TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı : 25

HANS RADEMACHER ve OTTO TOEPLİTZ

SAYILAR ve ŞEKİLLER

Matematik Meraklıları için Matematik Düşünce Örnekleri

Çeviren
Orhan Ş. İÇEN

İSTANBUL—1964

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI
Sayı : 25

HANS RADEMACHER ve OTTO TOEPLITZ

SAYILAR ve ŞEKİLLER

Matematik Meraklıları için Matematik Düşünce Örnekleri

İkinci Baskı

Çeviren
Orhan Ş. İÇEN

İSTANBUL—1964

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dolayısiyle mühendislik ve askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayatî bir önem kazanmıştır.

Öte yandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini çözebilmek için gerek metod gerekse fikir bakımından gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı birçok memleketlerde bu sahaya daha fazla sayıda yeni istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek, en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlanmak en önemli bir millî eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen tedbirlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra bir çok memleketlerde, gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karsı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip matematik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde aranılan özelikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı sunî olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla önbilgiye ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir şeyler keşfetmeğe sevketmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır. Bu yayınlar, resmî müfredata bağlı ders veya yardımcı kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün malî kaynağı, Millî Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'un bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

BU KİTAP HAKKINDA

Matematik, kendine has formül dili, İntegral ve Toplam işaretleriyle dış âlemden âdeta yüksek bir duvarla ayrılmış kapalı bir âlem gibidir. Bu duvarların arkasında neler cereyan ettiği dışarda bulunanların büyük kısmı için bir esrar perdesiyle kaplıdır; matematik denince böyle bir kimsenin hatırına «histen âri rakkamlar», yani önüne geçilmez bir zarureti haiz kanunlara göre işleyen cansız bir makanizma gelir. Duvarların içinde bulunan bir kimse için bu duvarlar ekseriya onun dış âleme bakış imkânlarını daraltır; böyle bir kimse matematik varlıkları kendine mahsus bir ölçü ile ölçmeye çok kolayca meyleder ve kendi hâkimiyet sahasına hiçbir yabancı şeyin girmemesinden dolayı gurur duyar.

Acaba bu ayırıcı duvarı delmek ve matematiği diğerlerinin de gözleri önüne — onların kendisinden zevk alabileceği bir şekilde — sermek mümkün müdür? Acaba matematiği bu şekilde yaşamak hususî «matematik kabiliyeti» haiz olanların dar çevresine mi münhasırdır? Mukakkak ki matematik kabiliyete sahip olmak, yani yeni matematik hakikatler keşfedecek kabiliyette olmak ancak pek az kimseye nasiptir. Fakat müziğe kabiliyetli, yani az çok bir değeri haiz müzik parçaları besteleyebilecek kabiliyette olanların sayısı da pek azdır. Buna rağmen müziği anlayan, hattâ bir müzik parçasını tekrar edebilen, hiç olmazsa ondan zevk alan, müziğe yatkın birçok insanlar vardır. Biz *basit* matematik hakikatleri *anlayabilecek* durumda olan kimselerin yüzde oranının, umumiyetle müziğe yatkın denilen kimselerin oranından daha düşük olmadığına inanıyoruz — yeter ki bunların gençlikteki birçok hatıralarının tesiri altında matematiğe ait her türlü şeye karşı besledikleri çekingenliği ortadan kaldırmak mümkün olsun.

Böyle bir denemeye girişerek, hakikî matematik apaçık ortaya konulduğu takdirde kendisine karşı beslenilen bu çekingenliğin gerilediğini göstermek bu sahifelerin maksadıdır. Onlarda matematik adı altında toplanan çok çeşitli hâdiselerden, kendi

hatırı için matematikten, matematiğin kendi başına haiz olduğu *iç değerlerden* nümuneler verilecektir.

Matematikçi olmayanlar önünde matematikten bahsetmek şimdiye kadar birçok defalar tecrübe edilmiş bir şeydir. Fakat bu konuşmalarda hatipler, ekseriya matematiğin dünyanın gerikalan kısmı için faydalarını ön plâna koyarak, matematiğin herhangi bir teknik veya başka bir tatbikat için temin ettiği avantajı anlatarak ve bu avantajı kolay misâllerle izah ederek dinleyicileri tarafından anlaşılabilmelerini sağlamaya gayret etmişlerdir. Yahut ta matematik oyunlar ve eğlenceler hakkında çok eğlenceli şeyler ihtiva eden, fakat buna rağmen asıl matematiğin ancak bir karikatürünü teşkil eden kitaplar yazılmıştır. Yahut nihayet, matematiğin temellerinin umumî felsefî değerleri münakaşa edilmiştir; bu sahifelerin sırfî, mutlak matematikle alâkadar olan bir okuyucusu, dikkatini büyük bir merakla matematiğin bilgi teorisi ve dünya görüşü bakımından değerlendirilmesine çevirecektir. Fakat biz burada da, aslında matematiğin bir dış değerini, onun değerinin kendi dışındaki ölçülerle araştırılışını görmekteyiz.

Bu kitapta, anlatacağımız fikirlerin matematiğin kendi içindeki tesirinden, yani onların diğer matematik bölgelerindeki iç tatbikatından bile bahsedemiyeceğiz. Bu suretle matematik yapısının tabiatında bulunan çok önemli bir unsurdan — bu yapının muhtelif kısımlarını birbirine bağlayan her istikametteki büyük ve şaşırtıcı bağlardan — vazgeçmek zorunda kalacağız. Fakat buradaki vazgeçişimiz istiyerek olmamıştır. Çünkü bu gibi bağlantıların açığa çıkarılması en muhteşem matematik keşiflerin doğmasına sebeb olmuştur; bunları anlatmak ise geniş ve ta baştan başlayan hazırlıklara, hattâ bundan da fazla olarak okuyucu tarafından da esaslı bir matematik antrenmanına ihtiyaç gösterir ki, bu da bizim buradaki gayemiz olamaz.

Bir cümle ile: Anlatacaklarımızın *ağırlık merkezi*, diğer bilim dallarının dışarıda bulunanlara bildirdikleri gibi, *vâkıalar*

üzerinde olmayacak, fakat *matematik hâdiselerinin tipleri*, *matematikte problem ortaya atma metodu* ve *ortaya atılmış problemleri çözme metodu* üzerinde bulunacaktır. Şüphesiz, *büyük* matematik hadiselerinin, *derlitoplu* teorilerin kavranılması uzun bir öğrenme devresi geçirmeye, devamlı bir derinleşmeye ihtiyaç gösterir. Bu, müzikte de böyledir. İlk defa bir konsere giden bir kimsenin meselâ Bach'ın «füg san'atı»nı anlamasına, bir senfoninin yapısını kavramasına imkân yoktur. Fakat büyük müzik eserlerinin yanısıra içlerinde hakikî ihtişamdan bir nebze bulunan, deha eseri olduğu herkesçe anlaşılan küçük şarkılar da vardır. Biz burada matematiğin geniş hazinesinden böyle «küçük şarkılar», yani herbiri kendi başına anlaşılabilen ve kendi içinde değerlendirilebilen bir sıra konu seçeceğiz ki, bunların herbirini şifahî olarak anlatmak için bir saattan fazla zamana ihtiyaç olmadığı gibi, dinleyici bunlardan birini dinlerken bir evvelkinin muhtevasını da unutabilir.

Aynı dinleyici okul çağlarında iken matematikten öğrenmek mecburiyetinde tutulduğu şeyleri de unutabilir; bu kitabın hiçbir yerinde Diferansiyel ve hattâ İntegral Hesap şöyle dursun, logaritmeler ve trigonometriden bile bahsedilmiyecektir.

Üçgenlerin eşitliğine dair teoremlerle cebirdeki parantezlerin çarpılması kaideleri okuyucuya tedricen hatırlatılacak olup, bunlardan başka bir ön bilgiye ihtiyaç yoktur.

Bir şarkıyı güzel yapan şey, sadece onun başlangıç melodisi değildir; esas temde yapılan bir variyasyon veya gam'da beklenmedik bir değişiklik şarkının en bariz hususiyetini teşkil eder; ancak evvelce esas temi dikkatle dinlemiş olan bir kimse bu hususiyetin farkına vararak onu tamamen kavrayabilir. Buna benzer bir şekilde bu kitabın okuyucusu da konunun esas fikrine yol açan hayatî dönüm noktasına gelmeden evvel bir konuya başlangıç teşkil eden problemi doğuran esas sebebi, bu problemin yapısını, o konuya dair verilen ilk basit misâlleri dikkatle gözden geçirmeli ve muhakeme silsilesini başka şeyler

okurken yaptığından bir kat daha aktif olarak tâkip etmelidir. Okuyucu bunu yaptığı takdirde, bu kitaptaki her konunun esas fikrini kavramakta güçlük çekmiyecek ; bu takdirde bir takım büyük matematikçilerin, bazan meşgûl bulundukları büyük teorilerinin sınırlarından dışarı çıkarak herhangi bir basit vâkıadan yaratmış oldukları, kendi başına bir bütün teşkil eden küçük bir san'at eserini, ufak bir halis matematik nümunesini zevk olarak temaşa edebilecektir.

Bu kitabın ikinci baskısı birincisine nazaran ancak ufak bazı değişiklikler arzetmektedir. Birinci baskının «Daire tabanlı dik koninin kesitleri» adlı 8. Bölümü yerine burada Kombinasyonlar Analizine dair, belki de daha az yaygın olan, bir konu gelmiştir; 6. Bölüme de müellifinin nâzik müsaadesi ile henüz neşredilmemiş olan ve bölümün muhteva ve metodu ile ilgili, şayanı dikkat derecede basit bir ispat ilâve edilmişiir.

Bazı münekkitler, bu kitapta bazı matematik branşlarına — bazılarına göre cebir, diğerlerine göre geometri — lûzumu kadar yer verilmediğini ileri sürmüşlerdir. Bu itirazı nazarı itibara almak, kitabımızın birinci baskısının ön sözünde belirtmiş olduğumuz gayesine aykırı düşerdi. Kitabımızın hiçbir yerinde muhtevanın kendisi bizim için önemli olmamıştır. Bir konuyu kitaba alıp almamak hususunda karar verirken bizim için önemli olan şey, o konunun kitaba almış olduğumuz 22 konuda yapmaya gayret ettiğimiz derecede basit ve ön bilgiye ihtiyaç göstermeden anlatılıp anlatılamıyacağıdır. Matematik hakkında böylelikle vermek istediğimiz tablo bakımından, konuların hangi matematik disiplininden alınmış olmasının bizce bir önemi yoktur.

Kitabımızın gerek matematik meraklıları, gerekse ekseri münekkitler tarafından görmüş olduğu iyi kabûlün, gayemizin umumiyetle onu düşünmüş olduğumuz şekilde anlaşıldığını gösterdiği kanaatındayız.

Breslau ve Bonn, Ocak 1933

H. Rademacher
O. Toeplitz

İçindekiler

		Sahife
1.	Asal sayılar dizisi hakkında	3
2.	Eğri şebekelerinin dolaşılması	10
3.	Bazı maksimum problemleri	17
4.	Ortak ölçüsüz doğru parçaları ve İrrasyonel sayılar.	24
5.	*H. A. Schwarz*'a göre yükseklik ayakları üçgeninin bir minimum özeliği	32
6.	*L. Fejér*'e göre aynı minimum özeliği	38
7.	Cümleler Teorisi hakkında bazı bilgiler	45
8.	Bazı Kombinasyon problemleri	57
9.	*Waring* problemi	71
10.	Kendi kendini kesen kapalı eğriler hakkında	78
11.	Bir sayı ancak bir türlü mü asal çarpanlara ayrılabilir ?	86
12a.	Dört renk problemi	97
12b.	Düzgün çokyüzlüler	111
13.	Pitagor sayıları ve *Fermat* problemine bir bakış	119
14.	Verilen bir nokta sistemini çevreleyen en küçük daire (yuva dairesi)	130
15.	İrrasyonel sayıların rasyonel yaklaşık değerleri	141
16.	Mafsallı mekanizmalar vasıtasıyla doğrusal hareket tevlidi	151
17a.	Mükemmel sayılar	166
17b.	Asal sayılar dizisinin sonsuzluğuna dair *Euler*'in ispatı	175
18a.	Maksimum problemlerinin dayandığı prensipler	180
18b.	Verilen bir çevreyi haiz maksimum alanlı şekil (*Steiner*'in dört mafsal metodu)	186
19.	Peryodik ondalık kesirler	193
20a.	Dairenin karakteristik bir özeliği	212
20b.	Sabit genişlikli eğriler	216
21.	Elemanter Geometri çizimlerinde pergelden vazgeçilemiyeceği	238
22.	30 sayısının bir özeliği	254
	Kitaptaki Bölümlere Dair Notlar	263

1. Asal sayılar dizisi hakkında

6, 2 kere 3 e eşittir. 7 ise, bu şekilde iki sayının çarpımı haline konulamaz. Bundan dolayı, 7 bir *asal sayı* dır. Şu halde, kendisinden küçük iki çarpanın çarpımı şekline sokulamayan bir pozitif tam sayıya *asal sayı* denir. 5 ve 3 te birer asal sayıdır; fakat 4 asal değildir, çünkü $4 = 2 \cdot 2$ dir. 2 sayısı da asal olma özeliğine maliktir. 1 sayısı halinde ise asallıktan bahsetmenin bir manâsı kalmaz. Bu söylenenlere göre, büyüklük sırasıyla ilk asal sayılar

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

den ibarettir. Bu dizi ilk bakışta oldukça intizamsız görünür; dizideki sayıları teşkile yarayan basit bir kanun hemen göze çarpmaz.

Her sayı, tamamen asal sayılara ulaşıncaya kadar çarpanlara ayrılabilir. $6 = 2 \cdot 3$ halinde neticeye ilk adımda varılmıştır; $30 = 5 \cdot 6$ da ise, $6 = 2 \cdot 3$ olduğundan, asal çarpanlara ayrılış $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olup, üç tane asal çarpan mevcuttur;

$$24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

ayrılışında dört tane asal çarpan bulunup, bunlar arasında 2 birçok defa geçmektedir. Fakat, bu gibi tekrarlamalara müsaade etmek şartiyle her sayının tamamen asal çarpanlara ayrılabileceği besbellidir. Şu halde asal sayılar, bütün pozitif tam sayılar dizisinin bu manada yapı taşlarını teşkil ederler.

Öklid'in «Elemanlar»ının (1) 9. kitabında asal sayılar dizi-

(1) Öklid'in kendi zamanındaki temel matematik bilgilerini bir araya getiren 13 ciltlik meşhur eseri (M. Ö. 300 civarı). Bu eserin bilhassa geometriye dair kısımları XIX. yüzyılın sonuna kadar bütün dünyada elemanter geometri öğretiminin esasını teşkil etmiştir. (Çevirenin notu).

sinin sonlu olup olmadığı problemi birdenbire denecek bir tarzda ortaya atılmakta ve problemin cevabı da bu dizinin sonsuz olduğu, yani her asal sayıdan sonra diğer bir asal sayı bulunabileceği, ispat edilmek suretiyle hemen verilmektedir.

Öklid'in ispatı son derece incelikli olup, aşağıki basit fikre dayanmaktadır :

Hesaba başlayan herkesin öğrendiği gibi,

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots$$

dan ibaret olan 3 ün katlarının teşkil ettiği dizi 3 ile bölünebilen bütün sayıları ihtiva eder; bunlardan başka hiçbir sayı 3 ile bölünemez, hususiyle 3 ün herhangi bir katından hemen sonra gelen, meselâ $19 = 6 \cdot 3 + 1$, $22 = 7 \cdot 3 + 1$ gibi, hiçbir sayı 3 ile bölünemez. Aynı şekilde 5 sayısı da 5 in herhangi bir katından hemen sonra gelen, meselâ $21 = 4 \cdot 5 + 1$ gibi, hiçbir sayıyı bölemez. Aynı düşünce 7, 11, ilâh... için de doğrudur.

Bundan sonra Öklid şu sayıları teşkil etmektedir :

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

ilâh..., yani ilk asal sayılardan birkaçını birbiriyle çarptıktan sonra o çarpımları takip eden sayıları gözönüne almaktadır. Biraz evvel ispattan hemen önce söylemiş olduğumuz düşünce, bize bu sayıların kendilerinin teşkilinde kullanılmış bulunan asal sayılardan hiçbirisi ile bölünemiyeceğini öğretir. Meselâ yukarıda son yazılmış olan sayı 3 ile bölünemez, çünkü 3 ün bir katından 1 fazladır; aynı şekilde 5 ile de bölünemez, çünkü 5 in bir

katından 1 fazladır, ilâh... Şu halde 2, 3. 5, 7, 11, 13 sayılarının hiçbiri bu sayıyı bölemez. Şu halde 30031 sayısı, daha önceki 7, 31, 211, 2311 sayılarının aksine, bir asal sayı olmasa bile, asal çarpanları arasında 2, 3, 5, 7, 11, 13 sayılarının bulunamıyacağı muhakkaktır, yani bu sayının en küçük asal çarpanı mutlaka 13 ten büyüktür. Hakikaten, biraz deneme yaparak $30031 = 59 \cdot 509$ olduğu bulunur ki, buradaki 59 ve 509 asal çarpanları 13 ün üstündedir.

Herhangi bir asal sayıya da aynı düşünceler uygulanabilir: p böyle bir sayı olduğuna göre, 2 den p ye kadar olan asal sayılarla

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot p + 1 = N$$

sayısını teşkil edersek, burada kullanılan 2, 3, 5, ..., p asal sayılarından hiçbiri N yi bölemez. Şu halde ya N nin kendisi asaldır — ki bu takdirde p den daha büyük bir asal sayı bulunmuş olur — yahut N bir takım asal çarpanlara ayrılır ki, bunlar 2, 3, 5, ..., p asal sayılarından mutlaka farklı olup, neticede hepsi de p den büyük olur. Şu halde, her asal sayıdan sonra diğer bir asal sayının mevcut olması icap eder. Bu ise ispatı istenilen şeyden başka birşey değildir.

Öklid'in bu teorem ve ispatının hangi yönüne daha ziyade hayran kalmakta insan şaşırıyor: Eski Yunan matematikçilerinin, kendilerinden evvel gelen hiçbir milletin yapmadığı ve kendilerinden sonra gelen bütün milletlerin doğrudan doğruya kendilerinden aldığı gibi, sırf ilim hatırı için ve kendi içlerinden gelen bir zorlama ile böyle bir problemi ortaya atmış olmalarına mı, yoksa acemi bir kimsenin farkına bile varmıyacağı, yahut lüzumsuz veya trivial bulacağı ve ancak asal sayılar dizisinin teşkiline dair boşuna basit bir kanun arayan bir kimsenin karşılaştığı güçlükler neticesinde aklına gelebilen bilhassa bu problemi ortaya atmış olmalarına mı, yoksa nihayet böyle bir kanunun

yokluğunu biraz evvel öğrenmiş olduğumuz ince ispatla telâfi etmelerine mi?

Hakikatte, Öklid'in ispatı asla p den hemen sonra gelen asal sayıyı vermez. Bu ispatın verdiği asal sayı umumiyetle p den oldukça sonra gelir: meselâ 11 den sonra gelen bir asal sayı için ispat 13 ü değil 2311 i verir; 13 den sonra gelen bir asal sayı için de 59 u verir, ilâh... Hakikatte p ile ispatın verdiği daha büyük sayı arasında bir sürü daha küçük asal sayılar bulunur, fakat bu husus burada ispat edilmiyecektir. İşte bu da Yunanlı Matematikçinin, kendini burada akıllı bir şekilde tahdit etmek suretiyle yolunu asal sayılar dizisinin karışık tuzakları üzerinden rahatça geçirmesini sağlayan, ince anlayışını gösterir.

Asal sayılar dizisinin bu biçimsizliği hakkında daha müşahhas bir misal vermek üzere, bu dizide çok büyük boşluklar bulunabileceğini, meselâ uygun seçilecek 1000 tane müteakip sayıdan hiçbirinin asal olmamasının mümkün olduğunu göstereceğiz. Bunun için Öklid'inkine çok yakın bir düşünceden hareket edeceğiz.

Yukarıda $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ sayısının 2, 3, 5 asal sayılarından hiç birisi ile bölünmediğine işaret etmiştik. Şimdi her ikisi de 3 ile bölünebilen iki sayının toplamının da 3 ile bölünebileceği, aynı şekilde 5 veya 7 veya herhangi bir sayı ile bölünebilen iki sayının toplamının da yine aynı sayı ile bölünebileceği şeklindeki basit bir düşünceden hareket ederek,

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 32, \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 = 33, \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 = 34,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 5 = 35, \quad 2 \cdot 3 5 + 6 = 36$$

sayılarından hiçbirinin asal olamıyacağı neticesini çıkarırız: çünkü burada 30 a ilâve edilen sayılar ya 2, ya 3, yahut ta 5 ile bölünebildiklerinden ve 30 da aynı sayılarla bölünebildiğinden, toplam sayılar da 2, 3, 5 ten biri ile bölünebilir. Bu muhakeme

ilk defa olarak $2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37$ için yürütülemez, hakikaten de 37 asal olduğundan 2, 3, 5 sayılarından hiçbiri ile bölünemez.

p olarak ilk dört rakkamlı asal sayıyı (yani 1009 u) alır, ve

$$2 \cdot 3 \ldots p + 2, \quad 2 \cdot 3 \ldots p + 3, \ \ldots, \ 2 \cdot 3 \ldots p + 1001$$

şeklinde 1000 tane sayı teşkil edersek, bu son sayılara da aynı düşünceyi uygulayabiliriz. Zira 2, 3, ..., 1001 sayılarının her biri 2, 3, ..., p asal sayılarından en aşağı biri tarafından bölünebilir; $2 \cdot 3 \cdots p$ çarpımı da aynı sayı tarafından bölünebildiğinden, yukarıda yazılmış olan bütün sayılar 2, 3, ..., p den en aşağı biri tarafında bölünebilir. Bu sayıların her biri aşikâr olarak p den büyük olduğundan, hiçbiri asal olamaz. Böylelikle içlerinde bir tek asal sayı bile bulunmayan 1000 tane müteakip sayı bulmuş olduk.

Tabiatiyle, böyle bir boşluğa rastlayıncaya kadar asal sayılar dizisinde oldukça ileriye gitmek lâzımdır. Fakat kâfi derecede ileriye gitmek şartiyle, aynı prensibi kullanarak değil 1000, hatta bir milyon müteakip sayıyı ihtiva eden aynı tabiatta bir boşluk bulunabildiği gibi, istenilen herhangi bir büyüklükte bir boşluğa da ulaşılabilir.

Demin görmüş olduğumuz ikinci problem ve onun ispatı her ne kadar birincilerle yakınlık gösterse bile, hiçbir Yunanlı Matematikçi tarafından ele alınmamıştır. Bu problemi ve ispatını modern matematik yaratmış olup, onlara daha bir demet yeni problem eklemiştir. Bu sonuncuların ispatı ekseriya yukarıkiler kadar kolay olmayıp, bunlardan bugünkü matematik ilminin en derin ve — henüz çözülmemiş kısımlarında — en heyecanlı bahislerinden biri meydana gelmiştir.

Yeni problemler demetinden, Öklid'in metodu ile hemen çözülebilen, fakat bugünkü matematiğin Eski Yunanlıların vaz ettikleri problemlere hangi istikamette devam ettiği hakkında ufak bir fikir veren, küçük bir örnek daha verelim. Epeyi yukarda

3 ün katları, yani 3, 6, 9, ... dizisi ve ondan sonra da bunları takip eden sayılar, yani 4, 7, 10, ... dizisi göz önüne alınmıştı. Şimdi bu iki diziden arta kalan, yani 3 ile bölününce 2 kalanını bırakan

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots$$

sayılarının teşkil ettiği diziyi düşünelim. Bu dizide de de sonsuz sayıda asal sayı bulunduğunu, yani

$$2, 5, 11, 17, 23, \ldots$$

şeklindeki asal sayılar dizisinin sonlu olmadığını göstereceğiz.

Bu ispat için basit bir hazırlık gereklidir: 1, 4, 7, 10, 13, ... dizindeki herhangi bir sayıyı biribiriyle çarparsak, yine aynı diziye ait bir sayı elde ederiz. Hakikaten, bu diziye mensup bütün sayılar 3 ile bölündüklerinde 1 kalanını bırakırlar, $3x+1$ şeklindedirler; böyle iki sayıyı, meselâ $3x+1$ ile $3y+1$ i, birbirleriyle çarparsak,

$$(3x+1)\,(3y+1) \equiv 9xy+3y+3x+1 = 3\,(3xy+y+x)+1,$$

yani gene 3 ün uygun bir katına 1 ilâve etmek suretiyle elde edilebilen bir sayı buluruz.

İşaret ettiğimiz bu basit düşünce dolayısiyle, 2, 5, 8, 11, ... sayılarından herhangi birinin asal çarpanları arasında en aşağı bir tanesi, $14 = 2 \cdot 7$ deki 2 yahut $35 = 5 \cdot 7$ deki 5 gibi, mutlaka yine bu sonuncu diziye ait olmalıdır. Zira bu çarpanların hiçbiri 3 ün katlarının teşkil ettiği diziye ait olamaz (çünkü bu dizide aşikâr olarak 3 ten başka hiçbir asal sayı yoktur). Eğer bu çarpanların hepsi de 4, 7, 10, 13, ... dizisine ait olsalardı, yukarıki yardımcı düşünceye göre onların çarpımı da bu sonuncu diziye ait olurdu. Şu halde 2, 5, 8, ... dizisine ait herhangi bir sayının en aşağı bir asal çarpanı yine aynı diziye ait olmak mecburiyetindedir.

Son cümlede ifade edilen yardımcı teoremle teçhiz edildikten sonra, Öklid'in ispatında ufak bir değişiklik yapmak suretiyle yukarıda ortaya atılmış olan iddiayı derhal ispat edebiliriz. Bahis konusu değişiklik

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p + 1 = N$$

yerine

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p - 1 = M$$

ifadesini ele almaktır ki, buna da sebep bu sonuncu ifadenin 3 ün bir katından 1 eksik, neticede 2, 5, 8, 11, ... dizisine ait olmasıdır. M nin, tıpkı N de olduğu gibi, kendi yapısına giren 2, 3, 5, 7, 11, ..., p asal sayılarının hiçbiri ile bölünemiyeceği aşikârdır. Şu halde M ister kendisi asal olsun, ister birçok asal çarpanlara ayrılsın, asal bölenlerinin hepsi de p den büyük olur. Bundan önce anlatılan yardımcı teoreme göre ise, bu asal çarpanlar arasında en aşağı bir tanesi mutlaka 2, 5, 8, 11, ... dizisine aittir. Şu halde bu dizide herhangi bir p asal sayısının üstünde bulunan, yani ne kadar ileriye gidilirse gidilsin, onun da ötesinde olan asal sayılar mutlaka mevcuttur.

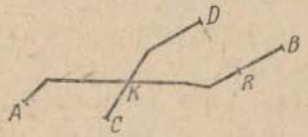
1, 4, 7, 10, 13, ... dizisinin sonsuz sayıda asal sayı ihtiva edip etmediği problemi yukarıda anlatılanlarla asla bir neticeye bağlanmış değildir. Çünkü bütün asal sayılardan sonsuz miktarda olan bir kısmının 1, 4, 8, ... dizisine, fakat sonlu sayıda bir kısmının da 1, 4, 7, ... dizisine ait olduğu pek alâ düşünülebilir; bunlara bir de 3 ü katarsak bütün asal sayılar elde edilir ki bunlar yine sonsuz miktarda olur ve Öklid teoremi ihlâl edilmiş olmaz. Aslında 1, 4, 7, 10, 13, ... dizisi de sonsuz miktarda asal sayı ihtiva eder, fakat bunun ispatı çok daha farklı vasıtalara ihtiyaç gösterir ki, bu hususta ileriki bir bölümde ufak bir fikir vermeye çalışacağız. Buradaki maksadımız sadece, modern matematiğin eski Yunan matematiğine arızî olarak değil, fakat hayatî bahislerde de gerek problemler gerek metodlar bakımından bağlı

ve onun devamı olduğunu göstermekti. Bu noktayı şundan dolayı da bilhassa belirtmek icap eder ki, son asırda Spengler gibi bir filozof, eski Yunan Matematiği ile bugünkü matematiğin birbirinden tamamen farklı iki ayrı matematik olduğu iddiası ile ortalığı velveleye vermişti. Her ne olursa olsun, çok kompleks olan böyle bir konuyu o derece şematik bir formül içine sokmağa çalışmak suretiyle konunun hakkını vermek mümkün değildir.

2. Eğri Şebekelerinin Dolaşılması

Bir tramvay şirketi kendi ray şebekesi üzerinde işlettiği tramvay hatlarını yeni baştan tertiplemek istemektedir. Öyle ki, yeni tertipteki hatlar şu şartlara uysun: herhangi iki müteakip durak arasında ancak bir hat işlesin; tek bir bilet ile istediği kadar aktarma yapmak hakkını haiz olacak olan bir yolcunun bir duraktan herhangi bir başka durağa icabında bir veya daha fazla aktarma yapmak suretiyle gidebilmesi mümkün olsun: Şimdi problem şudur: *Bütün ray şebekesi üzerinde bu şartların istisnasız gerçekleşebilmesi için şirketin en aşağı kaç tane hat tesis etmesi lâzımdır?*

Ray şebekesi (Şekil 1) deki gibi olan bir küçük şehirde problemin çözümü çok basittir: ya A dan B ye ve C den D ye olmak üzere iki hat, yahut A dan K ya ve K dan B ye kadarki parçalar birleştirilmek suretiyle bir hat ve bundan başka B den K ya ve oradan C ye doğru diğer bir hat, veya nihayet A dan

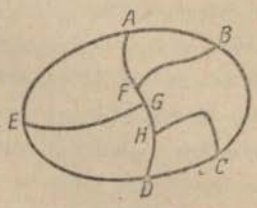


Şek. 1

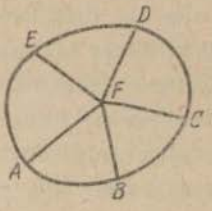
başlıyarak K üzerinden C ye ve B den yine K üzerinden D ye kadar olmak üzere iki hat. Böylelikle bütün imkânların tüketil-

miş olduğu aşikâr olup, yukarıki hallerin herbirinde iki hatta ihtiyaç hasıl olmuştur. Yukarıki 4 hat parçasını birbiriyle nasıl terkip edersek edelim, tek bir hat problemi çözmeye yetmez. Bu düşünceler esnasında (meselâ bazen tamir sırasında yapıldığı gibi) K dan gelen bir hattı R de sona erdirdikten sonra R den B ye kadar yeni bir hat başlatmak gibi pratik olmayan bir şekil nazarı itibara alınmamıştır. Bu son halde tabiatiyle 2 den fazla hatta ihtiyaç hasıl olacaktır, hattâ ayni şeyi birçok yerlerde tatbik ederek hat sayısını istediğimiz kadar arttırabilirdik. Fakat işin tabiatına uygun olan problem, *mümkün olan en küçük sayıda* hatla işin içinden çıkmaktır.

Şekil 2 de gösterilen biçimde henüz nisbeten basit bir ray şebekesi işleten bir şirketin karşılaşacağı problem daha zordur. Bu şirket evvelâ şebekenin dış çevresi boyunca A dan itibaren sırasıyla B, C, D, E den geçen ve sonra yine A ya dönen bir ring hattı kurabilir, sonra bu çevrenin bir kenarından diğer kenarına A dan itibaren F, G, H üzerinden D ye doğru ikinci bir hat tesis edilebilir ve nihayet bunlara aşikâr olarak EG, BF, CH



Şek. 2



Şek. 3

dan ibaret üç hat ilâve etmesi icap eder ki hepsi birden 5 hat eder. Bu hatlardan bir tanesinden, birinci ve ikinci hatları tek bir hat hat haline getirmek, yani A dan itibaren B, C, D. E üzerinden yine A ya döndükten sonra F, G, H üzerinden D ye gitmek suretiyle vazgeçilebilir. *Acaba hat sayısını daha da aşağıya, meselâ 3 e, indirmek mümkün müdür?*

Başka bir örnek olarak Şekil 3 ü düşünelim. Burada meselâ A dan itibaren B, C, D, E üzerinden yine A ya dönmek üzere dış çevreyi dolaştıktan sonra tekrar A dan kalkıp F den geçerek B ye gidilebilir. Bundan sonra geriye FC, FD, FE den ibaret üç hat kalır. Fakat bunları da, meselâ ikinci hattı C den itibaren F üzerinden D ye kadar kurmak ve sonra FE ray parçası üzerinde bir gidiş geliş hattı tesis etmek suretiyle, ikisi F den geçen, ve sadece bir tanesi F de nihayet bulan üç tane hat işimizi görmeğe kâfi gelir. *Fakat acaba iki hat kâfi gelemez mi?*.

Yukarıda gözönüne alınan ve nisbeten basit olan son iki örnekte bile, Şekil 1 de olduğu gibi mümkün olan bütün halleri gözden geçirerek bunlar hakkında tam bir görüş sahibi olmak fevkalâde sabra ihtiyaç gösterir; çünkü mümkün hallerin sayısı pek fazladır. Tabiatiyle böyle bir gözden geçirme, eğer fiilen mümkün olsaydı, daha az sayıda hattın kâfi gelip gelmiyeceğini bu hallerde de kestirip atmayı temin edecekti.

Büyük şehirlerdeki tramvay şirketlerinin tatbikatlarına pek te uygun olmayan bu problemin dış görünüşü arkasında çok basit te olsa bir matematik problem belirmektedir. Zira Şekil 1 örneğinde bütün imkânların teker teker gözden geçirilmesi istenilen neticeyi (yani iki hat) vermişse de bu hakikî bir matematik muhakeme sayılamaz; eğer Şekil 2 de de neticeye varıncaya kadar yorulmadan bütün imkânları gözden geçirip 4 den daha az sayıda hattın kâfi gelmediğini bulmuş olsa idik, bu da bir matematik muhakeme sayılamazdı — tıpkı yedi rakkamlı iki sayıyı birbiriyle sabırla çarpıp hatâsız olarak neticeye varmanın bir matematik muhakemesi sayılamıyacağı gibi. Hakikî matematik — pek hafif şekilde de olsa — ancak bu problemin mümkün olan bütün hallerinin teker teker gözden geçirilmesi suretiyle ve yalnız Şekil 2 için değil, fakat istenildiği kadar karışık şebekelerde de neticeyi bir hamlede verecek bir *fikrin* ortaya atılması ile başlar.

Burada işimizi görecek fikir çok basittir. Teker teker hatların *uçlarının* nerede bulunmaları *gerektiğini* düşünelim. Evvelâ bu uçlar ray parçalarının son buldukları noktalarda, meselâ Şekil 1 de *A*, *B*, *C*, *D* noktalarında, bulunmalıdır. Şekil 1 de böyle 4 tane uç bulunduğundan ve her hattın en çok iki ucu (ring hattı olmadıkça daima iki uç vardır) bulunduğundan, bu 4 uç arasında en aşağı iki hattın kurulmasının icap ettiği aşikârdır. Yukarıda bir *deneme silsilesi* ile bulmuş olduğumuz neticeyi burada yekpare bir *mülâhaza* ile bulmuş olduk.

Fakat Şekil 2 de hiçbir serbest uç yoktur. Buna karşılık, burada, *A* gibi 3 ray parçasının bir araya geldiği noktalar mevcuttur. Eğer hakikaten bir ray parçasından birden fazla hat geçmemesi şartı koşulursa, böyle bir noktada en aşağı *bir tane* hat ucu bulunmalıdır. Kolayca sayılabileceği üzere, Şekil 2 de bu türlü 8 tane nokta bulunduğundan en aşağı 8 tane de uç mevcut olmalıdır. Buradaki uçların sayısı olan 8 de bir çift sayı olup, 4 tane hattın uç sayısına eşittir. Şu halde Şekil 2 de en aşağı 4 hat tesis edilmelidir, 3 hattın yetmesi mümkün değildir. Şekil 3 te de durum buna benzer: burada Şekil 2 deki cinsten 5 noktaya ilâveten, bir de *F* de 5 ray parçasının birleştiği bir «5. mertebeden kesişme noktası» mevcuttur. Evvelce Şekil 3 e dair vermiş olduğumuz çözümde olduğu gibi bunlardan dördünü ikişer ikişer birer hat halinde birleştirirsek, geriye bir ray parçası kalır ki bunun da bir uç teşkil etmesi icap eder. Aynı düşünce mertebe sayısı *tek* olan her kesişme noktası için de doğrudur. Böylece elde edilmesi icabeden uç sayısı 6 oluyor ki, bu da bir çift sayı olup, en aşağı 3 tane hat tarafından meydana getirilebilir; iki tane hattın kâfi gelmesine imkân yoktur. Aynı tarzda, ne kadar karışık olursa olsun, herhangi bir eğri şebekesi için lâzım gelen en küçük hat sayısını derhal hesaplayabileceğimiz aşikârdır; bunun için sadece bütün kesişme noktalarını gözden geçirerek bunlar arasında kaç tanesinin tek merte-

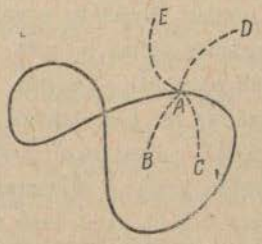
beden olduğuna bakmak kâfidir; aranılan en küçük hat sayısı bu sonuncu sayının yarısından ibarettir.

Problemi buraya kadar çözdükten sonra, çözümü şu suretle tamamlamak istiyoruz: evvelâ yukarıki hesaplamanın her zaman mümkün olduğunu gösterecek, bunun için de herhangi bir şebekedeki tek mertebeden kesişme noktalarının çift sayıda olduğunu ispat edeceğiz. Sonra da bu sayının yarısının — yani yukarıki en küçük hat sayısının — hakikaten kâfi geldiğini ispat edeceğiz. (Bu son sayı hakkında yukarıda öğrenmiş olduğumuz şey sadece daha az sayıda hattın kâfi gelmediğinden ibarettir). Şekil 2 ve 3 te uygun birer hat sistemi bulmak suretiyle çok basit olarak doğrudan doğruya gerçeklediğimiz bu son hususun istenildiği kadar karışık herhangi bir şebeke halinde doğruluğunu temin edecek olan umumî ispatı birinci hususunkine nazaran daha güçtür.

Ne kadar karışık olursa olsun, her şebekede hiçbir ray parçası üzerinde iki hat işletmemek üzere bir hat sistemi kurmak daima mümkündür. Bunun için, kesişme noktalarını ikişer ikişer birleştiren her ray parçası üzerindeki iki uç arasında bir gidiş-dönüş hattı kurmak kâfidir. Bu da şebekedeki ray parçası kadar hatta ihtiyaç gösterir Fakat bu suretle lûzumundan çok fazhat tesis edilmiş olacağı da aşikârdır. Bizi alâkadar eden, işimizi görecek *en küçük* hat sayısıdır. Aşikâr olarak, tasavvur edilebilen bütün hat sistemleri içinde öyleleri mevcuttur ki, bunlardaki hat sayısını daha da aşağı indirmek mümkün olmasın; bunlar optimal (en elverişli) sistemleri teşkil ederler — tıpkı bir sınıftaki çocukların yaşları içinde (bu çocukların yaşlarını teker teker gözden geçirip, en küçük yaşın hangisi olduğunu tespit etmeğe lüzum kalmadan) bir en küçük yaşın mevcut olması icap ettiğinin prensip olarak derhal kabul edilebileceği gibi. Bundan başka, Şekil 1 deki R tamir mevkii gibi lûzumsuz uçlar ihtiva eden bir hat sisteminin optimal olamıyacağı aşikârdır. Bu kusurdan salim olan bir sistem

bile, meselâ Şekil 3 teki F noktasında CF ve DF ray parçalarının tek bir hat halinde birleştirileceği yerde beceriksizlik neticesi F de son bulan iki hat olarak bırakılması halinde olduğu gibi, optimal olmayabilir. Bu son tip uç çiftlerini birleştirip tek bir hat meydana getirmek suretiyle hat sayısını azaltabiliriz: Şu halde hat sayısının artık azaltılamıyacağı bir sistem olan bir optimal sistemde bu tip uç çiftleri önceden birleştirilmiş olmalı ve neticede böyle bir sistemde tek mertebeden bir kesişme noktasında bir tek uç kalmış olmalı, çift mertebeden bir kesişme noktasında ise hiçbir uç bulunmamalıdır.

Geriye sadece, optimal bir hat sisteminde kendi üzerinde geriye dönen, yani hiçbir uç ihtiva etmeyen, ring hatlarının mevcut olup olamıyacağını münakaşa etmek kalır. Böyle bir ring hattına Şekil 2 yi incelerken bu şebekeyi dışardan çevreleyen bir hat olarak başlangıçta rastlamış, fakat orada bu hattı, A noktasında şebekenin ortasından geçen $D\ H\ G\ F\ A$ hattına eklemek suretiyle ortadan kaldırmış ve böylelikle hat sayısını 5 ten 4 e indirmiştik. Bu metod, ring hattı üzerinde *tek* mertebeden bir kesişme noktasının bulunduğu bütün hallerde tatbik edilebilir. Şu halde, optimal bir çözüm halinde bu son tipte bir ring hattı mevcut olamaz. Eğer bir ring hattı üzerinde *çift* mer-



Şek. 4

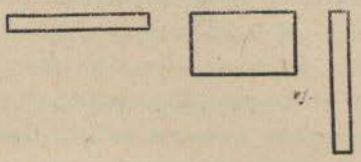
tebeden kesişme noktaları mevcutsa, yukarıkine benzer bir şekilde hareket edilebilir. Meselâ A (8 şeklinde çizilmiş) bir ring hat-

tı üzerinde böyle bir kesişme noktası olsun (Şekil 4); A dan çıkan diğer dalların (şekilde kesik çizgilerle gösterilmiştir) ilerdeki durumları çizilmemiş olup tamamen keyfî olabilirler. Evvelce düşünülmüş olduğu gibi, optimal bir hat sistemi halinde A noktası kendisinde son bulan dallar üzerindeki hatların bir uç noktası olamaz; meselâ B den gelerek A ya varan hat bu dalların biri, meselâ AE üzerinde A dan öteye devam eder. Bu takdirde B den A ya gelen tramvayı A da durdurduktan sonra E ye doğru yoluna devam etmeden önce evvelâ ringi dolaştırıp sonra E ye doğru devam ettirmek suretiyle ringi ilk hattın içine sokabiliriz ki, neticede hatların sayısını yine azaltmış oluruz. Şu halde optimal bir hat sistemi hiçbir ring hattı ihtiva edemez. (Bunun tek istisnası için müteakip paragrafa bakınız).

Netice itibariyle, optimal bir hat sisteminde hatların uçları ancak, ve her birinde birer tane olmak üzere, tek mertebeli kesişme noktalarında zuhûr eder ve bütün kesişme noktalarının çift mertebeden olmaları haricinde hiçbir ring hattı mevcut olamaz. Bu sonuncu halde ise, ancak bir tane ring hattı mevcut olup, onunla da bütün şebekeyi dolaşmak mümkün olur. Şu halde tek mertebeden kesişme noktalarının sayısı optimal haldeki hat uçlarının sayısına eşittir. Buradan, evvelâ tek mertebeli kesişme noktalarının sayısının daima bir çift sayı olduğu, sonra da hat sayısı sadece tek mertebeli kesişme noktaları sayısının yarısına eşit olacak şekilde bir hat sistemi kurmanın mümkün olduğu neticeleri elde edilir. Eğer hiçbir tek mertebeli kesişme noktası yoksa, yani bütün kesişme noktaları çift mertebeli ise, hiçbir uç ihtiva etmiyen tek bir ring hattı işimizi görmeğe kâfi gelir.

