğrusunu çiziniz.

a ve b doğrularının kesim noktası, C ile; a' ve b' doğrularının kesim noktası da C' ile gösterilsin (Şek. 43). CC' doğrusu üzerinde keyfi bir O noktası (C ve C' den farklı) alalım. O noktasından, p ve q gibi keyfi iki doğru (CC' den farklı) çizelim. p doğrusunun b ve b' doğrularını kestiği noktalar, sırasıyla B ve B' noktaları; q doğrusunun

a ve a' doğrularını kestiği noktalar da, sırasıyla A ve A' noktaları olsunlar. Desargues Teoremini ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerine uygularsak; $P_1 \equiv AB \times A'B'$ noktasının, QR doğrusu üzerinde olduğunu derhal görebiliriz.



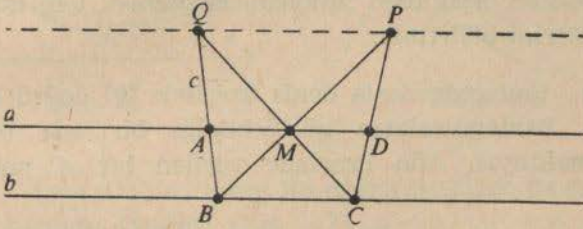
Şekil: 43

Aynı tarzda; O noktasının CC' doğrusu üzerindeki yerini veya p ve q doğrularının durumlarını değiştirerek, QR doğrusu üzerinde diğer bir P_2 noktası bulabiliriz. (Şek. 43 de, p doğrusu yerine p' doğrusu alınmıştır.) O halde aranan doğru, P_1P_2 doğrusudur.

PROBLEM 5. a, b gibi iki doğru ve bir Q noktasının verildiğini farzedelim. Q noktasından geçen ve verilen

doğrulara paralel olan doğruyu, yalnız cetvel kullanarak çiziniz.

c doğrusu, Q den geçen herhangi bir doğrudur (Şek. 44). Bu doğru verilen a ve b doğrularını, sırasıyla, A ve B noktalarında kessin. a doğrusu üzerinde keyfi bir D noktası (A dan farklı) alalım. Şimdi, yan kenarları paralel olmıyan öyle bir yamuk çizelim ki; bu yamuğun tabanlarından biri, AD olsun ve diğer taban, b doğrusu üzerinde herhangi bir yerde bulunsun. O halde, Kısım 14 deki



Şekil: 44

Teorem 6 da olduğu gibi, M noktasını çizimle bulalım (çizim ile ilgili doğrular gösterilmemiştir). Teorem 6'nın sonuç'unda ifade edildiği gibi; M noktası, AD doğru parçasının orta noktası olacaktır. Şimdi de, $C \equiv QM \times b$ ve $P \equiv CO \times BM$ olsun. Teorem 6'nın sonuç'una göre; PQ doğrusu, aranan doğru olacaktır.

19. Okuyucu İçin Çözülecek Problemler.

PROBLEM 6. Paralel iki doğru verildiğine göre, bu doğrulara paralel olan ve yanına varılamıyan belirli bir noktadan geçen doğruyu çiziniz.

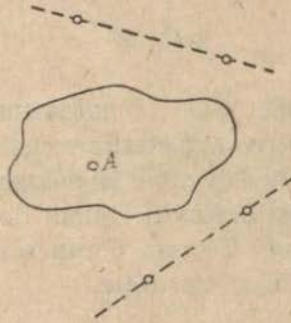
PROBLEM 7. Yanına varılamıyan paralel iki doğru verildiğine göre, bu doğrulara paralel olan ve verilen bir noktadan geçen doğruyu çiziniz.

PROBLEM 8. Bir dörtgenin kenarları ile köşegenleri, başka bir dörtgenin kenarları ile köşegenlerine paralel iseler; dörtgenlerin homotetik¹ olduklarını (yani, benzer olacak tarzda yerleştirilmiş bulunduklarını) ispat ediniz.