3. Bazı maksimum problemleri

Aşağıki Şekil 5 te gösterilenler gibi ve hepsinin de çevresi 4 cm. olan muhtelif dikdörtgenleri birbirleriyle mukayese edelim. Alçak ve (meselâ 2 cm. kadar) geniş olanların alanı küçük olacaktır, hattâ bunların boyları küçüldükçe alanları da küçüle-



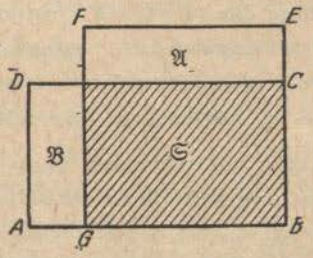
Şek. 5

cektir; aynı mülâhaza dar ve yüksek olanlar için de varittir. Bunların arasında eni boyuna daha uygun olanlar daha büyük bir alanı haizdir. Buna göre, çevresi tam 4 cm olan dik dörtgenler içinde hangisinin en büyük alanı haiz olduğu sorulabilir.

Bu problem tipik bir maksimum problemi olup, bu türlü problemlerin en basiti ve belki de en eskisidir. Zaten bundan dolayı da bu bölümde bahsedeceğimiz problemlere girişmeden evvel, böyle bir problemin esasını izah etmeğe en ziyade elverişlidir. Tabiatiyle okullarda karşılaşmış olduğunuz maksimum problemleri konusundan hatırınızda birçok şeyler kalmıştır, fakat bunlar bizim bu bölümdeki hedefimize varmayı kolaylaştırmak şöyle dursun, ona doğrudan doğruya bir engel teşkil ederler. Yukarıda bahsetmiş olduğumuz ilk hazırlayıcı problemi çözerken bu hatıraları bir kenara bırakmaya alışacağınızı ümit ederiz.

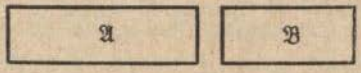
Öklid'in VI. kitabındaki Teorem 27 de yukarıki problem, prensibinden ziyade anlatılış tarzını değiştirdiğimiz, aşağıki şekilde çözülmektedir: verilen U çevresini haiz herhangi bir $A\ B\ C\ D$ dikdörtgeni ile, kenar uzunluğu $\frac{1}{4}U$ olan, yani aynı çevreyi haiz, bir kare çizelim. Bu karenin problemin çözümü

olduğunu, yani alanının dikdörtgeninkinden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Aşağıki şekilde görüldüğü üzere kare ile dikdörtgen üst üste getirilirse, ikisinin ortak kısmı taranmış olan $\mathfrak{S}$ dik dörtgeninden ibaret olur. Karenin kendisi bu son dikdörtgen ile $\mathfrak{A}$ yüzeyinin toplamından, başlangıçtaki dikdörtgen ise taranmış dikdörtgen ile $\mathfrak{B}$ yüzeyinin toplamından teşekkül eder. Şimdi $AB + BC$ verilen dikdörtgenin yarı çevresi olduğundan, karenin yarı çevresi olan $GB + BE$ ye eşittir. Şu halde $AG+GB+BC= GB + BC + CE$ olup buradan $AG = CE$ çıkar: yani $\mathfrak{A}$ dikdörtgeninin yüksekliği $\mathfrak{B}$ nin genişliğine eşittir. $\mathfrak{A}$ dikdörtgeninin didiğer boyutu ise karenin kenarına eşittir. Halbuki $\mathfrak{B}$ nin diğer boyutu karenin kenarının bir *parçasına* eşit, yani bu kenardan daha küçüktür. Birer boyutları aynı olan iki dikdörtgende



Şek. 6

ise, diğer boyutu daha büyük olanı ötekinden büyüktür (Şekil 7). Şu halde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ den büyük olup, neticede $\mathfrak{A} + \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} + \mathfrak{S}$ den büyüktür; yani kare, verilen dikdörtgenden daha büyüktür. Ancak bu dikdörtgenin bir kare olarak verilmiş olması halinde



Şek. 7

$\mathfrak{S}$ nin yüksekliği kare kenarının bir parçasına değil, fakat tama-

mına eşit olurdu; bu takdirde sonradan inşa edilen kare verilen dikdörtgenden daha büyük olmayıp, onunla çakışırdı. *Şu halde kare, aynı çevreyi haiz başka her dikdörtgenden hakikaten daha büyüktür.*

x, y dik dörtgenin kenarlarının cm cinsinden uzunluklarını gösterdiği takdirde, elde edilen netice dikdörtgenin alanını cm^2 olarak gösteren xy sayısının, çevresi $x+y+x+y=2(x+y)$ olan karenin alanından daha küçük olduğunu ifade eder; karenin kenarı çevrenin dörtte biri olduğundan, alanı $\frac{1}{2}(x+y)$ nin karesini almakla elde edilecek sayıya eşittir. Şu halde elde edilen neticeyi Eski Yunanlılara has geometrik ifade tarzından modern matematiğin formül diline çevirirsek, şu ifade elde edilir:

Herhangi iki x, y pozitif sayısı için daima

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \tag{1}$$

yahut

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{2}$$

dir, yani birbirinden farklı iki sayının geometrik ortalaması bunların aritmetik ortalamasından daima daha küçüktür ve ancak bu sayıların birbirine eşit olması halinde iki ortalama birbirine eşittir.

2. Artık şimdi bir maksimum probleminin mahiyeti ve onu hakikaten çözmenin ne demek olduğu anlaşılmış olmalıdır: böyle bir problemi çözmek demek, bir çözüm ileri sürerek bunun bahis konusu olan özelikte (yukarda alan büyüklüğü) kendisi ile mukayeseye girebilecek bütün diğer şekilleri geçtiğini göstermek demektir. Şimdi bu bölümün esas konusu olan aşağıki probleme dönelim: *Verilen bir daire içine çizilmiş bütün üçgenler arasında alanı en büyük olanını bulmak.* Eflâtun (Platon) un Menon adlı diyalogundaki bir pasaj bu problemin daha Eflâtun zamanında,

yani Öklid'in meşhur kitap serisinden bir asır evvel, çözülmüş olmasa bile hiç olmazsa münakaşa edilmiş olmasına ihtimal verdirmektedir. Bununla beraber ne Öklid'de ne de bugünkü bir kitapta, üslûp bakımından Eski Yunanlılarca bilinebilmesi pek alâ mümkün olan, aşağıki çözüm bulunmamaktadır.

Verilen dairenin içine çizilmiş herhangi bir ABC üçgeninin yanısıra, aynı veya eşit bir daire içine çizilebilecek ve büyüklüğü tamamen belli olmakla beraber, daire içinde istenildiği gibi döndürülebilecek $A_0 B_0 C_0$ eşkenar üçgenini gözönüne alalım. Bu sonuncu üçgenin daire içine çizilebilen başka herhangi bir üç-

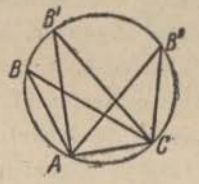
Şek. 8

geninkinden daha büyük bir alanı haiz olduğunu, yani bu eşkenar üçgenin maksimum problemimizin çözümü olduğunu iddia ediyoruz.

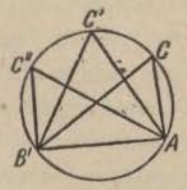
İspat için şu vakıadan hareket edeceğiz: Dairemizin çevresi eşkenar üçgen tarafından üç eşit parçaya ayrılır, fakat diğer üçgen tarafından toplamı yine dairenin çevresini veren herhangi üç parçaya ayrılır. Her ne olursa olsun, bu sonuncu halde üç yay parçasından biri tam daire çevresinin üçte birinden küçük başka biri ise aynı çevrenin üçte birinden büyüktür. Çünkü bu üç yaydan hiçbiri çevrenin üçte birinden küçük olmasaydı, üçünün toplamı bütün çevreyi geçerdi, meğer ki bu yayların herbiri çevrenin tam üçte birine eşit olsun. Bu imkân ise, ele alınan sonuncu üçgen eşkenar olmadığından mevcut değildir; aynı şekilde üç yaydan bir tanesinin de çevrenin üçte birinden büyük olduğu ispat edilir. Geri kalan üçüncü yayın çevrenin üçte

birinden küçük, ona eşit veya ondan büyük olduğu hakkında umumî birşey söylenemez; biz de zaten bilmemize lûzum olmayan bu hususu açık bırakacağız.

Keyfî üçgenimizin köşeleri öyle isimlendirilmiş olsun ki, AB yayı çevrenin üçte birinden küçük, BC yayı da yine çevrenin üçte birinden büyük olsun. Bundan sonra AB yayını C den itibaren CB yayı üzerine nakledelim; bu esnada B noktasının



Şek. 9



Şek. 10

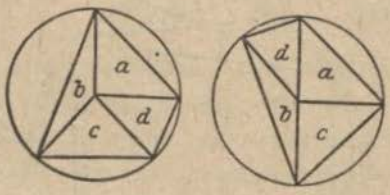
üzerine geldiği noktaya B'' diyelim. Bu suretle CAB'' üçgeni, ABC üçgeninin dairenin AC ye dik olan çapına göre simetriğinden ibaret olur. Bundan başka A dan itibaren B ye doğru çevrenin tam üçte birini nakledelim ve bu suretle vardığımız noktaya B' diyelim. Her hali kârda B' noktası B den daha ötede olacaktır, çünkü AB yayını çevrenin üçte birinden küçük farzetmiştik. Diğer taraftan B', B'' noktasından önce, yani B ile B'' arasında, bulunacaktır; çünkü B', C'' nün de ötesinde olsaydı, AB' yayı AB'' yayından daha büyük olurdu. AB'', kendi simetriği olan CB ye eşit olup, bu sonuncu yay faraziyeye göre daire çevresinin üçte birinden büyük idi. Şu halde AB'' de çevrenin üçte birinden büyüktür. Neticede AB' yayı da daire çevresinin üçte birinden büyük olurdu. Bu ise imkânsızdır, çünkü AB' yayı daire çevresinin tam üçte birine eşit olarak alınmıştı. B' nün B ile B'' arasında bulunduğunu böylece ispat ettikten sonra, ACB' üçgeninin yüksekliğinin aynı tabanı haiz ACB üçgenin yüksekliğinden daha büyük olduğu aşikârdır. Üçgenlere dair belli bir teoreme göre (üçgenin alanı tabanı ile yüksekliği çarpımı-

nın yarısına eşittir) ABC' üçgeninin alanı ACB ninkinden büyüktür. Şu halde ACB' ile, yine verilen daire içine çizilmiş, fakat alanı evvelce verilen üçgenden daha büyük ve bir kenarı (AB') aynı daire içine çizilmiş eşkenar üçgenin kenarına eşit yeni bir üçgen bulmuş olduk. Şimdi ACB' belki de eşkenar bir üçgen olmuştur. Bu hal ancak verilen üçgenin belirttiği AC yayı daire çevresinin tam üçte birine eşit olduğu takdirde vaki olur. Bu halde ispat tamamlanmış demektir, çünkü elde edilmiş olan eşkenar üçgen verilmiş olan üçgenden daha büyüktür. Aksi halde bundan sonra bütün şeklin tabanı olarak eski AC yerine AB' yü alalım (buna uygun olarak şekli öyle çevirelim ki, AB' şeklin altına gelsin (Şekil 10)). Şimdi evvelce AC tabanlı ABC üçgenine uygulamış olduğumuz işlemi $AB'C$ üçgeni için tekrar edersek, B' den itibaren C ye doğru yine tam çevrenin üçte birine eşit bir yay nakletmemiz icap eder ki, bu suretle elde edilen C' noktası A ve B' ile birlikte dairenin içine çizilmiş ve Şekil 8 deki $A_0 B_0 C_0$ üçgenine tamamen eşit olan bir üçgen teşkil eder. Böylece evvelki hale olan benzerlik dolayısiyle bu eşkenar üçgenin $AB'C$ ninkinden ve neticede başta verilen üçgeninkinden daha büyük bir alana sahip olduğu anlaşılır — tabiatiyle bütün bunlar verilen üçgenin eşkenar olmayan herhangi bir üçgen olması faraziyesi altında düşünülmektedir. Şu halde eşkenar üçgen daire içine çizilmiş bütün diğer üçgenlerden daha büyük bir alanı haizdir.

3. Yukarıki bütün muhakeme öyle tertiplenmiştir ki, üzerinde büyük değişiklikler yapılmadan *aynı bir dairenin içine çizilmiş bütün n- köşeliler içinde düzgün olanının en büyük alanı haiz olduğunun* ispatına uygulanabilir.

Bu ispat için, araya sadece basit bir ön ihtar sokmak gerekir: Bir daire içine çizilmiş herhangi bir n-köşeli verildiğine göre (Şekil 11) aynı daire içine öyle bir başka n-köşeli çizebiliriz ki, bu ikincisinin kenarları keyfî olarak seçilebilecek herhangi

bir sırada birincisinin kenarlarına eşit olsunlar. Bunun için daire yüzeyini, merkezini verilen n-köşelinin köşelerine birleştiren yarıçaplar vasıtasiyle n tane sektöre ayırmak ve sonra bu sektörleri, meselâ mukavvadan yapılmış gibi düşünülebilen, daire yüzeyinden keserek istenilen sırada tekrar bir araya getirip yine

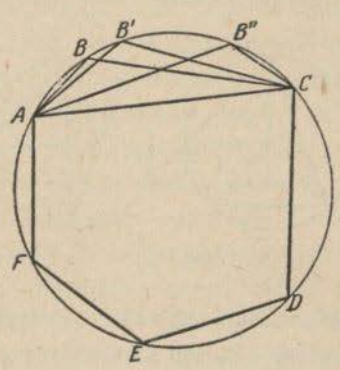


Şek. 11

bütün daireyi teşkil etmenin mümkün olduğunu düşünmek kâfidir. Bu suretle istenilen n-köşeli elde edilmiş olur. Aşikâr olarak bu n-köşelinin alanı başlangıçtakinin aynıdır.

Bu ön ihtara dayanarak, tıpkı üçgende olduğu gibi, düzgün olmayan bir n-köşelinin daire çevresi üzerinde ayırdığı yaylardan hiç olmazsa bir tanesinin çevrenin n de birinden küçük ve bir tanesinin de yine çevrenin n de birinden büyük olduğunu ispatla işe başlıyabiliriz. Bununla tabiatiyle bu iki yayın yan ya bulunduğu iddia edilmemektedir. Çünkü üçgende üç kenardan herbiri diğerleri ile yanyana bulunmakla beraber, üçten fazla kenar ihtiva eden bir n-köşelide mutlaka bu durum yoktur. Eğer yukardaki iki yay tesadüfen yanyana bulunmuyorsa, ön ihtara göre aynı daire içine, aynı alanı haiz öyle bir başka n-köşeli çizebiliriz ki, onda bu iki yay yanyana gelmiş olsun. Şimdi bunlardan küçüğü AB, büyüğü de BC olsun. Bundan sonra A dan itibaren B ye doğru daire çevresinin tam n de birine eşit bir AB' yayı nakleder ve B' nün B ile B nin B'' simetriği arasında bulunduğunu ispat ederiz. Şu halde verilen n-köşelide B köşesi yerine B' köşesini koyarsak ve bütün diğer köşeleri olduğu gibi

bırakırsak, ilk n-köşelinin alanını büyütmüş ve aynı zamanda bir kenarını düzgün n-köşelinin kenarına eşit yapmış oluruz. Geri kalan $n-1$ kenar için de daima ön ihtarı kullanarak aynı şekilde hareket edersek, sonunda verilmiş olan n-köşelinin düz-



Şek. 12

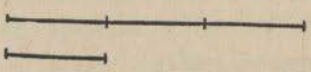
gün n-köşeliden daha küçük olduğunu görürüz (bu işlemlerin sonunda hakikaten düzgün n-köşeliye varırız, çünkü her defasında kenarlardan biri düzgün n-köşelinin kenarına eşit yapılmaktadır).

Tamamen buna benzer şekilde, verilen bir dairenin dışına çizilmiş olan bütün n-köşeliler içinde en küçük alanı haiz olanın da aynı daire dışına çizilmiş düzgün n-köşeli olduğu gösterilebilir.

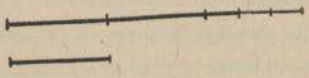
4. Ortak ölçüsüz doğru parçaları ve İrrasiyonel sayılar

Geometrinin menşei hiç şüphesiz uzunluk, yüzey ve hacimlerin ölçülmesi problemleridir. Bir doğru parçasını kendisi içinde tam defa bulunan diğer bir doğru parçası ile ölçmek çok kolaydır (Şekil 13). Eğer ikinci parça birincinin içinde tam defa bulunmaz ve küçük parçayı büyüğü üzerine birçok defa naklettik-

ten sonra bir kısım artarsa (Şekil 14), evvelâ bu artan kısmın ikinci parçanın yarısı, veya üçte biri, veya üçte ikisi, v. s. gibi



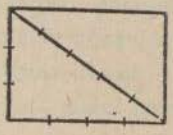
Şek. 13



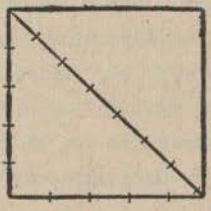
Şek. 14

bir kesri olup olmadığına bakılır. Eğer bu hal vaki ise, ölçen doğru parçasının ölçülen içinde tam defa bulunmaması bir derece telâfi edilebilir: ölçen parça yerine kendisinin belirli bir kesri bu işi görür ve diğer taraftan bu sonuncu parça ölçen parçanın içinde tam defa bulunduğundan, hiç olmazsa öyle bir üçüncü doğru parçası bulmuş oluruz ki, hem ölçülen hem de ölçen doğru parçalarının içinde tam defa bulunsun. Bu üçüncü doğru parçası ilk ikisinin bir «ortak ölçüsü» nü teşkil eder.

İlk geometrik mülâhazalar hiç şüphesiz bu türlü «ortak ölçüler» e dairdi. Meselâ bir kenarı 3 cm ve diğer kenarı 4 cm. olan bir dikdörtgen çizilse, bu dikdörtgenin köşegeni üzerindeki karenin ölçüsü Pitagor teoremine göre $2^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ cm^2 olup, köşegenin uzunluğu 5 cm olur (Şekil 15). Şu halde dikdörtgenin küçük kenarı ile köşegeninin bir ortak ölçüsü 1 cm lik bir doğru parçası olup, ilk iki doğru parçasının birbirine oranı 3 : 5 dir.



Şek. 15



Şek. 16

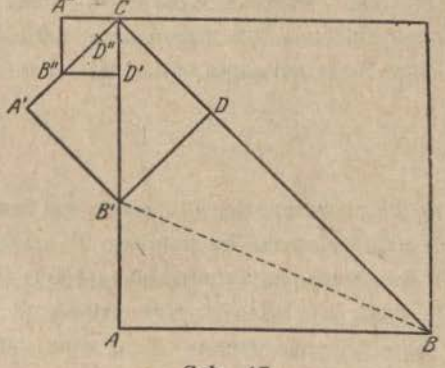
Bu dikdörtgenden bir kareye geçerek, onun kenarı ile köşegeninin bir ortak ölçüsünü araştırmak muhakkak akla pek yakın gelmiş olsa gerektir. Şekil 16 da görüldüğü gibi, kenarın bir parçasını köşegen üzerine nakletmek suretiyle yapılan ilk tecrübeler bir netice vermeyince, aynı işi gittikçe daha küçük parçalarla denemek zorunda kalınır ve sonunda şu soru ile karşılaşılır: acaba kenarın kâfi derecede küçük bir parçası ile neticeye varmak mümkün müdür, yoksa bu parçayı ne kadar küçültürsek küçültelim, hiçbir ortak ölçü bulunamaz mı? Yani kenar ile köşegen *ortak ölçülü* müdür, yoksa *ortak ölçüsüz* (sonuncu ihtimalin adı) müdür? Böylelikle, bir doğru parçasının ilânihaye parçalanıp parçalanamıyacağı, yani bir doğru parçasının hakikatte, çok fazla fakat sonlu sayıda çok küçük bölünmez parçalardan teşekkül edip etmediği, başka bir deyimle bir geometrik doğru parçasının «atomik bir yapı» yı haiz olup olmadığı probleminin içine girmiş oluyoruz. Biliyoruz ki, Platon'dan önce gelen Eski Yunanlı âlimler nesli, bilhassa Demokritos maddenin atomik yapıda olduğunu ileri sürmüştü. Bununla beraber bu, geometrik doğru parçasının da atomik yapıda oluşunu icap ettirmez, pekalâ ilânihaye bölünebilen, bugünkü dille «sürekli» olan, öyle bir doğru parçası düşünebiliriz ki, bunun üzerinde madde atomlar halinde dizilmiş olsun. Yine aynı zamanlarda (M. Ö. 450 civarı) Atinada yaşamış filozof Anaxagoras'tan kalma bazı sözler arasında, doğru parçasının ilânihaye bölünebileceği ifadesi de bulunmaktadır. Bugün kaybolmuş olan bir ders kitap veya notundan böyle bir kırıntının bize kadar gelebilmiş olması, tabiatiyle onun tesadüfî bir ifadeden ziyade, zamanında orijinalliği ile meşhur ve üzerinde çok tartışılmış bir tez olduğuna delâlet eder. Böylece insanlığın bu büyük problemle — tesbit edebildiğimiz kadar — ilk defa uğraşmış olduğu bir zamana inmiş oluyoruz.

Yukarıda anlattıklarımıza bakarak, bundan çok daha ileriye giden, *bir karenin kenarı ile köşegeninin ortak ölçülü olamıyacağı*

keyfiyeti keşfedilince düşüncelerin ne derece altüst olduğu tasavvur edilebilir. Mevcut yazılı vesikalar bu son keşfi Pitagorculara atfetmektedirler. Güney İtalyada teşekkül etmiş bir gizli cemiyet olan Pitagorcular hakkında esaslı olarak pek az şey bilmekteyiz. Efsaneye göre yukarıki keşfi insanlığa ifşa eden Pitagorcu bu suçunun cezasını bindiği gemi batırılarak boğulmak suretiyle ödemiş. Buna karşılık, Platon'un «Kanunlar» adlı kitabında bu keşfi ilk defa olgunluk çağında öğrenmiş olan Platon'un bundan nekadar heyecanlanmış olduğunu anlatan satırlar tamamen mevsuktur.

Aşağıda bu keşfe dair iki ispat vereceğiz. Bununla beraber, başlıbaşına enteresan olan bunlardan hangisinin daha eski olduğu problemi ile uğraşmıyacağız. İkinci ispat sadece Öklid tarafından değil, fakat daha evvel Aristoteles (Aristo) tarafından da nakledilmiştir; birinci ispat ise her halükârda tamamen Eski Yunan espirisine uygun olarak düzenlenmiş ve Öklid'in X. kitabının düşünce çevresine girmekte olup, belki de ikinciden daha eskidir.

Birinci ispatın önüne elemanter bir geometrik mülâhaza getireceğiz. Bu mülâhazanın, kenar ve köşegeni birbiri üzerine üst-



Şek. 17

üste birçok defalar naklederek bir ortak ölçü bulmak üzere girişilmiş neticesiz tecrübelerden doğduğu kendisine bakar bakmaz anlaşılacaktır. Şekil 17 de görüldüğü gibi, kenarı köşegen üzerine B den itibaren nakledersek, D ye kadar olmak üzere ancak bir defa köşegen içine girer. Şimdi D de, karenin AC kenarını B' de kesmek üzere, BD ye bir dik çıkalım ve B' yü B ile birleştirelim. Bu takdirde

$$BA = BD,$$

$$BB' = BB'$$

ve ikisi de dik açı olduğundan

$$\widehat{BAB'} = \widehat{BDB'}$$

dir. Bundan dolayı, üçgenlerin eşitliğine dair olan teoremlerden birine göre BAB' ve BDB' üçgenleri birbirine eşittir. Neticede AB' ve DB' de, eşit üçgenlerin karşılıklı kenarları olarak, birbirine eşittir. Bundan başka $\widehat{B'CB}$, karenin kenarı ile köşegeni arasındaki açı olarak, bir dik açının yarısına eşittir, $\widehat{CDB'}$ de çizim dolayısiyle dik olduğundan CDB' üçgeninin üçüncü açısı için bir yarı dik açıya eşit olmaktan başka çare kalmaz. Şu halde bu sonuncu üçgen bir ikizkenar dik üçgen olup, neticede $DB' = DC$ dir. Şimdiye kadar ispat edilenler toplu olarak

(1) $$AB' = B'D = DC$$

dir.

Şimdi C de de köşegene bir dik çıkılır ve bunun üzerinde BB' ye eşit bir parça alınarak bu parçanın A' ucu B' ile birleştirilirse, $A'B'DC$ başlangıçtakinden daha küçük bir kare olur. Bu karenin CB' köşegeni zaten evvelce çizilmiş bulunmaktadır. Bu kareye ilk kare üzerinde yapmış olduğumuz bütün işlemleri uygulayalım ; yani kenarını D' ye kadar olmak üzere köşegeni

üzerine nakledelim, D' de köşegenine bir dik çıkalım ve bu diki kenarını B' de kesinceye kadar uzatalım. Bu takdirde, tıpkı ilk karedeki gibi

$$A'B'' = B''D' = D'C \tag{2}$$

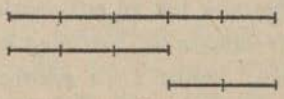
olur. Bu işlemin ilânihaye tekrarlanabileceği aşikârdır. Bu işlemlerin hiçbir zaman sonu gelmez ve her defasında bir evvelkinden daha küçük bir parça artar:

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots \tag{3}$$

Burada her artan parça, ardarda inşa edilen karelerin köşegenleri ile kenarları arasındaki farktan ibarettir:

$$CD = CB - AB,\ CD' = CB' - A'B',\ CD'' = CB'' - A''B'', \ldots \tag{4}$$

Birinci ispattan önce bahsetmek istediğimiz elemanter mülâhaza bu idi. İspatın kendisi ise indirekt bir ispattır. Ele aldığımız karenin kenarı ile köşegeninin ortak ölçülü bulunduğunu, yani karenin kenarının köşegende de tam defa bulunan E gibi bir parçası (alt katı) mevcut olduğunu farzedelim. Bundan sonra E nin tam katı olan herhangi iki doğru parçasının aralarındaki farkın da yine E nin bir tam katı olduğunu düşünelim (Şekil 18).



Şek. 18

Şu halde CB ve AB, E nin tam katları ise, (4) e göre CD de, ve onunla birlikte aynı karenin diğer bir kenarı olan $A'B'$ de E nin bir tam katı olur; bu sonuncu karenin köşegeni olan $CB' = CA - B'A = AB - CD$ - son eşitlik (1) den elde edilir - de, E nin iki tam katının fark olmak dolayısiyle E nin bir tam katıdır. Şu halde E, kenarı $A'B'$ olan karenin de kenarı ile köşegeninin

bir ortak ölçüsüdür. Aynı düşünceleri kenarı AB olan kare yerine $A'B'$ olan kareye uygularsak, E nin kenarı $A''B''$ olan karenin de kenarı ile köşegeninin bir ortak ölçüsü olduğunu görürüz, ilâh...

Artık indirekt ispatı sonuçlandırabilir, yani arzu ettiğimiz tenakuza (aykırılığa) götürebiliriz. Zira, (3) te bulunan bütün doğru parçaları artık hep E nin katlarıdır (tabiî verilen karenin kenarı ile köşegeni ortak ölçülü farzedildiği takdirde). Diğer taraftan (3) e göre E nin bu katları ilânihaye küçülmekle beraber, hiçbir zaman sıfır olamazlar. Bu ise E gibi sabit bir doğru parçasının katları için mümkün değildir; meselâ başlangıçtaki CD parçası E nin 1000 katı olsa idi, CD', E nin daha küçük bir katı olduğundan en çok 999 katı olurdu, ilâh... Neticede bu dizinin en geç 1000 terimi E nin E den küçük bir katı, yani 0 katı olurdu ki bu da (3) dizisinin hiçbir teriminin 0 olamıyacağına dair yukarıda elde etmiş olduğumuz neticeye aykırı olurdu. Şu halde bir karenin kenarı ile köşegenini ortak ölçülü kabul edersek, böyle bir tenakuza varırız.

İkinci ispat çok daha basit olup, bunun ihtiyaç gösterdiği ufak aritmetik hazırlık, ilk geometrik ispatın önüne eklediğimiz uzun elemanter geometrik hazırlıktan çok daha kısadır.

Bu aritmetik hazırlık tek ve çift sayılar hakkındadır. Bilindiği gibi, diğer bir sayının iki katı olan her sayıya «çift», bir çift sayıyı takip eden, yani $2x+1$ şeklinde olan, her sayıya da «tek» sayı denir. Bir tek sayının karesi yine tektir; çünkü

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 2(2x^2 + 2x) + 1$$

de bir çift sayıyı takip eder. Buradan derhal aşağıki yardımcı teorem elde olunur :

1. Yardımcı Teorem. *Eğer bir çift sayının karesi çift ise, kendisi de çifttir.* Çünkü tek olsaydı, yukarıda ispat ettiğimize gö-

re karesinin de tek olması lâzım gelirdi. Aşağıki yardımcı teorem de aynı derecede basittir:

2. Yardımcı teorem. *Bir çift sayının karesi daima 4 ile bölünebilir, yani bir tam sayının 4 katıdır.* Çünkü $2x \cdot 2x = 4x^2$ olup, bu da $4g$ şeklindedir.

Esas ispat burada da indirekt olarak yapılacaktır. Farzedelim ki, karenin kenarı ile köşegeni E gibi bir ortak ölçüyü haiz olsun ve kenar E nin tam s katı, köşegen de d katı olsun. Köşegenin kareyi böldüğü iki eşit ikizkenar dik üçgenden birine Pitagor teoremini uygularsak,

$$d^2 = s^2 + s^2, \quad \text{yani } d^2 = 2s^2 \tag{5}$$

elde ederiz.

Bundan başka şunu da düşünebiliriz: d ve s tam sayıları birbirine nisbetle kısaltılmış olarak alınabilir. Zira bunların, meselâ 10 ve 16 nın 2 ile sırasiyle 5 ve 8 şeklinde kısaltılması gibi, herhangi bir sayı ile kısaltılabilmeleri E ortak ölçüsünü lûzumundan küçük seçmiş olduğumuzu ve E yerine onun bir katını almanın caiz olduğunu gösterir. Şu halde bu kısaltmayı daha işe başlamadan evvel yapılmış sayabiliriz ki, biz de öyle yapacağız.

Bundan sonra, (5) ten evvelâ d^2 nin bir çift sayı olduğu neticesi çıkar ki, buradan da birinci yardımcı teoreme göre d nin de çift olması icap ettiği elde edilir. Bu ise, s nin tek olmasını icap ettirir. Çünkü d ve s nin ikisi de çift olsaydı, bunları 2 ile kısaltabilirdik; halbuki bu, bunları baştan kısaltılmış olarak aldığımıza dair açıkça yapmış olduğumuz faraziyeye aykırıdır.

Fakat diğer taraftan 2. yardımcı teoreme göre, d çift olunca d^2, 4 ile bölünebileceğinden, yani meselâ $d^2 = 4g$ olacağından, $2s^2 = 4g$ yahut $s^2 = 2g$ elde edilir. Şu halde s de karesi çift olan

bir sayı olur ve 1. yardımcı teoremin tekrar tatbiki ile s nin çift olduğu neticesi çıkarılır. Bu ise, d nin zaten çift olduğuna ve onun neticesi olarak s nin tek olması lâzım geldiğine dair yukarıda bulduğumuz neticeye aykırıdır. Bu suretle indirekt ispatın başındaki faraziye bizi bir tenakuza götürmüş oldu.

Her iki ispatın da ortak özü, azalan bir tam sayı dizisinin muhakkak bir yerde son bulacağı fikridir. Birinci ispatta bu prensip açık olarak ortaya çıkmıştı. İkinci ispatta ise aynı prensip sayıların kısaltılmasından bahsedilen yerde kapalı olarak kullanılmıştır. Çünkü, mümkün olduğu müddetçe yapılacak üstüste kısaltmalar bahis konusu sayıları devamlı olarak küçüteceğinden, bu prensibe göre nihayet öyle bir yere gelinecektir ki artık kısaltma mümkün olmasın. İkinci ispatta açık olarak söylememekle beraber, s ve d çiftini bu (yani artık kısaltılamıyacak) halde aldık ki, zaten okul aritmetiğinde de kısaltmanın ilânihaye yapılamıyacağı hiç bir münakaşaya girişmeden her zaman kabûl edilen bir şeydir. Bugünkü matematik dili ile (5) förmülü

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 = 2$$

şekline sokulur ve ispatın neticesi şöyle ifade edilir:

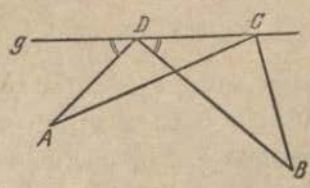
Karesi 2 ye eşit olan hiç bir $x = (d/s)$ kesri (rasyonel sayısı) mevcut değildir, yahut daha başka türlü: $\sqrt{2}$ ye eşit olan hiçbir x rasyonel sayısı mevcut değildir, yahut $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır.

5. H. A. Schwarz'a göre yükseklik ayakları üçgeninin bir minimum özeliği

Bu kere gene bir maksimum — daha doğrusu bir minimum — problemi ile uğraşacağız. Bu münasebetle müşahhas olduğu kadar ince işlenmiş bir matematik düşünce örneğini de tanımış

olacaksınız. Bu düşünce, yarım asır kadar önce Berlin'de profesörlük etmiş olan ve dehası yüksek ve büyük travaylarında olduğu kadar, böyle bir matematik minyatüründe de göze çarpan Hermann Amandus Schwarz'a aittir.

1. Probleme alışmak maksadiyle, evvelâ çok basit ve optiğin bildiğimiz inîkâs (yansıma) kanunu ile alâkalı başka bir problemi ele alacağız. Bilindiği gibi bu kanun, A dan çıkan ve g aynasında aksederek B ye gelen (Şekil 19'a bakınız) bir ışının g

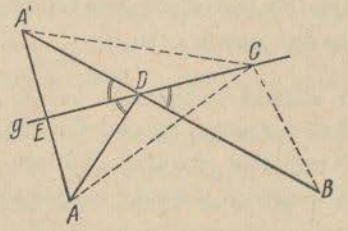


Şek. 19

deki aksi sırasında geliş ve yansıma açılarının birbirine eşit olduğunu ifade eder. Bizim iddiamız, ışığın seçtiği bu yolun A dan hareket edip g ye uğramak şartiyle B ye giden en kısa yol olduğudur — tıpkı A iskelesinden B iskelesine giden ve arada g sahiline uğraması lâzım gelen bir geminin takip edeceği yol gibi. Burada akla sahip olmayan ışığın, neden akıllı kaptanın bilhassa aklını kullanarak seçeceği yolun aynını seçtiğini araştıracak değiliz; sadece *eşit geliş ve yansıma açıları altında kat'edilen A B D yolunun başka herhangi bir A C B yolundan daha kısa olduğu* matematik hakikatını tesbit etmekle yetineceğiz.

Bunun *ispatı*, matematik bakımından sırf bir «matematik hilesi» gibi görünen, fakat problemin optikteki tefsirinin aklımıza getirdiği bir işleme dayanır: A noktası ile AC ve AB doğrularını g aynasından aksettirelim. Şek. 19 un, üzerinde bu işlem yapıldıktan sonraki hali Şek. 20 de gösterilmiştir. A', A nın g ye göre simetriği olduğuna göre, $A'C$, AC nin ve $A'D$ de AD nin

simetriği olurlar. Şu halde $A'C = AC$, $A'D = AD$ olur. Bundan dolayı EDA ve EDA' üçgenleri eşit olup. $\sphericalangle EDA =$



Şek. 20

$\sphericalangle EDA'$ dür. Faraziyeye göre $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CDB$ olduğundan, $\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle EDA'$ karşılıklı tepe açıları olurlar, yani $A'D$, DB nin uzatılmışından ibarettir.

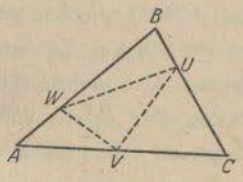
Diğer taraftan, ADB kırık çizgisinin uzunluğu $A'DB$ ninkine ve ACB nin uzunluğu da $A'CB$ ninkine eşittir. Yukarıda ise, $A'DB$ nin A' yü B ye birleştiren tek bir doğru parçasından ibaret olduğunu görmüştük. Şu halde $A'DB$, $A'CB$ den daha kısadır — iki noktayı birleştiren doğru parçasının bu iki nokta arasındaki en kısa uzaklık olduğunun ispatına burada girişmeyeceğiz — ve neticede ADB de ACB den daha kısadır ki, ispatı istenilen şey de bu idi.

2. Bu bölümde asıl şu problemle uğraşacağız: *verilmiş bir ABC dar açılı* (1) *üçgeninin içine çevresi mümkün olduğu kadar küçük bir UVW üçgeni çizilmek isteniyor* (Şek. 21).

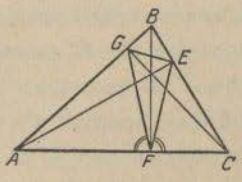
İddia ediyoruz ki, *problemin çözümü «yükseklik ayakları üçgeni» dir*, yani *ABC üçgeninin üç yüksekliğinin kenarlar üzerindeki ayaklarının teşkil ettiği EFG üçgeni (Şek. 22) ABC nin içine çizilmiş başka herhangi bir UVW üçgenininkinden daha küçük bir çevreyi haizdir.*

(1) Yani açılarının üçü de dar olan

Evvelâ, bu yükseklik ayakları üçgenine dair bir yardımcı teorem ispat edeceğiz. Bu yardımcı teoreme göre, (optikteki yansıma kanununda olduğu gibi) $\sphericalangle AFG = \sphericalangle CFE$ olup, F noktasına dair bu keyfiyet aynen E ve G noktalarında da doğrudur. Bu yardımcı teoremin ispatı için ortaokul geometri dersle-

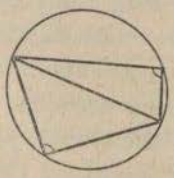


(Sek. 21)

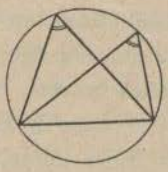


(Şek. 22)

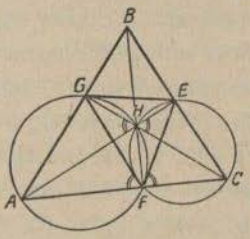
rinde görmüş olduğumuz bazı bilgileri hatırlamaya ihtiyaç vardır: Bir yarım daire içine çizilmiş açının dik açı alduğuna dair Tales teoremi (Şek. 23) çevre açısı teoremi (Şek. 24), yükseklikler teoremi (yani bir üçgenin üç yüksekliği bir noktada kesişir, H ile göstereceğimiz bu noktaya yüksekliklerin keşişme noktası denir). Bu hâtıralarla donatıldıktan sonra, Şek. 25 ten çapı AH olan dairenin G ve F den ve çapı CH olan dairenin de E ve F den geçtiğini ve bundan başka $\sphericalangle AFG$ nin AG yayı



Şek. 23



Şek. 24

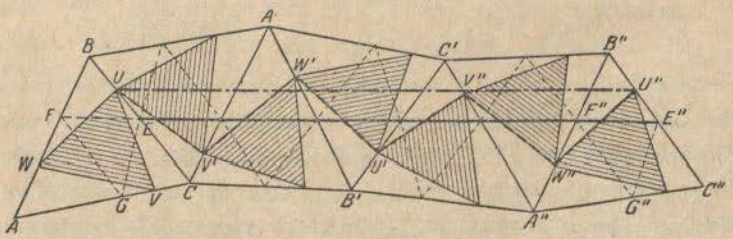


Şek. 25

içine çizilmiş çevre açısı olmak dolayısiyle $\sphericalangle AHG$ ye eşit olduğunu ve gene aynı şekilde $\sphericalangle GFE$ nin $\sphericalangle CHE$ ye eşit bulun-

duğunu elde ederiz. Diğer taraftan, $\sphericalangle AHG$ ve $\sphericalangle CHE$ karşılıklı tepe açıları olarak birbirine eşittir. Şu halde $\sphericalangle AFG = \sphericalangle CEF$ olup, iddiamız ispat edilmiş olur.

3. Bu hazırlıklardan sonra H. A. Schwarz'ın ispatına yanaşabiliriz. Şimdi ABC üçgeninin BC kenarına göre simetriğini alalım, sonra simetri neticesi elde edilen $A'BC$ üçgeninin de CA' kenarına göre $C'AB'$ simetriğini alalım ve nihayet bu son üçgenin de $A'B'$ kenarına göre $A'C'B'$ simetriğini alalım. Bundan sonra $A'B'C'$ üçgenine de yukarıki şekilde $B'C', C'A'', A''B''$, ye göre üç simetri uygulayarak $A''B''C''$ üçgenini elde edelim.



Şek. 26

Evvelâ —gözle görüldüğü gibi— $A''B''C''$ üçgeninin ABC başlangıç durumundan sadece bir öteleme ile elde edilebileceğini gösterelim. Bunu ispat için, önce verilen üçgenin ilk iki simetri sonundaki durumunu düşünelim. Her defasında bahis konusu üçgeni kendi düzleminden çıkarıp bir kenarı etrafında döndürdükten sonra tekrar kendi düzlemi üzerine kapatmaktan ibaret olan iki simetri tatbik etmek yerine, başlangıç üçgenini C noktası etrafında saat ibresi yönünde 2γ kadar döndürmek yeter. Aynı şekilde, ilk üçgenin 3. durumundan 5. durumuna geçmek için B' noktası etrafında ve saat ibresinin aynı yönde 2β lık bir dönme, ve nihayet 7. ve sonuncu duruma geçmek için A'' etrafında aynı yönde 2α lık bir dönme kâfidir. Şu halde toptan olarak, ilk üçgen $2\gamma + 2\beta + 2\alpha$ kadar döndürülmüş olu-

yor ki — üçgenin açıları toplamı 2 dik açı olduğundan bu da saat ibresinin yönünde 4 dik açı yani tam bir devir eder. Şu halde ilk üçgen en sonra ilk durumuna gelmiş oluyor, ancak düzleminin başka bir yerinde ve ötelenmiş olarak. Şu halde BC, $B''C''$ *ye paraleldir.*

Şimdi yukarıki simetrilerde yükseklik ayakları üçgeni ile UVW nin almış olduğu durumları takip edersek — bu takibi kolaylaştırmak için şekilde taramalar kullanılmıştır —, evvelâ yukarıki yardımcı teoremden EG nin 2. durumunun FE nin uzatılmasından ibaret olduğunu ve aynı şekilde diğer durumlarda da ayaklar üçgeninin bir kenarının bir evvelki durumdaki aynı üçgenin bir kenarının uzatılmışını teşkil ettiği neticesini elde ederiz. Şu halde, şekilde kalın çizilmiş EE'' doğru parçası iki tanesi FG ye, ikisi GE ye ve geri kalan ikisi de EF ye eşit olan 6 doğru parçası ihtiva eder: şu halde *EE'' yükseklik ayakları üçgeninin çevresinin iki katına eşittir.*

ABC üçgeni içine çizilmiş herhangi bir UVW üçgeninin birbiri peşi sıra aldığı durumları da yukarıkine benzer şekilde takip edersek, *U dan U'' ye giden kesintili fakat kalın çizilmiş $UV'W'U'V''W''U''$ kırık çizgisinin de UVW üçgeninin çevresinin iki katına eşit olduğunu görürüz.*

Şimdi $EE''UU''$ dörtgenindeki UE ve $U''E''$ karşılıklı kenarları (ispat edilmiş olduğu gibi) birbirine paralel ve (ABC üçgeninin aynı durumlarda birbirine tekabül eden parçaları olarak) birbirine eşittir. Şu halde elemanter geometrinin tanınmış bir teoremine göre bu dörtgen bir paralel kenar olup, neticede diğer iki karşılıklı kenar da birbirine eşittir, yani $UU'' = EE''$ dür. Bundan dolayı UU'' de yükseklik ayakları üçgenin çevresinin iki katına eşittir. UU'' doğru parçasının aynı uçları haiz ve UVW nin çevresinin iki katı uzunluğundaki kırık çizgiden daha kısa olduğu ise, doğrudan doğruya aşikârdır. Şu halde yükseklik ayakları üçgeninin çevresi UVW üçgenininkinden daha küçük olup, istenilen bu suretle ispat edilmiş bulunur.