PROBLEM 9. $ABCD$ ve $AB'CD'$ gibi iki paralel-kenar verilmiş olsun. O halde, BB' doğrusu DD' ye ve BD' doğrusu da $B'D$ ye paraleldir.

PROBLEM 10. Daha önce verilen problemlerden hangilerinin, aşağıdaki problemleri çözmek için kullanılabileceklerini belirtiniz:

1) Şamandıralarla deniz üzerinde iki doğru belirtilmiştir. Şamandıraların görülebildiği bir ada üzerinde bulunmaktayız. Ada üzerinde verilen bir A noktasını,

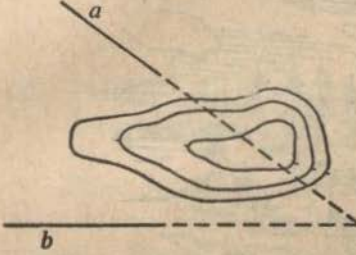


Şekil: 45

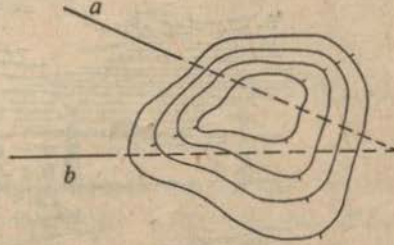
şamandıralarla belirtilen doğruların kesim noktasına birleştiren doğrunun jalonlarla gösterilmesi gerekmektedir (Şek. 45).

1 $ABCD$ ve $A'B'C'D'$ dörtgenleri verildiğine göre, $OA/OA' = OB/OB' = OC/OC' = OD/OD'$ olmak üzere bir O noktası bulunabilirse; bu halde bu dörtgenlere, «homotetik dörtgenler» denir.

2) a ve b doğruları veriliyor. Bir tepe, a doğrusunu kesmekte ve a doğrusu boyunca görüşü imkânsız hale getirmektedir (Şek. 46). Bu hâlde, doğruların kesim noktası nasıl bulunabilir?

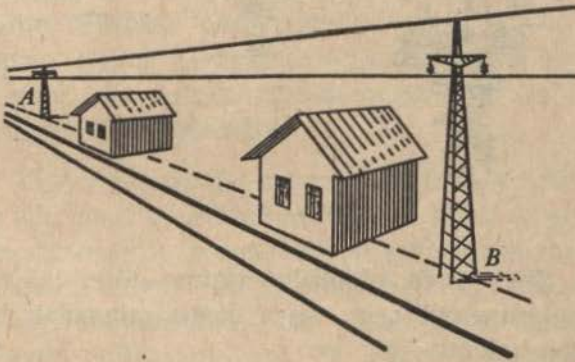


Şekil: 46



Şekil: 47

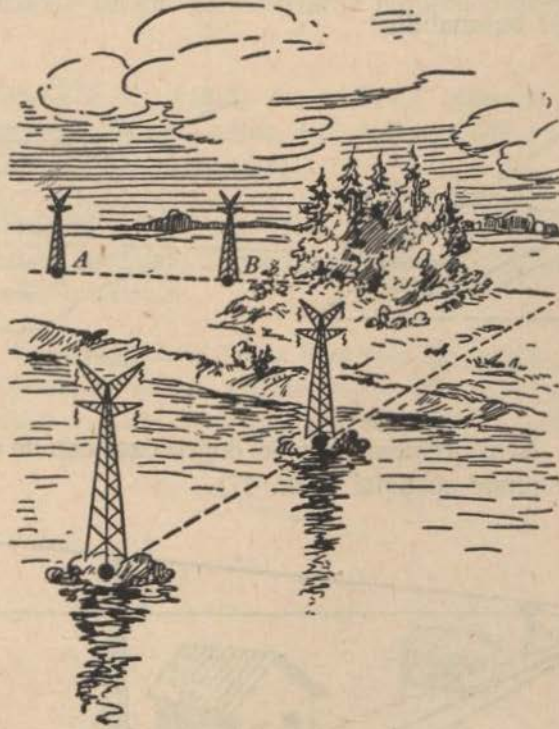
3) Aynı problemi, her iki doğru üzerinde de engeller olması halinde çözüünüz (Şek. 47).