Yukarıki ispat, matematik ispatın halis bir örneğidir. Bu ispatta faraziye ve iddiaya öyle yeni bir şekil verilmiştir ki teoremin özü bir bakışta görülüp anlaşılabilir hale gelmiştir.

6. L. Fejér'e göre Aynı Minimum Özeliği

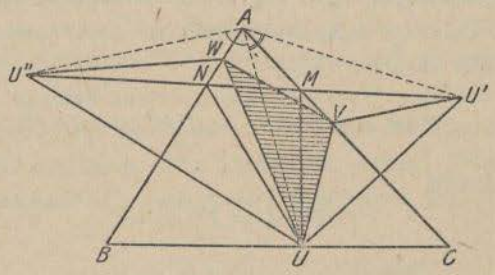
1. Bir önceki bölümde açılarının üçü de dar olan bir üçgenin içine çizilen bütün üçgenler arasında yükseklik ayakları üçgeninin en küçük çevreyi haiz olduğunu ispat etmiştik. Burada aynı teoremin ikinci bir ispatını vermek istememizin sebebi, bu türlü teoremlerde kullanılan ispat yollarının, o teoremlerin matematik muhtevasından çok daha önemli olmasıdır. H. A. Schwarz'a göre yaptığımız önceki ispatta, evvelâ iki noktayı birleştiren doğru parçasının o iki nokta arasındaki en kısa yolu teşkil ettiği temel keyfiyetini, sonra da şekillerin tasvirinde simetri dönüşümlerini kullandık. Bu iki prensip aşağıda vereceğimiz ikinci ispata da esas teşkil edecektir. İşin asıl entresan tarafı da, bunların iki ispatta ayrı ayrı şekilde kullanılışlarını birbirleriyle karşılaştırmaktır.

2. Verilen dar açılı bir ABC üçgeninin içine U köşesi BC, V köşesi CA ve W köşesi de AB üzerinde olmak üzere herhangi bir UVW üçgeni çizilmiş olsun.

Şimdi U noktasının AC ve AB doğrularına göre U' ve U'' simetriklerini alalım. Bu takdirde, simetriden dolayı $UV = U'V$ ve $UW = U''W$ olur. Şu halde, UV, VW WU doğru parçalarından teşekkül eden üçgenin çevresinin uzunluğu $U'VWU''$ kırık çizgisinin uzunluğuna eşittir.

Şimdi U noktası sabit tutulup, V ve W noktalarının yerleri değiştirilirse, sadece U noktası ve ABC üçgeni vasıtasiyle beliren U' ve U'' noktaları sabit kalır. Bu takdirde $U'VWU''$ kırık çizgisi, daima sabit U' ve U'' noktalarını birbirine birleştirmekte

ve UVW üçgeninin çevresine eşit kalmakta devam eder. U' ve U'' noktalarını birleştiren bir kırık çizgi ise, yukarıda bahsetti-



Şek. 27

ğimiz prensibe göre ancak tek bir doğru parçasından ibaret olduğu takdirde en küçük uzunluğu haiz olur. Şu halde $U'U''$ doğru parçası, U köşesi sabit bırakılan bütün içe çizilmiş üçgenlerin en küçük çevre uzunluğunu gösterir. $U'U''$ ye tekabül eden ve bir köşesi U da bulunan içe çizilmiş üçgenlerin en kısa çevrelisi olan üçgeni UMN ile gösterelim.

3. ABC içine çizilmiş üçgenlerden U gibi bir köşesi sabit olanlar içinde en kısa çevrelisini bu suretle bulmuş olduğumuzdan, ABC içine çizilmiş bütün üçgenlerin en kısa çevrelisini bulmak için U nun muhtelif mevkilerine tekabül eden en kısa çevreli üçgenleri birbiriyle mukayese ederek bunların da içlerinde en kısa çevreli olanını bulmak kâfidir.

Şu halde şimdi bahis konusu olan şey, U noktasını $U'U''$ doğru parçası mümkün olduğu kadar küçük olacak şekilde yerleştirmektir. Bu maksatla, $AU'U''$ üçgeninin $AU' = AU''$ olmak üzere ikizkenar olduğuna işaret edelim. Çünkü bu kenarların her biri aynı AU doğru parçasının simetriği olduğundan, $AU = AU' = AU''$ dür.

Her ne kadar $AU'U''$ üçgeninin ikiz kenarlarının uzunluk-

ları, bunların AU ya eşit olmaları dolayısiyle, U nun BC üzerindeki mevkiine tâbi iseler de, *$U''AU'$ açısının büyüklüğü U nun mevkiine tâbi olmayıp*, ABC üçgeninin verilmesiyle tamamen belli olur. Zira simetri dolayısiyle şekildeki açılar arasında aşağıdaki eşitlikler caridir:

$$\sphericalangle UAB = \sphericalangle U''AB, \quad \sphericalangle UAC = \sphericalangle U'AC.$$

Şu halde evvelâ

$$\sphericalangle U''AU = 2 \sphericalangle UAB,$$

ve sonra

$$\sphericalangle U'AU = 2 \sphericalangle UAC,$$

ve neticede

$$\sphericalangle U'AU + \sphericalangle U''AU = 2 \sphericalangle UAB + 2 \sphericalangle UAC,$$

yahut

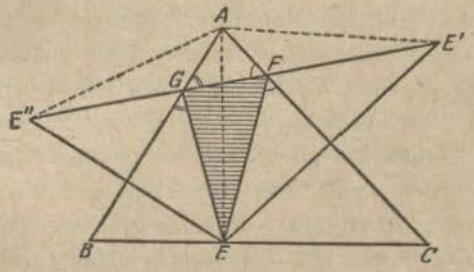
$$\sphericalangle U'AU'' = 2 \sphericalangle BAC$$

olup, $U'AU''$ açısı hakkindaki iddiamız ispat edilmiş olur.

4. Şimdi mümkün olduğu kadar küçük yapmak istediğimiz $U'U''$ doğru parçası, $AU'U''$ ikizkenar üçgenin tabanıdır. Bu üçgenin tepe açısı U nun mevkiine tâbi olmadığından, bütün $AU'U''$ üçgenlerinin tepe açıları birbirine eşittir. Bu üçgenler içinde en kısa tabanı haiz olanı, aynı zamanda en kısa ikiz kenarı haiz olandır. AU' ve AU'' ikiz kenarları ise AU ile aynı uzunluktadır. Şu halde eğer U nun mevkiini AU mümkün olduğu kadar küçük olacak şekilde seçersek, en kısa $U'U''$ doğru parçasını elde ederiz.

AU doğru parçası ise, A noktası ile BC doğrusunun bir noktasını birleştirir. Bir noktadan bir doğruya olan en kısa yol bilindiği gibi o noktadan o doğruya çizilen dik oluğundan, AU nun BC ye dik olması başka bir deyimle, AU nun ABC üçgeninin A dan çıkan yüksekliği olması icap eder.

5. Artık şimdi ABC içine çizilen en küçük çevreyi haiz EFG üçgenini inşa edebiliriz. Evvelâ E, A dan BC ye düşülen dikmenin ayağıdır. E' ve E'', E nin AC ve AB ye göre simetrikleri olduğuna göre, $E'E''$, ABC içine çizilen bir üçgenin en küçük çevre uzunluğudur. $E'E''$ doğrusunun AC ve AB kenarları ile F ve G kesişme noktaları aranılan en kısa çevreli üçgenin diğer köşeleridir. ABC içine çizilmiş EFG den farklı her UVW üçgeninin EFG ninkinden daha büyük bir çevreyi haiz olduğu, yukarıkı muhakemeyi bir daha gözönüne getirerek görülür. Çünkü



Şek. 28

ya UVW üçgeninin U köşe noktası E den farklıdır ve bu takdirde ona tekabül eden $U'U''$ doğru parçası $E'E''$ den daha uzun olup, UVW nin çevresi de EFG ninkinden uzun olur, yahut U noktası E ile çakışır ve bu takdirde de V ve W köşelerinden en aşağı biri F ve G den farklı olup, neticede $E'VWE''$ kırık çizgisi $E'FGE''$ düz çizgisinden daha uzun olarak, UVW üçgeninin çevresi gene EFG ninkinden uzun olur.

6. Şu halde, verilen bir üçgenin içine mümkün olduğu kadar küçük bir üçgen çizmek problemi tek bir çözümü haizdir. Çözümün bu tekliğinden diğer bazı neticeler çıkarmak için faydalanacağız. Çözüm üçgeninin bir köşesi olan E noktası A dan indirilen yüksekliğin ayağı olarak bulunmuştur. Fakat bundan sonra çözüm üçgeninin diğer F ve G köşeleri B ve C den çıkan

yüksekliklerin yardımını kullanmadan, daha ziyade E den hareket ederek yapılan bazı simetriler yardımı ile bulunmuştur.

Şimdi şöyle düşünebiliriz: ABC üçgeni üzerinde A notasına dair yukarıda yapmış olduğumuz işlemleri B noktası için de tekrar edebiliriz, yani U noktasının AB ve AC ye göre simetriklerini almak yerine, V noktasının BA ve BC ye göre simetriklerini alabilir ve buna uygun şekilde devam edebiliriz. Bu takdirde en kısa çevreli üçgen olarak, F köşesi B den çıkan yüksekliğin ayağı olan bir üçgen bulunur. Fakat biraz evvel tespit etmiş olduğumuz gibi, *ancak bir tane* en kısa çevreli üçgen mevcut olduğundan, B den hareket ederek yapılan çizim de A dan hareket ederek yapılan çizim sonunda elde edilen üçgeni verir. Aynı şey C noktası içinde doğru olduğundan, EFG en kısa çevreli üçgeninde yalnız E değil, F ve G noktaları da karşılarındaki köşelerden çıkan yüksekliklerin ayaklarıdır. Böylelikle 5. bölümde ifade etmiş olduğumuz, yükseklik ayakları üçgeninin verilen dar açılı bir üçgen içine çizilebilen en küçük çevreli üçgen olduğu keyfiyetini bir daha ispat etmiş olduk.

7. Fakat ispatımız daha başka neticelerin de elde edilmesine müsaittir. Nasıl yukarıda çözümün tekliğini kullanarak E için cari olan özeliğin F ve G için cari olduğunu göstermişsek, aksine, F ve G nin çizimleri neticesi haiz oldukları bir özeliğin de aynı zamanda E için de cari olacağını ispat edebiliriz. Hakikaten simetri dolayısiyle $\sphericalangle EFC = \sphericalangle E'FC$ dir. Diğer taraftan $\sphericalangle E'FC$ ve $\sphericalangle GFA$ karşılıklı tepe açıları da birbirine eşit olduklarından, $\sphericalangle EFC = \sphericalangle GFA$ olur, yahut söyle: En küçük çevreli üçgenin F den çıkan kenarları verilen üçgenin AC kenarı ile eşit açılar yapar. Aynı şey G noktasında da caridir. Şimdi F yi A dan başlayan bir çizim neticesinde değil de, doğrudan doğruya B den çıkan yüksekliğin ayağı olarak bulup, sonra E yi simetri çizimi neticesinde elde edebileceğimizden, E noktasındaki $\sphericalangle GEB$ ve $\sphericalangle FEC$ açılarının da birbirine eşit olduğunu görürüz.

EFG üçgeninin en kısa çevreli üçgen olma özeliğini bir an unutsak bile, 6. dolayısiyle bu üçgeni yükseklik ayakları üçgeni olarak tamamen belirtebiliriz. Bu tefsiri yukarıki mülâhaza ile birleştirerek, şu teoreme ulaşırız: Üç açısı da dar olan bir *ABC* üçgeninin içine çizilen yükseklik ayakları üçgeninin kenarları ilk üçgenin kenarları ile ikişer ikişer eşit açılar yapar, şöyle ki, *ABC* nin aynı bir kenarında teşekkül eden iki açı birbirine eşittir.

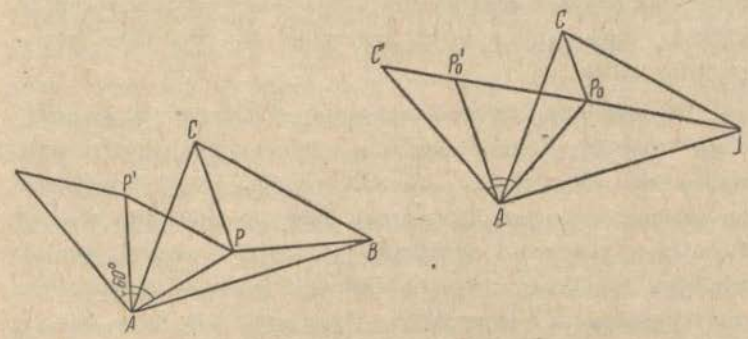
Bu teoremde minimum özeliğinin artık hiç bir izi kalmamış olup, teoremin alışmış olduğumuz elemanter geometri teoremlerinden şekil itibariyle bir farkı kalmamıştır. Bu yüzden elemanter geometri metodları ile de ispatı mümkün olmalıdır, ki bu da 5. bölümde yapılmıştır. Hakikaten yükseklik ayakları üçgeninin minimum özelliğinin Schwarz tarzındaki ispatında yukarıki elemanter geometrik bilgiye ihtiyaç duymuş ve onu daire bahsine ait elemanter geometri teoremleri yardımiyle ispat etmiştik. Fejér'in verdiği ispatın Schwarz'ınkine nazaran bir avantajı, iki nokta arasındaki en kısa yol prensipi ile simetrilerden başka bir şey kullanmadan hedefe varmasıdır. Bundan başka, Schwarz'ın ispatında altı tane simetri bulunurken, kendisinde sadece iki simetri kullanılması da Féjer ispatının diğer bir üstün tarafıdır.

Yükseklik ayakları üçgeni teoreminin yanına ona benzeyen aşağıki teoremi koyabiliriz:

Üç açısı da dar olan her *ABC* üçgeninde o üçgenin üç köşesine olan uzaklıkları toplamını minimum kılan bir ve ancak bir *P* noktası mevcuttur. Bu *P* noktasını üç köşeye birleştiren doğrular, aralarında 120° lik açılar teşkil ederler.

Hermann Amandus Schwarz'ın ellinci doktara jubilesi (1914) dolayısiyle çıkarılan kitapta L. Schruttka bu son teoremin, bilhassa istiyerek, 5. bölümdeki Schwarz ispatı modeline göre yaptığı bir ispatını vermiştir. Bir müddet evvel Bückner adında Königsberg'li bir Üniversite öğrencisi aynı teoremin şayanı

dikkat derecede kısa bir ispatını vermiş olup, bu ispatın Schruttka'nınkine göre durumu, yükseklik ayakları üçgenine dair teoremdeki Fejer'in ispatının H. A. Schwarz'ın ispatına göre olan durumunun aynıdır. (Şek. 29 a, b). Bückner'in ispatı ancak bir kaç satır tutacaktır.



Şek. 29 a ve b

Şimdi P, ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta olsun. ACP üçgeni A noktası etrafında 60° döndürülürse $AC'P'$ mevkiine gelir. Dönmenin yönü öyle seçilmelidir ki, AC üçgenden uzaklaşsın, yani AC doğrusu AB ile AC' arasında kalsın. Bu takdirde $C'P' = CP$, $PP' = AP$ olur (çünkü APP' üçgeni sadece ikizkenar olmayıp, A daki açının 60° olması dolayısiyle aynı zamanda eşkenardır). *Şu halde $BPP'C'$ kırık çizgisinin uzunluğu, P nin A,B,C köşelerine olan uzaklıklarının toplamını gösterir.* C' noktası P noktasının mevkiine tâbi değildir. Şu halde P, üçgen içinde hangi mevkii alırsa alsın, elde edilecek kırık çizgiler sabit B ve C' noktalarını birleştirirler. Bütün bu kırık çizgiler içinde ise, en kısası BC' doğru parçasının kendisidir. Şu halde, minimum şartını gerçekleştiren P_0 noktası BC' doğru parçasında bulunur ve AP_0C' açısının 60° olması dolayısiyle BC' üzerinde tamamen belirli olur. Şu halde, bitişik AP_0B açısı da 120° olmak mecburiyetindedir. Yukarıki çizim minimum'u veren *bir tek*

P_0 noktasının mevcut olabileceğini gösteriyor. Şu halde A yı diğer köşelerle birleştirmek suretiyle yapılan çizimler de aynı P_0 noktasını verir ve $\sphericalangle BP_0C$ ve $\sphericalangle CP_0A$ açılarının da her biri 120° olur.

7. Cümleler Teorisi hakkında Bazı bilgiler

Bu kısımda Matematiğin temelleri ile sıkı temas halinde olan bir konudan bahsetmemizin sebebi, bu temellerin felsefî ehemmiyetinden ziyade, cümleler teorisinin büyük kurucusu Georg Cantor tarfından yaratılmış olan kavram ve muhakemelerin hiç bir ön bilgiye ihtiyaç göstermeden anlaşılabilir tabiatı ve bu muhakemelerin halis matematik karakteridir. Çünkü halis (hakikî) matematik, bir takım hesap ustalıklarını üstüste yığarak değil, fakat mümkün olduğu kadar az yardımcı bilgi ve sırf fikirler kullanarak trivial olmayan neticeler elde etmek san'atıdır.

Bütün tam sayılar mı, yoksa çift tam sayılar mı daha çoktur? Bir doğru parçası üzerindeki noktalar mı, yoksa bir kare yüzeyi üzerindeki noktalar daha çoktur? G. Cantor'un hareket noktası bu ve buna benzer sorulardır. Tabiatiyle, bu soruların yukarıki şekilde sarih bir manası yoktur ve Cantor'un atmış olduğu ilk önemli adım da bunlara ilk defa olarak açık bir mana vermiş olmaktır. Bunu yaparken sonlu sayıda eşyayı sayma tarzını örnek almış ve gramerde kardinal ve ordinal sayı kavramları ile ifade edilen farkı nazarı dikkate almıştır.

Bir dans salonuna girdiğimizi ve orada bulunanlar içinde kadınların mı yoksa erkeklerin mi daha çok sayıda olduğunu kendi kendimize sorduğumuzu tasavvur edin. Bu, nasıl tespit edilebilir? Meselâ, bir usûl dansı yöneten şahsın bütün kadınları bir duvarın, bütün erkekleri de öteki duvarın önünde dizerek ayrı ayrı sayması ve çıkan iki rakkamı birbiriyle mukayese etmesidir. Başka bir usûl çok daha kolaydır: yönetici dansı baş-

latır; her erkek bir kadını angaje eder ve geriye erkekler mi yoksa kadınlar mı kaldığına göre hangilerinin daha fazla olduğu kendiliğinden anlaşılır.

İşte bu çiftleştirme Cantor tarafından hareket noktası olarak alınmıştır. Meselâ bütün tam sayıların çift sayılardan daha fazla olup olmadığını anlamak istediği takdirde, bu iki takım sayı arasında tam bir çiftleştirme yapılabilip yapılamadığına bakmaktadır. Hakikaten, her tam sayının, hiç biri açıkta kalmamak üzere, bir çift sayı angaje etmesi mümkündür. Meselâ şu şekilde bir çiftleştirme yapılabilir:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...,

öyle ki yukarıki sıradaki her tam sayı tam kendi altındaki çift sayı ile bir çift teşkil etsin. Bu esnada her iki sayı sırasında da hiç bir sayı açıkta kalmaz. Burada şayanı dikkat olan, alttaki sırada bulunanların üsttekilerden farklı şeyler değil, fakat üsttekilerin ancak bir kısmı olmasına rağmen bu iki sırada bulunan şeyler arasındaki çiftleşmenin hiç bir şey artmadan tam olarak yapılabilmesidir.

Burada herkesin aklına bir itiraz gelebilir ve bu örnekle (dans salonu örneğinde olduğu gibi) sonlu cümleler arasındaki büyük farka işaret edilebilir. Evvelce bahsetmiş olduğumuz dans salonunda hangi erkeğin hangi kadını angaje etmesinin önemi yoktur; birçok türlü mümkün olan bu seçimler nasıl yapılırsa yapılsın, salona yeni şahıslar girmediği veya salondan bazı şahıslar dışarı çıkmadığı müddetçe açıkta kalanların sayısı hiç değişmez. Fakat tam ve çift sayılar halinde durum başkadır. Bu son hal için yukarıda hiç bir açık vermeyen bir çiftleştirme kaidesi verilmişti; fakat bunun yanısıra öyle bir çiftleştirme kaidesi daha verilebilir ki, tam sayılardan bir kısmı arta kalsın.

Bunun için, akla en yakın gelen, şu çiftleştirmeyi gözönüne almak yeter: 2 yi 2 ile, 4 ü 4 ile, 6 yı 6 ile, ilâh... çiftleştirelim. Bu takdirde tam sayılar cümlesi içindeki çift sayılardan herbirine çift sayılar cümlesinin bir sayısı tekabül eder, fakat tam sayılar cümlesi içinde tek sayılar açıkta kalır. Cantor'un ithal ettiği kavramın esası, düşünülebilen bütün çiftleştirmelerden vazgeçerek, açık vermeyen *tek* bir çiftleşmenin bulunabilmesini istemesidir. Bu takdirde Cantor, gözönüne alınan cümlelere *«eşit (aynı) kuvvette cümleler»* demektedir.

Cantor'un tespit etmiş olduğu ilk hakikat, *bütün rasyonel, yani tam veya kesirli, sayılar cümlesinin tam sayılar cümlesi ile aynı kuvvette olduğudur.*

Bunu ispat eden çiftleştirme, bütün kesirleri kendi büyüklüklerine göre değil, fakat pay ve payda toplamlarının büyüklüklerine göre sıralamaya dayanır. Evvelâ pay ve payda toplamı 2 olan — tabiî kısaltılmış — bütün kesirleri alırız: burada yalnız $\frac{1}{1}=1$ bahis konusu olabilir; sonra pay ve payda toplamı 3 olanları, yani $\frac{1}{2}$ ile $\frac{2}{1}=2$ yi alırız; $\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$ i kısalmamış halde olan $\frac{2}{2}$ yi aradan çıkardıktan sonra alırız; sonra $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$ i alırız, ilâh... ve bu kesirleri yukarıki sırada olmak üzere tabiî sayılar dizisinin altına yazarız:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ \ldots$$

$$1\ \tfrac{1}{2}\ 2\ \tfrac{1}{3}\ 3\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{3}{2}\ 4\ \tfrac{1}{5}\ 5\ \tfrac{1}{6}\ \ldots$$

Burada alt alta bulunan sayıları çiftleştirmek suretiyle hiç açık vermeyen bir çiftleştirme elde ederiz. Çünkü, her rasyonel sayı belirli bir pay ve payda toplamını haiz olduğundan, ikinci satırın muhakkak bir yerinde zuhûr eder.

Bu şaşırtıcı hakikatı Cantor, rasyonel sayılar cümlesinin «sayılabilir» olduğunu söyleyerek te ifade etmektedir; hakikaten yukarıki çiftleştirme bir sonsuz saymadan başka bir şey değil-

dir. Şu halde, bir cümle tabiî sayılar cümlesi ile açık vermeden çiftleştirildiği, yani o cümlesi ile aynı kuvvette olduğu takdirde, o cümleye «sayılabilir» demektedir. Bundan sonra, kesirler cümlesine nazaran çok daha geniş olan bazı cümlelerin de sayılabilir olduğunu göstermektedir. Türlü yüksek matematik bilgisine ihtiyaç gösteren, fakat yukarıki örnekle anlatmak istediğimiz şeyin başka örneklerinden başka bir şey olmayan bu mülâhazaları atlıyoruz.

Bundan sonra Cantor, tabiî sayılar cümlesinden daha büyük kuvvette cümlelerin mevcut olduğunu ispat ederek, teorisine asıl yaşama hakkı veren keyfiyete geliyor. Bunlar arasında *bir doğru parçasının bütün noktalarının teşkil ettiği cümlenin tabiî sayılar cümlesinden daha büyük kuvvette olduğunu* ispat ediyor. Bu ispat indirekt olarak yapılmakta ve Cantor, meselâ 1 m uzunluğunda bir doğru parçası üzerindeki noktalar ile tam sayılar arasında eksiksiz bir tekabül kurulabildiği farziyesinden bir tenakuz elde etmektedir. Şu halde, doğru parçası üzerindeki noktaları her hangi bir şekilde sayabileceğimizi farzedelim. Bu takdirde onları, tabiatıyle kendi tabiî sırasında olmamakla beraber, başka bir sırada evvelâ 1. sonra 2., ilâh... olmak üzere yazabiliriz. Bunu en iyi olarak 1 metrelik doğru parçamızın noktalarını (taksimatlandırılmış olarak alacağımız) metremiz üzerinde ki cm, mm, v. s. halindeki taksimat rakkamları ile nümerik olarak ifade etmek suretiyle yapabiliriz, meselâ doğru parçasının orta noktası 0,5 ile ve diğer noktaların herbirini, tam doğruluk istendiği takdirde sonsuz rakkam ihtiva eden birer ondalık kesirle gösterebiliriz. (meselâ doğru parçasının ilk üçte birinin bitim noktasına 0,33333... kesri tekabül eder). Şu halde — indirekt ispatın faraziyesine göre bir dizi halinde sıralanabilen noktalar yerine, onları temsil eden sonsuz ondalık kesirleri ele alabilir ve onları dizi halinde sıralanmış farzedebiliriz. 1. sırada böyle bir sonsuz ondalık kesir, ikinci sırada gene aynı şekilde bir ondalık

kesir, ilâh... bulunacaktır. Şu halde bu sonsuz kesirler dizisinin görünüşü — teknik sebeplerden dolayı ufkî olacağı yerde şakulî yazılan — aşağı örneğe benzer:

1. 0, 2 5 4 2 0....
2. 0, 6 1 7 7 3....
3. 0, 5 5 5 4 9....
4. 0, 1 0 0 0 7....
5. 0, 2 0 2 0 6....

.....

.....

Şimdi bu dizide bulunmayan bir nokta, yani 0,.... şeklinde bir ondalık kesir, mevcut olduğunu göstereceğiz. Bu ondalık kesir şöyle teşkil edilebilir: bu kesrin virgülden sonra 1. rakkamı olarak dizideki 1. kesrin 1. rakkamından farklı bir rakkam seçeriz. Burada 9 tane rakkamdan her hangi birini seçmeye hakkımız vardır, meselâ belirli bir şey söylemek için: eğer 1. kesrin 1. rakkamı 1 den farklı ise, aradığımız kesrin 1. rakkamı olarak 1 i seçeriz. Eğer o rakkam 1 ise, aradığımız kesrin 1. rakkamı olarak 2 rakkamını seçeriz. Şimdilik şu kadarı muhakkaktır ki, aradığımız kesrin diğer rakkamlarını nasıl seçersek seçelim, bu kesir dizinin 1. kesrinden farklı olur; çünkü iki ondalık kesir daha 1. rakkamlarında farkederlerse, bütün diğer rakkamları aynı bile olsa hiçbir zaman doğru parçası üzerinde aynı noktayı belirtemezler. Şimdi aranılan kesrin 2. rakkamını da dizinin 2. kesrinin 2. rakkamı 1 den farklı olduğu takdirde 1, aksi halde 2 olarak seçelim. Şu halde her halü kârda bu rakkam 2. kesrin 2. rakkamından farklı olur ve bu takdirde teşkil etmekte olduğumuz kesir, dizinin yalnız 1. kesrinden değil, 2. kesrinden de farklı olur. Bu şekilde devam ederiz. Meselâ yukarıki örneğe göre teşkil edilecek kesir 0,12111.... şeklinde başlıyacaktır. Tarif

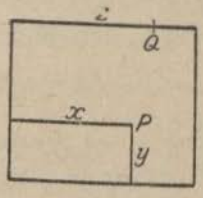
ettiğimiz işlemi ilânihaye devam ettirebileceğimizden, böylelikle dizideki bütün kesirlerden farklı olduğuna emin bulunduğumuz bir kesir elde etmiş olacağız. Şu halde bu dizi 0,... şeklindeki bütün ondalık kesirleri ihtiva edemez. Bu ise, indirekt ispatımızın faraziyesine aykırıdır. Şu halde, bir doğru parçası üzerindeki noktaların teşkil ettikleri cümle sayılabilir bir cümle olamaz.

Yukarıki ispata karşı kolayca yapılabilecek ve Cantor'un ispata bambaşka bir şekil vermesine sebep olan, fakat hakikatta kolayca bertaraf edilebilecek bir itirazdan bahsetmeden geçmeyelim. Bu itiraz, rakkamları bir yerden itibaren tamamen 9 lardan ibaret olan, meselâ 0, 2 6 9 9 9 9 ... gibi kesirlerden doğar. Misâldeki kesir hakikatte 0, 2 7 0 0 0 0 ...., yahut kısa yazılışı ile 0,27 den başka bir şey değildir. Şu halde burada iki farklı ondalık kesrin aynı bir noktayı belirtmesi gibi nâhoş bir durum vardır. Bunun nâhoş oluşuna sebep, ispatımızda ondalık kesirleri doğru parçalarımızın noktalarını tamamen karakterize etmek için kullanmış olmamız idi ki, bu ise ancak her noktaya bir ve bir tek ondalık kesir tekabül ettiği takdirde mümkündür. Hakikatte bu güçlük kolayca bertaraf edilebilir. Bunun için bir yerden itibaren rakamları hep 9 olan kesirlerin kullanılmasını baştan yasak ederiz. Bu takdirde yukarıki ispat için artık sadece, teşkil edilen kesrin bir yerden itibaren bütün rakkamlarının 9 olması halinde bir endişe mevzuubahis olabilir. Fakat ispatta zaten buna karşı tedbir alınmıştır, çünkü teşkil edilen kesrin bütün rakamları 1 ve 2 lerden ibaret olup, 9 rakamı hiç geçmez.

Bu teoremden enteresan bir netice çıkarabiliriz: Rasyonel sayılar cümlesi 0 ile 1 arasındaki bütün sayılar cümlesinden daha küçük kuvvette olduğundan, 0 ile 1 arasında mutlaka rasyonel olmayan sayılar mevcuttur. Şu halde irrasyonel sayıların mevcudiyeti burada, Bölüm 4 tekinin aksine olarak, tamamiyle umumî bir mülâhaza ile ortaya konulmuştur.

Cantor'un bundan sonraki neticesi de bir sürpriz teşkil etmektedir: *Bir kare yüzeyi üzerindeki noktaların cümlesi, aynı karenin bir kenarı üzerindeki noktaların cümlesinden daha büyük kuvvette değildir.* Burada şaşılacak husus, boyut kavramının âdeta tamamen inkâr edilmesidir; bir boyutlu doğru parçası iki boyutlu kare ile aynı kuvvette olduğu gibi, benzer bir yolla üç boyutlu küpün de daha büyük kuvvette olmadığı gösterilebilir.

İspat, önceki teoremde olduğu gibi, hesapla yapılır. Cantor, doğru parçasının noktalarını gene, bir yerden itibaren rakkamları tamamen 9 lardan ibaret olanlardan farklı olan, sonsuz ondalık kesirlerle karakterize etmektedir. Karenin noktalarını ise, bu türlü ondalık kesir çiftleri, yani bir yandan noktanın karenin sol kenarından olan ufkî uzaklığını gösteren x, öte yandan karenin alt kenarından olan şakulî uzaklığını gösteren y ondalık kesrinden mürekkep çiftler, ile karakterize etmektedir. Kenarın noktaları ile karenin noktaları arasındaki çiftleştirme



Şek. 30

(bire bir tekabül) şimdi şöyle kurulur: kare yüzeyinin herhangi bir P noktasından hareket edilerek, onu karakterize eden

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

ondalık kesirleri bulunur ve bu ikisinden, her ikisinin rakkamlarını içiçe sokmak suretiyle

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots,$$

ondalık kesri teşkil edildikten sonra kenar üzerinde z sayısı ile karakterize edilen Q noktası belirtilir. Meselâ böylece karenin merkezine, $x = 0{,}500\ldots$ veya $= 0.500\ldots$ dan iç içe sokmak suretiyle elde edilen $z = 0{,}550000\ldots$ ondalık kesrinin kenar üzerinde karakterize ettiği nokta tekabül eder. Bu yolla karenin her noktasına kenarın bir noktası tekabül etmiş olur. Bu kadarı aslında mühim bir iş olmayıp, biz bunun daha kolayını bile karenin her P noktasına P den alt kenara indirilen dikmenin ayağını tekabül ettirmek suretiyle yapabilirdik. Bu takdirde karenin her noktasına alt kenarın bir noktası tekabül etmiş olurdu. Fakat bu son tekabülde karenin alt kenarı üzerindeki bir nokta kare yüzeyindeki tek bir nokta ile değil, bu noktayı ayak olarak kabul eden dikme üzerindeki sonsuz nokta ile çiftleşmiş olurdu; bu türlü tekabül ise, cümlelerin Cantor'a göre mukayesesinde caiz değildir — tıpkı dansta bir erkeğin aynı zamanda bir çok kadınla birden dans etmesinin tasavvur edilemiyeceği gibi. İşte yukarıda anlatılmış olan daha incelikli tekabül bu mahzuru haiz değildir. Çünkü, eğer kendini karakterize eden sayıları

$$x' = 0, a_1' a_2' a_3' \ldots, \quad y' = 0, b_1' b_2' b_3' \ldots$$

olan bir P' noktası da karenin üst kenarının aynı, şu halde aynı z sayısını haiz, bir Q noktası ile çiftleşmiş olsa idi,

$$z = 0, a_1' b_1' a_2' b_2' a_3' b_3' \ldots$$

olması lâzım gelirdi. Fakat iki ondalık kesrin aynı değeri haiz olabilmesi için (bir yerden itibaren sonu hep 9 ile biten kesirler aradan çıkarıldığından dolayı) gerek ve yeter şart, bu iki kesrin rakkamlarının sırasiyle birbirinin aynı olmasıdır. Bu yüzden

$$a_1' = a_1, \ b_1' = b_1, \ a_2' = a_2, \ b_2' = b_2, \ \ldots$$

olmalıdır. Bu ise x' nün x in aynı, y' nün de y nin aynı oldu-

ğunu ifade eder ki, bu da P' ile P nin birbirinden farklı olduğu faraziyesine aykırıdır. Şu halde karenin farklı noktalarına doğru parçasının aynı noktası tekabül edemez. Şu halde bir de bundan başka, hiç bir kadının açıkta kalmaması hususuna tekabül etmek üzere, doğru parçasının her noktasının da yukarıki kaideye göre hakikaten karenin bir noktası ile çiftleştirilebildiği ispat edilirse, bu çiftleştirmenin mükemmel olduğu gösterilmiş olacaktır. Bu husus hakikaten doğrudur. Çünkü kenar üzerindeki herhangi bir noktayı karakterize eden sayı

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \ldots$$

olduğu takdirde, karenin karakteristik sayıları

$$x = 0, c_1 c_3 c_5 \ldots, \quad y = 0, c_2 c_4 c_6 \ldots$$

olan noktası öyle bir noktadır ki, bu noktaya doğru parçası üzerinde x, y ondalık kesirlerini içiçe sokmak suretiyle elde edilen ondalık kesrin belirttiği nokta tekabül eder. Bu sonuncu kesir ise yukarda aldığımız z sayısından başka bir şey değildir.

Bu ispata karşı da, gene bir yerden itibaren rakkamları hep 9 olan ondalık kesre dair itirazı ileri sürmek mümkündür. Hakikaten, bir taraftan doğru parçası üzerinde ölçüsü 0,2202020... olan noktaya kare üzerinde tekabül eden ve

$$x = 0{,}2000\ldots, \quad y = 0{,}2222\ldots.$$

sayıları ile karakterize edilen nokta ile diğer taraftan doğru parçası üzerindeki 0,12929292.... noktasına kare üzerinde tekabül eden

$$x' = 0{,}1999\ldots, \quad y' = 0{,}2222\ldots$$

noktasını ele alırsak, ikinci noktadan bir yerden itibaren rakkamları hep 9 olan bir ondalık sayı elde edildiği gibi, kare üzerindeki iki nokta da birbirinin aynı olup, böylelikle doğru par-

çasının birbirinden tamamen farklı iki noktasına karenin aynı noktası tekabül etmiş olur.

Aşikâr olmasa bile, çok basit bir hile ile bu kusuru düzeltmek mümkündür. İspat yukarıda verilen şekli ile şüphesiz — ister istemez — yanlıştır; fakat aşağıki düzeltme ile doğru hale getirilebilir. Hakikaten, bir sayıda 9 ların zuhûr etmesi halinde bu 9 ları kendilerini takip eden 9 dan farklı iki rakkamla bir «molekül» şeklinde birleştirelim, meselâ 0, (1) (2) (92) (92) (92) ..., yahut başka bir örnek olarak 0, (7) (3) (94) (990) (9997) ... gibi. Sonra bir z değerini x ve y değerlerine ayırırken bu molekülleri ayrılmaz birer bütün olarak düşünelim. Meselâ sonuncu örnek bir z değeri olarak zuhûr ettiği takdirde, ona tekabül eden x, y değerleri

$$x = 0, (7) (94) (9997)..., \qquad y = 0, (3) (990)...$$

olsun. Bu takdirde z ile x, y arasındaki çiftleştirme evvelce verilmiş olandan farklı bir kaideye göre yapılmış olur ve, bir yerden itibaren rakkamları hep 9 olan kesirlerin kullanılışının yasak edilmesi şartının muhafazası ile, yukarıki itiraza artık mahal kalmadığı kolayca görülür.

Düşüncelerinin gidişinin bu noktasında Cantor çok şayanı dikkat bir problemle karşılaşmıştır ki, o da şudur: acaba tabiî sayılar cümlesi ile bir doğru parçası üzerindeki noktaların cümlesi arasında birinci cümleden daha büyük, fakat ikinciden daha küçük kuvvette bir cümle var mıdır? Yoksa böyle bir ara cümle mevcut değil midir? *Kontinuum problemi* adı altında tanınan ve Cantor'u sert ve dik bir duvar gibi durduran bu problem bu gün dahi henüz çözülememiştir. Denilebilir ki, vaz'ı için bu kadar az ön bilgiye ihtiyaç gösteren — burada okul bilgisi bile farzedilmemiş olup, sadece tam sayı ve doğru parçası kavramlarının bilinmesi yeter — fakat bütün çözme gayretlerine bunun kadar devamlı meydan okumuş olan başka bir matematik prob-

lemi gelip geçmemiştir. Matematikte, bir takım karışık kavram sistemlerini kullanmak suretiye usta matematikçilerin bile zorlukla çözebilecekleri, hattâ belki bütün uğraşmalarına rağmen çözemiyecekleri düzinelerce problem ortaya atmak tabiatiyle büyük marifet değildir. Fakat basit kavramlardan hareket ederek trival olmadığı gibi, çözümü de pek kolay olmayan bir problem ortaya atmak! İşte matematik problemlerinin vaz'ı alanında hakikî hüner ve tamamen kendi kendisinden hareket ederek gelişen bu ilmin hakikî harikası budur. Şu halde bu noktadan, yani problem vaz'ı bakımından, değerlendirilirse kontinuum problemi parlak bir muvaffakiyet sayılmalıdır.

Bu problemin tetkikinin, cümleler teorisinin ve neticede bütün matematiğin temellerine temas etmeden ve cümle kavramını derin bir tahlile tabi tutmadan yapılamıyacağı çok geçmeden anlaşılmıştır. Böyle bir tahlile girişmek mecburiyeti aşağıki paradoksun ortaya çıkması ile daha elle tutulur bir hale gelmiştir ki, biz de bu bahsi bu paradoks ile kapayacağız.

Buraya kadar devamlı surette cümlelerden bahsettik ki, bu cümleler bir takım «elemanlar» dan müteşekkil idi. Meselâ bir doğru parçasının üzerindeki noktaların teşkil ettiği cümlenin elemanları teker teker bu noktalar, aynı şekilde, tam sayılar cümlesinin elemanları teker teker tam sayılar idi. Bir cümlenin elemanlarının cümlede oynadığı rol, bir birliğin (klübün) üyelerinin bu birlikte oynadığı rolün aynıdır. Bazen kendileri de birer birlik olan hükmî şahıslar da bulunabilir, meselâ Alman Matematikçiler Federasyonu, Alman Matematik Cemiyeti, Matematik Öğretimini İlerletme Cemiyeti, v. s. gibi muhtelif matematik cemiyetlerini üye olarak ihtiva eden bir birlikten başka birşey değildir. Aynı şekilde bir cümlenin elemanları arasında öyleleri bulunabilir ki, onlar da kendi başlarına birer cümle olsunlar; meselâ bütün sayılabilir cümlelerin teşkil ettiği cümlenin bütün elemanları da birer cümledir. Nasıl Alman Matematik Ce-

miyetinin müferit bir üyesinin Alman Matematikçiler Federasyonunda kendi başına oy hakkı yoksa, bütün rasyonel sayılar cümlesinin bir elemanı olan $\frac{1}{2}$ sayısı da bütün sayılabilir cümlelerin teşkil ettiği cümlenin bir elemanı değildir. Buna mukabil, yukarıda ispat etmiş olduğu gibi, bütün rasyonel sayıların teşkil ettiği cümle sonuncu büyük cümlenin bir elemanıdır.

Kavramlarla yapılan bu ön temrinden sonra, garip olmakla beraber, bir cümlenin kendi kendisini eleman olarak ihtiva edip edemiyeceği sorusunu sorabiliriz. Şimdiye kadar düşünmüş olduğumuz mûtad cümleler için tabiatiyle öyle bir durum mevcut olamaz. Fakat bununla beraber, böyle fevkalâde cümlelerin mevcut olması icap ettiğine kanaat getirmek kolaydır. Zira tasavvur edilen bütün cümlelerin teşkil ettiği cümle muhakkak ki bu şarta uyar, çünkü kendisi de bir cümledir. Şu halde böyle fevkalâde cümleler mevcuttur. Şimdilik kendilerini eleman olarak ihtiva eden cümlelere fevkalâde cümleler, diğerlerine de âdi cümleler diyelim.

Şimdi bir adım daha ileri giderek, bütün âdi cümlelerin teşkil ettiği cümleyi ele alalım. Bu cümlenin adı $\mathfrak{W}$ olsun. Şu soruyu soralım: $\mathfrak{W}$ nin kendisi âdi bir cümle midir, yoksa fevkalâde bir cümle midir? Bu cümle ister istemez ya fevkalâde veya âdi olmak mecburiyetindedir. Eğer fevkalâde ise, kendisini eleman olarak ihtiva eder, yani âdi olur — çünkü $\mathfrak{W}$ nin elemanları âdi cümleler idi — ki, bu da fevkalâde oluşu ile tenakuz teşkil eder. Buna karşılık, $\mathfrak{W}$ nin âdi olduğunu kabul etsek, kendi kendisini eleman olarak ihtiva etmez, şu halde âdi olamaz, yani mecburen fevkalâde olur ki, gene bu da sonuncu faraziyemize aykırıdır. $\mathfrak{W}$ nin karakterine dair her iki imkân da bizi tenakuza götürdüğünden mutlak bir paradoks karşısında bulunmaktayız.