Şekil: 48

4) Elektrik ileten A ve B direkleri arasında iki yapı bulunmaktadır. Direkler arasına ve bu direklerden geçen

doğru üzerinde bir yere üçüncü bir C direği konulacaktır (Şek. 48).



Şekil: 49

5) Şek. 49 da gösterilen çizime göre; iki elektrik hattının kesim noktasını, kara dışına çıkmadan belirten bir metod bulunuz.

6. KONUM TEOREMLERİNİN CEBİRSEL ANLAMI

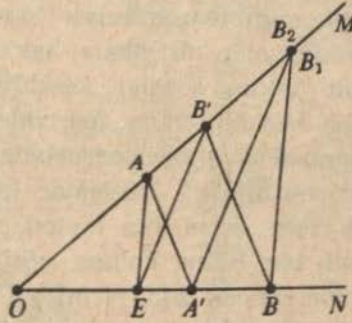
20. Cebirsel Özdeşliklerin Konum Teoremleri Olarak Alınabilmeleri.

Bazı mühim konum teoremleriyle karşılaştık ve bu teoremlerin mümkün olan tatbikatı hakkında bir fikir edindik. Şöyle bir takım sorular kendiliğinden ortaya çıkmaktadır: Daha başka konum teoremleri var mıdır? Desargues ve Pappus-Pascal Teoremlerinden çıkan başka konum teoremleri var mıdır? Düzlemde konum ile ilgili özellikleri bulmak için genel bir metod var mıdır? Bu sorular, bizi, yeni bir bilim koluna götürür. Bunların ekserisinin cevapları ancak son yirmi yıl içinde ortaya konmuştur. Henüz cevaplandırılması gereken bir takım sorular da vardır. Ancak burada, matematiğin bu kısmına dair kısa bir fikir vereceğiz.

17. Yüzyıl başlarında, matematikçiler, geometrik incelemeler için genel bir metod ararlarken, cebir ve aritmetik ile ilgili metodların geometriye uygulanmasını mümkün kılan «koordinatlar» fikrine ulaştılar. Pappus-Pascal ve Desargues Teoremlerinin, cebir ve aritmetik'i geometri'ye bağlayan mühim rolü ise, 20. Yüzyıl başlarında anlaşıldı. Nihayet, son on beş yıl içinde yapılan incelemeler; her konum teoreminin, cebirsel bir özdeşlikmiş gibi alınabileceğini «yani cebirsel bir dile çevrilebileceğini» ve tersine olarak da, her cebirsel özdeşliğin, bir konum teoremiymiş gibi alınabileceğini «yani, geometrik olarak ifade edilebileceğini» gösterdi.

En basit örnekleri gözönüne alalım:

a ve b gibi keyfi iki sayı verilmiş olsun. Birim uzunlukta olan bir OE doğru parçası olarak (Şek. 50), a ve b sayılarını birer doğru parçası ile gösterelim. O halde verilen sayıların ab çarpımını da bir doğru parçası ile gösterebiliriz. Sayıların çarpımını veren bu doğru parçası şöyle çizilebilir: Keyfi bir MON açısı alınır. OM kenarı üzerinde, ab nin ilk çarpanı (yani, $OA = a$ doğru parçası); öteki ON kenarı üzerinde de, ikinci çarpan (yani, $OB = b$



Şekil: 50

doğru parçası) ve ayrıca $OE = 1$ doğru parçası işaretlenir. AE ye paralel olan BB_1 doğrusu çizilir. O halde,

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{OA}{OE} \quad \text{veya} \quad \frac{OB_1}{b} = \frac{a}{1}$$

olur ve buradan $OB_1 = ab$ bulunur.

Aynı tarzda ba çarpımı da gösterilir. Bunun için, OM kenarı üzerinde ba nın ilk çarpanı (yani $OB' = b$ doğru parçası) ve öteki ON kenarı üzerinde de ikinci çarpan $OA' = a$ doğru parçası) alınır. $B'E$ ye paralel $A'B_2$ doğrusu çizilir. O halde,

$$\frac{OB_2}{OA'} = \frac{OB'}{OE} \quad \text{veya} \quad \frac{OB_2}{a} = \frac{b}{1}$$

olur ve buradan $OB_2 = ba$ çıkar. İlk çizimde $AE \parallel BB_1$ idi. $OA = OA' = a$ ve $OB' = OB = b$ olduğuna göre, Kısım 8 deki Yardımcı Teorem 1 den, $AA' \parallel BB'$ olduğu anlaşılır. Demek ki, $AA'B_1BB'E$ altıgenine Pappus-Pascal Teoremini uygulayarak, $A'B_1 \parallel B'E$ olduğunu buluruz. Fakat, ikinci çizimde $A'B_2 \parallel B'E$ idi. Bu; Pappus-Pascal Teoremi doğru ise, bu halde, B_2 noktasının B_1 ile çakışacağını (yani $OB_1 = OB_2$ veya aynı şey demek olan $ab = ba$ olacağını) ifade eder. Böylece Pappus-Pascal Teoremi, «Cebir dilinde» çarpımdaki komütatif kaide olur.

21. Konum Teoremleri İçin Şematik Notasyon.

Bir kimse; meseleyi daha iyi inceledikten ve gerekli tecrübeyi edindikten sonra; çeşitli cebirsel özdeşlikleri, bir takım konum teoremleri olarak ifade etmesini öğrenebilir. Özdeşliklerin, istendiği kadar çok sayıda kurulması mümkün olduğuna göre; istendiği kadar çok sayıda konum teoremi elde etmek de mümkün olur. Ayrıca, böyle bir teoremden nokta ve doğruların sayısı keyfi olarak arttırılabilir.

Daha karışık bir konum teoreminin sözle ifadesi daha da zor olacaktır. Bu sebepten, karışık olan konum teoremleri için, bir notasyon şema kabul ettik. Bu şemayı kullanarak, örneğin, Pappus-Pascal Teoremini ifade edelim. Teoremden kabul edilen şarta göre (Kısım 7 ye bakınız); A, C ve E noktaları bir doğru üzerindedirler. Bu şartı şematik olarak ifade etmek için, noktaları gösteren harfler,

ACE

gibi bir satırda yazılabilir. Aynı şart B , D ve F noktaları için de ileri sürülmektedir. O halde, şemaya

$$BDF$$

gibi ikinci bir satır ilâve edilir. Ayrıca, P noktası, AB ve DE doğrularının kesim noktasında bulunur. Bu şart şematik olarak

$$\left. \begin{array}{l} AB \\ DE \end{array} \right\} P$$

şeklinde gösterilir.

Q ve R noktalarının bulunmaları da aynı tarzda ifade edilirler. Pappus-Pascal Teoremi, bu şematik notasyon ile tamamen şu şekli alır:

$$ACE$$

$$BDF$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \\ DE \end{array} \right\} P$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \\ EF \end{array} \right\} Q$$

$$\left. \begin{array}{l} CD \\ AF \end{array} \right\} R$$

$$PQR$$

doğru altındaki son notasyon teoremin sonucunu «yani; P , Q ve R noktalarının bir doğru üzerinde olduklarını» ifade eder.