Bu paradoks sadece cümleler teorisine has değildir. Bu noktayı daha iyi belirtmek için aynı paradoksun, içinde cümlelere

dair hiç bir şey bulunmayan ve daha ziyade şaka tarzındaki şu şeklini verelim: Bir alayda erlerden biri alay berberliği ile görevlendirilmiş olup, görevi, daha açık olarak, kendi kendine traş olmayan erleri traş etmektir. Bu er kendisine karşı nasıl hareket etmelidir? Eğer kendisini traş ederse, kendi kendine traş olan bir er durumuna girmiş olur, şu halde kendisini traş etmemesi gerekir. Fakat kendisini traş etmezse, kendi kendisine traş olmayan bir er durumuna girer ki, böyle bir er ise kendisi tarafından traş edilmek mecburiyetindedir. Bu duruma göre, kendisine yerilen görevi noktası noktasına yerine getirmek için bu erin ne yapması lâzımdır?

Bu, sırf mantığa ait bir paradoks olup, cümleler teorisi bizi kendisine kaçınılmaz bir şekilde sevketmiştir; fakat cümleler teorisine tabiatı icabı olarak bağlı değildir. Bu suretle eski ve sıkıcı mantık enteresan bir hale girmiş oldu. Hakikaten, mantıkçı ve matematikçiler, yıllardan beri devam eden yorucu bir müşterek çalışma ile mantığı eski Aristo mantığı şeklinden kurtarmakla meşguldürler ve bu çalışmalar neticesinde varılacak yeni şeklin nasıl görüneceği henüz belli değildir.

8. Bazı Kombinasyon Problemleri

1. Şimdi meşgûl olacağımız problemlerin mahiyetini en iyisi bir örnekle belli edelim. Meselâ 4 kırmızı, 1 siyah ve 2 beyaz top verilmiş olsun. Bu topları renklerinin baş harfleri ile

$$K,\ K,\ K,\ K,\ S,\ B,\ B,$$

şeklinde ifade edeceğiz. Yalnız renkleri bakımından birbirinden fark eden, fakat aynı büyüklükte ve aynı cinsten olan bu 7 kürenin, birlikte hepsini içine alabilecek kapasitede olan A ve B gibi iki kaba taksim edilmesi istenmiş olsun. Meselâ A nın kapasitesi 3 top, B ninki 4 top olsun. Şimdi problem şudur: *Yukarıki 7 renkli top A ve B kaplarına kaç türlü dağıtılabilir?*

Gözönüne aldığımız bu basit halde sadece iki kap mevcut bulunduğundan, bunlardan bir tanesinin, meselâ A nın muteviyatını bildirmek topların dağılışını belirtmeğe yeter. Çünkü geri kalan 4 top B nin muhteviyatını teşkil eder. Şimdi bütün imkânları sistematik olarak gözden geçirelim. Evvelâ A yı sadece kırmızı toplarla doldurmak, geri kalan 4 topu da B ye koymak mümkündür:

1. A daki toplar: KKK, B dekiler $KSBB$. A yı doldurmak, için 4 kırmızı toptan hangilerini kullanmış olursak olalım netice farketmez, çünkü bizim için toplar arasındaki yegâne fark onların renkleri olup, aynı renkteki toplar birbirinden ayırt edilemez.

Bundan sonra, A nın sadece iki kırmızı top ihtiva etmesi halini ele alalım. Bu takdirde A daki üçüncü top ya siyah veya beyazdır:

2. A da: KKS, B de: $KKBB$

3. A da: KKB, B de: $KKSB$

Daha sonra da, A sadece bir kırmızı top ihtiva etsin. Bu takdirde A daki diğer iki top, derhal görüleceği üzere, SB veya BB dir. Şu halde:

4. A da: KSB, B de: $KKKB$

5. A da: KBB, B de: $KKKS$

Nihayet A da hiç bir kırmızı top bulunmasın. Bu takdirde kırmızı olmayan her üç SBB topu A nın doldurulmasında kullanılır:

6. A da: SBB, B de: $KKKK$

Şu halde 4 kırmızı, 1 siyah ve 2 beyaz topun, sırasiyle 3 ve 4 top kapasiteli iki kaba 6 muhtelif şekilde dağıtılabileceğini görmüş oluyoruz. Bu keyfiyeti bu bölümde kısaca şöyle ifade edeceğiz: 4, 1, 2 topun (1) 3, 4 kapasiteli iki kaba dağılış sayısı altıdır, yahut sembolle

$$\{4, 1, 2 \mid 3, 4\}_7 = 6$$

Büyük parantezin içinde dik çizgiden evvel çeşitli renkteki topların sayıları, dik çizgiden sonra da kapların kapasiteleri bulunur. Tabiatiyle *dik çizgiden önceki sayıların toplamı, ondan sonrakilerin toplamına eşit olmalıdır*, çünkü topların hepsi bütün kapları tamamen doldurulmalıdır. Dağıtılacak topların toptan sayısını gösteren bu sayıyı (örneğimizde 7) açıklık için parantezin alt sağ köşesine indeks olarak yazacağız.

2. Şimdi 3 renk ve 2 kap yerine, umumî olarak f tane çeşitli renkte n tane top ve toplam kapasitesi n olan g tane kap alalım. Bu takdirde

$$(1) \qquad Z = \{r, s, \ldots \mid a, b, \ldots\}_n$$

sembolü r tanesi kırmızı, s tanesi siyah ilâh... olan n tane topun kapasiteleri a, b, ilâh... olan kaplara kaç türlü dağıtılabileceğini gösterecektir. Şu halde problem, n, r, s, ...; a, b, ... sayıları verildiğine göre Z sayısını hesaplamaktır. Aşağıda bu problemin çözümünü en umumî halde değil, fakat türlü örneklerle ve önemli özel hallerde vereceğiz.

Dağıtılması istenen eşyanın renkli toplar olması tabiatiyle şart değildir. Meselâ yukarıda bile, 4 kırmızı, 1 siyah ve 2 beyaz topu *göstermek için* $KKKKSBB$ sembolünü kullandık ve

(1) Topların renklerini bildirmeğe lüzum yoktur. Meselâ sarı, yeşil ve mavi toplarla da aynı dağılış sayısının elde edileceği aşikârdır.

7 *topu* A ve B gibi iki *kaba* dağıtmak yerine, semboldeki 7 *harfi* iki A ve B *kümesine* dağıttık.

3. Yukarıki parantezli sembolün dağılış sayısının hesabındaki manası ve kullanılışı, içlerinde renkli topların hiç bahis konusu olmadığı bir sıra örnekten daha açık anlaşılacaktır. Bununla beraber, her örneği renkli topların dağılışı şeması şeklinde tefsir etmeğe çalışacağız.

Meselâ, *n tane şahsın n tane yere kaç türlü oturtulabileceği* sorulmuş olsun. Burada renkli topların kaplara dağılışı problemi ile bir bağ kurabilmek için n şahsın birbirinden tamamen farklı olduklarını düşünmek lâzımdır. Şu halde bunların herbirine (âdetâ «ad» olarak) bir renk tekabül ettirebilir ve buna göre, renkleri tamamen farklı n topun n tane yere kaç türlü yerleştirilebileceğini araştırabiliriz. Her «yer» e evvelki ifade tarzımızda kapasitesi tek topluk bir kap tekabül eder. Şu halde yukarıda ithal ettiğimiz yazış tarzına göre

$$P_n = \{1, 1, \ldots \mid 1, 1, \ldots.\}_n \tag{2}$$

dağılış sayısı aranmaktadır. Burada toplam n sayısına tekabül etmek üzere dik çizginin önünde ve arkasında n tane 1 bulunmaktadır, çünkü her renkten tek bir top mevcut olup, her kabın kapasitesi de 1 topluktur.

Kapları (yani «yerleri») numaralanmış olarak düşünürsek, problemimiz n tane farklı renkteki topu (n tane şahsı) bu numaralara göre *sıralamaya* dökülür. Bu türlü her sıralanmaya bir *permütasyon* denir ki, buna göre (2) formülündeki P_n nin birbirinden farklı n tane elemanın permütasyon sayısını gösterdiğini söyleyebiliriz. P_n nin mümerik değerinin n ye nasıl bağlı olduğu, başka deyimle P_n nin değerinin n cinsinden nasıl hesaplanabileceği, problemini dağılış sayısı sembolüne dair vereceğimiz diğer örneklerin münakaşasından sonra ele alacağız.

4. *Skat oyununda* (1) *oyun kâğıtları oyuncular arasında kaç türlü dağıtılabilir?* 32 kâğıtla ve üç kişi arasında oynanan bu oyunda her oyuncuya 10 kâğıt verilir ve geri kalan iki 2 kâğıt ortaya konur. 32 kâğıdın hepsi de birbirinden farklıdır. Aşikâr olarak, buradaki dağılış sayısı, 32 tane ayrı renkli topun kapasiteleri 10, 10, 10, 2 olan 4 kaba dağılış sayısının aynıdır. Şu halde skat oyununda kâğıtların mümkün olan bütün dağılışlarının sayısını S ile gösterirsek, yukarıki parantez sembolü cinsinden

$$S = \{1, 1, \ldots \mid 10, 10, 10, 2\}_{32} \tag{3}$$

olur. S sayısının bu sembol yardımiyle fiilen hesabını diğer hesapların sonuna bırakıyoruz.

5. Diğer bir örnek, *Polinom Teoremi* denilen bir teorem tarafından teşkil edilir ki, biz bu teoremi en umumî şeklinde değil de, yalnız üç x, y, z değişkeni için ifade edeceğiz. Bahis konusu olan şey,

$$(x + y + z)^n$$

kuvvetinin hesaplanmasıdır. Bu kuvvet n tane eşit $(x + y + z)$ çarpanının çarpımını gösterir. Parantez içindeki bir toplamı bir çarpanla çarpmak için, toplamın her terimini o çarpanla çarpmak lâzım geldiğinden, yukarıki kuvvet hesaplanınca bir takım çarpımların toplamı şekline girer. Bu çarpımların her biri n tane çarpan ihtiva edip, bu çarpanlar x, y veya z lerden ibarettir, ve bir çarpıma giren herbir çarpan birbiriyle çarpılacak olan n tane parantezin bir ve yalnız birinden gelir. Bu çarpımların herbirini önce x, sonra y ve nihayet z çarpanlarını yanyana getirmek suretiyle (bilindiği üzere bir çarpımda çarpanla-

(1) Bilhassa Almanyada oynanan bir iskambil oyunu (Çevirenin notu).

rın sırasını istediğimiz gibi değiştirebiliriz) sıralarsak, her çarpım, a, b, c,

$$(4) \qquad a+b+c=n, \qquad a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$$

şartlarına uyan tam sayılar olmak üzere, $x^a y^b z^c$ şeklini alır. Şimdi $(x+y+z)^n$ kuvvetini çarpma suretiyle hesapladığımız zaman, belirli bir $x^a y^b z^c$ çarpımını kaç kere elde edeceğimizi kendimize soralım. n tane parantezin herbirinden bir çarpan geleceğine göre, bu parantezlerin herbirine bir «kap» tekabül ettirelim ve çarpandaki her harfi içinden geldiği paranteze tekabül eden «kap»ın içine «atalım». Bu suretle sorumuz şuna dökülür: a tane «x» (kırmızı top), b tane «y» (siyah top) ve c tane «z» (beyaz top) elemanı, herbiri tam bir tane eleman alabilen n tane kaba kaç türlü dağıtılabilir? Şu halde aranan sayı — ki biz bu sayıyı $P^{(n)}_{a,b,c}$ ile göstereceğiz — bir dağılış sayısı olup, parantez sembolü ile şöyle ifade edilebilir:

$$(5) \qquad P^{(n)}_{a,b,c} = \{a, b, c \mid 1, 1, \ldots, 1\}_n .$$

Şu halde hesaplanmış kuvvette bulunan $P^{(n)}_{a,b,c}$ tane eşit $x^a y^b z^c$ terimi bir araya getirilebilir. Bunun neticesinde $x^a y^b z^c$ terimi $P^{(n)}_{a,b,c}$ katsayısını alır. Bu katsayı, $(x+y+z)$ «polinom» unun n. kuvvetinin hesabı neticesinde ortaya çıktığından, kendisine *polinom katsayısı* denir.

İşi daha iyi anlamak için bir özel hali, meselâ $n=4$ halini, daha yakından inceleyelim:

$$(x+y+z)^4$$

ün hesaplanışı sonunda, (4) te $n=4$ vaz'ettiğimizde elde edilen şartlara uyan bütün $x^a, y^b z^c$ terimleri zuhûr edecektir.. Böylece, mümkün olan bütün terimler, umumî görüşü kolaylaştıracak şekilde düzenlenmiş olan, aşağıki tabloda verilenlerden ibarettir:

$$x^4, \quad y^4, \quad z^4,$$

$$x^3y, \quad x^3z, \quad xy^3, \quad y^3z, \quad xz^3, \quad yz^3,$$

$$x^2y^2, \quad x^2z^2, \quad y^2z^2,$$

$$x^2yz^2, \quad xy^2z, \quad xyz^2.$$

Şu halde polinom katsayılarını kullanarak (6)

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 = {} & P^{(4)}_{4,0,0}\cdot x^4 + P^{(4)}_{0,4,0}\,y^4 + P^{(4)}_{0,0,4}\,z^4 \\ & + P^{(4)}_{3,1,0}\,x^3y + P^{(4)}_{3,0,1}\,x^3z + P^{(4)}_{1,3,0}\,xy^3 + P^{(4)}_{0,3,1}\,y^3z \\ & \qquad + P^{(4)}_{1,0,3}\,xz^3 + P^{(4)}_{0,1,3}\,yz^3 \\ & + P^{(4)}_{2,2,0}\,x^2y^2 + P^{(4)}_{2,0,2}\,x^2z^2 + P^{(4)}_{0,2,2}\,y^2z^2 \\ & + P^{(4)}_{2,1,1}\,x^2yz + P^{(4)}_{1,2,1}\,xy^2z + P^{(4)}_{1,1,2}\,xyz^2\end{aligned}$$

olur.

Bununla sadece formülün yapısı verilmiştir. $P^{(4)}_{a,b,c}$ ve daha umumî olarak $P^{(n)}_{a,b,c}$ nin asıl değerinin (5) yardımiyle hesaplanması sonra yapılacaktır.

6. Nihayet aşağıdaki problemi dağılış sayısının yazış tarzına çevirelim: *n tane değişik eşyadan kaç değişik türlü k tane eşya çıkarılabilir?* Yahut matematik dili ile: n tane elemanın k. sınıftan kombinezonlarının sayısı kaçtır? Bu n eleman değişik sayıldıklarından herbirine başka bir renk tekabül eder: $r=1$, $s=1$, ... Bunlardan çıkarılan k tane topu kapasitesi tam k topluk bir kaba, geri kalan $n-k$ topu da diğer bir uygun kaba koyalım. Aranan $C^{(n)}_k$ sayısı buna göre aşağıki tarzda yazılabilir:

$$C^{(n)}_k = \{1, 1, \ldots, 1 \mid k, n-k\}_n \tag{7}$$

Parantez işaretinin düallik özeliği

7. Dağılış sayısına ait parantez sembolü, bu sayının hesaplanmasında işe yarayacak olan önemli bir özeliği haizdir:

Genel olarak

$$\{r, s, \ldots \mid a, b, \ldots\}_n = \{a, b, \ldots \mid r, s, \ldots\}_n \tag{8}$$

dir, yani parantezin içindeki dik çizginin önünde ve arkasındaki sayılar birbirleriyle değiştirilebilir. Yukarıki parantezlerin manalarını aklımıza getirirsek, (8) de iki kombinasyon probleminin karşı karşıya getirilmiş bulunduğunu, yani r kırmızı, s siyah, ilâh ... topun kapasiteleri a, b, ilâh ... olan kaplara dağılış sayısı ile a kırmızı, b siyah, ilâh ... topun kapasiteleri a, b, ilâh olan kaplara dağılış sayısının birbirine eşit olduğunun iddia edildiğini görürüz. Burada daima $r+s+\ldots = a+b+\ldots = n$ olarak alınmıştır.

Şu halde buradaki iki kombinasyon problemi birbirine »düal» durumdadır. Parantez sembollerinin esas anlamına böylece geri dönüldüğü takdirde, (8) münasebeti hemen hemen trivial hale gelir. Bu eşitliği basit bir nümerik misalde ispat etmek yeter, çünkü böyle bir misalde bile ispatın esas fikri açıkça ortaya çıkmaktadır. Şu halde meselâ

$$\{3, 4 \mid 1, 1, 5\}_7 = \{1, 1, 5 \mid 3, 4\}_7 \tag{9}$$

olduğunu gösterelim. Evvelâ denklemin sol tarafını gözönüne alalım, şu halde K, K, K, S, S, S, S ile göstereceğimiz 3 kırmızı ve 4 siyah topu kapasiteleri sırasiyle 1, 1, 5 olan üç A, B, C kabına dağıtmak isteyelim. Bu türlü dağılışlardan biri meselâ

$$\underset{A}{|K|} \quad \underset{B}{|S|} \quad \underset{C}{|KKSSS|}$$

dir. Bu dağılış, her topun altına onun içinde bulunduğu kabı yazmak suretiyle, yani

(10a)
$$\begin{matrix} K\,S\,K\,K\,S\,S\,S \\ A\,B\,C\,C\,C\,C\,C \end{matrix}$$

şeması ile de belirtilebilir. Bu suretle *7 tane harf çifti* elde etmiş olduk; yukarıki sıradaki K ve S harfleri topların renklerinin, aşağıki sıradaki A, B, C harfleri kapların adlarıdır. Şimdi bütün çiftlerdeki ortakların rollerini birbiriyle değiştirelim ve A, B, C ye renk ve K, S ye de kap adları gözü ile bakalım. Bu defa da kap adlarını renklerin altına yazar ve yine kaplara göre sıralarsak

(10b)
$$\begin{matrix} A\,C\,C\,B\,C\,C\,C \\ K\,K\,K\,S\,S\,S\,S \end{matrix}$$

şemasını elde ederiz. (10b) de bulunan çiftler (10a) dakilerin aynıdır. Sadece alt üst olmuşlardır. (10b) yi 1 tane A renkli, 1 tane B renkli ve 5 tane C renkli topun sırasiyle 3 ve 4 top kapasiteli K ve S kaplarına bir dağılışı olarak tefsir ederiz. Bu ise, (9) un sağ tarafındaki sembolün içinde sayılacak dağılışlardan biridir. (10a) ve (10b) arasındaki cinsten bir düal tekabülü sayılacak dağılışların herbiri için tesis edebiliriz. Birbirine bu şekilde tekabül eden iki dağılıştan biri (9) un sol tarafında, diğeri sağ tarafında sayılır. Şu halde elimizde iki cins dağılış cümlesi bulunup, bir cinsteki dağılışların herbirine diğer cinsten bir dağılış tekabül eder ve bilmukabele. Aralarında bu şekilde bir tekabül tesis edebilen iki sonlu cümle *aynı sayıda* elemanı haiz olacaklarından, (9) denklemi doğru olur.

(9) denkleminin doğruluğunu kabûl etmek için, incelenen dağılış sayılarının nümerik değerlerini bulmaya ihtiyaç hissetmedik. Fakat mümkün olan bütün dağılışları 1. de yapılmış olduğu gibi, sistematik bir şekilde elden geçirmek suretiyle

$$\{3, 4 \mid 1, 1, 5\}_7 = \{1, 1, 5 \mid 3, 1\}_7 = 4$$

olduğunu buluruz.

(9) için yukarıda verilen ispatın esası, renk adları ile kap adlarının aralarında değiştirilmesi fikri olmuştur. Bu fikir ise doğrudan doğruya (8) umumî eşitliğinin ispatına aktarılabilir ki, bu son eşitliği de bu suretle ispat edilmiş sayabiliriz.

Dağılış sayısının basit hallerde hesaplanması

8. $r, s, \ldots$ top sayıları ile $a, b, \ldots$ kap ölçüleri tamamen keyfî olarak verildiği takdirde dağılış sayısının hesabı çok karışık olup, burada anlatılmayacaktır. Bununla beraber 3. ve 6. daki örneklere ait parantez sembolleri en umumî şekilde olmayıp, parantezin içindeki dik çizginin ya önünde veya arkasında sadece 1 ler bulunmaktadır. Yani ya bütün toplar başka başka renktedir, yahut bütün kapların kapasitesi 1 topluktur (yahut ta bunların her ikisi de vakidir). Düalite formülü dolayısiyle bütün topların farklı renklerde olduğu hali incelemek yeter. Şu halde

$$\{1, 1, \ldots, 1 \mid a, b, c, \ldots\}_n$$

sayısını hesaplamak isteyelim. Burada n indeksi, evvelce olduğu gibi, n tane top bulunduğunu ve kapların toplam kapasitesinin n olduğunu gösterir:

$$1+1+\cdots+1=a+b+c+\cdots=n$$

Aşağıda dik çizginin önünde daima 1 ler bulunacağından, bu hususu her zaman kaydetmek zahmetinden kendimizi kurtarmak için $\{1, 1, \ldots, 1 \mid a, b, c, \ldots\}_n$ yerine kısaca $\{a, b, c, \ldots\}_n$ yazacağız. Kapların sayısı üzerinde ise hiçbir sınırlama yapılmayacaktır.

Tabiatiyle

$$\{n\}_n = 1 \tag{11}$$

dir, çünkü burada bütün toplar tek bir kap içine konulduğundan yalnız bir tane dağılış vardır. Şimdi kapasitesi n olan tek

bir N kabı yerine kapasiteleri sırasiyle $n-1$ ve 1 olan iki N_1 ve N' kabı alırsak, birinci dağılıştan bu kaplara göre bir dağılışa geçmek için N kabındaki toplardan birini N', geri kalan $n-1$ ini de N_1 kabına koymalıyız. N den tek bir top seçmek için ise n tane imkân bulunduğundan,

$$\{n-1, 1\}_n = n$$

olur. Tıpkı bunun gibi şu eşitliğin de doğruluğu görülür:

$$a \cdot \{a, b, c, \ldots\}_n = \{a-1, 1, b, c, \ldots\}_n$$

Burada her iki dağılış sayısı gene n tane farklı renkte topa aittir. Kapasiteleri sırasiyle $b, c, \ldots$ olan $B, C, \ldots$ kapları her iki halde de aynı kalır. Sadece sol tarafta kapasitesi a olan A kabı yerine, sağ tarafta kapasiteleri sırası ile $a-1$ ve 1 olan iki A_1 ve A' kabı gelmiştir. $A, B, C, \ldots$ kaplarına ait her dağılıştan, A daki a tane toptan herhangi birini A' ye koymak suretiyle, $A_1, A', B, C, \ldots$ kaplarına ait bir dağılış elde edileceğinden ve A' ye konulan top ta a türlü seçilebileceğinden (geri kalan $a-1$ top hali ile A_1 kabına konur), $A_1, A', B, C \ldots$ kaplarına ait dağılış sayısı $A, B, C \ldots$ kaplarına ait dağılış sayısının a katıdır. (12) denklemi de işte bu keyfiyeti ifade eder.

Bundan sonra yeniden A_1 yerine kapasiteleri $a-2$ ve 1 olan iki A_2 ve A'' kabı alırsak,

$$(a-1) \cdot \{a-1, 1, b, c, \ldots\}_n = \{a-2, 1, 1, b, c, \ldots\}_n$$

elde ederiz. Aynı şekilde devam ederek

$$(a-2) \cdot \{a-2, 1, b, c, \ldots\}_n = \{a-3, 1, 1, 1, b, c, \ldots\}_n$$

ile başlayan ve

$$2 \cdot \{2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a-2}, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n$$

ile biten bir eşitlikler zinciri elde ederiz ki, en sonuncu parantezde a sayısı tamamen kendisini teşkil eden birimlere ayrılmıştır. (12) ve ondan sonra gelen bütün eşitlikleri taraf tarafa çarparsak, her iki tarafta da ortak olarak

$$\{a-1, 1, b, c, \ldots\}_n, \quad \{a-2, 1, 1, b, c, \ldots\}_n, \ldots, \{2, 1, 1, \ldots, 1, b, c\}_n$$

çarpanları bulunur ki, eşitliği bozmadan bu çarpanları birbiriyle kısaltarak

$$a(a-1)(a-2)\cdots 2 \cdot \{a, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n$$

elde ederiz. $a(a-1)(a-2)\cdots 2$ çarpımında çarpanların sırasını değiştirerek kısaca

$$a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (a-1) \cdot a \ (^1)$$

yazarsak,

$$(13) \qquad a!\{a, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n$$

elde etmiş oluruz.

Bir kabın muhtevasının ardarda daha küçük kaplara ayrılmasına dair yukarıki işlem A dan sonra B ye de uygulanabilir. Bundan dolayı

$$b!\{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a}, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{a}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b}, c, \ldots\}_n$$

olup, (13) ile birlikte

$$a!\,b! \cdot \{a, b, c, \ldots\}_n = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{a+b}, c, \ldots\}_n$$

ve nihayet aynı şekilde

---

(1) $a!$ sembolü «faktoriyel a» diye okunur.

(14) $$a!\,b!\,c!\cdots\{a, b, c, \ldots\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n$$

olur. En son parantezdeki 1 lerin sayısı tabiatiyle n dir.

Eğer bundan başka (13) te $a = n$ ise, yani A gibi tek bir kap mevcutsa,

$$n!\,\{n\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n$$

olup, bu suretle (11) den

(15) $$n! = \{1, 1, \ldots, 1\}_n$$

elde edilir. Buradan (14) vasıtasıyla derhal

(16) $$\{a, b, c, \ldots\}_n = \{1, 1, \ldots, 1 \mid a, b, c, \ldots\}_n = \frac{n!}{a!\,b!\,c!\ldots}$$

bulunur. Bu son formülde parantez sembolünün tekrar eski kısaltılmamış haline döndük. Böylelikle dağılış sayısına dair parantez sembolünün hesabını, evvelce vermiş olduğumuz misallerdeki ihtiyaçlarımızı görecek kadar anlatmış olduk.

9. Hususiyle bu misalleri tekrar ele alarak aşağıki özel neticeleri kaydedelim:

I. (2) ve (15) eşitliklerine göre

$$P_n = \{1, 1, \ldots, 1 \mid 1, 1, \ldots, 1\}_n = \{1, 1, \ldots, 1\}_n = n!$$

dir. Şu halde n kişi n yere $n!$ türlü oturtulabilir, yahut: n farklı elemanın $n!$ tane permütasyonu vardır. Faktoriyeller, bilindiği üzere, n arttıkça çok çabuk artarlar. Meselâ:

$1! = 1$	$6! = 720$
$2! = 2$	$7! = 5040$
$3! = 6$	$8! = 40320$
$4! = 24$	$9! = 362880$
$5! = 120$	$10! = 3628800$

dir.

II. (3) ve (16) ya göre Skat kâğıtlarının mümkün olan bütün dağıtılışlarının sayısı

$$S = \frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}$$

dır. Bu çok büyük bir sayı olup, hesap yapılırsa

$$S = 2753\ 294408\ 504\ 640$$

bulunur.

III. (5) ve (16) ya göre ve (8) düallik özelliğini gözönüne alarak umumî polinom katsayısı için

$$P^{(n)}_{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!} \qquad (a+b+c=n)$$

bulunur. Özellikle (6) daki polinom katsayılarının, bu formülde $n=4$ kılınmak suretiyle hesabı neticesinde

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 = {} & x^4+y^4+z^4 \\ & +4x^3y+4x^3z+4xy^3+4y^3z+4xz^3+4yz^3 \\ & +6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2 \\ & +12x^2yz+12xy^2z+12xyz^2\end{aligned}$$

elde edilir.

IV. (7) ve (16) ya göre n elemanın k. sınıftan kombinezonlarının sayısı

$$C^{(n)}_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dır. Şu halde n tane birbirinden farklı şeyden bu kadar tane k elemanlı grup seçilebilir.

9. Waring Problemi

Tabiî sayılar dizisinde ilerledikçe, 1, 4, 9, 16, 25, ... kare sayıları gittikçe seyrekleşir, yani bu sonuncu sayıların teşkil ettiği dizide iki müteakip terim arasındaki fark gittikçe artar. Fakat bu aralıklarda öyle sayılar bulunur ki, hiç olmazsa iki karenin toplamı olarak gösterilebilsin. Meselâ: $13=9+4$, $41=25+16$, ... gibi. Bununla beraber her sayı böyle iki karenin toplamı olarak gösterilemez. Meselâ 6 yı böyle göstermek istesek, toplamı 6 yı verecek kareler, 6 dan küçük başka kare olmadığı için, ancak 1 ve 4 olabilir. Halbuki ne $1+1$ ne $4+4$, ne de $1+4$, 6 yı verir. 6 yı olsa olsa $4+1+1$ şeklinde olmak üzere üç karenin toplamı olarak gösterebiliriz. Aynı reçeteye göre kareket ederek 7 sayısının üç kare toplamı şeklinde bile gösterilemiyeceğini görebiliriz; bu halde ancak dört kare kâfi gelir: $7=4+1+1+1$. $8=4+4$ için gene iki kare yeter; 9 un kendisi bir karedir; $10=9+1$, $11=9+1+1$, $12=9+1+1+1=4+4+4$, vs.

Bu ilk tecrübelerden sonra, yakında dört karenin de yetmiyeceği bir yerin geleceği ve bu işin devamı boyunca gittikçe daha fazla sayıda kareye ihtiyaç hâsıl olacağı beklenebilir. Bundan dolayı, 17. asrın *Descartes*'la birlikte büyük matematikçisi *Fermat* nın her tabiî sayının en çok dört tane kare toplamı olarak gösterilebileceğini ispat etmesi şaşırtıcı bir olaydır.

Waring bu vâkıanın küpler, dördüncü kuvvetler v.s. için de bir benzerini aramak problemini ortaya atmıştır. Bu sebebten, bu bölümde bahis konusu olacak problem adını ona borçludur. Küpler 1, 8, 27, 64, ... sayılarıdır. En baştaki tabiî sayıları mümkün olduğu kadar az sayıda küplerin toplamı olarak göstermek istersek, 8 den evvelki son sayı olan 7 halinde — küp olarak yalnız 1 leri kullanmak zorunda olduğumuzdan — aşikâr olarak 7 küp'e ihtiyaç bulunduğunu görürüz: $7=1+1+1+1+1+1+1$:

15=8+1+1+1+1+1+1+1 için 8 küpe, 23=8+8+1+1+1+1+1 +1+1 halinde ise 9 küpe ihtiyaç vardır. 31'e gelmeden 3. küp sayısı olan 27 araya girer ve bütün manzara değişir; 31 = 27 + 1 + 1 + 1 + 1 için sadece 5 küp lâzımdır, v.s.

C. G. J. Jacobi hesap sanatkârı Dahse'yi, hiç olmazsa matematiğe indirekt olarak yararlı olacak bir işte kullanmak için, tabiî sayılar dizisinin bundan sonraki kısmında da mümkün olduğu kadar az sayıda küplerle gösterilebilen sayıları araştırmaya memur etmişti. Bu denemeler neticesinde 23 ten sonra ancak 239 un 9 tane küpe ihtiyaç gösterdiği ve bundan sonra Dahse' nin hesaplarının sonu olan 12000 sayısına kadar böyle hiç bir sayının bulunmadığı, 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 303, 364, 420, 428, 454 ün sekiz küpe ihtiyaç gösterdiği ve 12 000 e kadar başka hiç bir sayının sekiz küpe lûzum göstermediği, 7, 14, 21, 42, 47, 49, 61, 77, 85, 87, 103 ..., 5306, 5818, 8042 sayılarının yedi küpe ihtiyaç gösterdiği ve daha zengin olan bu son dizinin de gittikçe seyrekleştiği ortaya çıkmıştı. Bu denemelerin sonraki devamları da bu seyrekleşmeyi teyit etmiştir.

Fakat bu türlü denemeler ne kadar ileri götürülürse götürülsün, ne *her* sayının en çok dokuz küp toplamı olarak gösterilebileceğini, ne de baştan itibaren olmasa bile, belirli bir yerden sonra *bütün* sayıların en çok 8, hattâ 7 küp toplamı olarak gösterilebileceğini hiçbir zaman ispat edemezler. Yukarıki ikî iddiadan birincisini o zaman çok genç olan Wieferich isminde bir matematikçi ispat etmiş olup, ikinci iddiayı daha evvel Landau 8 küp için ve zor matematik vasıtalar kullanarak ispat etmişti.

Dördüncü kuvvetler için de yukarıkilere benzer eziyetli denemeler yapılmıştır. İlk dördüncü kuvvetler sırasiyle 1, 16, 81, 256, ... dır. Burada 15 aşikâr olarak 15 tane, 31, 16 tane, 47, 17 tane, 63, 18 tane, 79 ise 19 tane dördüncü kuvvete ihtiyaç gösterir; sonra 81 gelir ki, burada tablo tamamen değişir. Soru,

19 tane dördüncü kuvvetin her zaman kâfi gelip gelmemesi idi. Bu hedefe yavaş yavaş yaklaşılmıştır. Evvelâ, Liouville 53 tane dördüncü kuvvetin daima kâfi geleceğini ispat etmiş olup, sonraları bu sayı sırasiyle 47, 45, 41, 39, 38 e indirilmiş ve Wieferich rekoru 37 ile kırmıştı; bununla beraber deneme ile bulunan 19 sayısı henüz çok uzakta idi.

Hilbert kısa bir zamanda yazdığı meşhur bir travayında bütün bu problem gurubuna daha geniş bir cepheden hücum etti ve evvelce tesis edilmiş rekorların hiçbirini kırmamakla beraber (esasen bu rekorlardan herhangi birine herhangi bir şekilde yaklaşmak arzusunda da değildi), bir hamlede, yalnız 3. ve 4 kuvvetler için değil, fakat 5., 6. ve daha yüksek bütün kuvvetler için de (yukarıki 9 ve 37 gibi) her tabiî sayıyı o kadar tane kuvvetin toplamı olarak göstermeye kâfi gelebilecek bir sayının mevcut olduğunu ispat etti (tabiî kuvvet yükseldikçe ona tekabül eden bu son sayının gittikçe daha büyük seçilmesi lâzım gelir).

İngiliz matematikçileri Hardy ve Littlewood ise aynı probleme Hilbert'inkilerden çok farklı vasıtalarla hücum etmişlerdir. Bu vasıtaların o zamana kadar görülmemiş kudreti hakkında bir fikir vermek için, neticelerinden birinin belirli bir yerden itibaren her sayının 19 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebileceği olduğunu söyliyelim. Yukarıda görmüştük ki, daha ilk sayılar arasında 19 tane dördüncü kuvvete ihtiyaç gösteren sayılar mevcuttur. Hardy ve Littlewood'a göre öyle bir belirli N sayısı verilebilir ki, bu sayıdan daha büyük her sayı en çok 19 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebilsin (Bununla beraber bu N sayısı o kadar büyüktür ki, Hardy ve Littlewood onu hesap etmeğe girişmemişlerdir). Artık *her* sayının 19 tane dördüncü kuvvet toplamı olarak gösterilebileceğini ispat etmek ve böylece 4. kuvvetlere ait problemin çözümünde kare ve küplerde varılan neticeler seviyesine gelmek için geriye kalan şey,

N ye kadar bütün sayıları deneyerek, onların da en çok 19 tane dördüncü kuvvete muhtaç olduklarını göstermekten ibarettir. Ancak Hardy'nin N sayısını teori vasıtasiyle adamakıllı küçük bir sayıya indiremedikçe, bu deneme hesap yapacak olan herkesin kudreti dışındadır.

Vâkıalar (neticeler) üzerinde bu kadar durmamızın sebebi, bu vakıaların elde edilişinde kullanılan bir nevi matematik tecrübe vasıtasiyle matematik problemlerinin nasıl şekil aldıkları hakkında bir fikir vermekti. Şimdi bu alanda tatbik edilmiş olan ve Hilbert'in de büyük ispatında kullanmış olduğu *metodlar* hakkında bir fikir vermeğe çalışacağız. Bununla birlikte, Hardy ve Littlewood'un kendilerini bu alanda muvaffakiyete götürmüş olan kudretli matematik vasıtalarından bahsetmek bu bölümün imkânlarını çok aşar.

Her zaman olduğu gibi, burada da evvelâ daha basit bir hale kendimizi alıştıracağız. Her halde vaktiyle ezbere öğrenmiş olduğunuz şu hakikatı hatırlayacaksınız: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Eğer hatırlamazsanız, parantezleri kaldırmak suretiyle hesap yaparak bu eşitliğin, a, b sayıları hangi değerleri alırlarsa alsınlar, daima doğru olduğunu görebilirsiniz. Matematikçiler her zaman için doğre olan böyle bir eşitliğe bir «özdeşlik» derler.

Biraz daha karışık bir özdeşlik de şudur:

$$(1) \qquad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Bu formülün doğruluğu,

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

formülünü hatırlamak ve ona göre sağ tarafı hesaplamak suretiyle anlaşılır:

$$(a^2c^2+2acbd+b^2d^2)+(a^2d^2-2adbc+b^2c^2)$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+2abcd-2abcd.$$

Burada en son iki terim birbirini götürür ve diğerleri

$$a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

şeklinde toparlanabilir ki, bu da (1) in sol tarafının aynıdır.

Bu özdeşlikten oldukça enteresan olan şu netice çıkarılabilir: «Eğer iki sayının her biri ikişer kare toplamı olarak gösterilebilirse, bu iki sayı çarpımı da iki kare toplamı olarak gösterilebilir». Meselâ 13 ve 41 in her ikisi de bu özeliği haiz idiler: $13=9+4$, $41=25+16$. Buradan (1) i uygulamak suretiyle hakikaten

$$533=13\cdot41=(3^2+2^2)(5^2+4^2)=(3\cdot5+2\cdot4)^2+(3\cdot4-2\cdot5)^2$$

$$=23^2+2^2$$

bulunarak, 533 iki kare toplamı şeklinde gösterilmiş olur. Aynı şeyi iki kare toplamı şeklinde gösterilebilen herhangi iki sayının çarpımı için de yapabiliriz.

Bu ilk ön ekzersizi bir ikincisi takip edecektir. Fakat daha önce dört terimli bir ifadenin karesine dair aşağıki formülü verelim:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3$$

$$+2x_2x_3+2x_1x_4+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

Şimdi esas konuya dönerek 18. yüzyılın büyük matematikçisi Euler tarafından keşfedilmiş olan şu özdeşliği verelim:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$$

$$(2)\quad =(-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2$$

$$+(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.$$

Yukarıki kaideyi kullanarak parantezleri açmak suretiyle bu öz-

deşliğin doğruluğuna fazla güçlük çekmeden kanaat getirilebilir. (1) e benzer olarak (2) nin bize öğrettiği şudur: «herbiri dörder karenin toplamı olarak gösterilebilen iki sayının çarpımı da dört karenin toplamı olarak gösterilebilir.» Lagrange bu ihtarı kullanmak suretiyle, *her* sayının dört kare toplamı olarak gösterilebileceği teoremini çok güzel bir şekilde ispat etmiştir. Hakikaten bu ihtardan evvelâ, teoremin ispatı için *her asal sayının* dört kare toplamı olarak gösterileb'leceğini ispat etmenin kâfi olduğu anlaşılır. Çünkü her bileşik sayı bir takım asal sayıların çarpımıdır. Fakat (2) nin rolü burada bitmiş olmayıp, ispatın geri kalan kısmı için de temel teşkil eder. Maalesef bu ispat biraz uzun ve biraz da fazla ince olduğundan dar bir yere sığdırmak ve tamamiyle açık bir hale sokmak burada mümkün değildir. Bu teoremi aşağıki satırlarda ispatı burada yapılmışçasına, doğru kabul edeceğiz.

19. Yüzyılın ilk yarısındaki Fransız matematikçilerinden J. Liouville, her pozitif tam sayıyı dört karenin toplamı olarak ifade eden bu teoreme dayanarak, her sayının 53 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebileceğini ispat etmiştir. Liouville de aşağıda vereceğimiz bir özdeşlikten hareket etmektedir:

$$6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$$

$$(3)\quad =(x_1+x_2)^4+(x_1+x_3)^4+(x_2+x_3)^4+(x_1+x_4)^4+(x_2+x_4)^4+(x_3+x_4)^4$$

$$+(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_2-x_3)^4+(x_1-x_4)^4+(x_2-x_4)^4+(x_3-x_4)^4.$$

Bu özdeşliği gerçeklemek için sağ taraftaki ifadeyi açarken

$$\left.\begin{matrix}(x_1+x_2)^4\\+(x_1-x_2)^4\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}x_1^4+4x_2^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4\\+x_1^4-4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2-4x_1x_2^3+x_2^4\end{matrix}\right.$$

$$=2x_1^4+2x_2^4+12x_1^2x_2^2$$

olduğuna ve benzer ifadelerin üstüste bulunan herhangi iki dör-

düncü kuvvet toplamı için de elde edilebileceğine dikkat etmelidir. Sağ taraftaki bütün parantezleri açar ve neticeleri yukarıki gibi toplarsak, sağ taraf için

$$6(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4)$$

$$+ 12(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2)$$

ifadesini buluruz. Sol tarafın ise, bir dört terimlinin karesini almak için evvelce verdiğimiz kaide dolayısiyle aynı ifadeye eşit olduğunu görmek daha kolaydır. Liouville bu özdeşliği şöyle kullanmaktadır: n herhangi bir pozitif tam sayı olsun; bunun en çok 53 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebileceğinin ispatı isteniyor. Liouville evvelâ bu sayıdan $28 = 6 \cdot 4 + 4$ modeline göre, yani 6 ile bölüp, bölen ve kalanı bularak, 6 nın mümkün olduğu kadar büyük bir katını çıkarmakla işe başlıyor. Şu halde, umumî olarak y kalanı 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayılarından birisi olmak üzere $n = 6x + y$ olsun. Şimdi Liouville Fermat teoremini x'e uygulamak üzere birinci defa kullanıyor: Her sayı en çok dört karenin toplamı olarak gösterilebildiğinden x de

$$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde

$$n = 6x + y = 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$+ y = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 6d^2 + y$$

olur. Bundan sonra Liouville a, b, c, d sayılarının herbirine tatbik etmek üzere Fermat teoremini bir defa daha kullanıyor; buna göre

$$a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

$$b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$$

$$c = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

$$d = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$$

ve neticede

$$n = 6(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 + \cdots + 6(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)^2 + y$$

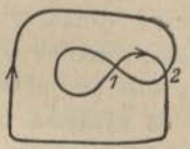
olur. (3) özdeşliği ancak burada sahneye çıkıyor. (3) e göre sağ taraftaki birinci terim 12 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebilir. Aynı şey, onu takip eden üç terim için de doğrudur. Bu suretle sağdaki ilk dört terim $4.12 = 48$ tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebilir. Sağdaki son terim ise, yani y, kendisi kadar, yani en çok 5 tane 1 in toplamı olarak gösterilebilir (y, 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayılarından biri olup, aşikâr olarak $1^4 = 1$ den daha büyük bir dördüncü kuvvet ihtiva edemez). Bu suretle sağ taraf, hepsi birden $48 + 5 = 53$ tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak gösterilebilir ki, iddiamız da bu idi.