14 noktayı (bu noktalar, Şekilde rakamlarla gösterilmişlerdir) ve 16 doğruyu (bu doğrular da çizimde belirtilmişlerdir) içine alan daha karışık bir konum teoreminin şematik olarak ifadesi için bir örnek verelim:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{array} \} 7$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{array} \} 8$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{array} \} 9$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 9 \\ 7 & 8 \end{array} \} 10$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{array} \} 11$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{array} \} 12$$

$$\begin{array}{cc} 6 & 7 \\ 5 & 11 \end{array} \} 13$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{array} \} 14$$

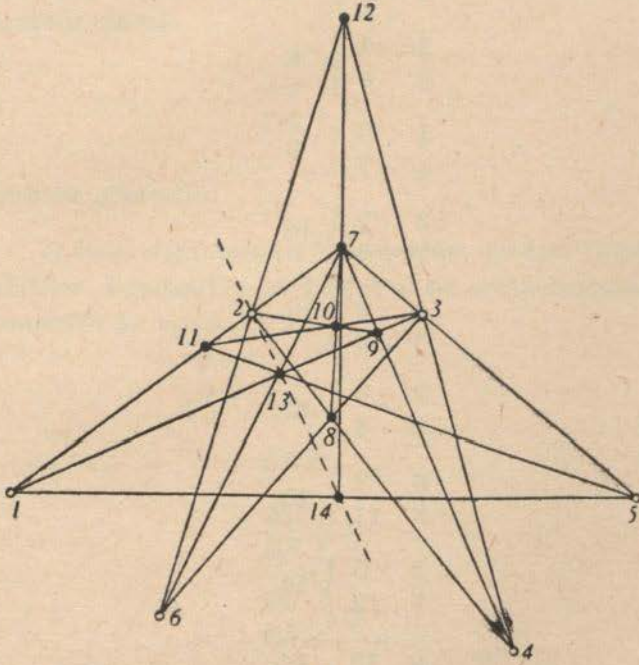
$$2 \quad 13 \quad 14$$

Bu teorem Şek. 51 de gösterilmiştir. İlk önce 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 noktalarını keyfi olarak seçer ve sonra da bütün şekli çizebiliriz. O halde, geri kalan diğer bütün noktaların yerleri tamamiyle belirtilmiş olacaklardır. Bu konuma tekabül eden cebirsel özdeşliği ortaya koymak bizim için oldukça zordur. Sadece burada, bu özdeşliğin

$$a(bc) + d = (ab)c + d$$

olduğunu ifade etmekle yetineceğiz.

Bu konum teoremini, Desargues ve Pappus-Pascal teoremlerini kullanmak suretiyle, geometrik düşüncelere dayanarak ispat etmek yine de pek uzun olacaktı.



Şekil: 51

Nihayet, ne kadar karışık olursa olsun, bütün konum teoremlerinin Pappus-Pascal teoreminden çıkarılabilecekleri gösterildi. Kısım 12 nin (c) şikkında; Desargues Teoremini, Pappus-Pascal Teoreminden elde ettiğimizi hatırlayınız.

BIBLIYOGRAFYA

1. HILBERT, D. and COHN-VASSEN, S., *Geometry and the Imagination*. Translated by P. NEMENYI. New York: Chelsea Publishing Company, 1952.
2. COURANT, R. and ROBBINS, H., *What Is Mathematics?* London: Oxford University Press, 1941.
3. PICKERT, G., *Projective Ebenen*. Berlin: Springer, 1955.
4. COXETER, H. S. M., *The Real Projective Plane*, 2d ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.

Yayınlanmış olan eserler:

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekanığın Matematiğe Bazı Tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergel Kullanarak Yapılan Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Diophant Denklemleri) (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — Matematiksel İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvel Kullanarak Yapılan Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş (550 Krş.)
- 16 — Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (600 Krş.)
- 18 — İndirgemeli Diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
- 22 — Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (400 Krş.)
- 23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eser:

- 17 — Gayri Euklid Geometriler

Matematik Derneğinin adresi:

Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü

Vezneçiler - İstanbul

Fiati 200 Krş.