10. Kendi kendini kesen kapalı eğriler hakkında

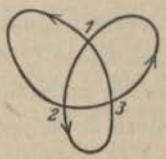
1. Herhangi bir noktasından başlıyarak kendi kendisini birçok kere kesebilen ve nihayet başlangıç noktasına dönen bir eğri çizelim. Bu suretle bir defada çizilebilen kesiksiz bir eğri elde etmiş oluruz. Yalnız, eğrinin kendi kendini kesme noktalarından ikişer defadan fazla geçmemesini şart koşacağız. Bu tipte noktalara iki kat nokta denir. (1)

(1) İkinci bölümün konusu ile birçok temas noktalarına rağmen, aradaki esaslı noktainazar farkı sebebiyle bu bölümün ondan müstakil olarak öğrenilmesi okuyucuya tavsiye olunur. Orada bir eğri şebekesi verilmiş olup, o şebekenin çeşitli dolaşılma imkânları sorulmakta idi. Burada ise, dolaşma şekli tek bir «ring hattı» olmak üzere daha başta tespit edilmiştir. Bundan başka burada gözönüne aldığımız eğriler ikinci bölümdeki manada sadece dördüncü mertebeden kesişme noktalarını haiz olup, bu noktalara burada iki kat noktalar diyoruz. Nihayet bir iki kat noktadan daima belirli bir şekilde geçilir: uçları o noktada bulunan dört doğru parçasının ikişer ikişer karşılıklı olanlarından arka

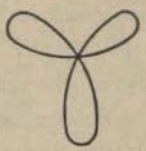
Buna göre aşağıdaki mülâhazalarda Şek. 31 ve 32 deki gibi olan eğrileri gözönüne alacağız, fakat Şek. 33 deki gibi eğrileri bir kenara bırakacağız. Şu halde eğriyi tam bir defa dolaştığımızda, her iki kat noktadan tam iki kere geçeriz. Bu iki kat noktalar numaralarla gösterilirse, eğriyi dolaşırken onlara rastlayış sırasını onların numaraları ile ifade edebiliriz. Meselâ Şek. 31 ve 32 şu numara sıralarına tekabül ederler: 1 2 2 1 ve



Şek. 31



Şek. 32



Şek. 33

1 2 3 1 2 3. Tabiatiyle böyle bir numara sırasında mevcut olan her numara işaret ettiği iki kat noktanın temsilcisi olarak tam iki defa bulunmalıdır. Gauss bu şartın yeter olmadığını, yani içinde her numaranın tam iki defa bulunduğu bir numara sırasının mutlaka yukarda tarif edilen tipte bir eğrinin iki kat noktalarının sıralanışına tekabül etmesi icap etmediğini göstermiştir. Meselâ iki tane iki kat noktalı bir eğrinin bu noktalarının sıralanışı için 1 2 2 1 sembolünü bulmuştuk; fakat iki kat noktaları 1 2 1 2 sırasında olan hiçbir eğrinin mevcut olamıyacağı, bu basit halde deneme yoluyla kolayca görülür.

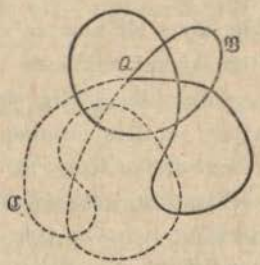
Genel olarak şu teorem caridir: *Bir iki kat noktanın numarası, eğriye ait sembolün bir defa çift, bir defa da tek basamağında zuhûr eder*, başka bir deyimle, sembolde aynı iki kat noktaya ait iki numara arasında diğer iki kat noktaların numaraları tarafından işgâl edilen basamakların sayısı ya sıfır veya çift bir

---

arkaya olmak üzere o noktadan iki defa geçilir ve iki geçiş yolu birbirbirini keser. Zaten «kendi kendini kesme noktası» terimi de bunu ifade eder.

sayıdır. Bu teoreme göre 1 2 1 2 sembolü mümkün değildir, çünkü her iki 1 arasında 2 tarafından doldurulan ancak *bir* basamak mevcuttur.

2. Yukarıda ifade edilen teoremi ispat için $\mathfrak{A}$ eğrimizin Q gibi herhangi bir iki kat noktasını ele alalım. Q den başlayarak $\mathfrak{A}$ eğrisi boyunca yürürsek, Q ye bir kere muhakkak dönmemiz icap eder. Yürüyüşümüzü burada kesersek, bütün $\mathfrak{A}$ eğrisini değil onun sadece bir $\mathfrak{B}$ parçasını dolaşmış oluruz, çünkü Q bir *dört* yol ağzıdır ve şimdiye kadar Q den hareketimizde ve Q ye dönüşümüzde olmak üzere bu yollardan ancak *ikisi* üzerinde yürümüş bulunuyoruz. Eğrinin $\mathfrak{B}$ parçasını, Q de kapanmış olan bir defada dolaşılabilir bir eğri olarak düşünebiliriz, (Böylece Q de bir köşenin medana gelmiş olmasının zararı yoktur, çünkü

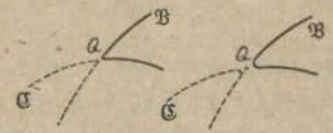


Şek. 34

bu bölümde göz önüne aldığımız eğriler pek alâ köşeleri haiz olabilirler). Bundan sonra gene Q den başlayarak $\mathfrak{A}$ eğrisini dolaşmaya devam edersek, $\mathfrak{A}$ nın geri kalan $\mathfrak{C}$ parçasını dolaşmış oluruz. $\mathfrak{C}$ de kendi başına Q de kapanan ve aynı noktada bir köşeyi haiz bir eğri teşkil eder. Q noktasında (dolgun çizilmiş) $\mathfrak{B}$ eğrisi ile (kesintili çizilmiş) $\mathfrak{A}$ eğrisi kesişmezler, fakat sadece birleşirler; Q, $\mathfrak{A}$ nın iki kat noktası olmakla beraber, ne $\mathfrak{B}$ nin ne de $\mathfrak{C}$ nin iki kat noktasıdır. Burada ispatı istenen şey, Q den başlayıp, gene Q ye dönmek özere $\mathfrak{B}$ üzerinde dolaşıldığın-

da iki kat noktaların üzerinden çift kere geçirildiğidir (¹). $\mathfrak{A}$ nın $\mathfrak{B}$ üzerinde bulunan iki kat noktaları, Q hariç, ya $\mathfrak{B}$ nin kendi kendisini kestiği noktalar, yani $\mathfrak{B}$ nin iki kat noktaları, yahut ta $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}$ yi kestiği noktalardır. $\mathfrak{B}$ tam bir defa dolaşıldığında, $\mathfrak{B}$ nin bir iki kat noktası üzerinden tam iki defa geçilir. Şu halde bu cins iki kat noktalardan doğan geçiş sayısı çifttir. $\mathfrak{B}$ tam bir defa dolaşıldığında $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}$ ile her kesişme noktasından sadece bir defa geçilir, çünkü böyle bir noktadan $\mathfrak{B}$ ye ait ancak bir yol parçası geçer. (Bu yolu gözönüne alınan noktada kesen diğer yol $\mathfrak{C}$ ye ait olduğundan, $\mathfrak{B}$ nin dolaşılması esnasında üzerinde yürünülmesi bahis konusu olamaz). Şu halde geriye, $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}$ yi *çift sayıda* noktada kestiğini ispat etmek kalıyor. Bu takdirde, Q de başlayıp gene Q de biten bir tam dolaşma esnasında, kısmen $\mathfrak{B}$ nin iki kat noktaları, kısmen de $\mathfrak{B}$ ile $\mathfrak{C}$ nin kesişme noktaları olmak üzere, $\mathfrak{A}$ nın yol üzerindeki iki kat noktalarından çift sayıda geçilmiş olacaktır. Bu sayımda Q nün kendisi tabiatiyle nazarı itibara alınmamaktadır.

3. $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ eğrilerinin herbirinin Q noktasındaki köşelerini biraz yuvarlaklaştırırsak, kesişme noktalarının sayısı değişmez.



Şek. 35

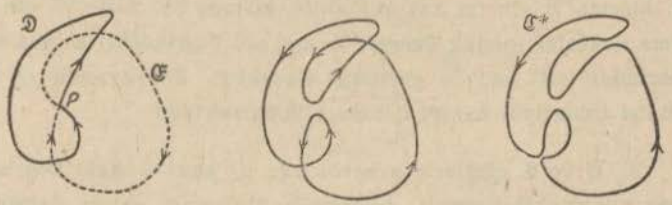
Bu takdirde sadece birbiriyle kesişen, fakat hiçbir noktada birbirine bitişmeyen iki $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ eğrisi elde etmiş oluruz.

Şimdi böyle iki eğrinin ya hiç kesişmediklerini veya çift

(¹) Bununla üzerinde geçilen iki kat noktaların çift sayıda olduğu kastedilmemektedir. Meselâ sembolü 1 2 2 1 olan Şek. 31 de baştaki 1 ile sondaki 1 arasında tek bir 2 iki kat noktasından geçilmiş ve bu noktadan iki (yani çift) kere geçilmiştir.

sayıda noktada kesiştiklerini göstermemiz lâzımdır. Bu maksatla bu eğrilerden birini, meselâ $\mathfrak{C}$ yi, $\mathfrak{B}$ *ile* $\mathfrak{C}$ nin çift olduğunu göstereceğimiz, *kesişme noktalarının sayısını değiştirmeden* adım adım değiştirelim. Filhakika bu suretle $\mathfrak{C}$ nin bütün iki kat noktalarını bertaraf ederek, $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ nin birbirine göre durumunu daha iyi görebileceğiz.

Şimdi P, $\mathfrak{C}$ nin bir iki kat noktası olsun. $\mathfrak{C}$ eğrisi P vasıtasıyla, tıpkı evvelce $\mathfrak{A}$ nun Q vasıtasıyla $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ eğrilerine ayrılışı gibi, iki kapalı $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{E}$ eğrilerine ayrılır; $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{E}$, P noktasında bitişirler. $\mathfrak{C}$ nin bütününe bir dolaşma yönü verilirse, böylelikle $\mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{E}$ ye de birer dolaşma yönü verilmiş olur. (Şek. 86a). Şimdi P den hareket ederek $\mathfrak{D}$ yi yukarda tespit edilen



Şek. 36a Şek. 36b Şek. 36c

yönde dolaşıp, P ye dönelim ve buna $\mathfrak{E}$ yi yukarıkinin aksi istikamette dolaşarak gene P ye dönüşü ekleyelim. $\mathfrak{E}$ yi ters yönde dolaşmakla P deki kesişmeden sıkınmış olduk. Bu sefer toptan olarak $\mathfrak{C}$ yi bir defada dolaşmış olmakla beraber, P noktasından P de kesişmeyip sadece bitişen iki yolla geçtik. Bu iki yolu P de biraz birbirinden ayırır ve köşeleri yuvarlaklaştırırsak, $\mathfrak{C}$ yerine, P den geçmeyen, yani *bir tane iki kat noktası eksik* bulunan diğer bir kapalı eğri elde ederiz (Şek. 36b). P noktasındaki yuvarlaklaştırma işlemleri P ye o kadar yakın yerde yapılmış olarak düşünülmektedir ki bu işlemlerden $\mathfrak{C}$ nin ne kendi kendisi ne de diğer herhangi bir eğri ile olan kesişme noktaları müteessir olmasınlar.

Bu işlemi tekrarlayarak, $\mathfrak{C}$ nin iki kat noktalarını birbiri ardısıra ortadan kaldırabiliriz ve nihayet hiçbir iki kat noktayı haiz olmayan öyle bir $\mathfrak{C}^*$ eğrisi elde ederiz (Şek. 36c) ki, bu eğri hemen her yerde $\mathfrak{C}$ eğrisi ile çakışır, sadece $\mathfrak{C}$ nin iki kat noktaları civarında bu sonuncu eğriden ayrılır.

4. İki kat noktası bulunmayan kapalı bir eğriye gelince, böyle bir eğrinin daima, «eğrinin içi» adını vereceğimiz bir bölgeyi çevrelediği seziş yoluyla görülür. Düzlemin, eğriye ve onun içine ait olmayan geri kalan kısmına eğrinin «dışı» denir. Şu halde böyle bir eğrinin içi ve dışı eğrinin kendisi vasıtasıyla birbirinden ayrılır.

3. ün başında yapılan $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{C}$ eğrilerinin kesişme noktalarının çift sayıda olduğuna dair iddiayı ispat için bu hususu kullanacağız. 3. ün sonunda anlatıldığı gibi, $\mathfrak{C}$ eğrisinin yerine $\mathfrak{B}$ ile aynı kesişme nortalarını haiz ve iki kat noktasız $\mathfrak{C}^*$ eğrisinin konulmuş olduğunu farzedelim. $\mathfrak{B}$ eğrisi tamamen $\mathfrak{C}^*$ ın içinde olabilir; bu takdirde $\mathfrak{C}^*$ ve $\mathfrak{B}$ nin hiçbir ortak noktası yoktur. Aynı netice $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}^*$ ın tamamen dışında olması halinde de elde edilir. Şu halde geriye, $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}^*$ ın kısmen içinde, kısmen de dışında bulunması hali kalıyor: T, $\mathfrak{B}$ nin $\mathfrak{C}^*$ ın dışında bulunan bir noktası olsun. T den itibaren $\mathfrak{B}$ üzerinde yürümeye başlarsak, $\mathfrak{C}^*$ ın içine ilk gireceğimiz nokta bir kesişme noktası verir. $\mathfrak{B}$ kapalı olduğundan, yürümeye devam edince T noktasına döneriz ve şu halde $\mathfrak{C}^*$ ın içinden gene dışarı çıkarız ki, bu da bize ikinci bir kesişme noktası verir. Umumî olarak, $\mathfrak{B}$ birçok defalar $\mathfrak{C}^*$ ın içine girer ve dışına çıkar, fakat $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}^*$ ın dışından gelip, gene dışına çıktığından, her girişe bir çıkış tekabül eder. Şu halde buraya kadar anlatılanların neticesi olarak, $\mathfrak{C}^*$ ın $\mathfrak{B}$ yi ya hiç kesmediğini, yahut çift sayıda noktada kestiğini görürüz. Evvel ki mülâhazalara göre aynı durum $\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{B}$ eğrileri için de caridir. Bu suretle, 2. nin sonundaki düşünceye

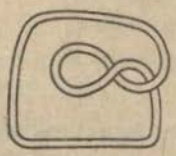
göre, iki kat noktaların sıralarına dair olan teoremi tamamen ispat etmiş oluyoruz.

5. Kapalı bir $\mathfrak{A}$ eğrisi üzerinde dolaşıldığında bu eğrinin her iki kat noktasına bir defa çift, bir defa da tek sırada rastlanılması lâzım geldiğini ifade eden bu teorem, biraz başka bir şekilde de tefsir edilebilir. $\mathfrak{A}$ eğrisini bir uzay eğrisinin biri diğerinin üzerinden geçen iki kolunun izdüşümlerinin kesişme noktası olarak tefsir edelim.

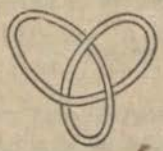
Şimdi $\mathfrak{A}$ eğrisinin her hangi bir noktasına uzaydaki eğri üzerinde ve izdüşümü $\mathfrak{A}$ nın göz önüne aldığımız noktası olan bir nokta bağlıyalım. İşte uzay eğrisini bilhassa öyle belirtmek istiyoruz ki, $\mathfrak{A}$ eğrisi üzerindeki dolaşma esnasında iki kat noktalardan geçerken $\mathfrak{A}$ daki noktaya uzaydaki eğride bağlanan nokta iki kat noktalara tekabül eden uzay eğrisi kollarının bir üstündekinden, bir altındakinden geçsin. Şimdi problem, böyle bir tayinin mümkün olup olmamasıdır. Çünkü, bir kesişme noktasını, (yani iki kat noktayı) meselâ bir kere «üstten» geçmiş isek, aynı noktadan ikinci geçişte ancak «alttan» geçebiliriz. Halbuki eğri üzerinde dolaşırken bir üstten, bir alttan geçiş şartı, ilk iki kat noktadaki geçişin üstten mi yoksa alttan mı olacağına bir kerre karar verilince, geri kalan bütün kesişme noktalarındaki geçişleri tamamen belirtir. Acaba bir Q kesişme noktasında meselâ üstten başlıyarak diğer kesişme noktalarını sırasiyle alttan, sonra üstten, sonra gene alttan, ilâh ... şeklinde geçtikten sonra Q ye gene üstten dönmek gibi bir tenakuz ortaya çıkabilir mi? Hayır! Yukarıda ispat ettiğimiz teorem tam da böyle bir tenakuzun ortaya çıkamıyacağını ifade etmektedir. Çünkü Q de «üstten» hareket ederek diğer kesişme noktalarından sırasiyle «alttan», sonra «üstten», ilâh ... geçmek suretiyle Q ye döndüğümüzde, Q nün «altına» gelmiş olmamız icabeder. Bunun da sebebi, Q den iki geçiş arasında iki kat noktalar üzerinden *çift* sayıda geçiş yapmak mecburiyeti olup, bu geçişlerin

ilki alttan, ikincisi üstten, ilâh... olduğundan sonuncusu gene üsttten olur ki, bunu takip eden Q den ikinci geçiş te ister istemez «alttan» olmaya mecbur kalır. Bu da tam bizim istediğimizdir, çünkü Q de «üstten hareket edersek, iki kat noktaların yukarıki yeni tefsirine göre Q den ikinci geçiş için geriye ancak «alttan» geçiş kalır.

Aşağıdaki Şek. 37 ve Şek. 38 de, evvelki Şek. 31 ve 32 nin eğrileri yeni tefsire göre uzay eğrilerinin izdüşümleri olarak gösterilmiş olup, iki kat noktalar geçit şeklinde çizilmiştir. Böylece, bu uzay eğrileri birer «düğüm» teşkil ederler ki, izdüşümü üzerinde dolaşıldığında üstten ve alttan geçişlerin birbiri arkası sıra geldiği böyle bir düğüme, «alterne» düğüm denir.



Şek. 37



Şek. 38

Şek. 39

Aslına bakılırsa, Şek. 37 ancak gayrı has bir düğüm gösterir. Çünkü Şek. 37 ki gibi bükülmüş bir iplik çekiştirilerek hiç düğümsüz bir daire haline konabilir. Buna karşılık, Şek. 38 deki gibi bir iplik «yonca yaprağı kemendi» denilen ve hiç koparmadan daire haline getirilemiyen hakikî bir düğüm teşkil eder.

Her düğümün kendiliğinden alterne olmasının icap etmediği, Şek. 39 dan anlaşılabilir. Alterne olmayan düğümlerin de mevcut olması keyfiyeti, teoremimizin her iki şeklinde de trivial olmadığını en açık bir şekilde gösterir.

11. Bir sayı ancak bir türlü mü asal çarpanlara ayrılabilir?

1. Her tam sayıyı, hiçbiri artık ayrılamıyan, yani «asal», çarpanlarına ulaşıncaya kadar çarpanlara ayırabiliriz. Meselâ 60 sayısı evvelâ $6 \cdot 10$ şeklinde ayrıldıktan sonra, 6 çarpanı $2 \cdot 3$, 10 da $2 \cdot 5$ şeklinde ayrılmaya devam ederler. Neticede 60 sayısı

$$60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$$

şeklinde ayrılmış olur ki, bu dört çarpan asal sayılar olduklarından artık ayrılamazlar.

Gene 60 misâli için bu işi başka türlü yapabilirdik: $60 = 4 \cdot 15$, sonra $4 = 2 \cdot 2$ ve $15 = 3 \cdot 5$ ten

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

elde edilebilirdi. Bu ayrılıştaki asal çarpanlar evvelkilerin aynı olup, tekrarlanan 2 çarpanı da her iki ayrılışta aynı miktarda tekrarlanmıştır. İki ayrılışın birbirinden farkettiği tek husus, çarpanların sırasıdır. Bu çarpanları büyüklüklerine göre sıralarsak, her iki halde de

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

bulmuş oluruz. Okul senelerimizden bu keyfiyeti tamamen aşikâr bir şey gibi görmeğe alışmışızdır. Buna göre bizi asal çarpanlara ayrılışa götüren çeşitli yollar bulunabilir; fakat sonunda elde edilecek asal sayılar aynı olmalıdır. Çünkü asal sayılar tam sayıların çarpım bakımından nihaî yapı taşları olarak tasavvur edildiğinden, bir sayının çarpım bakımından parçalara ayrılmasında en son olarak, kendisini meydana getirmiş olan bu yapı taşlarına çatmak mecburiyetindeyiz.

Bu, hakikatte doğrudur. Fakat burada bahis konusu olan

şey, bunun görüldüğü kadar aşikâr olup olmadığıdır. Kendimize karşı açık olalım: Meselâ 30031 gibi büyük bir sayının 59·509 gibi bir asal çarpanlara ayrılışını bulmaya muvaffak olduktan sonra, 30031'i bölen başka hiçbir asal sayının mevcut olmadığına, yani 30031'in 59'u ihtiva etmeyen biçbir asal çarpanlara ayrılışının mevcut olmadığına nereden emin olabiliriz?

Bununla beraber, problemin bu şekilde vaz'ı, okuyucunun hissine biraz karşı gelmektedir. Bu hisse göre, asal çarpanlar doğrudan doğruya bir sayının «içinde bulunmaktadır». Bu bölümün gayesi işte bu hissin ne kadar dayanaksız olduğunu okuyucunun şuuruna yerleştirdikten sonra, *bir sayının asal çarpanlara ayrılışının hakikaten tek olduğunun* bir ispatını vermektedir.

2. Kendimizi bütün yanıltıcı hislerden kurtarmak için, bize yabancı gelen başka bir bölgeye, a, b iki âdi tam sayı göstermek üzere, $a+b\sqrt{6}$ şeklindeki sayıların teşkil ettiği bölgeye geçeceğiz. Buna göre, meselâ $12+5\sqrt{6}$ yahut $\sqrt{6}-2$ sayıları şimdi uğraşacağımız sayılar cinsindendir. Bundan başka, âdi tam sayılar da bu bölge dışında kalmamaktadır; bil'âkis, bütün bu sayılar $b=0$ olmak üzere bölgemize dahildir. Şu halde göz önüne aldığımız sayıların teşkil ettiği bölge, pozitif ve negatif âdi tam sayılar bölgesinin bir genişlemesinden ibarettir.

Yeni bölgede de âdi tam sayılar bölgesinde olduğu kadar kolaylıkla hareket edebiliriz. Böyle iki sayının nasıl toplanılıp, çıkartılacağı

$$(3+\sqrt{6})+(5+\sqrt{6})=8+2\sqrt{6}$$

örneğinden hemen anlaşılır; fakat çarpıma da aşağıdaki örnekler yardımıyla kolayca alışabiliriz:

$$(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=9-6=3,$$

$$(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=6-4=2,$$

$$(3+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)=3\sqrt{6}-6+6-2\sqrt{6}=\sqrt{6},$$

$$(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)=\sqrt{6}$$

$$(3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})=12+5\sqrt{6}$$

$$(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)=-12+5\sqrt{6}$$

Bu birkaç misalin, böyle bir yabancı bölgede nasıl hareket edeceğimizi göstermeye kâfi geleceğini umarız. Eğer herhangi bir sebepten istenirse, bu hesaplar bir orta okul talebesine de kolayca öğretilebilir. Burada bölme işleminden tabiatiyle hiç bahsetmedik; bu işlem tam sayılarda olduğu gibi burada da her zaman yürümeyebilir. Burada bizi alâkadar eden şey, çarpanlara ayırmaktır.

Evvelâ çok basit ve ilk bakışta çok üzücü bir keyfiyetten,

$$(1) \qquad 6=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$$

dan hareket ederek, 6 nın alıştığımız şekilde çarpanlara ayrılışından başka ondan tamamen farklı bir çarpanlara ayrılışının da mevcut olduğu hakikati önünde duralım. Şimdi başlangıçtaki 30031 sayısının $59\cdot 509$ dan başka tamamen başka çarpanları ihtiva eden bir çarpanlara ayrılışının mevcut olup olmadığına dair sormuş olduğumuz soruyu hatırlayalım; burada âdeta böyle bir hâlise önünde bulunduğumuz sanılabilir.

Fakat durum burada tabiî bir şekilde aydınlanır: 2 ve 3 sayıları her nekadar âdi manada asal iseler de, yani diğer âdi sayıların çarpımları olarak gösterilemezlerse de, pek âlâ $a+b\sqrt{6}$ şeklindeki çarpanlara ayrılabilirler. Çarpıma alışmak için yukarıda vermiş olduğumuz örneklere bir göz atmak bunu gösterir.

$$2=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2),\ 3=(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$$

olduğundan, $6=2\cdot 3$ sayısı aslında iki değil, fakat dört asal çarpana ayrılır:

$$6=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}),$$

ve başlangıçta görmüş olduğumuz iki farklı ayrılış, bu dörtlü ayrılıştaki çarpanların, bir kere 1. ile 2. ve 3. ile 4., öbür defa da 1. ile 4. ve 2. ile 3. olmak üzere, ayrı ayrı şekillerde bir araya getirilmesinden başka birşey değildir. Hattâ şimdiye kadar hiç düşünmemiş olduğumuz üçüncü bir bileşmenin de mümkün olduğu aşikârdır. Hakikaten 1. çarpan ile 3. yü ve 2. ile de 4. yü bir araya getirebiliriz. Bu hale dair lûzumlu hesaplar da yukarıki misâllerde yapılmış olup, 3. ayrılış olarak

$$6=(12+5\sqrt{6})(-12+5\sqrt{6})$$

elde edilir ki, bu netice doğrudan doğruya da gerçeklenebilir.

Şu halde burada durum izah edilebilir, ve bu izahı, 6 nın yukarıki dört çarpanından hiçbirinin artık ayrılamadığını (1) göstermek suretiyle sonuna kadar götürmek mümkündür.

3. Fakat şimdi diğer bir bölgeyi, $a+b\sqrt{-6}$ şeklindeki sayıların bölgesini, ele alacak ve burada yukarıkine tekabül eden durumu benzer şekilde izah etmek şöyle dursun, bilâkis böyle bir izahın mümkün olamıyacağını ispat edeceğiz. $a+b\sqrt{6}$ şeklindeki sayıların bölgesine bu kadar kolay alıştıktan sonra, içinde bulunduğumuz bölgeyi tekrar değiştirmek güç olmıyacaktır. Burada negatif bir sayının kare kökünün alınması bir engel teşkil etmez, çünkü derhal görüleceği üzere bu bölgedeki hesap işlemleri de $a+b\sqrt{6}$ sayılarının bölgesindeki kadar basit ve belirli olarak yapılabilir.

(1) Tabiatiyle ancak ele aldığımız bölgede. Bu bölgede meselâ $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ şeklinde bir ayrılış caiz değildir.

Burada yukarıkine tekabül eden keyfiyet aşikâr olarak

$$6 = 2 \cdot 3 = -\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6} \tag{2}$$

dır. Şimdi 2, 3 ve $\sqrt{-6}$ yı da kendi çarpanlarına ayırmaya çalışalım. Fakat bu denemenin vereceği netice, bunun mümkün olmadığıdır.

Bu mülâhazanın rahat yürütülebilmesi için bir yardımcı kavram teşkil edelim. $a + b\sqrt{-6}$ sayısının «Norm» u diye, bu sayının $a - b\sqrt{-6}$ ile çarpımı anlaşılır ve bu norm $N(a + b\sqrt{-6})$ işaretiyle gösterilir. Şu halde

$$N(a + b\sqrt{-6}) = (a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6}) = a^2 + 6b^2$$

dir. Sözle ifade edilirse, $a + b\sqrt{-6}$ nın normu burada $\sqrt{-6}$ yerine $-\sqrt{-6}$ koymak ve elde edilen neticeyi başlangıçtaki ifade ile çarpmak suretiyle elde edilir. Şu halde norm, âdi bir tam sayı olup, nattâ üstelik pozitiftir. Norma dair şu yardımcı teorem caridir: bölgemizdeki iki sayının çarpımının normu, bu sayıların normlarının çarpımına eşittir. Hakikaten, biraz evvel söylenen kaideye göre

$$N[(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})]$$

$$= [(a + b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})][(a - b\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6})]$$

dır; burada sağdaki birinci köşeli parantezi dolduran başlangıç sayısında $\sqrt{-6}$ yerine $-\sqrt{-6}$ koyarak elde edilen sayı, ikinci köşeli parantezi doldurmaktadır. Sağda hepsi birden dört çarpan mevcut olup, bunların sadece sırasını değiştirerek, yukarıki ifadeyi

$$(a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6})(c + d\sqrt{-6})(c - d\sqrt{-6})$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise, normun tarifine göre

$$N(a+b\sqrt{-6})\,N(c+d\sqrt{-6})$$

dan başka birşey değildir.

Eğer 2 sayısı bölgemizin diğer iki sayısının çarpımına ayrılabilseydi, yani

$$2=(a+b\sqrt{-6})\,(c+d\sqrt{-6})$$

olsaydı,

$$N(2)=N(a+b\sqrt{-6})\,N(c+d\sqrt{-6})$$

olurdu. $N(2)$ ise $(2+0\cdot\sqrt{-6})\,(2-0\cdot\sqrt{-6})=2\cdot 2=4$ ten başka birşey olmadığından,

$$4=(a^2+6b^2)\,(c^2+6d^2)$$

olurdu. 4 ün bu şekilde iki âdi tam sayının çarpımı olabilmesi ise, ancak iki tarzda mümkündür: ya her iki çarpan da 2 ye eşittir, yahut bunlardan biri 4, öteki 1 dir. Burada bunların hiçbiri olamaz. Çünkü 2 hiçbir şekilde x^2+6y^2 şeklinde gösterilemediği gibi, 1 de ancak bir türlü, $x=1$, $y=0$ için, x^2+6y^2 şekline konulabilir; şu halde 2 ancak o suretle çarpanlara ayrılabilir ki, bunlardan biri $1+0\sqrt{-6}=1$ olsun. Bu trivial ayrılışı ise, nasıl âdi tam sayılardaki meselâ $5=5\cdot 1$ ayrılışına 5 asal sayısının bir ayrılışı gözü ile bakmıyorsak, has bir ayrılış saymıyacağız. Gözönüne almış olduğumuz bölgede de, çarpanlarından biri 1 olan (ikili) ayrılışlardan başka hiçbir (ikili) ayrılış kabul etmeyen sayılara asal diyeceğiz.

Tıpkı aynı şekilde 3 ve $\sqrt{-6}$ nın da asal olduklarına kanaat getirilir; bu hallerde 4 yerine 6 ve 9 sayılarının x^2+6y^2 şeklindeki çarpanlara ayrılışları araştırılır.

Şu halde, şimdi (2) tarafından verilen durumla, yani bir sayının iki farklı tarzla asal çarpanlara ayrılışı keyfiyeti ile, karşı karşıya bulunmaktayız. Şu halde âdi tam sayılar bölgesin-

de verilen bir asal çarpanlara ayrılıştan farklı başka bir asal çarpanlara ayrılışın mevcut olamıyacağını mantık bakımından aşikâr kabul etmek muhakkak ki caiz değildir. Çünkü eğer böyle bir mantıkî aşikârlık mevcut olsaydı, aynı durumun son gözönüne almış olduğumuz bölgede de cari olması icap ederdi. Buna rağmen bahis konusu durumun tam sayılar bölgesinde cari olması, tam sayıların bir hususiyeti olup, bu sayıların özeliklerine dayanarak ispat edilmesi icap eder.

Eski Yunan matematikçilerinin sırf mantık tarafsızlığı ve açıklığına dayanarak ve muhtemelen yukarıda verilen cinsten hiç bir aksi misâl tanımadan, çarpanlara ayrılışın bahis konusu tekliğinin ispata muhtaç olduğunu âdeta insiyakî olarak hissetmiş olmaları çok şayanı dikkat bir vakıadır. Bununla beraber bu teorem Öklit'te yukardaki gibi basit ve modern bir şekilde formüle edilmemiştir. İddianın formüle edilişindeki bu farktan başka ispatı da Öklit'tekinden biraz farklı bir şekilde yürüteceğiz.

4. 30 sayısı hem 3 ün, hem de 5 in bir katıdır; bundan dolayı ona 3 ve 5 in bir ortak katı denir. Umumî olarak, iki sayının bir ortak katı deyince, bu sayıların her ikisinin de katı olan bir sayı anlaşılır. Her hangi iki a, b sayısının böyle bir ortak katı daima mevcuttur; meselâ bunların ab çarpımı böyledir. 3 ve 5 için daha 30 a varmadan evvel $3 \cdot 5 = 15$ bir ortak kat olup, 15 in iki katı olan 30 un da böyle bulunduğu ve umumî olarak ab nin her katının a ile b nin bir ortak katı olduğu aşikârdır. Şu halde iki sayının sonsuz sayıda ortak katı vardır.

Fakat bütün ortak katların ab çarpımı ile onun katlarından ibaret olması icap etmez. Meselâ 10 ve 15 sayılarının ortak katları sadece 150, 300, 450, ... değildir; fakat aşikâr olarak 30 ve onunla birlikte bütün 30, 60, 90, 120, 150, 180, ... dizisi de ortak kat olup, 150 nin katları bu sonuncu dizinin ancak bir kısmını teşkil eder. Umumî olarak, iki a, b sayısının bütün ortak katları içinde bir en küçüğü daima mevcuttur. Çünkü ab

ye kadar olan bütün sayıların a ve b nin ortak katı olup olmadıklarına sırasiyle bakarsak, bunların içinde muhakkak surette biri ilk olarak ortak kat olur (icabında bu ilk ortak katı ab çarpımı teşkil eder). İşte bu ilk ortak kata *a, b nin en küçük ortak katı* diyeceğiz.

İlk hedefimiz şu teoremdir: *iki sayının diğer her ortak katı, o sayıların en küçük ortak katının bir katıdır.* $a = 10$, $b = 15$ sasayıları için bu teorem, 30 un katlarının teşkil ettiği 60, 90, ... dizisinin 30 un katları ile birlikte olarak 10 ve 15 in bütün ortak katlarını tükettiğini ifade eder. Her hangi bir nümerik misâl için olduğu gibi, bu misâl için de teoremin doğruluğu hesapla kolayca gerçeklenebilir. Fakat bize lâzım olan şey, teoremin *umumî olarak* doğruluğunu görmektir.

Teoremin *ispatı* şu basit ihtara dayanır: a, b nin iki ortak katının farkı, gene a, b nin bir ortak katıdır. Çünkü — daha bölüm I de görmüş olduğumuz gibi — a nın iki katının farkı gene a nın bir katı, b nin iki katının farkı da gene b nin bir katıdır; şu halde hem a nın, hem de b nin katları olan iki sayının farkı alındığında, bu fark ta hem a hem de b nin katı, neticede her ikisinin bir ortak katı olacaktır.

Şimdi v, a, b nin en küçük ortak katı, W de aynı sayıların herhangi bir katı olsun. Yukarıdaki ihtara göre $W - v$ de a, b nin bir ortak katı olur, bundan v yi bir defa daha çıkarırsak, gene a, b nin bir ortak katını elde ederiz; kısaca, sırayla

$$W - v,\ W - 2v,\ W - 3v, \ldots$$

sayılarını teşkil edersek, bunların hepsi a, b nin ortak katları olurlar. v bütün ortak katların en küçüğü olarak alındığından, bu dizinin henüz ilk terimi muhakkak ki negatif değildir. Belki müteakip terimlerin bazıları da negatif değildir. Fakat bu durumun nihayet bir sonu olması ve dizide ilk defa negatif bir terimin ortaya çıkması icap eder. Bu terimden sonra da artık bütün

terimler negatif olur. Aslında burada bahis konusu olan, okulda W nin v ile bölünmesi denilen şeyden başka birşey değildir: v yi W den mümkün olduğu kadar çok kere çıkarırız ve eğer bölüm tam yapılamıyorsa geriye pozitif, fakat v böleninden küçük bir kalan kalır. Şimdi içinde bulunduğumuz halde, bu bölme mümkün olmasa (yani tam yapılamasa) idi, kalan, yani henüz pozitif olan $W - xv$ sayılarının sonuncusu, a, b nin v den küçük olan bir ortak katını teşkil ederdi ki, bu da v nin *en küçük* ortak kat olması özeliğine aykırıdır. Şu halde bölme tam olarak yapılabilmeli, yani W, v nin hakikaten bir katı olmalıdır.

5. Ortak kat kavramının karşısında *a, b nin ortak böleni* kavramı bulunur: t sayısı hem a hem de b yi bölerse, t ye a, b nin ortak böleni denir.

4. teki teoremden hususiyle, daima a, b nin ortak katlarından biri olan ab çarpımının da v nin katı olduğu neticesi çıkar. Şimdi aşağıda anlatacaklarımız için lâzım olan şu *yardımcı teorem*i ispat edeceğiz: *İki a, b sayısının çarpımı ile en küçük ortak katının bölümü, yani*

$$d = \frac{ab}{v}$$

sayısı, daima a ve b nin bir ortak bölenidir.

İspat elimizde hazırdır. Çünkü d yi veren denklemden

$$d\frac{v}{a} = b$$

çıkar ve v, a nın bir katı olduğundan, v/a göründüğü gibi bir kesir olmayıp, bir tam sayıdır. Şu halde b, d nin bir tam katıdır, yani tersine olarak d, b nin bir bölenidir. d nin a nın da bir böleni olduğu aynen ispat edilerek, d nin a ve b nin bir ortak katı olduğu görülür, ki bu da iddiamızdan ibaretti.

6. Şimdi, kendisinden asal çarpanlara ayrılışın tekliği derhal çıkacak olan, şu hayatî önemi haiz teoremi ispat edebiliriz: *Eğer bir p asal sayısı iki x, y sayısının xy çarpımını bölerse, o asal sayı x veya y den en aşağı birini mutlaka böler.*

İspat, p ve x sayılarının v en küçük ortak katının nazarı itibara alınması esasına dayanır. Hakikaten, *bir taraftan* 4. teki teorem şu neticeyi verir: faraziyeye göre p nin bir katı olan xy çarpımı, aşikâr olarak x in de bir katı, yani p ve x in bir ortak katı olduğundan muhakkak v nin de bir katıdır, meselâ

$$xy = hv. \tag{1}$$

Diğer taraftan 5. teki teorem,

$$d = \frac{px}{v} \tag{2}$$

sayısının tam ve p ile x in bir ortak böleni olduğu neticesini verir. p nin bir böleni ise ancak ya 1 veya p olabilir. Şu halde ya $d = p$, veya $d = 1$ dir. 1. *Şıkta* $d = p$, x in bir böleni olup, neticede p sayısının xy nin birinci çarpanını bölmesiyle iddiamız gerçekleşmiş olur. 2. *Şıkta*, yani $d = 1$ halinde, (2) dolayısiyle $1 = \frac{px}{v}$, yani $v = px$ olup, (1) e göre $xy = h(px)$ olur. Bu eşitliği x ile kısaltırsak, $y = hp$ olur ki, bu da bize bu şıkta p nin y yi, yani xy nin ikinci çarpanını böldüğünü gösterir. Şu halde p her iki şıkta da çarpanlardan birini böler.

Buradan derhal şu netice elde edilir: *Eğer bir asal sayı, bir çok sayıların çarpımını bölüyorsa, çarpanların içinde bir tanesini de böler.* Çünkü meselâ p, xyz yi bölüyorsa, ya x yahut yz yi de böler. Eğer yz yi bölüyorsa, ya y yi yahut z yi böler. Şu halde bütün hallerde çarpanlardan biri p ile bölünür.

7. Asal çarpanlara ayrılışın tekliği teoremi derhal buradan

çıkar. Eğer bir N sayısının iki türlü asal çarpanlara ayrılışı varsa, yani

$$N = p \cdot q \cdot r \cdot s \ldots = P \cdot Q \cdot R \cdot S \ldots$$

ise, p, N yi böldüğünden sağdaki çarpımı da, neticede onun asal çarpanlarından birini de böler. Fakat bir asal sayının diğerini bölmesi, asal sayının tarifi dolayısıyla, ancak bu iki sayının birbirine eşit olmasiyle mümkündür. Şu halde p, ister istemez sağdaki asal çarpanlar arasında bulunacağı gibi, soldaki ayrılışın her asal çarpanı için de aynı durum mevcuttur. İki ayrılış arasında hiçbir fark bulunmadığından, aynı şekilde sağdaki ayrılışa ait her asal çarpanın soldaki ayrılışta da bulunduğu, yani kısaca her iki ayrılışın tamamen aynı asal çarpanları ihtiva ettiği neticesi elde edilir.

Geriye sadece, bu asal sayıların her iki tarafta da aynı miktarda tekrarlanıp tekrarlanmadıkları sorusu kalıyor. Meselâ p, sol tarafta a kere, sağ tarafta A kere tekrarlanıyorsa, yani meselâ bir tarafta $N = p^a q^b r^c \ldots$, diğer tarafta $N = p^A q^B r^C \ldots$ ise ve A, a dan farklı olsa, bu iki sayıdan biri, meselâ A, öbüründen daha büyük olurdu. Bu takdirde N yi p^a ile bölerek

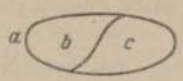
$$M = \frac{N}{p^a} = p^{A-a} q^B r^c \cdots = 1 \cdot q^b r^c \cdots$$

elde ederdik. Burada M sayısı da iki türlü asal çarpanlara ayrılmış olurdu. Fakat açıkça sağdaki ayrılışta p asal çarpanı bulunmadığı halde, soldaki ayrılışta bulunurdu. Halbuki daha evvel iki ayrılışın aynı asal çarpanları ihtiva ettikleri gösterilmişti. Şu halde bu husus M için de doğru olduğundan, biraz evvel elde etmiş olduğumuz neticeyle bir aykırılık (tenakuz) meydana gelir. Şu halde $a = A$ olacağı gibi, aynı şekilde q, r, ... asal sayılarının da her iki ayrılışta aynı miktarda tekerrür edeceği anlaşılır.

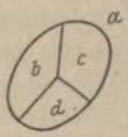
Gayrı ihtiyarî olarak, bütün bu muhakeme zincirinin 3. te ele alınan $a+b\sqrt{-6}$ sayıları için neden cari olmadığı sorulabilir. Hakikaten, yukarıki muhakemelerin hemen hepsi bu hale kolayca nakledilebilir. Buraya nakledilemiyen yegâne muhakeme halkası 4. teki teoremin ispatıdır. Şu halde bu teorem bütün işin esasını teşkil eder.

12a. Dört Renk Problemi

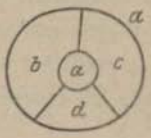
1. Problemin vaz'ı. Cayley (1) 1879 da Londra Coğrafya Cemiyetinin bir toplantısında aşağıki problemden bahsetmiştir. Bilindiği üzere, coğrafya haritaları çeşitli renklerde basılır. En iyisi her memleket için ayrı bir renk kullanmak olmakla beraber, renkli baskıların pahalılığı dolayısiyle sadece birbirine komşu memleketler için ayrı renkler kullanmakla yetinilir. Bu şekilde, meselâ Şek. 40 a daki gibi bir adanın haritası üç renge ihtiyaç gösterir: deniz için âdet olduğu üzere mavi ve adadaki iki memleket için iki başka renk. Şek. 40b deki harita mutlaka *dört* renge ihtiyaç gösterir; çünkü buradaki üç memleketin üçünün de sahili bulunduğundan kendilerine denizin rengi verilemez, diğer taraftan bunlar ikişer ikişer komşu bulunduklarından üçünün de rengi başka başka olmalıdır. Neticede hepsi birden dört renk eder. Şek. 40 c ise denizin boyanmasından vazgeçilse bile



Şek. 40a



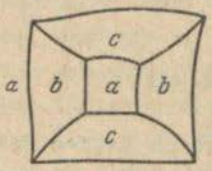
Şek. 40b



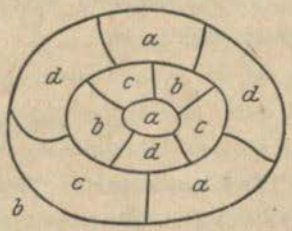
Şek. 40c

gene dört renge ihtiyaç hâsıl olacağını gösterir; burada ortadaki memleket Şek. 40 b deki denizin vazifesini görür. Şek. 41 ve 42 dekiler gibi biraz daha karışık haritalar, üzerinde işaret edil-

diği gibi a, b, c harfleri ile gösterilen üç ve a, b, c, d harfleriyle gösterilen dört renge boyanabilir. Haritaların karşılıklığı arttıkça, onları boyamak için gittikçe daha fazla sayıda renge ihtiyaç hâsıl olacağı düşünülebilir.



Şek. 41



Şek. 42

Hakikatte, ne kadar karışık olursa olsun boyanmasına dört rengin yetmediği hiç bir harita ile şimdiye kadar karşılaşılmamıştır. Bununla beraber, tasavvur edilebilen *her* haritanın dört renkle boyanabileceği de şimdiye kadar ispat edilememiştir. Burada, yine basit ye hiç bir matematik bilgisine dayanmadan anlaşılabilen bir problem karşısında bulunuyoruz. Bu problem meslekten matematikçi olmayan her hangi bir kimseye bir kaç dakikada izah edilebilmekle beraber, şimdiye kadar hiç kimse tarafından çözülememiştir.

Buna karşılık, her haritayı boyamak için *beş rengin yettiği* ispat edilmiştir, şu şartla ki her hangi komşu iki memleket farklı renklerle gösterilsin. Yalnız bir *köşede* bitişen iki memleket ise, (meselâ satranç tahtasındaki gibi) aynı renkle gösterilebilir. Burada bu teoremin ispatı verilecektir.

2. Euler teoremi. Beş renk teoreminin ispatında kullanılan esas vasıta, bir haritadaki köşelerin e, yüzlerin (memleket) f ve kenarların (sınırların) k sayısını birbirine bağlıyan umumî bir teorem olup, bu teoremin şimdi meşgul olduğumuz hususî konunun çok ötesinde de önemi vardır. Bu teorem, daima

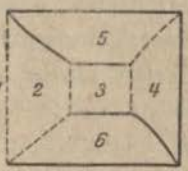
(1) $$e+f=k+2$$

olduğu ifade eder. Meselâ Şek. 41 de 8 köşe (yani en aşağı 3 memleketin bitiştiği nokta), 6 yüz ve 12 kenar (her kenar bir köşeden müteakip köşeye kadar olmak üzere sayılır) mevcut olup, hakikaten

$$8+6=12+2$$

dir.

18. Yüzyılın büyük matematikçisi *Euler* tarafından keşfedilen, fakat daha ondan bir asır kadar evvel *Descartes* tarafından bilinen bu teoremi ispat etmek için şeklin bir harita olmayıp, bir tarla sistemi gösterdiğini ve hudutların bu tarlaları birbirinden ayıran setler olduklarını, dış bölgede çepeçevre su bulunduğunu tasavvur edelim. Şimdi setleri sıra ile öyle yıkalım ki, birbiri arkası sıra bütün tarlalara su girsin (Şek. 43). Bunun için bütün setlerin yıkılması hiç te şart değildir; hattâ her iki tarafına da su girmiş olan bir seti yıkmaktan kaçınmalı, ancak bir tarafına su girmiş, diğerine henüz girmemiş olan setler yıkılmalıdır ki böylelikle her defasında hakikaten yeni bir tarla



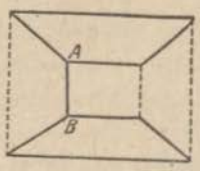
Şek. 43

daha sulanabilsin. Her halü kârda, dış bölgeden $f-1$ tane tarlayı sulamak için (her tarla için bir tane olmak üzere) $f-1$ tane setin yıkılmasının kâfi geleceği aşikârdır. Diğer taraftan, henüz sulanmamış her bir tarlayı sulamak için evvelkilere ilâveten bir set daha yıkmak lâzım geldiğinden, $f-1$ tane tarlayı $f-1$ den daha az sayıda set yıkarak sulamak mümkün değildir. Şu halde yıkılacak setlerin sayısı tam f dir.

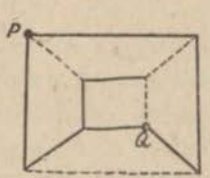
Şimdi bu şekilde sulama esnasında kendilerine hiç dokunulmamış olan setlerin teşkil ettiği sistemi düşünelim.

1. Bu set sistemi üzerinde gürümek suretiyle ayaklarımız hiç ıslanmadan herhangi bir köşeden diğer herhangi bir köşeye gidebiliriz. Başlangıçta, yani suların tarlaları sadece çevrelediği zaman bunu muhakkak yapabilirdik, çünkü aksi halde kendilerini çevreleyen suyun içinde adalar halinde iki veya daha fazla sayıda birbirinden tamamen ayrı tarla sistemi verilmiş olurdu ki, bütün problemi bu sistemlerin her biri için ayrı ayrı ele almak kâfi gelirdi. Şu halde başlangıçta işin mümkün olduğunu farzedebiliriz. Tarlaların arka arkaya sulanması sırasında ise AB setinin yıkılması geri kalan setlerin, birinde bulunan bir noktadan diğerinde bulunan bir noktaya ayakları ıslatmadan gidebilme imkânını ortadan kaldıran, iki ayrı sisteme bölünüşü neticesini verseydi, yıkma işleminden sonra A ile B arasından su geçmesi, şu halde yıkılışından evvel AB setinin her iki tarafında da su bulunması icabederdi (Şek. 44). Fakat yukarda bu tip setlerin yıkılmaması bilhassa şart koşulmuştu.

2. Meselâ P gibi köşe noktalarından birinden, setlerin üzerinde dolaşmak ve bütün köşeleri gözden geçirmek üzere haberciler



Şek. 44



Şek. 45

gönderildiği takdirde, böyle iki haberci hiç bir zaman aynı bir Q köşesinde karşılaşamazlar. Çünkü aksi takdirde, Şek. 45 te görüldüğü gibi, P noktasından Q noktasına yıkılmamış setler üzerinden iki ayrı yolla gidilebilirdi ki, bu iki yol arasında kalan

tarlalar hiç yıkılmamış setlerle çevrilmiş olur ve neticede sulanmamış kalırlardı.

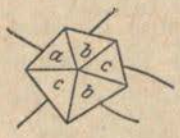
Şimdi habercilerin hareket noktasını sabit tutarsak, onlar belirli bir köşeye ancak *belirli* bir yoldan giderek varabilirler. Şu halde bir köşeye varmadan hemen önce tamamen belli bir doğru parçası üzerinden geçmek lâzımdır. Böylelikle her köşeye, onun bir ucu bulunduğu, bir doğru parçası tekabül eder. Şu halde bitim noktalarının sayısı, yıkılmamış setlerin sayısı kadardır. Köşelerden biri başlangıç noktası olarak ayrıldığından, yıkılmamış setlerin sayısı tam $e-1$ olur. Şu halde, $f-1$ tane yıkılmış ve $e-1$ tane yıkılmamış set bulunduğundan, bütün setlerin sayısı

$$k=(f-1)+(e-1)$$

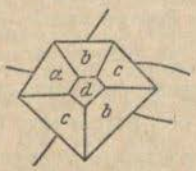
olup, (1) eşitliği, parantezlerin açılması ve uygun terimlerin denklemin bir tarafından öbür tarafına nakli suretiyle, bundan kolayca elde edilir.

3. Beş renkle boyamanın mümkün olduğunun ispatına yardımcı olan diğer bir adım da şunun ispatıdır: *Her hangi bir haritanın 5 renkle boyanabileceğini ispat etmek için, hiç bir köşesinde üç memleketten fazlasının komşu olmadığı her haritanın beş renkle boyanabileceğini ispat etmek kâfidir.* Hakikaten her hangi bir köşesinde 3 ten fazla memleketin komşu bulunduğu bir harita verildiğine göre (Şek. 46a), buna karşılık öyle bir harita çizelim ki birincinin diğer hususlarda tam bir kopyası olsun, fakat sadece bu köşeye küçük bir yeni memleket yerleştirilmiş olsun (Şek. 46b). Böylece yeni bir memleket ve herbirinde üç memleketin komşu olduğu yeni köşeler meydana gelmiş olmakla beraber, kendisinde 3 ten fazla memleketin bitiştiği bir köşe ortadan kaldırılmış oluyor. Bu sonucu tipteki bütün köşeleri sırasiyle aynı muameleye tabi tutarsak, neticede öyle bir harita meydana getirilmiş olur ki, bu tip hiç bir köşe ihtiva etmez. Şimdi eğer bütün kö-

şelerinde üç memleketin bitişiği her haritanın 5 renkle boyanabileceğini gösterebilirsek, yukarıda meydana getirilen haritanın da, meselâ Şek. 46b de harflerle gösterilen şekilde, 5 renkle bo-



Şek. 46a



Şek. 46b

yanabileceği neticesi çıkar; buradan da Şek. 46a nın da, üzerindeki harflerle gösterildiği şekilde, 5 renkle boyanabileceği, şu halde *her* haritanın 5 renkle boyanabileceği ispat edilmiş olur.

4. İspat. f_2 yalnız iki köşeli, f_3 üç köşeli, ilâh ... memleketlerin sayısını gösterdiğine göre, *bütün* memleketlerin f sayısı bu sayıların toplamına eşittir (1).

$$f = f_2 + f_3 + f_4 + \cdots . \tag{2}$$

2 köşeli f_2 memleketin herbirinin iki sınırı bulunduğundan bu memleketlerin toptan sınır sayısı $2 f_2$, 3 köşeli f_3 memleketin her birinin 3 sınırı bulunduğundan bunların toptan sınır sayısı $3 f_3$, ilâh ... tır. Sınırların bu şekilde elden geçirilişinde nihayet bütün sınırlar elimizden geçmiş olur. Fakat sınırların herbiri, kendisinin ayırdığı iki memleketin herbirinin sınırlarının sayımı esnasında olmak üzere iki defa geçer. Şu halde

$$2k = 2 f_2 + 3 f_3 + 4 f_4 + \cdots \tag{3}$$

dır. Aynı şekilde, bütün memleketleri köşeleri bakımından elden geçirirsek — yukarda caiz olduğuna kanaat getirdiğimiz, her kö-

(1) Kolayca kanaat getirileceği üzere, hiç köşesiz veya tek köşeli memleketlerden burada vazgeçilebilir.

şede 3 memleketin bitiştiği faraziyesine göre (1) — her köşe tam üç kere geçtiğinden

$$3e = 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \cdots \tag{4}$$

olur. (3) ve (4) birlikte

$$3e = 2k \tag{5}$$

verir. (1) numaralı Euler formülünün her iki tarafını 6 ile çarparsak,

$$6e + 6f = 6k + 22$$

bulunur ki, bu da (5) dolayısiyle $9e + 12$ ye eşittir. Şu halde

$$6f = 3e + 12,$$

yahut (2) ve (4) sebebiyle

$$6(f_2 + f_3 + f_4 + \cdots) = (2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \cdots) + 12,$$

yahut nihayet, $f_2, f_3, \ldots$ ya göre sıralayarak

$$4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + \cdots \tag{6}$$

olur. Bu da şu ara neticeyi verir: *Köşelerinde daima üç memleketin bitiştiği her haritada köşe sayısı altıdan daha az olan en aşağı bir memleket vardır.* Zira böyle bir memleket olmasa, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, $f_5 = 0$ olurdu ve neticede (6) nın birinci tarafı 0 olurdu. Halbuki aynı denklemin ikinci tarafı en aşağı 12 dir. Şek. 40a, 40b, 41 ve 42 deki haritalar, sağ tarafta tam 12 bulunması haline örnekler teşkil ederler (bu örneklerde 7, 8, ilâh... köşeli memleketler bulunmamaktadır).

(1) 3. teki mülâhaza bize evvelâ her noktada *en çok* üç memleketin bitiştiğini farzetmek hakkını vermektedir. Fakat her köşede *en az* üç memleket bitişir, çünkü aksi halde bir «köşe» ile herhangi bir doğru üzerindeki alelâde bir nokta arasında hiçbir fark kalmaz.

Şek. 40a da: $f_2=3,\ f_3=0,\ f_4=0,\ f_5=0,$

Şek. 40b de: $f_2=0,\ f_3=4,\ f_4=0,\ f_5=0,$

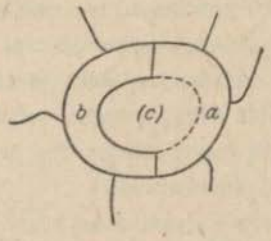
Şek. 41 de: $f_2=0,\ f_3=0,\ f_4=6,\ f_5=0,$

Şek. 42 de: $f_2=0,\ f_3=0,\ f_4=0,\ f_5=12$

dir. Şu halde bütün bu örneklerde f_i sayılarından yalnız bir tanesi sıfırdan farklıdır; Şek. 40c de ise durum başkadır.

Şimdi haritamızda en çok beş köşeli olan bir memleketin mutlaka bulunduğunu öğrendik. Artık bütün imkânları teşkil eden iki, üç, dört ve beş köşeli memleketlerin bulunması hallerini sırasıyla gözden geçirebiliriz.

1. *Haritada iki köşeli bir memleket mevcuttur.* Böyle bir memleketin tam iki komşusu vardır. Bu memleketin sınırlarından birinin (Şek. 47 de kesikli çizilmiş olanının) ortadan kaldırıldığını düşünelim. Bu suretle değiştirilmiş haritada artık f değil, ancak $f-1$ tane memleket bulunur. Bu son haritayı 5 renkle boyayabildiğimizi ve bir sınırın ortadan kaldırılıp, bunun iki tarafındaki memleketlerin birleştirilmesiyle meydana gelen yeni memleketin a rengine, diğer komşu memleketin b rengine boyanmış olduğunu kabûl edelim. Bu takdirde, ortadan kaldırılmış

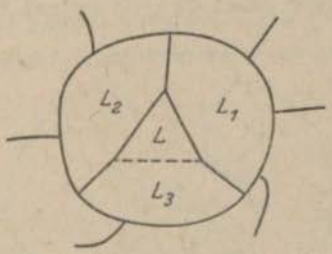


Şek. 47

olan sınırı tekrar tesis ederek eski haritaya döndüğümüzde ora-

daki iki köşeli memleketi c rengine boyamaya hiçbir mâni yoktur, çünkü bu memleketin a ve b renklerini taşıyan iki komşusundan başka biçbir komşusu bulunmadığından, c, d, e renkleri bu memleketi boyamak için serbest kalmaktadırlar. Şu halde, eğer $f-1$ memleket ihtiva eden değiştirilmiş harita 5 renkle boyanabilirse, başlangıçta verilmiş olan f memleketli harita da derhal 5 renkle boyanabilir.

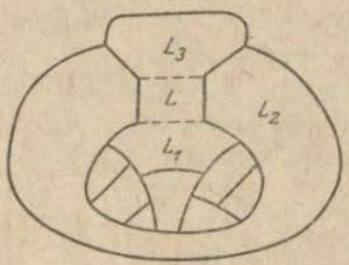
2. *Haritada üç köşeli bir memleket mevcuttur.* Bu memleket L ve onun üç komşusu L_1, L_2, L_3 olsun (Şek. 48). Bu memleketin üç sınırından birini ortadan kaldıralım ve bu suretle meydana gelen $f-1$ memleketli haritanın 5 renkle boyanabileceğini farzedelim. Bu takdirde, ortadan kaldırılmış olan sınırın yeniden tesisi halinde L memleketini L_1, L_2, L_3 için kullanılandan farklı bir renge boyarsak — hattâ böyle iki renk mevcuttur — ilk haritayı da 5 renkle boyamış oluruz.



Şek. 48

3. *Haritada dört köşeli bir memleket mevcuttur.* Yukarıkilere benzer şekilde, L nin dört komşusu için en çok 4 ayrı renk kullandıktan sonra geriye kalan en az bir renkle de L yi boyayabileceğimiz düşünülebilir. Bununla beraber burada yeni bir güçlük ortaya çıkar: Şek. 49 daki L_2 gibi bir memleket L ye iki *ayrı* sınır boyunca bitişebilir. Bu sınırlardan biri ortadan kaldırıldığı takdirde diğeri de kaldırılmalıdır, çünkü aksi halde yeni

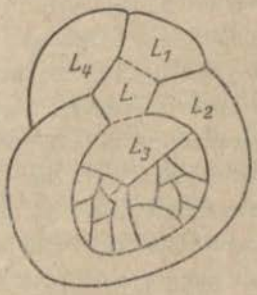
meydana gelecek memleket kendi kendisiyle bir sınırı haiz olur ki, bu da sınır kavramından anladığımız mânaya uymaz. İki sınırı da ortadan kaldırdığımız takdirde ise, sınırları tamamen ayrı iki parçadan teşekkül eden *halka şeklinde* bir memleket ortaya çıkar. Bu tip memleketleri ise şimdiye kadar (hattâ daha Euler teoreminin ispatında), açıkca söylemeksizin, konu dışı bırakmıştık. Bu tip memleketlerden burada da sakınabiliriz. Çünkü, eğer L ve L_2 birlikte bir halka teşkil etseler, L nin L_1 ve L_3 ile teşkil ettiği diğer iki sınırı bu halka vasıtasıyla birbirinden ayrılırlar. Neticede L_1 ve L_3 memleketlerinin birbirinden farklı olmaları ve hiçbir ortak sınıra malik olmamaları icap eder. Şu halde bunlar aynı renge boyanabilir. Şimdi L nin L_1 ve L_3 ile teşkil ettiği sınırları ortadan kaldıralım. Bu suretle $f-2$, yani f ten daha az sayıda, memleketli bir harita meydana gelir. Eğer bu harita 5 renge boyanabilirse, başlangıçtaki de boyanabilir; çünkü L nin sadece 3 komşusu olup, bunlardan ikisi aynı rengi taşırlar ki, L için geri kalan üç renk serbest kalır.



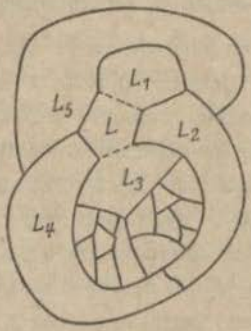
Şek. 49

4. *Haritada beş köşeli bir memleket mevcuttur.* Bu halde, önceki halde rastladığımız güçlük daha da ciddî bir şekilde mevcuttur: L nin iki komşusunun aynı memleket olması (Şek. 50a) mümkün olduğu gibi, böyle iki komşunun (Şek. 50b deki L_2 ve L_4 gibi) başka bir yerde ortak bir sınırı mevcut olabilir. Fakat her iki halde de L nin meselâ L_1 ve L_3 gibi öyle iki komşusu

bulunabilir ki, ne birbirinin aynı olsun, ne de ortak bir sınırı

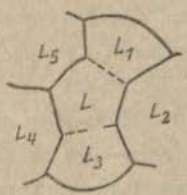


Şek. 50a



Şek. 50b

haiz olsunlar. Çünkü, aksi takdirde bunlar birinci halde (Şek. 50a) L nin L_2 ile, ikinci halde (Şek. 50b) de L nin L_2 ve L_4 ile teşkil ettiği kapalı zinciri ikiye ayırmak mecburiyetinde kalırlardı. Şu halde L her halü kârda birbiriyle hiçbir yerde irtibatı bulunmayan L_1 ve L_3 (Şek. 51) gibi iki komşuyu haizdir. Şimdi L nin



Şek. 51

böyle iki komşu ile teşkil ettiği her iki sınırı ortadan kaldıralım. Bu suretle $f-2$, yani f den daha az sayıda, memleket ihtiva eden bir harita elde etmiş oluruz. Bu haritayı 5 renkle boyayabilirsek, $L+L_1+L_3$ meselâ bir a rengine, L_2, b rengine, L_4, c rengine, L_5 te d rengine boyanmış olur ki, hepsi 4 renk eder. Şimdi sınırları tekrar tesis ederek başlangıç durumuna dön-

düğümüzde, başlangıç haritasını 5 renkle boyamış olmak için L yi geri kalan 5. e rengine boyamak kâfidir.

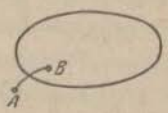
Her haritada ya bir iki köşeli, yahut bir üç köşeli, yahut bir dört köşeli, yahut bir beş köşeli memleket bulunması lâzım geldiğinden, yukarıda anlatılanlarla f memleketli bir haritayı daha az memleketli bir haritaya irca etme işi tamamlanmış bulunmakta olup, bu iş bize şunu da öğretmiş olmaktadır: her haritada öyle uygun bir veya iki sınır ortadan kaldırılabilir ki, yeni elde edilen harita 5 renkle bovanabildiği takdirde, bundan eski haritanın da bir 5 renkle boyanışını elde edebiliriz. Bu irca işini yeni haritada en çok 5 memleket kalıncaya kadar tekrarlayalım. 5 veya daha az sayıda memleket ihtiva eden bir harita ise, tabiatiyle 5 renkle boyanabilir. Şu halde irca işinde ondan önce gelen bütün haritalar ve neticede başlangıçta verilmiş olan harita da 5 renkle boyanabilir.

5. Sonsöz. Bir haritanın, şimdiye kadar farzettiğimiz gibi, düz bir kâğıt üzerine çizilmiş olarak düşünülmesiyle bir küre üzerine çizilmiş olarak düşünülmesi arasında bir fark yoktur. İkinci halde en dıştaki memleket (veya ekseriya söylemiş olduğumuz gibi, karaları çevreleyen okyanus) kürenin geri kalan kısmını kaplar. Ancak bu memleket hesaba katılmadığı takdirde düzlemden küreye geçiş bir tutarsızlık doğururdu. Yukarıda yapmış olduğumuz muhakemenin küre üzerinde de aynen cari kalacağı bu muhakemenin tabiatından anlaşılır. Çünkü bu muhakeme esnasında doğru parçaları veya açıların eşitliğine dair kürenin eğri olan yüzünde değiştirilmesi icap eden teoremlerden hiçbiri kullanılmamış olup, sadece eğrilerin karşılıklı durumlarına dair umumî mülâhazalar kullanılmıştır ki, bunlar da küre üzerinde otomatik olarak cari kalmakta devam ederler.

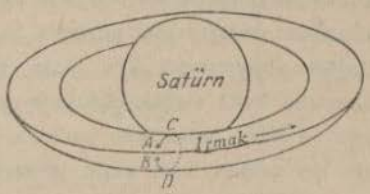
Fakat Satürn halkası üzerine bir harita çizmek istediğimiz zaman — tabiî burada Satürn halkası hakikatte olduğu gibi çok sayıda ufak kitlelerden meydana gelmiş olarak değil de, tek bir

katı cisim olarak tasavvur edilmektedir — iş başkalaşır. Burada öyle bir harita tasavvur etmek mümkündür ki, 7 memleketten teşekkül etsin ve bu 7 memleketin herbiri diğer 6 memleketle ortak bir sınırı haiz olsun, ve şu halde boyanabilmesi için tam 7 renge ihtiyaç bulunsun. Bir model olmadan bu haritayı gözönünde kolayca canlandırmak mümkün olmadığından burada sadece neticeyi vermekle yetiniyoruz. Bu hakikat karşısında, 5 rengin kâfi geleceğine dair yukarıki ispatımızın burada neden dolayı hükmünü kaybettiğini sormamız lâzımdır. Nasıl oluyor da küreye geçerken cari kalan mülâhazalar burada artık cari olmuyorlar?

Yukarıki mülâhazaların hükmünü kaybettiği her iki yeri kolayca göstermek mümkündür. Bunlardan biri Euler teoreminin ispatının sonunda olup, Şek. 45 yardımıyla P den Q ye giden her iki yolun arasında kalan tarlalara dışardan hiçbir surette suyun giremiyeceği neticesinin çıkarılışındadır. Diğeri, esas ispatın dört ve beş köşeli hallerinde Şek. 49, 50a ve 50b deki durumda L_1 ve L_3 ün hiçbir surette birbiriyle irtibatlı olamıyacağı, çünkü aksi takdirde bunların L_2 veya L_2 ve L_4 ten teşekkül eden halkayı kesmeleri icap edeceği hususundadır. Her iki yerde de aynı şey bahis konusudur: kapalı bir eğrinin bir tarafından diğer tarafına bu eğriyi kesmeden geçmek mümkün değildir (Şek. 52). Düzlem ve küre üzerinde doğru olan bu keyfiyet ise,



Şek. 52



Şek. 53

Satürn halkası veya matematikçilerin dediği gibi halka yüzeyi üzerinde doğruluğunu kaybeder. Satürn halkası (Şek. 53) üzerin-

de ve halkanın dış tarafında kapalı devre şeklinde bir ırmağın aktığını tasavvur edelim ve bu ırmağın bir sahilindeki bir A noktasından karşı sahildeki bir B noktasına ırmağı geçmeden gitmek isteyelim. Düzlem ve küre hallerinde mümkün olmayan bu iş burada pek alâ mümkündür. Bunun için A dan itibaren C üzerinden halkanın içine doğru yürümek ve halkayı D ye kadar içerden dolaştıktan sonra D üzerinden B ye gelmek kâfidir.

Bu durum, matematikte sezgi ile hareket ederken ne kadar ihtiyatlı olmak lâzım geldiğine ve sezginin bizi ne kadar kolayca mantıkî muhakeme zincirinde bir takım atlamalara sevkedebileceğine dair tipik bir örnektir. Şimdi anlıyoruz ki, Şek. 45 in ilhâm ettiği muhakeme ne kadar sezgiye dayanırsa dayansın, aslında mantık bakımından ancak düzlem ve küreye has özeliklerden çıkarılabilir ve halka yüzeyi için hükümsüz olur.

Düzlem ve kürenin bu bakımdan yakından tahlili ile bunlar üzerinde yürütülen muhakemenin teferruatına burada girişmiyeceğiz — çünkü bu iş basit değildir — fakat sadece halka yüzeyi üzerinde Euler teoremi yerine

$$e+f=k$$

eşitliğinin geldiğini ve beş renk teoremimizin yukarıki ispatını halka yüzeyine naklederek bu yüzey üzerindeki her haritanın 7 renkle boyanabileceğinin ispat edilebileceğini bildirelim. Bu suretle daha karışık gibi görünen halka yüzeyi üzerindeki bütün haritaların boyanması için lâzım gelen en küçük renk sayısı probleminin kat'i olarak çözülmüş olması, fakat daha basit olan düzlem ve küre hallerinde problemin açık kalması (5 yerine 4 rengin her zaman kâfi gelip gelmediği henüz bilinmemektedir) şayanı dikkattir.

12b. Düzgün Çokyüzlüler

Euler teoreminin bambaşka cinsten diğer bir önemli uygulamasını da düzgün çokyüzlülerin varlık problemini araştırırken yapacağız. Çokyüzlü adı altında her tarafı düzlem parçaları ile sınırlanmış bir cisim anlıyacağız. «Düzgün» bir çokyüzlü ise, Öklid'in tarifine göre, kendisini sırınlayan düzlem parçalarının hepsi de birbirine eşit olan «düzgün» çokgenlerden (böyle bir çokgenin bütün kenarları ve bütün açıları birbirine eşittir) ibaret bir çokyüzlüdür.

Yukarıdakinden daha umumî bir tarifi esas olarak alırsak, hem problem daha genişlemiş olur, hem de cevabı daha tatmin edici bir şekil alır. Bizim için burada «düzgün» bir çokyüzlü, kendisini sınırlayan düzlem parçalarının hepsinin aynı sayıda köşeyi haiz olduğu ve kendisinin her köşesinde aynı sayıda düzlem parçasının bitiştiği bir çokyüzlü olsun. Çokyüzlüyü sınırlandıran düzlem parçacıklarının, yani çokyüzlünün yüzlerinin, açı ölçüleri, kenar uzunlukları ve alanları v. s. gibi ölçülerinin burada artık hiçbir rolü yoktur, şimdi bizim için önemli olan kenar, köşe ve yüzlerin sayılarıdır.

Şimdi çokyüzlümüzün yüzlerini teşkil eden çokgenlerin hep φ-köşeli (meselâ hep üçgen veya hep yedigen gibi) olduğunu, yani çokyüzlüyü sınırlayan her düzlem parçasının φ tane köşesi bulunduğunu farzedelim. Bundan başka çokyüzlünün herbir köşesinde ε tane düzlem parçası bitişsin. Kenarları doğru parçaları olan her çokgen en aşağı 3 köşeli olduğundan

$$\varphi \geq 3; \tag{1}$$

çokyüzlünün her köşesinde de en aşağı üç tane düzlem parçasının bitişmesi lâzım geldiğinden

$$\varepsilon \geq 3 \tag{2}$$

tür. Çokyüzlünün köşe, yüz ve kenar sayılarını sırasıyla e, f ve k ile göstereceğiz.

Şimdi çokyüzlüyü içi boş ve kendisini sınırlayan düzlem parçaları elâstikî bir maddeden yapılmış bir cisim olarak düşünelim ve sonra bu cismin gergin bir küre haline gelinceye kadar şişirilmiş olduğunu tasavvur edelim. Başlangıçta düzlem parçaları olan yüzler sonra küre yüzünün parçaları, evvelce doğru parçaları olan kenarlar sonra küre üzerine çizilmiş eğri parçaları olurlar ve böylelikle, küreyi dünyanın bir nümunesi olarak tasavvur edersek, bu küre üzerinde bir harita meydana gelmiş olur. Bu haritadaki memleketlerin sayısı tam çokyüzlünün f yüz sayısına sınırların sayısı tam çokyüzlünün k kenar sayısına, köşelerin sayısı tam çokyüzlünün e köşe sayısına eşittir. Bu haritadaki f tane memleketin hepsi de aynı φ köşe ve kenar sayısını haizdir; şu halde evvelce kullanılmış olan $f_2, f_3, \ldots$ sayılarından yalnız bir tanesi sıfırdan farklı olur ve neticede bu sayı yüzlerin f sayısına eşit olur. Haritanın her köşesinde de ε tane memleket bitişir. Şek. 40b, 41, 42 bu tip özel haritalara örnekler teşkil ederler. Onlarda sırasıyla

$$\varphi = 3,\ \varepsilon = 3;\quad \varphi = 4,\ \varepsilon = 3;\quad \varphi = 5,\ \varepsilon = 3$$

tür.

Yukarıki şişirme işleminden kazancımız aşağıki Euler Teoremi oldu:

$$e + f = k + 2 \tag{3}$$

teoremi sadece bir haritanın köşe, memleket ve sınırları için doğru olmakla kalmaz, aynı zamanda bir çokyüzlünün köşe, yüz ve kenarları için de doğrudur.

Hattâ tarihî bakımdan, teoremin asıl bu ikinci şekli Euler'in bulduğu şekildir. Bundan dolayı teoreme umumiyetle «Çokyüzlülere dair Euler teoremi» adı verilir. (3) formülünden konumuza ait hayatî önemde neticeler çıkaracağız.

7. Yukarıki anlamda düzgün olan bir çok yüzlünün her yüzü φ köşe ve φ kenarı haizdir; çokyüzlü bu suretle f tane yüz, $f\varphi$ tane kenar ihtiva eder; fakat buradaki her kenar iki defa sayılmıştır, çünkü her kenar *iki* tane yüzü birbirinden ayırır. Bundan dolayı

(4) $$f\varphi = 2k \quad \text{dır.}$$

Aynı şekilde her köşede ε yüz ve ε kenar bitişir. Şu halde hepsi birden $e\,\varepsilon$ kenar vardır; fakat her kenakın *iki* tane uç noktası bulunduğundan, burada da her kenar iki defa sayılmıştır. Şu halde

(5) $$e\varepsilon = 2k \quad \text{dır.}$$

Şimdi (3) ten evvelâ

$$e + f - k = 2$$

elde edilerek, her iki taraf 2ε ile çarpılırsa:

$$2e\varepsilon + 2f\varepsilon - 2k\varepsilon = 4\varepsilon$$

bulunur. Burada (4) dolayısıyle $2k$ yerine $f\varphi$, ve (4) ve (5) e göre $f\varphi = e\varepsilon$ olduğundan, $e\varepsilon$ yerine de gene $f\varphi$ koyalım. Neticede

$$2f\varphi + 2f\varepsilon - f\varphi\varepsilon = 4\varphi$$

yahut

(6) $$f(2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon) = 4\varepsilon$$

elde edilir. f ve 4ε pozitif sayılar olduklarından, aynı şey parantez içindeki ifade için de doğrudur:

(7a) $$2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon > 0$$

(1) ve (2), φ ve ε için birer *alt* sınır veriyordu; şimdi (7a) dan

aynı şeyler için üst sınırlar elde etmeğe çalışalım. Evvelâ (7a) yerine

$$\varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon < 0 \tag{7b}$$

da yazabiliriz, ki bu sonuncu ifade bir evvelkinin sadece işareti değiştirilmek suretiyle elde edilmiştir. (7b) nin sol tarafını

$$(\varphi - 2)(\varepsilon - 2) = \varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon + 4 \tag{8}$$

ile karşılaştırırsak, aradaki farkın sadece 4 ilâve edilmiş olmasından ibaret bulunduğunu görürüz. Şu halde (7b) nin her iki tarafına 4 ilâve ederek bulunan

$$\varphi\varepsilon - 2\varphi - 2\varepsilon + 4 < 4$$

eşitsizliğinin sol tarafı (8) in aynı olur ve neticede

$$(\varphi - 2)(\varepsilon - 2) < 4 \tag{9}$$

elde edilir.

Burada soldaki $(\varphi - 2)$ ve $(\varepsilon - 2)$ çarpanları, (1) ve (2) dolayısiyle en az 1 e eşit olmak zorundadırlar. Şu halde $(\varphi - 2)$ ve $(\varepsilon - 2)$ çarpanlarının tâbi oldukları tahdidi artık biliyoruz: bunlar, çarpımları 4 ten küçük olması lâzım gelen pozitif tam sayılardır.

Şimdi bu özelliği haiz bütün çarpımları derhal sayıp dökebiliriz. Bu çarpımlar aşikâr olarak

$$1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2,\ 2 \cdot 1,\ 1 \cdot 3,\ 3 \cdot 1 \tag{10}$$

den ibaret olup, beş tanedir. İki pozitif tam sayının geri kalan bütün çarpımları en aşağı 4 e eşittir. *Şimdi iki pozitif tam sayının 4 ten küçük sadece beş tane çarpımının mevcut olması keyfiyetinden, sadece beş tane düzgün çokyüzlünün mevcut olabileceği neticesini çıkarabiliriz.*

8. (10) da sayılıp dökülmüş olan çarpımlarda birinci çarpanı $(\varphi - 2)$, ikincisini $(\varepsilon - 2)$ olarak alalım. Böylece φ ve ε un kendileri için aşağıki beş değer çifti elde edilir:

φ	ε
3	3
3	4
4	3
3	5
5	3

φ ve ε un mânalarını hatırlarsak, sırf Euler teoreminden elde edilmiş olan bu cetvelden şu neticeyi çıkarabiliriz: eğer düzgün çok yüzlüler mevcutsa, bunların yüzleri ancak üçgen, dörtgen veya beşgenlerden teşekkül edebilir ve köşelerinde de ancak üç, dört veya en çok beş tane yüz bitişebilir. Şimdi (6) dan bundan öteye olarak

$$f = \frac{4\varepsilon}{2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon}$$

elde edilir ki, bunun yerine, (8) dolayısıyla, daha elverişli olan

(11) $$f = \frac{4\varepsilon}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)}$$

formülünü yazabiliriz. (4) ten (11) aracılığı ile

(12) $$k = \frac{f\varphi}{2} = \frac{2\varepsilon\varphi}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)},$$

ve (5) ve (12) ye göre

(13) $$e = \frac{2k}{\varepsilon} = \frac{4\varphi}{4 - (\varphi - 2)(\varepsilon - 2)}$$

elde ederiz.

(11), (12) ve (13) formülleri φ, ε un yukarıki beş değer çiftine f, k, e için aşağıki cedvelde verilen tamamen belirli değerleri tekabül ettirir:

φ	ε	f	k	e	
3	3	4	6	4	Dörtyüzlü
3	4	8	12	6	Sekizyüzlü
4	3	6	12	8	Altıyüzlü
3	5	20	30	12	Yirmiyüzlü
5	3	12	30	20	Onikiyüzlü

Şu halde ancak beş tane düzgün çok yüzlü çeşidi mümkündür. Bunlara Eflâtun (Platon) un düzgün cisimleri denir ve herbiri, cedvelde görüldüğü gibi, yüzlerinin sayısı ile adlandırılır.

9. Bu cedvel başka bir şayanı dikkat özeliği de haizdir: eğer φ, ε ile değiş tokuş edilirse, yirmiyüzlü onikiyüzlüye, sekizyüzlü altıyüzlüye, dörtyüzlü ise kendi kendisine dönüşür. Bu esnada k sabit kalır, fakat e ve f aralarında değişirler. Fakat bu keyfiyet daha önceki formüllerden beklenebilirdi. Evvelâ, hayatî önemi haiz (1), (2) ve (9) formülleri φ ve ε a göre simetrik olup, φ ve ε aralarında değiştirildiği takdirde, işe yarayan her φ, ε çifti gene böyle bir çifte dönüşür. Bundan başka (12) formülü, k nın φ ve ε dan simetrik bir şekilde elde edildiğini, (11) ve (13) te φ ve ε un aralarında değiştirilmesinin e ve f nin aralarında değişmesi neticesini doğurduğunu gösterir.

Böyle bir münasebet geometrik olarak ta aşikârdır. Bunu görmek için bir çokyüzlünün her yüzünde bir iç noktayı yeni bir çokyüzlünün köşe noktası olarak seçerek, eski çokyüzlünün her hangi iki komşu yüzündeki iki yeni köşe noktasını birer doğru parçası ile birleştirmek kâfidir. Bu takdirde, eskisinin

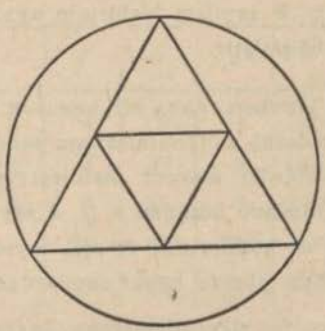
her yüzü üzerinde yeni çokyüzlünün tam bir köşe noktası bulunur. Her eski kenarla tam bir tane yeni kenar bir çapraz teşkil eder ve her eski köşe tam bir tane yeni yüz ile çevrilir. Şu halde her iki çokyüzlüde k sayıları birbirinin aynı, fakat e ve f sayıları aralarında değişmiştir.

10. Bununla beraber, daha bir hususun iyice belirtilmesi lâzımdır: buraya kadarki mülâhazalarımız sadece, *en çok* beş tane düzgün çokyüzlünün mevcut olabileceğini göstermektedir, çünkü ancak cedvelimizde bulunan e, f, k sayıları, yüzleri eşit sayıda köşeyi haiz ve köşelerinde de eşit sayıda yüzlerin bitiştiği çokyüzlülerin köşe, yüz ve kenar sayıları olabilirler.

Şu halde cedvelde zikredilenlerden başka hiç bir düzgün çokyüzlü mevcut olamaz. Fakat cedveldeki bu çokyüzlülerin hakikatte mevcut oldukları, yani fiilen inşa edebileceklerini şimdiye kadar ispat etmiş değiliz. Hakikaten, şimdiye kadar nazarı itibara almamış olduğumuz bazı sebeplerden düzgün çokyüzlülerin başka bazı şartlara daha tâbi oldukları ve bundan dolayı cedvelde sayılıp dökülen tiplerden bazılarının gerçekleşemiyeceği tasavvur olunabilir. Kısaca, şimdiye kadar düzgün çok yüzlüler için sadece *gerek* şartları münakaşa etmiş bulunuyoruz. *Yeter* şartları henüz ele alamadık.

Daha doğrusu, şimdiye kadarki mülâhazalarımız çokyüzlülerden ziyade, daha umumî olan, küre üzerindeki «düzgün» haritalara dair idi. Bu haritaların düzlem parçaları ile sınırlı çokyüzlülerin şişirilmesi suretiyle elde edildikleri hususu ise, kendilerine bakar bakmaz hemen hatıra gelmez. Yukardaki cedvelde zikredilen beş tane çokyüzlü tipine tekabül eden *haritaları* ise şimdi fiilen çizebiliriz. Şek. 40b, 41 ve 42 deki haritalar zaten sırasiyle düzgün dörtyüzlü, altıyüzlü ve onikiyüzlü göstermektedirler. Geriye kalan düzgün sekizyüzlü ve yirmiyüzlü tipleri Şek. 54 ve 55 te gösterilmiştir.

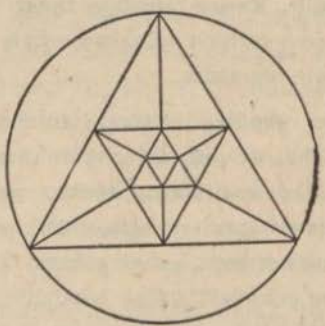
Şu halde çokyüzlülerin tâbi tutulduklarını tasavvur ettiğimiz deformasyonları bir kenara bırakırsak, düzgün çokyüzlüler için yukarıda elde edilen şartlar aynı zamanda yeter şartlardır.



Şek. 54

Buraya kadar ispat etmediğimiz bir husus geriye kalıyor:

Yukarıki düzgün çokyüzlülerin daha dar olan Öklid manasında da düzgün olacak şekilde, yani hepsi birbirine eşit olan düzgün düzlem çokgen şeklindeki yüzlerden, inşa edilebilecek-



Şek. 55

leri. Böyle bir ispat için bambaşka türlü bilgilere ihtiyaç vardır. Çünkü yukarıki mülâhazalarımız sadece deformasyonlar netice-

sinde değişmeyen özelikleri kapsamakta olup, eşitlik bunlara dahil değildir. Ancak, içinde doğru parçaları ve açı eşitliklerinin hayatî bir rol oynadığı, *Metrik Geometri* bizi burada hedefimize götürebilir. Yukarıda sayıp dökmüş olduğumuz beş düzgün çokyüzlünün metrik geometri manasında da düzgün olduklarının ispatı burada anlatılmayacaktır. Bu ispatlar daha Klâsik Eski Çağlarda verilmiş olup, Eflâtun (Platon) un talebesi Theätet'e atfedilmektedirler. Onları Öklid'in «Elemanlar» ının sonunda, XIII. kitapta bulmak mümkündür.

13. Pitagor Sayıları ve Fermat Problemine bir bakış

1. Meşhur Pitagor teoremine göre, bir dik üçgenin hipotenüsü kenar olmak üzere çizilen karenin alanı, dik üçgenin diğer iki kenarı üzerindeki karelerin alanları toplamına eşittir. Buna karşıt olarak, eğer üç doğru parçası arasında, birinin üzerine çizilen karenin alanı diğer ikisi üzerindeki karelerin alanları toplamına eşit olacak surette bir münasebet varsa, bu doğru parçalarından teşkil edilecek üçgen daima bir dik üçgendir. Doğru parçaları yerine onların a, b, c uzunluklarını ithal edersek, onların üzerlerine çizilen karelerin alanları a^2, b^2, c^2 olur ve bu takdirde $a^2+b^2=c^2$ münasebeti a, b, c nin bir dik üçgenin kenarları olduğunu ifade eder.

Daha evvel (Bölüm 4), eşkenar bir dik üçgenin kenarı ile hipotenüsünün ortak ölçüsüz olduklarını görmüştük. Bunun neticesi olarak, $2a^2=c^2$ denklemi hiç bir zaman a ve c ye göre tam sayılarla çözülemez. Fakat acaba eşkenar olmayan dikdörtgenler arasında kenarları ortak ölçülü olanlar mevcut mudur? Yahut başka deyimle,

(1) $$a^2+b^2=c^2$$

denklemini çözen üç tam sayı var mıdır? Basit ve hemen herkes tarafından bilinen

$$3^2+4^2=5^2 \text{ yahut } 9+16=25$$

örneği gösteriyor ki, bu sorunun cevabı müspettir. Acaba bu türlü daha başka sayılar da, yani (1) in başka tam sayılı çözümleri de mevcut mudur? Eğer mevcutsa bu sayılar nelerdir? Bu bölümde bu soruları tamamen cevaplandıracağız.

2. (1) in tam sayılı bir a, b, c çözümünü bilirsek, bunları aynı bir sayı ile çarparak, (1) in kolayca yeni bir çözümünü buluruz. Meselâ yukarıda bahsedilen 3, 4, 5 çözümünden derhal 6, 8, 10 yeni çözümü elde edilir, hakikaten

$$6^2+8^2=10^2$$

dir; umumî olarak n herhangi bir tam sayı olduğuna göre, $3n$, $4n$, $5n$ de bir çözümdür. Aynı şekilde, bilinen bir a, b, c çözümünden hemen diğer bir an, bn, cn çözümü elde edilir, çünkü $a^2+b^2=c^2$ den $a^2n^2+b^2n^2=c^2n^2$, yahut $(an)^2+(bn)^2=(cn)^2$ çıkar. Bu suretle elde edilen yeni çözümler âdeta aşikâr olduklarından pek fazla bir alâkaya lâyık değildirler. Biz asıl, daha basitlerinden tek bir sayı ile çarpmak suretiyle elde edilmesi mümkün olmayan «esas çözümler» ile alâkadar olacağız. Buna göre bir esas çözüm, a, b, c nin trivial olmayan hiç bir ortak çarpanı bulunmaması ile karakterize edilir. Buna bir örnek 3, 4, 5 tir.

a, b, c nin bir esas çözüm olabilmesi için, a, b, c nin herhangi ikisinin bile trivial olmayan hiç bir ortak çarpanı bulunmamalıdır. Yani, çok kullanılan başka bir deyimle a, b, c «ikişer ikişer aralarında asal» olmalıdır. Zira, meselâ a ve b nin trival olmayan bir t ortak böleni mevcut olsa idi, t nin her böleni böyle bir ortak bölen olurdu. t bir p asal sayısı ile bölünmek

mecburiyetinde olduğundan (t, bazen p ye eşit de olabilir), a ve b nin p ortak asal bölenini haiz olduğunu farzedebiliriz. Şu halde $a = p \cdot a_1$, $b = p \cdot b_1$ olurdu ve $a^2 + b^2 = c^2$ den $p^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2$ elde edilirdi. Bu denklem ise p^2 nin c^2 yi bölmesi icap ettiğini gösterir. Buradan p nin c yi de böldüğü neticesi çıkardı, çünkü c^2 deki iki eşit c çarpanı p ile bölünemediği takdirde, bir çarpımın bir asal sayı ile bölünebilmesine dair olan esas teoreme göre c^2 de p ile bölünemezdi. Bütün bunlara göre p, sadece a ve b nin bir ortak böleni değil, a, b, c nin de bir ortak böleni olurdu. Tıpkı buna benzer şekilde, a ve c nin yahut b ve c nin bir ortak asal böleninin her üç sayının da bir ortak böleni olduğu anlaşılır.

3. Şu halde artık (1) in, yalnız a, b, c nin ikişer ikişer aralarında asal bulunduğu çözümlerini ayıracağız. Özellikle bu sayıların hiçbir zaman iki tanesi çift olamaz. Şu halde bunların en çok bir tanesi çifttir. Diğer taraftan, bu sayıların üçü birden de tek olamaz. Çünkü bir $a = 2l + 1$ tek sayısının karesi olan $a^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4(l^2 + l) + 1$ de tektir; a ve b tek iseler, a^2 ve b^2 de tek olup, neticede $a^2 + b^2$ çift olur ki, bu da c nin tek olması halinde mümkün değildir.

Böylelikle geriye, a, b, c sayılarından *ikisinin tek*, *birinin çift* olması kalıyor. Bundan öteye, *c nin de tek* olması lâzım geldiği de ispat edilebilir. Zira c çift olsa, yani 2 ile bölünebilse, c^2, 4 ile bölünebilir. c nin çift olması halinde ise, geri kalan iki sayı tek olacaklarından, meselâ

$$a = 2l + 1, \; b = 2m + 1,$$

ve böylelikle

$$a^2 + b^2 = (4l^2 + 4l + 1) + (4m^2 + 4m + 1) = 4(l^2 + l + m^2 + m) + 2$$

olur. Bu takdirde $a^2 + b^2$, her ne kadar çift olsa da, 4 ile 2 kalanını bıraktığından, 4 ile bölünebilen c^2 ye eşit olamaz.

Şu halde, esas çözümler için arta kalan yegâne imkân, c nin tek ve a ile b den birinin tek, ötekinin çift olmasıdır. Bu son iki sayıdan, icabederse adlarını aralarında değiştirmek suretiyle, tek olanını a, çift olanını b ile göstereceğiz. Buna göre yukarıki örneğimizde $a=3, b=4, c=5$ olur.

4. (1) denklemini şu şekilde de ele alabiliriz:

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a) \tag{2}$$

Burada $(c+a)$ ve $(c-a)$, iki tek sayının toplam ve farkı olarak, çift olup, 2 ortak çarpanını haizdir. Bunların başka hiçbir ortak çarpanı olamaz, yahut daha doğrusu $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ aralarında asal olmak zorundadır. Zira her ikisi birden t ile bölünebilse idi, yani meselâ

$$\frac{c+a}{2}=t\cdot f,\quad \frac{c-a}{2}=t\cdot g$$

olsa idi, bunları taraf tarafa toplayıp çıkararak

$$c=t(f+g),\quad a=t(f-g)$$

elde edilirdi ki, bu da t nin a ve c yi böldüğünü ifade ederdi. Halbuki faraziyeye göre c ve a aralarında asaldır. $b, c+a, c-a$ çift olduklarından, (2) eşitliği *tam* sayılarla şöyle de yazılabilir:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2}. \tag{3}$$

Bu eşitlik vasıtasıyle $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ karesini aralarında asal olan $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ çarpanlarına ayırmış olduk. Buradan, bütün mülâhazalarımızın esası olacak olan, $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ nin kendilerinin de birer kare oldukları neticesini çıkarabiliriz. Hakikaten

$b/2$ nin asal çarpanlara ayrılışı $p, q, r, \ldots$ farklı asal sayılar olmak üzere

$$\frac{b}{2} = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \ldots$$

ise,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = p^{2\alpha} q^{2\beta} r^{2\gamma} \ldots$$

olur. $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ nin ikisi bir arada, çarpımları olan $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ nin bütün asal çarpanlarını ihtiva ederler. Diğer taraftan meselâ p gibi bir asal çarpan ya yalnız $\frac{c+a}{2}$ veya yalnız $\frac{c-a}{2}$ de bulunabilir, çünkü $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ aralarında asal idi. Neticede $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ nin asal çarpanları $\frac{c+a}{2}$ ile $\frac{c-a}{2}$ ye öyle dağılırlar ki, her $p^{2\alpha}, q^{2\beta}, r^{2\gamma}, \ldots$ asal sayı kuvveti bütün olarak ya $\frac{c+a}{2}$, yahut $\frac{c-a}{2}$ ye girsin. Bu suretle $\frac{c+a}{2}$ ve $\frac{c-a}{2}$ nin, kendi asal çarpanlarının herbirini çift kuvvette ihtiva ettikleri, yani neticede kendilerinin de birer kare oldukları tespit edilmiş oldu.

5. Şu halde

$$\frac{c+a}{2} = u^2, \quad \frac{c-a}{2} = v^2, \tag{4a}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = u^2 v^2 \tag{4b}$$

vaz'edilebiliriz. Burada u^2 ve v^2 aralarında asal olduklarından, u ve v de aynı özeliği haizdir. (4b) den

$$b = 2uv, \tag{5}$$

ve (4a) denklemlerinden de taraf tarafa toplama ve çıkarma suretiyle

(6) $$c = u^2 + v^2,\ a = u^2 - v^2$$

elde edilir. c ve a tek olmak zorunda bulunduklarından, u^2 ve v^2 sayılarından ve neticede u ve v sayılarından biri tek, diğeri çift olmalıdır. (Çünkü her ikisi de aynı cinsten olsaydı, u^2 ve v^2 nin hem toplamı, her de farkı çift olurdu. Bu ise c ve a aralarında asal olduklarından mümkün değildir.) Bundan sonra, biri çift, öteki tek olan iki sayıya kısaca «farklı cinsten» diyeceğiz.

Böylece, (1) i gerçekleyen ve aralarında asal olan a, b, c sayılarının, aralarında asal ve *farklı cinsten* iki u, v sayısı yardımı ile (5) ve (6) formüllerinde verilen şekilde gösterilebileceğini öğrenmiş olduk. Eski $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ örneğimizde aşikâr olarak

$$u^2 = \frac{5+3}{2} = 4,\ v^2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

olup, hakikaten

$$b = 4 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2uv$$

dir.

6. Buraya kadar bir a, b, c esas çözümünü biliniyor farz ettik ve bu çözüme tekabül eden u, v sayılarını tayin ettik. Şimdi karşıt olarak $u > v$ şartına uyan, farklı cinsten, her aralarında asal u, v sayı çiftinden (5) ve (6) formülleri vasıtasıyla (1) in bir esas çözümü elde edilebileceğini gösterirsek, bütün esas çözümleri sistematik olarak elimize geçirmiş oluruz. Hakikaten, her iki tarafı hesaplamak suretiyle derhal görüleceği üzere,

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

dir. Şu halde (5) ve (6) ile verilen bütün a, b, c sayıları hakikaten (1) denklemini gerçeklerler. u ve v farklı cinsten oldukları, yani her ikisi de tek veya her ikisi de çift olmadıkları için, (6) ya göre a ve c tek olurlar ve neticede a, b, c, 2 ortak böle-

nini haiz olamazlar. a, b, c, 1 den büyük bir tek sayıyı da ortak bölen olarak kabul edemez, zira bu takdirde p gibi bir tek asal sayıyı (1) da ortak bölen olarak kabul ederdi ki,

$$c = p c_1, \quad a = p a_1$$

vaz'edilerek (4a) dan

$$2u^2 = c + a = p(c_1 + a_1)$$

$$2v^2 = c - a = p(c_1 - a_1),$$

yani $2u^2$ ve $2v^2$ nin de p ile bölünebileceği neticesi elde edilirdi. Bu da, p, 2 den farklı olduğundan, u^2 ve v^2 nin p ortak bölenini haiz olmasını icap ettirirdi ki, bu son keyfiyet u ve v nin aralarında asal olması ile uyuşamaz.

(5) ve (6) dan elde edilen bazı Pitagor sayılarını örnek olarak verelim:

$u=2,\ v=1:\ a=3,\ b=4,\ c=5$

$u=3,\ v=2:\ a=5,\ b=12,\ c=13$

$u=4,\ v=1:\ a=15,\ b=8,\ c=17$

$u=4,\ v=3:\ a=7,\ b=24,\ c=25$

$u=5,\ v=2:\ a=21,\ b=20,\ c=29$

$u=5,\ v=4:\ a=9,\ b=40,\ c=41$

Burada b nin yalnız çift olmakla kalmayıp, hattâ 4 ün bir katı olduğu göze çarpıyor. Bunun her zaman böyle olması lâzım geldiğini $b=2uv$ formulü başka bir şeye hacet kalmadan gösterir;

(1) 2 den farklı her asal sayı aşikâr olarak tektir.

çünkü zaten $u\,v$, farklı cinsten iki sayının çarpımı olarak çift olmak mecburiyetindedir.

7. Şimdi (1) denklemine böylece tamamen hâkim olduktan sonra, (1) in bir sürü genelleştirilmesi aklımıza gelir. Meselâ

(7a) $$x^3+y^3=z^3,$$

yahut

(7b) $$x^4+y^4=z^4,$$

yahut, daha umumî olarak, her hangi bir $n>2$ için

(7c) $$x^n+y^n=z^n$$

nin tam sayılı çözümleri sorulabilir.

Pierre de Fermat (1601 — 1665) nın şimdiye kadar hâlâ ispat edilemeyen, fakat cerh te edilemiyen meşhur bir iddiasına göre, hiç bir $n>2$ üssü için (7c) denkleminin pozitif tam sayılı bir x, y, z çözümü yoktur. Bazı (meselâ 3 ile 100 arasındaki bütün sayılar buraya dahildir) n ler için Fermat'nın iddiası *Kummer* (1810 — 1893) ve halefleri tarafından ispat edilmiştir. Hattâ *Euler* (1707 — 1783) bile (7a) ve (7b) nin pozitif tam sayılı çözümleri haiz olmadığının ispatını biliyordu.

Pitagor sayılarına dair biraz önce öğrenmiş olduğumuz bilgilerle (7b) nin tam sayılarla çözülemiyeceğinin ispatı bizim için kolay olacaktır. Hattâ burada (7b) yerine x, y, w hakkında daha az şart koşan

(8) $$x^4+y^4=w^2$$

denkleminin tam sayılarla çözülemiyeceğini ispat edeceğiz. Her dördüncü kuvvet bir kare olduğundan, fakat her karenin mutlaka bir dördüncü kuvvet olması icap etmediğinden, (8) in çözülememesi (7b) nin çözülmemesinden daha fazla şey ifade eder.

8. (8) denklemi

$$(x^2)^2+(y^2)^2=w^2 \tag{9}$$

şeklinde yazılırsa, bunun $a=x^2, b=y^2$ ve $c=w$ olmak üzere (1) in bir özel halini teşkil ettiği görülür. Burada da asıl önemi haiz olan x, y, w çözümleri «esas çözümler» olduklarından, yukarıdaki gibi eğer (9) un böyle çözümleri varsa, w nin tek ve x^2 ile y^2 den birinin çift, diğerinin tek olması lâzım geldiği neticesini çıkarırız. Gene $x^2=a$ tek ve $y^2=b$ çift olsun. (9) un bir çözümü verildiği takdirde, bu çözüm (5) ve (6) formülleriyle gösterilebilmelidir, yeni farklı cinsten ve aralarında asal öyle iki u, v sayısı mevcut olmalıdır ki

$$\text{(10a)}\quad x^2=u^2-v^2,\quad \text{(10b)}\quad y^2=2uv,\quad \text{(10c)}\quad w=u^2+v^2$$

olsun. Bunlardan (10a)

$$x^2+v^2=u^2 \tag{11}$$

şeklinde de yazılabilir ki, bu da aralarında asal x, v, u sayıları arasında yeni bir Pitagor denklemidir. Burada u, önceki c nin rolünü oynamakta olduğundan, 3. e göre tek olmalıdır; x tek olduğundan, v için ancak çift olması imkânı kalır ki, buna göre v, önceki b nin rolünü oynar. x, v, u sayıları, (11) Pitagor denkleminin esas çözümü olarak, (5) ve (6) vasıtasıyla şu şekilde gösterilebilir:

$$x=u_1^2-v_1^2,\ v=2u_1v_1,\ u=u_1^2+v_1^2 \tag{12}$$

Burada u_1, v_1 farklı cinsten ve aralarında asal iki uygun sayıyı gösterir. Şimdi (10b) yi hatırlayalım. u tek, v çift bulunduğundan ve u ile v aralarında asal olduklarından, u ve $2v$ de aralarında asaldır, çünkü 2, u yu bölmektedir. Böylece y^2, (10b) ye göre, aralarında asal olan u ve $2v$ çarpanlarına ayrılmış olmaktadır. Fakat 4 teki mülâhazaya göre bir karenin böyle *araların-*

da asal iki çarpana ayrılması, ancak bu çarpanların kendilerinin de birer kare olmasiyle mümkündür. Şu halde içinde bulunduğumuz halde

(13) $$u = w_1^2,\ 2v = 4t_1^2$$

olup, burada $2v$ nin çift olduğu da $(2t_1)^2 = 4t_1^2$ ye eşit kılınmak suretiyle hemen ifade edilmiştir. Bu değerleri (12) nin son iki denkleminde yerine koyarsak,

(14) $$t_1^2 = u_1 v_1,\ w_1^2 = u_1^2 + v_1^2$$

elde ederiz. Şimdi burada u_1, v_1 aralarında asaldır ve çarpımları t_1^2 ye eşittir. Şu halde bunların kendileri de birer kare olmalıdır:

(15) $$u_1 = x_1^2,\ v_1 = y_1^2,$$

Bunlar (14) teki ikinci denklemde yerine konursa

(16) $$x_1^4 + y_1^4 = w_1^2$$

elde edilir.

9. Şimdi bu (16) denkleminin, hareket noktamız olan (8) denklemiyle aynı şekli haiz olduğunu görüyoruz. Şu halde: (8) in bir x, y, w esas çözümü mevcut olduğu takdirde, gene (8) in öyle bir başka x_1, y_1, w_1 esas çözümü mevcut olur ki, x_1, y_1, w_1 sayıları x, y, w den belirli bir usûle göre elde edilirler. Her halü kârda ilk çözümün w si ikinci çözümün w_1 inden daha büyüktür, çünkü (10c) ye ve (13) ün ilk denklemine göre

$$w = u^2 + v^2 = w_1^4 + v^2 > w_1^4$$

olup, buradan muhakkak surette $w > w_1$ olduğu elde edilir.

Şimdi bu hakikatlerden hareket ederek kolaylıkla bir tenakuza varılabilir. Çünkü, tıpkı 8. de x, y, w den yeni x_1, y_1, w_1 çözümünü elde ettiğimiz usûlle x_1, y_1, w_1 den de başka bir

x_2, y_2, w_2 çözümünü elde edebiliriz. Burada $w > w_1$ özeliğinin benzeri olarak $w_1 > w_2$ eşitsizliği caridir. Aynı metodun bir defa daha uygulanması ile $w_2 > w_3$ özeliğini haiz bir x_3, y_3, w_3 çözümü daha elde ederiz. Bu işleme devam edersek,

$$w > w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \ldots \tag{17}$$

şeklinde azalan bir sayı dizisi elde ederiz. Fakat bu sayıların hepsi pozitif tam sayılar olduğundan, w den daha küçük olan ancak sonlu sayıda bu tip sayı bulunabilir. Şu halde (17) dizisi sonlu olup, meselâ w_k gibi bir sonuncu terim ihtiva eder. Fakat bu w_k bir x_k, y_k, w_k çözümüne ait olurdu ki, bu çözümden 8. e göre $w_k > w_{k+1}$ eşitsizliğini gerçekleyen yeni bir x_{k+1}, y_{k+1}, w_{k+1} çözümü elde edilebilirdi. Bu suretle bahsettiğimiz tenakuza varmış oluyoruz. Böylece (8) in hiç bir esas çözümü haiz olamıyacağı tespit edilmiş oluyor, çünkü böyle bir çözümün mevcudiyeti bizi bir tenakuza sevketmiş oldu. Neticede (8) in hiçbir tam sayılı çözümü mevcut olamaz. Çünkü böyle bir çözümden derhal bir esas çözüm elde edilebilir.

Bu ispatın esas fikrine, *Fermat* ile birlikte, «descente infinie» (sonsuz iniş) adı verilegelmiştir. Bu fikir, belirli bir usûlle (burada 8. deki işlemin tekrarı) terimleri gittikçe küçülen pozitif tam sayılardan teşekkül eden bir *sonsuz dizi* elde edilmesinin, her pozitif tam n sayısından daha küçük ancak sonlu sayıda pozitif tam sayı mevcut olabildiği (çünkü bu sayılar ister istemez $n-1$, $n-2$, .., 3, 2, 1 sayıları içinde, yani en çok $n-1$ tane olabilir) keyfiyetiyle tenakuz teşkil etmesinden ibarettir.

İşin aslına bakılırsa, daha $\sqrt{2}$ nin irrasyonel oluşunun ispatında böyle bir «descente infinie» ye rastlamıştık.

14. Verilen bir nokta sistemini çevreleyen en küçük daire (Yuva dairesi)

1. Düzlemde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gibi n tane nokta verilmiş olsun. Bu noktaların topuna «nokta sistemi» (1) adını vereceğiz. Şimdi bir nokta sisteminin P_i ve P_k gibi nokta çiftleri arasındaki mümkün olan bütün ikili uzaklıkları düşünelim. Sonlu sayıda olan (2) bu uzaklıklar arasında mutlaka bir en büyük uzaklık bulunacaktır. İşte bu en büyük uzaklığı, verilen n noktadan teşekkül eden nokta sisteminin «genişliği» adı ile belirteceğiz.

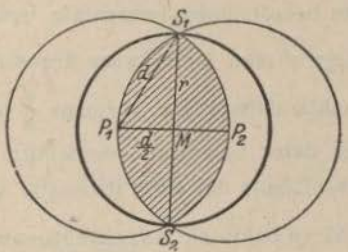
Aşikâr olarak, genişliği d olan n noktalı bir sistemin etrafına d yarıçaplı öyle bir daire çizebiliriz ki, bu n noktanın hepsini birden ihtiva etsin (Şek. 56). Bunun için n noktanın herhangi biri, meselâ P_1, merkez olmak üzere d yarıçaplı bir daire çizmek kâfidir. n noktanın geri kalan herbiri P_1 den en çok d uzaklığında olduğundan, bu daire kendi P_1 merkezinden başka $P_2, P_3, \cdots, P_n$ noktalarının da hepsini ya içinde yahut kenarında ihtiva eder.

Fakat n noktanın hepsini birden ihtiva eden daha da küçük yarıçaplı bir daireyi kolayca çizebiliriz. Bunun için birbirinden en büyük, yani d, uzaklığını haiz olan nokta çiftini seçelim. (d uzaklığını haiz birden fazla nokta çifti varsa, bunlardan herhangi birini seçelim). Bu çifte — kendisine $P_1\ P_2$ diyelim — ait her iki noktanın etrafında d yarıçaplı birer daire çizelim. Aşikâr olarak, bu dairelerin herbiri öteki noktadan geçer. Şimdi

(1) Burada «nokta cümlesi» tabirini kasten kullanmıyoruz. Çünkü bir «nokta cümlesi» sonsuz sayıda nokta da ihtiva edebilir. Halbuki buradaki «nokta sistemi» adı ancak sonlu sayıda nokta ihtiva eden cümleler için kullanılacaktır.

(2) Kolayca kanaat getirileceği üzere n tane noktadan $\frac{n(n-1)}{2}$ tane çift teşkil edilebilir.

biliyoruz ki n noktanın hepsi bir taraftan P_1 merkezli, diğer taraftan P_2 merkezli daireler tarafından ihtiva edilir. Şu halde bütün bu noktalar her iki daireye ortak olan yüzey parçasına, yeni Şek. 56 da taranmış olan daire yayları ikiköşelisine, ait olurlar.



Şek. 56

Köşeleri S_1 ve S_2 olan bu daire yayları ikiköşelisi ise $S_1 S_2$ çaplı bir dairenin içine girer. Bu sonuncu dairenin r yarıçapı, $P_1 M S_1$ dik üçgenine Pitagor teoremini tatbik ederek bulunur:

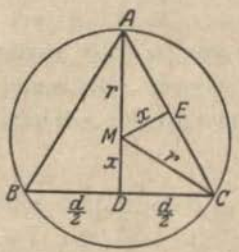
$$r^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} d^2$$

olup, neticede $r = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ olur. Bir H nokta sisteminin bütün noktalarını içinde veya çevresi üzerinde ihtiva eden bir daireye bu nokta sisteminin bir «çevreleyen dairesi» diyeceğiz. Şu halde ilk verilen $r = d$ yarıçaplı çevreleyen daire yerine, sonradan $r = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \ldots d$ yarıçaplı bir çevreleyen daire bulmuş olduk.

2. Şimdi, acaba bu $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sayısı yerine daha küçük bir sayı da aynı rolü oynayamaz mı? diye bir soru ortaya çıkıyor. Bu soruyu *H. W. E. Jung*'un aşağıdaki teoremi cevaplandırır:

Genişliği d olan her nokta sistemi yarıçapı en çok $\frac{d}{3}\sqrt{3}=0{,}577\ldots\ d$ olan bir çevreleyen daireyi haizdir. Bazı özel nokta sistemlerinde bu çevreleyen dairenin yarıçapı daha da küçültülebilir. (1) Bununla birlikte bazı öyle nokta sistemleri de vardır ki, bunları çevreleyen daha küçük yarıçaplı bir daire bulmak mümkün değildir. Bu bölümün hedefi, Jung teoreminin ispatıdır.

Kenar uzunluğu d olan bir eşkenar üçgenin köşe noktalarının teşkil ettiği nokta sistemi için, yarıçapı $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ Jung değerini haiz bir çevreleyen daire kolaylıkla verilebilir. Bu daire, eşkenar üçgenin dışına çizilmiş daireden ibarettir. Çünkü $r+x=h$ vaz'edilirse (Şek. 57 ye bakınız), ABD diküçgeninde $d^2=h^2+\frac{d^2}{4}$,



Şek. 57

(1) $$h^2=\frac{3\,d^2}{4},$$ neticede

(2) $$h=\frac{d}{2}\sqrt{3}$$ olur.

(1) Birbirinden d uzaklığında olan iki nokta ancak yarıçapı en aşağı $\frac{d}{2}$ olan bir daireye sığabileceğinden ve genişliği d olan bir nokta sisteminde daima d uzaklığında bir nokta çifti bulunduğundan, herhangi bir çevreleyen dairenin yarıçapı hiçbir zaman $\frac{d}{2}$ nin altına düşemez.

Bundan başka, DCM üçgeninde $x^2+\frac{d^2}{4}=r^2$ olup, buradan

$$(h-r)^2+\frac{d^2}{4}=r^2,\ h^2-2hr+r^2+\frac{d^2}{4}=r^2,$$

$$h^2+\frac{d^2}{4}=2hr$$

ve (1) dolayısıyla

$$d^2=2hr, \qquad r=\frac{d^2}{2h}$$

olup, buradan da (2) ye göre

$$r=\frac{d^2}{d\sqrt{3}}=\frac{d}{3}\sqrt{3}$$

bulunur ki, bu da iddia edilen değerden ibarettir.

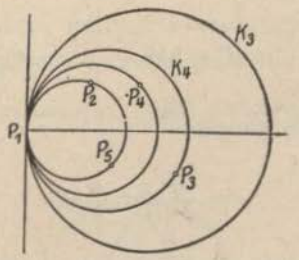
Diğer taraftan, bir eşkenar üçgenin dışına çizilmiş dairenin bu üçgenin köşelerini çevreleyen en küçük daire olduğu aşikârdır. Bununla beraber, ilerde diğer neticelerle birlikte kendiliğinden ortaya çıkacak olan bu hususu burada daha yakından ele almayacağız.

3. Şimdi Jung teoremini genişliği d olan her hangi bir nokta sistemi için umumî olarak ispat etmek üzere, o nokta sistemini çevreleyen daireler içinde mümkün olduğu kadar küçük bir daire aramaya girişeceğiz. Bu maksatla, çevreleyen bir daireyi gittikçe küçültmeğe yardım edecek bir sıra işlem yapacağız:

I. Çevresi üzerinde, verilmiş H nokta sistemine ait hiçbir nokta ihtiva etmeyen bir K_1 çevreleyen dairesi yerine daha küçük bir K_2 çevreleyen dairesi bulmak daima mümkündür. Hakikaten, bunun için K_1 in M merkezi etrafında ve sistemin M ye

en uzak noktasından geçen bir K_2 dairesi çizmek yeter. Bu daire tamamen K_1 in içinde kalır, çünkü K_1, H nın bütün noktalarını iç nokta olarak kabul ettiğinden, H nın K_2 üzerinde bulunan noktası da K_1 in içindedir, neticede K_2 nin yarıçapı K_1 inkinden küçüktür. Bundan başka K_2 aşikâr olarak H nın bir çevreleyen dairesidir.

II. Çevresi üzerinde H nokta sisteminin sadece *bir* noktası bulunan bir K_3 çevreleyen dairesi de küçültülebilir (Şek. 58).



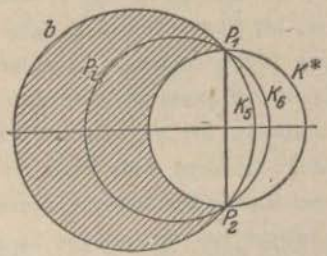
Şek. 58

P_1, H nın K_3 üzerindeki noktası olduğuna göre K_3 ile aynı teğeti haiz olan ve H nın bir noktasından daha geçen bütün daireleri çizelim. Bu dairelerin hepsi K_3 ün içinde bulunurlar. İçlerinde en büyüğü olan K_4 (ki K_3 ten farklıdır, çünkü H nın K_3 üzerinde sadece P_1, K_4 üzerinde ise P_1 den başka bir noktası daha bulunmaktadır) diğerlerini ve neticede H yı çevrelemekte olup, çevresi üzerinde H nın n tane noktasından en aşağı *iki*'sini ihtiva etmektedir. K_4, aynı zamanda K_3 ten de küçüktür.

III. Bir çevreleyen daire üzerinde bulunan H nın noktaları, bu dairenin çevresini H nın noktalarını ihtiva etmeyen bir takım yaylara ayırırlar. Böyle yaylara kısaca «noktadan âri» yaylar diyeceğiz. Bununla beraber noktadan âri bir yayın uçları H nın noktaları olabilirler.

Şimdi bu dili kullanarak aşağıdaki iddiayı ileri sürüyoruz: Yarım daireden daha büyük bir noktadan âri yay ihtiva eden bir K_5 çevreleyen dairesi yerine daha küçük bir K_6 çevreleyen dairesi bulunabilir. (1)

Hakikaten, K_5 üzerindeki H ya ait P_1 ve P_2 noktaları, yarım daireden daha büyük bir b noktadan âri yayının uçları olsun. (Şek. 59 a bakınız). Şimdi P_1 P_2 çaplı K^* dairesini çizelim.



Şek. 59

Eğer K^*, H nın bütün noktalarını ihtiva ediyorsa, istenilen K_5 ten daha küçük çevreleyen daire kendisi olur, çünkü (b bir yarım daire olmadığından) P_1 P_2 kirişi K_5 in çapı olamaz, şu halde K_5, K^* dan daha büyük olur. Eğer K^*, H nın bütün noktalarını ihtiva etmiyorsa, H nın K^* ın dışında kalan noktaları b ve K^* arasındaki hilâl şekilli (taranmış) bölgede bulunmalıdırlar; burada b nin kendisi, faraziyeye göre — P_1, P_2 uçları hariç — H ya ait hiçbir nokta ihtiva etmez. Şimdi, H nın taranmış hilâlde bulunan bütün noktalarının sırayla herbiri ile P_1 ve P_2 den geçmek üzere birer daire çizelim. Bu dairelerin K_5 içinde kalan kısımları taranmış hilâl içinde, şu halde K^* dışında bulunurlar. Bundan başka, bu dairelerin K^* içinde kalan kısımları K_5 dışında kalırlar. Şimdi K_6, bu dairelerin arasında taranmış

(1) I ve II şıkları III şıkkının birer özel hali olarak düşünülebilir, çünkü bu ilk hallerde hattâ bir tam daire noktadan âridir.

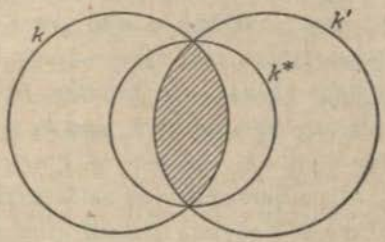
hilâl içindeki kısmı $P_1 P_2$ kirişinden en çok uzaklaşanı olsun. Bu daire H nın bütün noktalarını ihtiva eder, çünkü H nın taranmış hilâldeki bütün noktaları ile, H nın geri kalan noktalarını içine alan K_2 ve K^* ın ortak kısmını ihtiva etmektedir. Bundan başka K_0, K_2 ten küçüktür, çünkü K_0, K_2 ile K^* arasından geçmekte olup, böylelikle K_0 nın merkezi $P_1 P_2$ kirişine K_2 inkinden daha yakındır.

Şu halde I, II, III işlemlerine göre, artık küçültülemeyen bir çevreleyen daire, bir yarım daireden daha büyük olan hiçbir noktadan âri yay ihtiva edemez. Öyle ise, böyle bir daire ya H nın iki noktasını bir çapın iki ucu olarak kabul eder, yahut aralarındaki noktadan âri yaylaların birer yarım daireden daha küçük bulunduğu üç veya daha fazla H ya ait noktadan geçer. Aşağıda birinci cinsten bir daireye «çevreleyen çap dairesi», ikinci cinsten bir daireye ise «çevreleyen üç nokta dairesi» denecektir. I, II, III adımları bu cinslerden birine ait bir çevreleyen dairenin mevcudiyetini ispat ettiği gibi, böyle bir daireyi inşa etmek için bir usûl de verir.

4. Şimdi, nokta sisteminin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını çap olarak kabûl eden bütün dairelerle, sistemin herhangi üç noktasından geçen bütün daireleri çizilmiş farzedelim. (1) Sonlu sayıda olan bu dairelerin hepsinin de çevreleyen daire olması tabiatiyle icap etmez. Fakat ne olursa olsun, biraz önce tarif edilmiş bulunan çevreleyen çap ve üç nokta daireleri bunlar arasında bulunur. Buradan, bu özel tipte çevreleyen dairelerin ancak sonlu sayıda mevcut olabildiklerini anlarız. Şimdi bunları seçelim ve aralarında yapacağımız sonlu sayıda mukayese sonunda içlerinde *en küçüğünü* alalım. Bunun adına k diyelim. *Bu takdirde k, mümkün olan bütün çevreleyen dairelerin en küçüğüdür*, çünkü kendisi bütün çevreleyen çap ve üç

(1) Bunlar hep birlikte $\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ daire eder.

nokta dairelerinin mukayesesi sonunda elde edilmiş olup, I, II ve III e göre çap veya üç nokta dairesi olmayan bütün çevreleyen dairelerden daha kuvvetle küçüktür. Bundan başka, *k tek olarak* belirlidir. Çünkü k ile aynı büyüklükte ikinci bir k' çevreleyen dairesi mevcut olsaydı (Şek. 60), H sistemi hem k, hem



Şek. 60

de k', ye ve neticede k ve k' nün ortak kısmına ait olurdu. Bu ortak kısım ise bir daire yayları ikiköşelisi olup, daha küçük bir k^* çevreleyen dairesinin içine girerdi, bu ise k nın en küçük yarıçaplı çevreleyen daire olması özeliğine aykırı olurdu. H nokta sisteminin tamamen belirli olan bu en küçük çevreleyen dairesine o sistemin «yuva dairesi» denir.

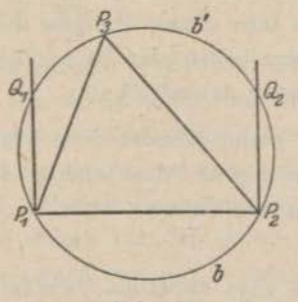
k yuva dairesi yarım daireden daha büyük hiçbir noktadan âri yay ihtiva edemez, çünkü aksi takdirde III e göre kendisi en küçük çevreleyen daire olamazdı.

5. Şimdi bu k yuva dairesinin yarıçapının $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ ü geçmeyeceğini göstereceğiz. Bu maksatla k nın çevresi üzerinde birbirinden mümkün olduğu kadar uzakta bulunan iki nokta arayalım. Bu en büyük uzaklığı δ diyelim, ki tabiatiyle δ, en çok nokta sisteminin d genişliğine eşit olabilir.

Evvelâ k üzerindeki bir çapın iki ucunda H ya ait birer nokta mevcut olması halini ele alalım. Bu halde k nın $2r$ çapı

$\delta \leq d$ olup, $r \leq \frac{d}{2}$ olur. Şu halde her halü kârda $r \leq \frac{d}{3}\sqrt{3}$ olur.

İkinci olarak yukarıki halin cari olmadığını farzedelim. Bu takdirde k nın noktadan âri yayları arasında en büyük olanını (yahut böyle birkaç tane eşit büyüklükte olanı varsa onlardan birini) seçelim. Bu yayın uç noktaları P_1, P_2 olsun, ki bunlar H ya aittir. Bu b yayı muhakkak surette yarım daireden küçüktür, çünkü noktadan âri bir yay, evvelce tespit edildiği gibi, bir yarım daireden büyük olamaz, öte taraftan bu yay bir yarım daireye eşit te olamaz, aksi takdirde onun P_1 ve P_2 uç noktaları bir çapın uçları olurdu ki, bu hali de, evvelce elden geçirmiş olduğumuz için, içinde bulunduğumuz halde bahis konusu dışında bırakabiliriz. Şimdi b yayının kirişini çizelim ve bu kirişin uç noktalarındaki dikmeleri çıkalım. Bu dikmeler daireyi diğer iki Q_1 ve Q_2 noktalarında keserler ve bu suretle k dairesi üzerinde Q_1 den Q_2 ye kadar öyle bir b' yayı ayırırlar ki, bu yay b nin karşısında olup, ona eşittir (Şek. 61). Q_1 ve Q_2 noktaları



Şek. 61

H ya ait değildir, çünkü Q_1, P_2 ile ve Q_2 de P_1 ile birer çapın iki ucunu teşkil ederler ki, böyle nokta çiftlerinin şimdi gözönünde bulundurduğumuz halde mevcut olmadığını farzetmiştik. Şimdi b' yayına gelelim. Bu yay noktadan âri olamaz, çünkü aksi takdirde uçları H ya ait olmadığından, daha büyük bir

noktadan âri yayın içinde bulunurdu. Bu ise mümkün değildir, çünkü noktadan âri hiçbir yay b den daha büyük olamaz.

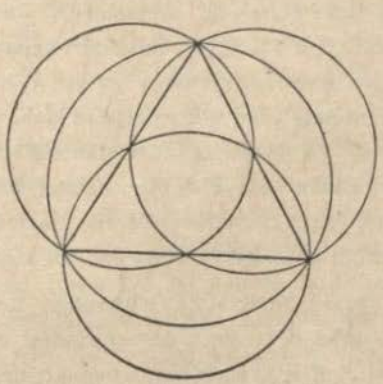
Neticede b' yayı Q_1 ve Q_2 arasında H ya ait en aşağı bir P_3 noktası ihtiva eder. P_1, P_2, P_3 noktaları açılarının her üçü de *dar* olan bir üçgen meydana getirir: P_1 ve P_2 deki açılar aynı noktalarda inşa edilmiş olan dik açılardan daha küçük olduklarından, P_3 teki açı da yarım daireden daha küçük b yayına ait çevre açısı olduğundan dolayı dardır. (Daha küçük yaya daha küçük çevre açısı tekabül eder ve *Thales* teoremine göre bir yarım daireye tekabül eden çevre açısı bir dik açıdır).

k nın P_1, P_2, P_3 vasıtasiyle bölündüğü üç yay içinde en aşağı bir tanesi daire çevresinin üçte birinden büyük veya ona eşit olmak, fakat $P_1 P_2 P_3$ üçgeninin dar açılı olması dolayısıyle bir yarım daireden küçük kalmak zorundadır. Şu halde böyle bir yayın $P_i P_j$ kirişi, en aşağı dairenin üçte birine tekabül eden kirişe, yani k nın içine çizilmiş eşkenar üçgenin s kenarına eşit olmalıdır. $P_i P_j$ uzaklığı en çok nokta sisteminin d genişliğine eşit olduğundan, böylelikle $s \leq d$ münasebetini bulmuş olduk.

Kenar uzunluğu s olan bir eşkenar üçgenin dışına çizilmiş dairenin yarıçapı (2. ye göre) $r = \frac{s}{3}\sqrt{3}$ tür. Buradan $s \leq d$ dolayısıyle k nın yarıçapı için $r \leq \frac{d}{3}\sqrt{3}$ bulunur ki, ispatını istediğimiz şey de idi.

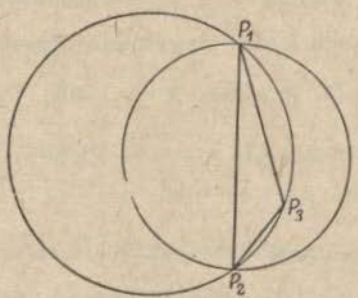
6. Şimdi, genişliği d olan bir nokta sistemi yuvasının yarıçapına ait $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ üst sınırının umumiyetle daha küçük yapılamıyacağına kolayca kanaat getirebiliriz. Zira kenarları d olan bir eşkenar üçgenin dışına çizilen daire, ki $\frac{d}{3}\sqrt{3}$ yarıçapını haizdir, üçgenin köşelerinden teşekkül eden nokta sisteminin bizzat yuva dairesidir. Çünkü 4. e göre, yuva dairesi çevreleyen çap ve üç nokta daireleri arasında bulunur. Buradaki üç tane

çap dairesi eşkenar üçgenin sadece ikişer köşelerini ihtiva ettiklerinden (Şek. 62) geriye yegâne üç nokta dairesi kalır, yani



Şek. 62

üçgenin dışına çizilen daire en küçük çevreleyen daire için bahis konusu olabilecek yegâne dairedir. Her ne kadar bir eşkenar



Şek. 63

üçgenin etrafına çizilen dairenin bu üçgenin köşelerinin teşkil ettiği nokta sistemine ait yuva dairesi olduğu sezgi bakımından çok akla yakın görünüyorsa da, bu keyfiyet yine de tamamen aşikâr değildir. Zira bir açısı *geniş* olan bir üçgenin dışına çizi-

len daire bu üçgenin köşe noktalarının teşkil ettiği sisteme ait yuva dairesi *değil*dir; daha ziyade, bu son daire üçgenin en büyük kenarını çap olarak kabul eden dairedir (Şek. 63).

15. İrrasyonel Sayıların Rasyonel Yaklaşık Değerleri

Yarıçapı 1 olan bir dairenin alanını ölçen π sayısının yaklaşık olarak $\frac{22}{7}$ ye, gene $\sqrt{2}$ nin yaklaşık olarak $\frac{7}{5}$ e eşit oluşu daha Eski Çağlarda bile bir rol oynamıştır. Bu gibi ifadelerin açık matematik manası nedir? Aslında çok sahih ve dakik kimseler olan matematikçilerin lûgatına dahil olmaması lâzım gelen «yaklaşık», «takribî» kelimelerinin hakikî matematik manası nedir?

1. Herhangi bir w sayısı verildiğine göre, bu sayının istenildiği kadar yakınında bir takım âdi kesirler, veya matematikçilerin dediği gibi bir takım rasyonel sayılar bulunabilir. Meselâ π sayısı için, bu sayının $\pi = 3{,}14159\ldots$ ondalık açılımı bilindiği takdirde, kolayca elde edilebilen

$$3{,}1 = \frac{31}{10};\ 3{,}14 = \frac{314}{100};\ 3{,}141 = \frac{3141}{1000}$$

kesirleri bu sayıya gittikçe daha çok yaklaşan değerlerdir. 1. kesir aşikâr olarak π den $\frac{1}{10}$ dan daha az farkeder (çünkü $3{,}2 = \frac{32}{10}$ kesir π yi geçer), 2. si $\frac{1}{100}$ den daha az farkeder, ilâh... Aynı şekilde ondalık açılımı bilinen her sayıya (âdi) kesirler vasıtasiyle istenildiği kadar yaklaşılabilir.

Yukarıda yapmış olduğumuz şekilde, bir sayıya $\frac{1}{10}$ un kuvvetlerine göre yaklaşmak, vücut yapımıza bağlı olan 10 sayısına

belki lüzumsuz bir üstünlük vermek olur. Matematik bakımından bir tesadüften ibaret olan 10 sayısı yerine diğer herhangi bir n sayısı alarak şu ifadeyi elde ederiz:

Teorem 1. *w herhangi bir sayı, n de herhangi bir tam sayı olsun. Bu takdirde n paydalı öyle bir m/n sayısı mevcuttur ki, w den $1/n$ daha az farketsin, yani*

$$0 \leq w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

olsun.

Meselâ $w = \sqrt{2}$, $n = 5$ ise, w, 1 ile 2 arasındadır, şu halde

$$1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2 \tag{1}$$

arasındaki herbiri 1/5 uzunluğunda beş aralıktan birinin içindedir. Daha yakından hesap yapmadan biliyoruz ki, bu sayıların içinde $\sqrt{2}$ den küçük olanlardan kendisine en yakını $\sqrt{2}$ den 1/5 ten daha az fark eden 5 paydalı bir kesirdir. Tamamen aynı şekilde, umumî olarak herhangi bir w sayısı verildiği takdirde, g, w yi geçmeyen en büyük tam sayı olmak üzere,

$$g, g + \frac{1}{n}, g + \frac{2}{n}, \ldots, g + \frac{n-1}{n}, g + 1 \tag{2}$$

sayıları düşünülebilir ve bunlar arasında w yi geçmeyenlerin en büyüğü alınabilir ki, o da w den $1/n$ den daha az farkeder. Yani bu sayı $g + (l/n)$ ise,

$$0 \leq w - \left(g + \frac{l}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{3}$$

bulunarak iddiamız herhangi bir w için ispat edilmiş olur.

Şimdi, $\sqrt{2}$ nin (1) deki aralıklardan hangisinin içine düştü-

ğünü bilfiil hesaplıyacağız. Hesap kolaylığı bakımından paydaları bertaraf ederek, $\sqrt{2}$ nin 5 katının, yani $5\sqrt{2}=\sqrt{25}.\sqrt{2}=\sqrt{50}$ nin, (1) deki sayıların 5 katlarından teşekkül eden

(1a) $$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

dizisinin hangi aralığına ait olduğunu, yani $\sqrt{50}$ den küçük tam sayıların en büyüğünün hangisi olduğunu araştıracağız. $49<50<64$ ten dolayı, $7<\sqrt{50}<8$ olup, aranan sayı 7 olarak bulunur. Neticede

(4) $$0\leq\sqrt{2}-\frac{7}{5}<\frac{1}{5}\text{ olur.}$$

Bunun gibi yukarıki umumî teoremin ispatı da, w yerine nw yi almak ve nw yi geçmeyen en büyük tam sayıyı araştırmak suretiyle çok daha kolay yapılabilir: bu tam sayı m ise, $m\leq nw<m+1$, yani $0\leq nw-m<1$ olur ki, bunu da n ile bölerek

$$0\leq w-\frac{m}{n}<\frac{1}{n}$$

buluruz. İspatı istenen şey de bu idi.

2. Buna göre, π nin veya $\sqrt{2}$ nin «yakınında» kesirlerin (rasyonel sayıların) mevcut olması önemli bir şey değildir. Şu halde π nin yaklaşık olarak 22/7 ye, veya $\sqrt{2}$ nin yaklaşık olarak 5/7 e eşit olmasının hakikî mânası nerededir? Bu mâna, 5/7 in $\sqrt{2}$ ye yukarıki teoremde garanti edildiğinden «çok daha yakın» olmasındadır. Çünkü daha doğru olarak

$$\frac{7}{5}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$$

olup, $\sqrt{2}$ nin 7/5 ten farkı muhakkak ki 17/12 nin 7/5 ten olan farkından daha küçüktür, yani

$$\sqrt{2}-\frac{7}{5}<\frac{17}{12}-\frac{7}{5}=\frac{1}{60}$$

tır. Halbuki (4), $\sqrt{2}-(7/5)$ farkının sadece 1/5 ten küçük olduğunu ifade ediyordu. π için Archimedes (Arşimet) tarafından ifade edilen çifte eşitsizlik te buna tekabül etmekte olup,

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{22}{7}-\pi<\left(3+\frac{10}{70}\right)-\left(3+\frac{10}{71}\right)=\frac{10}{70}-\frac{10}{71}=\frac{10}{70\cdot 71}=\frac{1}{497}$$

olur. Halbuki yukarıki teorem bu fark için ancak 1/7 sınırını veriyordu.

Fakat bu «çok daha yakın» kelimesi de matematikçilerin lûgatında yoktur. Bu müphem ifadeyi aşağıki teoremle açıklığa kavuşturacağız:

Teorem 2: *w rasyonel olmayan bir sayı, N de herhangi bir pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde paydası en çok N olan ve w den $1/nN$ den daha az farkeden bir m/n kesri mevcuttur. Şu halde w den $1/n^2$ den daha az farkeden sonsuz sayıda m/n kesri mevcuttur.*

Önceki misâller için bu teorem $\sqrt{2}-\frac{7}{5}$ in $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$ ten ve $\frac{22}{7}-\pi$ nin $\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$ dan daha küçük olduğu neticesini verir. Bu iki halde her ne kadar hakikî farklar yeni teoremin verdiği sınırlardan çok daha küçük iseler de, gene de bu teorem ilk trivial teoremin esaslı bir keskinleştirilmesini teşkil eder.

İspat için sadece Nw ve onu geçmeyen en büyük tam sayıyı değil, fakat sırasıyla

$$w, 2w, 3w, \ldots, Nw$$

sayılarını ele alarak, bu sayıların herbiri için onu geçmeyen en büyük tam sayıyı düşünelim. Bu sonuncu sayıları sırasıyla

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_N$$

ile gösterirsek,

$$0 < w - g_1 < 1, 0 < 2w - g_2 < 1, \ldots, 0 < Nw - g_N < 1$$

olur.

İspatı en iyisi bir misâlle anlıyabiliriz: $w = \sqrt{2}$, $N = 13$ olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots = 1 + 0{,}414\ldots$$

$$2\sqrt{2} = 2{,}828\ldots = 2 + 0{,}828\ldots$$

$$3\sqrt{2} = 4{,}242\ldots = 4 + 0{,}242\ldots$$

$$4\sqrt{2} = 5{,}656\ldots = 5 + 0{,}656\ldots$$

$$5\sqrt{2} = 7{,}071\ldots = 7 + 0{,}071\ldots$$

$$6\sqrt{2} = 8{,}485\ldots = 8 + 0{,}485\ldots$$

$$7\sqrt{2} = 9{,}899\ldots = 9 + 0{,}899\ldots$$

$$8\sqrt{2} = 12{,}313\ldots = 12 + 0{,}313\ldots$$

$$9\sqrt{2} = 12{,}727\ldots = 14 + 0{,}727\ldots$$

$$10\sqrt{2} = 14{,}142\ldots = 14 + 0{,}142\ldots$$

$$11\sqrt{2} = 15{,}556\ldots = 15 + 0{,}556\ldots$$

$$12\sqrt{2} = 16{,}690\ldots = 16 + 0{,}690\ldots$$

$$13\sqrt{2} = 18{,}384\ldots = 18 + 0{,}384\ldots$$

olur. $\sqrt{2}$ nin bir katı ile onu geçmeyen en büyük tam sayı arasındaki 13 tane farktan en küçüğünün 5. fark olduğu görülü-

yor: $5\sqrt{2}-7=0,071...$ Bu farkların en büyüğü ise 12. sidir: $12\sqrt{2}=16+0,690$, yahut $12\sqrt{2}=17-0,030$, yani

$$17-12\sqrt{2}=0,030$$

Umumî olarak, bazen çoğalıp, bazen azalan bu 13 farkı büyüklüklerine göre sıralarsak, 0 ile 1 arasında, bu aralığı 14 kısmî aralığa bölen 13 tane sayı elde ederiz. Tabiî bu kısmî aralıkların hepsi aynı uzunlukta, yani tam $\frac{1}{14}$ uzunluğunda değildir. Fakat bunlardan en aşağı biri mutlaka $\frac{1}{14}$ ten küçük olmalıdır. Zira, onların hepsi de $\geqq\frac{1}{14}$ olsaydı, ondördü bir arada en aşağı $\frac{14}{14}=1$ uzunluğunda olurdu; burada uzunluğun tam 1 olması ancak kısmî aralıklardan herbirinin $=\frac{1}{14}$ olması halinde mümkündür, sadece bir kısmî aralığın bile $\frac{1}{14}$ ten büyük olması, toplamın 1 i geçmesi neticesini doğurur. Fakat kısmî aralıkların hepsi de tam $\frac{1}{14}$e eşit olamaz, çünkü bu takdirde $\sqrt{2}$ nin kendisi de, 13 savıdan biri olarak, kendini geçmeyen en büyük tam sayıdan $\frac{1}{14}$ ün bir katı kadar farkeder, yani $\sqrt{2}=1+\frac{m}{14}$ olurdu ki, bu da $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olması demektir. Halbuki biz w yi irrasyonel olarak aldık, ve özellikle $\sqrt{2}$ nin de irrasyonel olduğunu Bölüm 4 ten biliyoruz. Şu halde buradan kısmî aralıklardan hiç olmazsa bir tanesinin muhakkak 1/14 ten küçük olduğu neticesi çıkar. Bu aralığın $\sqrt{2}$ nin hangi katlarından doğduğu ilk bakışta kestirelemez. Meselâ $a\sqrt{2}-g_a=r_a$ bu aralığın sol ucu, $b\sqrt{2}-g_b=r_b$ de aynı aralığın sağ ucu olsun. Bu suretle

$$0<r_b-r_a=(b\sqrt{2}-g_b)-(a\sqrt{2}-g_a)<\frac{1}{14}$$

olur ki, neticede

$$0<(b-a)\sqrt{2}-(g_b-g_a)<\frac{1}{14}$$

elde edilir, a, b sayıları 0, 1, ..., 13 sayılarından ikisi olduklarından, $b-a$ da, işaretten sarfınazar, bu sayılardan birine eşittir. Yani $-13 \leq b-a \leq 13$ olup, bu suretle $(b-a)\sqrt{2}$, veya bu negatif olduğu takdirde $(a-b)\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ nin bundan sonra $n\sqrt{2}$ ile göstereceğimiz öyle bir katı olmuş olur ki, kendisinden küçük veya büyük tam sayılar içinde kendisine en yakın tam sayıdan 1/14 ten daha az farketsin. Bu tam sayıya m dersek,

$$-\frac{1}{14} < n\sqrt{2} - m < \frac{1}{14}$$

olur ki, burada $n \leq 13$ tür. Böylece, bunu n ile bölerek

$$-\frac{1}{14\,n} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{14\,n}$$

elde ederiz.

Umumî olarak, $\sqrt{2}$ yerine w, 13 yerine N, 14 yerine $N+1$ alırsak tıpkı aynı şekilde uygun bir $n \leq N$ için

$$-\frac{1}{(N+1)\,n} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{(N+1)\,n} \tag{5}$$

eşitsizliklerini gerçekleyen bir m/n kesrinin mevcut olduğunu ispat edebiliriz. Bu suretle Teorem 2 nin birinci kısmının ispatı tamamlanmış oldu.

$n \leq N$ olduğu için (5) ten,

$$-\frac{1}{n^2} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

çifte eşitsizliğinin daha kuvvetle cari olacağı neticesi çıkar.

Şu halde w den $1/n^2$ den daha az fark eden m/n kesirleri bulmuş olduk. (6) formülünde artık her ne kadar N sayısı bulunmamakta ise de bu sayı m/n kesirlerini bulmak için kullanılmıştır (hakikaten n paydası $n \leq N$ şartına uymakta idi).

Yukarıki nümerik misâlde N, 5, 6, 7, ..., 11 sayılarından herhangi biri olduğu müddetçe n, 5 değerini haizdi, yani

$$0 < 5\sqrt{2} - 7 < \frac{1}{5}, \quad 0 < \sqrt{2} - \frac{7}{5} < \frac{1}{5^2}$$

idi. N, 12 değerine varır varmaz, $n = 12$ olur :

$$0 < 17 - 12\sqrt{2} < \frac{1}{12}, \quad 0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < \frac{1}{12^2}, \text{ ilâh...}$$

Şimdi Teorem 2 nin 2. kısmının iddiası, her irrasyonel w sayısına karşılık (6) da ifade edilen özeliği haiz hattâ sonsuz sayıda m/n kesrinin bulunabileceğidir. Bunu ispat etmek için, (6) yı gerçekleyen her m/n kesrine karşılık, aynı özeliği haiz, fakat w ye daha yakın diğer bir m'/n' kesrinin bulunabileceğini göstermek kâfidir. $w - \frac{m}{n}$, sıfıra eşit olamıyacağından (çünkü w irrasyoneldir, yani *her* kesirden farklıdır), bu fark 0 dan belirli bir miktar kadar ayrılacaktır. Şu halde yeter derecede büyük paydalı öyle bir $1/N'$ kesri mevcuttur ki, sıfıra $w - \frac{m}{n}$ den daha yakın olsun, yani $w - \frac{m}{n}$ pozitif veya negatif olduğuna göre

$$(7) \qquad 0 < \frac{1}{N'} < w - \frac{m}{n} \qquad \text{veya} \qquad 0 < \frac{1}{N'} < \frac{m}{n} - w$$

bulunsun. Yukarıda ispat edilenlere göre, (şimdiye kadarki N sayısı yerine gelmiş olan) bu N' sayısına karşılık öyle bir m'/n' kesri bulabiliriz ki, (5) e göre $n' \leqq N'$ ve

$$(8) \qquad -\frac{1}{(N'+1)\,n'} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{(N'+1)\,n'}$$

şartlarını gerçeklesin ve neticede daha kuvvetle

$$-\frac{1}{n'^2} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{n'^2}$$

olsun. Burada m'/n' hiç şüphesiz m/n den farklıdır, çünkü (8) e göre muhakkak

$$-\frac{1}{N'+1} < w - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{N'+1}$$

dir, yani $w - \frac{m'}{n'}$ nün sıfırdan farkı, $\frac{1}{N'+1}$ den *daha az*dır, halbuki (7) ye göre $w - (m/n)$ nin sıfırdan farkı $1/N'$ den *daha çok*tur. Şu halde m'/n', w ye m/n den daha yakındır; bu suretle m/n ile m'/n' birbirinden farklıdır.

3. Şu halde (6) özeliğini haiz m/n kesirleri arasında *hiçbir sonuncu kesir* bulunmaz; daha ziyade, böyle her kesre karşılık başka bir kesir daha, yani neticede sonsuz miktarda kesir bulunabilir k[1], bu da Teorem 2 nin 2. kısmının iddiasından ibaretti. Trivial olan Teorem 1 de paydalar her değeri alabildiği halde, Teorem 2 deki (6) özeliğini ancak bazı paydalar haiz olabilmektedir. Bu paydalara «iyi paydalar» diyeceğiz. $\sqrt{2}$ halinde rastladığımız iyi paydalar 2, 5, 12 olup, hesaba devam edildiği takdirde bu halin diğer iyi paydaları olarak sırasıyla 29, 70, 169, ... sayılarını buluruz.

π halinde 7 iyi bir paydadır, hattâ Teorem 2 nin garanti ettiğinden de çok daha iyi bir payda. Çünkü $\frac{22}{7} - \pi$ yalnız $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ dan küçük olmakla kalmaz, hattâ $\frac{1}{497}$ den de küçüktür. Burada şu problem ortaya çıkıyor: acaba her w sayısına karşılık Teorem 2 dekinden de daha iyi, meselâ

$$-\frac{1}{n^3} < w - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}$$

gibi eşitsizlikleri gerçekleyen, paydalar mevcut mudur?

Şimdi göstereceğiz ki, 2. Teoremin bu türlü bir keskinleştirilmesi her w sayısı için mümkün olamaz. Daha açık olarak, özellikle $w = \sqrt{2}$ için şu iddiayı ispat edeceğiz: *m/n kesri nasıl seçilirse seçilsin, kendisinin $\sqrt{2}$ den farkının mutlak değeri daima $1/3\,n^2$ den büyüktür.*

Evvelâ $\frac{m}{n} > \sqrt{2}$ olsun. Bu takdirde $\frac{m}{n} < 1{,}55$ alabiliriz. Çünkü $\sqrt{2} < 1{,}45$ olduğundan, 1,55 ten büyük veya ona eşit her m/n kesri $\sqrt{2}$ den 1/10 dan daha çok farkeder, $1/3n^2$ ise daha $n = 2$ den itibaren 1/10 dan küçük olup, iddiamız $m/n \geq 1{,}55$ için muhakkak doğru olur. Fakat şimdi m/n i $\sqrt{2}$ ile 1,55 arasında alırsak, g uygun bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 = \frac{m^2 - 2n^2}{n^2} = \frac{g}{n^2}$$

olur. Buradan da her halükârda

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 \geq \frac{1}{n^2}$$

elde edilir. Bu sonuncu münasebetten $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ formülüne göre

$$\left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right) \geq \frac{1}{n^2}$$

ve buradan da

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}}$$

elde edilir. Şimdi $\frac{m}{n} < 1{,}55$ ise, $\frac{m}{n} + \sqrt{2} > 1{,}55 + 1{,}45 = 3$ ve neticede

$$\frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}} > \frac{1}{3}$$

bulunarak, en sonunda iddiayı gerçekleyen

$$\frac{m}{n} - \sqrt{2} > \frac{1}{3n^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi ikinci hal olarak $0 < \frac{m}{n} < \sqrt{2}$ olsun. Bu takdirde

$$2 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 \geqq \frac{g}{n^2} \geqq \frac{1}{n^2}$$

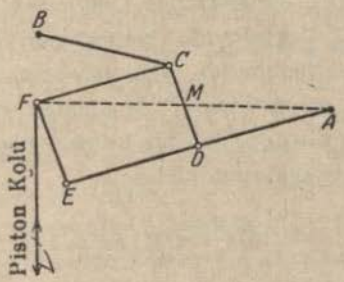
den hareket etmek suretiyle şu neticeleri çıkarabiliriz :

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} \geqq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\frac{m}{n} + \sqrt{2}} > \frac{1}{n^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3n^2}.$$

Bu suretle iddiamız her iki halde de ispat edilmiş oldu.

16. Mafsallı mekanizmalar vasıtasıyla doğrusal hareket tevlidi

1. James Watt'ın buhar makinasında, şeması Şek. 64 te verilen, Watt paralelogramı adında bir yardımcı mekanizma mev-



Şek. 64

cuttu. Bu âlet C, D, E, F mafsallarında birbirine bağlanmış olan bir takım çubuklardan ibarettir. Çubuklar A ve B noktaları etrafında dönebilecek şekilde tespit edilmiştir. Bütün mafsallar şe-

kil düzlemine dik eksenleri haizdir. (1) F noktasını piston kolu kavrar. Âletin maksadı, pistonun silindir içinde gevşeme veya sıkışmasına mani olmak için gerekli olan, piston kolunun F ucuna *doğrusal bir hareket vermektir.* İşin matematik tetkiki sonunda, F noktasının Watt paralelogramının mafsallı mekanizması vasıtasıyla tam olarak bir doğru üzerinde hareket etmediği kolayca anlaşılır. Fakat, bu harekete belirli bir dar bölge içinde yaklaşık olarak doğrusal gözüyle bakılabilir, şu halde bu mekanizma teknik bakımından pistonun doğrusal hareketini bir dereceye kadar gerçekleştirmiş sayılır.

Bu mekanizmaya adını vermiş olan $CDEF$ paralelkenarı aslında onun en önemli kısmı değildir; bu paralelkenar sadece, hareketin doğruya yakın olmak bakımından işe yarar parçasını büyütmeye yarar. Âletin en önemli kısmı, daha ziyade, $ADCB$ çubuk sistemidir. DC çubuğunun M orta noktası çok fazla olmayan uzaklıklar için aşağı yukarı doğrusal olan bir hareket yapar.

$$AD = DE = CF = BC \qquad \text{ve} \qquad DC = EF$$

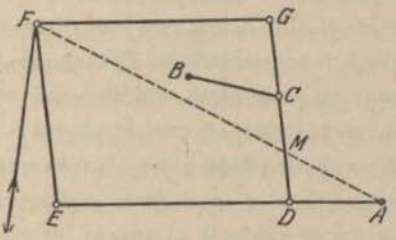
olduğu takdirde (AE çubuğu D de bükülemez!) A, M, F noktaları ADM ve AEF üçgenlerinin benzerlikleri dolayısıyla daima bir doğru üzerinde bulunurlar. Aynı sebepten AF de AM nin iki kat uzunluğunda olduğundan, F, M ninkine «benzer» fakat ölçüleri onunkinin iki katı olan bir hareket yapar — tıpkı bunun gibi, $DEFG$ paralelkenarının ölçülerini

$$AD : AE = DM : EF = 1 : k$$

olacak şekilde seçmek suretiyle M nin hareketini k defa büyütebilirdik. Burada da $AD = BC$ olup, bunun neticesinde CD nin

(1) Mafsallı mekanizmalarının şemasında, mevkii sabit dönme noktaları dolu, hareket edebilir mafsallar içi boş küçük dairelerle gösterilmiştir. Kesik çizgiler akılda düşünülen yardımcı çizgiler olup, hiçbir çubuğa delâlet etmezler.

M orta noktasına yaklaşık olarak doğrusal olan bir hareket verilmiş olurdu (Şek. 65).



Şek. 65

Şu halde Watt paralelogramı vasıtasıyla doğrusal hareket elde edilip edilmediğinin münakaşasında bahis konusu olan şey, M noktasının yaptığı hareketin araştırılmasından ibarettir. Bu hareketin tamamen doğrusal olamıyacağı çubuk sisteminin bazı aşırı durumları tetkik edilerek görülebilir. Bununla beraber bu karışık hareketi buradaki maksatlarımız için önemsiz olması sebebiyle daha fazla incelemiyeceğiz.

2. Doğrusal hareket tevlidi problemi makina mühendisliği tarihinde büyük bir ehemmiyeti haiz olmuş ve bu yüzden birçok kimseler bu problemle uğraşmışlardır. Bugün için Watt'ın çözümü artık önemli değildir. Meselâ bir lokomotifin dışardan görünen kol tertibatına bakarak anlaşılacağı gibi, bugün doğrusal hareketin başka bir tarzda — iki paralel ray arasında hareket ettirilen bir «kroshed» (1) vasıtasıyla — tevlidi tercih edilmektedir. Eski makina mühendislerinin kroshedi reddederek onun yerine mafsallı mekanizmalar vasıtasıyla doğrusal hareket tevlidini düşünmelerine sebep, herhalde sürtünme hakkında o zamanki yanlış düşünceler olsa gerektir.

Doğrusal hareket problemi ile sadece pratikle meşgul kimseler uğraşmakla kalmamış, bu problem sırfî matematikçileri de

(1) Crosshead : Piston ve krank kollarının mafsalı.

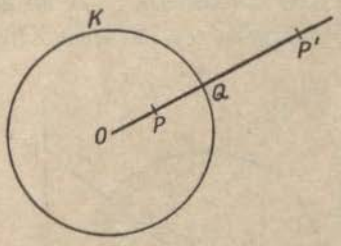
kendine çekmiştir. Tabiatiyle bu sonuncular problemi bütün kesinliği ile vaz'etmişlerdir: Öyle bir mafsallı mekanizma bulunmak isteniyor ki, bu mekanizmadaki mafsallardan biri *teori bakımından tam manasiyle* bir doğru üzerinde hareket etsin. Herkesten çok, büyük Rus matematikçisi *Tschebyscheff* (1821 — 1894) Watt paralelogramı ve onun islâh edilmiş şekilleri üzerinde çalışmış, fakat tam manasıyla doğrusal bir hareket tevlid eden bir mekanizma bulamamıştır. Boşa giden birçok çözüm denemelerinden sonra, geçen yüzyılın ortalarında matematikçiler arasında bu problemin tam (yani yaklaşık olmayan) bir çözümünün mümkün olduğundan bile şüphe edilmeye başlanmıştır.

Buna rağmen 1864 yılında Fransız generali *Peaucellier* doğrusal hareket tevlid ettiği gibi başka daha birçok işlerde gören bir âlet icadetti. Bu âletin adına «inverseur» (enversör) denilmiştir. Bundan sonra, keşifler tarihinde sık sık vukubulduğu gibi, problemin daha bir sürü çözümü bulunmuştur. Hattâ sonraları doğru çizgi, mafsallı mekanizmalar tarafından tevlid edilebilen geniş bir eğrisel hareketler sınıfı içinde bir özel hâl olarak kalmıştır.

3. Evvelâ Peaucellier'nin mafsallı mekanizmasını gözden geçirelim. Bu mekanizmaya enversör denilmesinin sebebi, onun bir «inversion» (akis) transformasyonuna vâsıta olmasıdır. Bir akis transformasyonu, biraz sonra daha da açıklanacak olan, düzlemin kendi üzerine özel bir tasviridir. Burada tasvirden maksat, düzlemin her noktasına resim noktası (yahut sadece resim) adı verilen diğer bir noktayı tekabül ettirmekten ibarettir. Bazı basit tasvir örnekleri şunlardır: 1. Bir doğruya göre yansıma (bu tasvir 6. ve 7. Bölümlerde birçok kereler tekrar edilmiştir); Öteleme, ki bu tasvir vasıtasıyla her noktaya kendisini belirli bir yönde belirli bir uzunluk kadar kaydırmak suretiyle elde edilen nokta tekabül ettirilir; 3. Düzlemdeki bir nokta etrafında ve verilen bir açı kadar dönme; 4. Düzlemin, bir noktasından (genişleme merkezi) hareket etmek suretiyle genişlemesi, ki bu tasvirde her

noktaya kendisini genişleme merkezine birleştiren ışın üzerinde ve, λ genişlemeyi karakterize eden bir sabit olmak üzere, merkeze olan uzaklığı o noktanın uzaklığının $1:\lambda$ oranında olan nokta tekabül ettirilir. Bir tasvirde resim noktasının, kendisinin resmi bulunduğu noktadan mutlaka farklı olması icabetmez. Bununla beraber, öteleme tasvirinde her noktanın resmi kendisinden farklıdır. Dönme ve genişlemede ise merkez noktalarının resimleri gene kendileridir. Yansımada ise kendisine göre yansımanın yapıldığı doğrunun her noktasının resmi gene kendisidir.

Yukarıki örnekler tasvir kavramını açıklamaya yeter. Şimdi akis'e gelelim. Bir akis transformasyonu aşağı tarzda bir tasvir olarak karakterize edilebilir : Akis merkezi denilen O merkezli bir daire verilmiş olsun (Şek. 66). O dan farklı herhangi bir P



Şek. 66

noktasının P' resmini bulmak için OP ışını çizilerek daireyi kesinceye kadar uzatılır. OP nın daireyi kestiği nokta Q olsun. Bu takdirde P' noktası OP ışını üzerinde bulunmak ve

$$OP:OQ=OQ:OP'$$

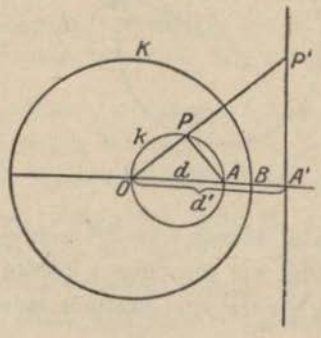
orantısına uymak şartları ile belirlenir. Verilen dairenin yarı çapına a ve $OP=r$, $OP'=r'$ dersek yukarıki münasebet

$$r\cdot r'=a^2$$

şeklinde de yazılabilir. Akis'in bu tarifinden, akis dairesinin

içinde bulunan her noktanın resminin bu dairenin dışında, aynı dairenin dışında bulunan her noktanın resminin bu dairenin içinde olduğu, daire üzerinde bulunan her noktanın resminin ise gene kendisinden ibaret bulunduğu derhal görülür. Bu sonuncu özelikten dolayı akise «daire üzerinde yansıma» adı da verilir. Akis, resmin resminin daima ilk başlangıçtaki nokta olması önemli özeliğini de âdi yansıma ile paylaşır.

4. Bir akis vasıtasıyla noktaların teker teker tasviri hakkında akis'in tarifi ile aslında herşey söylenmiş oldu. Eğrilerin tasviri ele alınınca yeni sorular ortaya çıkar. Bu problemlerin etraflı bir tetkikine burada girişemeyiz. Bu tetkik sonunda elde edilen en önemli sonuç, akis'in doğru ve daireleri doğru *veya* dairelere çevirdiğidir. Aşağıda bu neticenin yalnız şu kısmına ihtiyaç duyacağız : *Akis merkezinden geçen bir dairenin resmi bir doğrudur.* Şimdi bu sonuncu teoremi ispat ediyoruz :



Şek. 67

k, O akis merkezinden geçen ve $OA = d$ çaplı bir daire olsun ; K, a yarıçaplı akis dairesi olsun (Şek. 67). A noktasının A' resmi OA çapının uzatılmış kısmı üzerinde ve O dan $dd' = a^2$ şartına uyan $OA' = d'$ uzaklığında bulunan noktadır. Şimdi OA' ye A' noktasında çıkılan dik doğrunun k dairesinin resmi olduğu

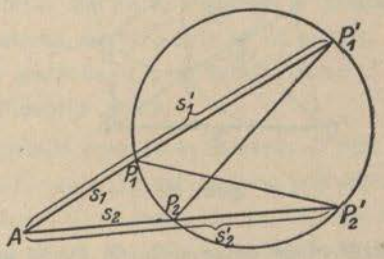
ispat edilecektir. Bunun için O dan çıkan herhangi bir doğrunun daireyi kestiği nokta P ve yukarıda tarif edilen doğruyu kestiği nokta P' olduğuna göre, $OP \cdot OP' = a^2$ olduğu ispat edilmelidir. Hakikaten AP yardımcı doğrusunu çizersek, O da ortak bir açıyı haiz olan OAP ve $OP'A'$ dik üçgenleri birbirine benzer üçgenler olurlar. Bunun neticesinde

$$OP : OA = OA' : OP'$$

orantısı, yahut $OP = r$, $OP' = r'$ dersek,

$$rr' = dd'$$

eşitliği cari olur. Halbuki $dd' = a^2$ olduğundan, $rr' = a^2$ bulunur ki, bu da bir nokta ile onun bir akis transformasyonundaki resmi arasında bulunması lâzım gelen münasebetin ta kendisidir.

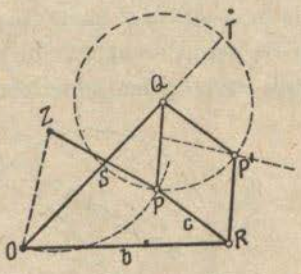


Şek. 68

Bundan sonra anlatacaklarımız için hemen burada elemanter geometrinin tanınmış bir teoremini hatırlatalım (Şek. 68): Bir noktadan bir daireyi kesmek üzere bir takım doğrular çizersek, bu doğruların o nokta ile daireyi kestiği noktalar arasında kalan parçalarının çarpımı bütün böyle doğrular için aynıdır. Şu halde $AP_1 = s_1$, $AP_1' = s_1'$, $AP_2 = s_2$, $AP_2' = s_2'$ olduğu takdirde bu teoremin ifadesi $s_1 s_1' = s_2 s_2'$ den ibarettir. Bu münasebetin ispatı, A noktasında ortak bir açıyı haiz olan ve P_1' ve

P_2' noktalarındaki açıları, aynı P_1P_2 yayını gören kenar açıları olmaları dolayısı ile, eşit bulunan AP_1P_2' vo AP_2P_1' üçgenlerinin benzer oluşundan derhal elde edilir.

5. Bu ön ihtarlardan sonra artık Peaucellier enversörüne dönelim (Şek. 69). Bu enversör kenar uzunluğu c olan bir $PQP'R$ mafsallı eşkenar dörtgeni ile bu dörtgenin karşılıklı Q ve R köşelerinde maine mafsallı olarak tutturulmuş birbirine eşit b uzunluğunda iki çubuktan ibarettir. Bu çubuklar sabit bir O noktasında birbirine bağlanmış olup, bu nokta etrafında serbestçe dönebilmektedirler. Daima $b > c$ dir. Şu halde bahis konusu mekanizma 6 tane OQ, OR, PQ, PR, $P'Q$, $P'R$ çubuğundan ibarettir.



Şek. 69

Âletin simetrik oluşu dolayısıyle O, P, P' noktaları daima, âletin simetri eksenini teşkil eden, bir doğru üzerinde bulunur. Şimdi Q etrafında, P ve P' den geçen, c yarıçaplı daireyi çizelim. OQ çubuğu ile onun uzatılmış kısmı bu daireyi sırasıyla S ve T noktalarında kessinler. Bu takdirde OPP' ve OST bu dairenin kendilerine yukarıda bahsedilmiş olan elemanter geometri teoreminin tatbik edilebileceği iki keseni olurlar. Teoremin tatbiki burada

$$OP \cdot OP' = OS \cdot OT = (b-c)(b+c) = b^2 - c^2$$

neticesini verir. Şu halde $OP \cdot OP'$ çarpımı sabittir. $a^2 = b^2 - c^2$

vaz'edildiği takdirde, a, hipotenüsü b ve diğer dik kenarı c olan bir dik üçgenin bir dik kenarını teşkil eder. Bu takdirde $OP \cdot OP' = a^2$ eşitliği, P' noktasının P noktasından O merkezli ve a yarıçaplı daireye göre yapılan bir akis (enversiyon) transformasyonu ile elde edildiğini gösterir.

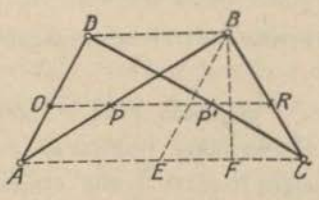
Bu suretle «enversör» adının nereden geldiği anlaşılmış oluyor.

Şu halde bu âlet, düzlemin P ve P' noktaları tarafından erişilebilen kısmında bir akis transformasyonu gerçekleştirir. Şimdi bu âleti bir doğru hareket tevlid etmek için kullanmak istersek, P yi O dan geçen bir daire üzerinde harekete mecbur etmek kâfidir. Çünkü *bu takdirde P' noktası yukarıda öğrendiklerimize göre bir doğrusal hareket yapar.* P ye böyle bir dairesel hareket verilmesi ise, mafsallı bir mekanizmada trivial olarak gerçekleştirilebilir. Bunun için sadece, P noktasında yeni bir ZP çubuğu ilâve etmek kâfidir, öyle ki bu çubuk P de âletin geri kalan kısmına mafsallanmış ve sabit tutulan Z noktası etrafında da serbestçe dönebilir olsun.

P nin üzerinde dolaşacağı dairenin O dan geçebilmesi için, ZP uzunluğunu sabit OZ uzunluğuna eşit almalıdır. PZ yi yedinci çubuk olarak ilâve etmek ve bu çubuğu Z de tespit etmek suretiyle, P ye ancak (kendisi veya icabında uzatılmışı) O dan geçen bir daire yayı çizmek serbestîsi bırakılır ki, bu esnada P' bir doğru üzerinde hareket eder (Bu doğru üstelik OZ ye diktir. Şek. 69 a bakınız).

6. Sonradan daha başka enversörler de icadedilmiştir, ki tabiatıyla bunlar da tıpkı Peaucellier'ninki gibi doğrusal hareket tevlidi problemini çözmeye yararlar. *Hart* enversörü (Şek. 70). Peaucellier enversöründeki 6 çubuk yerine sadece 4 çubuktan teşekkül eder. Hart enversörü bir «antiparalelkenar» dır, yani karşılıklı kenarları birbirine eşit bir mafsallı dikdörtgen olup, bir paralelkenarın köşegenlerinden biri üzerinde katlanması ile

elde edilebilir (1). Şimdi herbir çubuk üzerinde bir tane olmak üzere O, P, P', R noktalarını işaretleyelim, öyle ki antiparalelkenarın *bir* durumunda onun AC ve BD «köşegenler» ine paralel bir doğru üzerinde bulunsunlar (2).



Şek. 70

Bu takdirde, *bu noktalar antiparalelkenarın her durumunda köşegenlere paralel bir doğru üzerinde kalırlar.*

Çünkü OP ve DB nin paralel oluşundan

$$AO : OD = AP : PB \tag{1}$$

elde edilir. Bunun gibi

$$AO : OD = CP' : P'D \tag{2}$$

$$AP : PB = CR : RB \tag{3}$$

$$CR : RB = CP' : P'D \tag{4}$$

dir. Bu oranların içine yalnız uzunluklar girdiğinden, bunlar mafsallı dikdörtgenin herhangi bir hareketi sonunda aynı kalırlar.

---

(1) Bir paralelkenar kendi düzlemi içinde bir hareketle bir antiparalelkenar şekline sokulabilir. Paralelkenardan antiparalelkenara geçişte aradaki sınır durumu ABC ve ADC üçgenlerinin birbiri ile çakışan birer doğru haline geldikleri durumdur.

(2) Antiparalelkenarın AC ve BD köşegenleri daima birbirine paraleldir, çünkü ACB ve ACD simetrik üçgenleri eşit olduklarından AC ye ait yükseklikleri de birbirine eşittir.

Bu takdirde (1) den gene $OP \parallel DB$ elde edilir. (2) ye göre $OP' \parallel AC$ olup, bu da $AC \parallel BD$ dolayısı ile $OP' \parallel DB$ verir. OP ve OP' aynı DB doğrusuna paralel olduklarından, neticede O, P ve P' noktalarının *aynı bir* doğru, yani O dan DB ye çizilen paralel, üzerinde bulunmaları icabeder. Buna benzer bir muhakeme ile R, P', P nin de R den DB ye çizilen paralel doğru üzerinde bulundukları ispat edilir. Şu halde sonunda O, P, P', R noktalarının daima DB ye paralel bir doğru üzerinde bulundukları neticesini elde etmiş olduk.

Bundan başka, gene üç doğrunun paralelliği sebebiyle

$$OP : DB = AO : AD$$
$$OP' : AC = DO : DA$$

dır. Bu orantılar yerine

$$OP \cdot AD = AO \cdot DB$$
$$OP' \cdot DA = DO \cdot AC$$

de yazılabilir. Bu denklemleri taraf tarafa çarpıp AD^2 ile bölerek

$$(5) \qquad OP \cdot OP' = \frac{AO \cdot DO}{AD^2} \cdot AC \cdot DB$$

buluruz. Sağ taraftaki AO, DO, AD uzunlukları sabit olup, âlet tarafından belirlenir. Buna karşılık AC ve DB köşegen uzunlukları açıkça antiparalelkenarın durumuna bağlıdır. *Buna rağmen* $AC \cdot DB$ *çarpımı sabit kalır.* Çünkü, üzerinde DA ya bir BE paraleli ve AC ye BF diki çizilmiş olan, şekilden derhal

$$(6) \qquad AC \cdot BD = (AF + FC)(AF - FC) = AF^2 - FC^2$$

elde edilir. AFB ve FCB dik üçgenlerine Pitagor teoreminin tatbiki ise

$$AF^2 + FB^2 = AB^2$$

$$FC^2 + FB^2 = CB^2$$

verir ki, bnnları taraf tarafa çıkararak

$$AF^2 - FC^2 = AB^2 - CB^2$$

elde edilir. Bunu da (6) da yerine koyarak

$$AC \cdot BD = AB^2 - CB^2 \tag{7}$$

buluruz. Bu eşitliğin sağ tarafı hakikaten sabittir. Şimdi (7) ve (5) ten

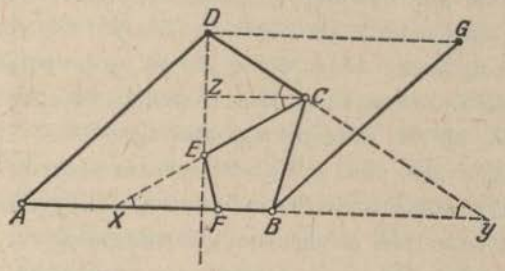
$$OP \cdot OP' = \frac{AO \cdot DO}{AD^2}(AB^2 - CB^2) \tag{8}$$

çıkar ki, bunun sağ tarafında *sabit*, yani yalnız âletin ölçülerine bağlı bir ifade bulunmaktadır. Şimdi O noktası sabit tutularak antiparalelkenara kendi düzlemi içinde keyfî bir hareket verilirse, (8) münasebeti zaten O ile aynı doğru üzerinde olan P ve P' noktalarının birbirine bir akis transformasyonu ile bağlı olduklarını gösterir. Burada akis dairesinin yarıçapının karesi (8) in sağ tarafındaki biraz karışık, fakat elemanter geometri usûlleriyle inşa edilebilen, ifade ile verilir.

Böylece, Hart enversörünün bir akis transformasyonu yaptığı ispat edilmiş oldu. Nihayet, P noktasına âlete eklenen bir beşinci çubuk vasıtasıyla O dan geçen bir daire yayı çizdirirsek, P' bir doğru parçası çizer.

7. Bugün, bir doğrusal hareket tevlit etmek için ilk önce bir akisten geçmeye lûzum bırakmayan mafsallı mekanizmalar da mevcuttur. Bunların en incelikli bir tanesi *Kempe*'nin çift-romboidi'dir (Şek. 71). Romboit diye kenarları ikişer ikişer eşit olan bir dörtgen kastedilmekte olup, eşit kenarlar karşılıklı olmayıp, birbirine bitişiktir. Bir romboitte daima birbirine eşit iki

açı mevcut olup, bunlar birbirine eşit olmayan kenarlar tarafından teşkil edilir. Şimdi *ABCD* ve *BCEF*, eşit olmayan kenarlarının oranları birbirinin aynı bulunan ve büyüğünün küçük kenarları, küçüğünün büyük kenarlarına eşit olan iki mafsallı



Şek. 71

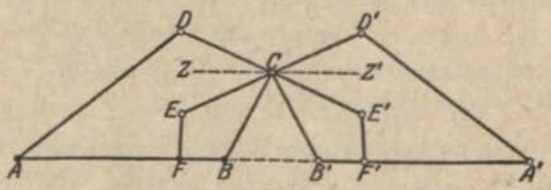
romboit olsunlar. Bu mafsallı romboitler *konveks* durumlarında alınacaklardır. Bunların birbirine eşit kenarları *CD*, *CB*, *CE* olsun. Küçük romboidin *F* köşesi büyük romboidin bir kenarı üzerinde bulunduğundan, *B* deki açı her iki romboitte ortaktır. Şu halde *D*, *E* ve *B* deki açılar birbirine eşittir. Kenar oranları aynı ve birer açıları eşit iki konveks dörtgen ise birbirine *benzer*dir. Şu halde her iki romboitten meydana gelen mafsallı mekanizmanın herhangi bir hareketi esnasında *ABCD* ve *BCEF* romboitleri daima birbirine *benzer* kalırlar.

Romboidin iki karşılıklı kenarı kesişinceye kadar uzatılırsa, bunlar kesişme noktasında bir açı teşkil ederler. Yukarıki benzer romboitlere ait *EXF* ve *CYB* açıları birbirine eşittir. *C* noktasından *AB* ye *CZ* paraleli çizilirse, yöndeş açılar olarak $\sphericalangle DCZ = \sphericalangle CYB$ ve ters açılar olarak $\sphericalangle ZCE = \sphericalangle EXF$ dir. Neticede şekilde işaretlenmiş 4 açı birbirine eşittir. Şu halde *CZ*, faraziyeye göre ikizkenar olan *CDE* üçgeninin açı ortayını teşkil eder ki, bu da ikizkenar üçgenin *DE* tabanına dik olmak

zorundadır. Çizime göre $CZ \parallel AB$ olduğundan DE doğrusu, daima AB ye diktir.

Şimdi D yi sabit tutar ve AB yi kendisine paralel kalacak şekilde hareket ettirirsek, D den AB ye indirilen dik te sabit kalır. Fakat bu dik üzerinde E noktası bulunduğundan, yukarıki hareket esnasında E için ancak bu dik üzerinde *doğrusal bir hareket* yapmak imkânı kalır. Şimdi AB ye bu iş için lâzım olan paralel hareketi vermek üzere, âlete B noktasında $AB=AD=BG$ olacak şekilde bir BG ilâve çubuğu mafsallıyalım. G noktası da D gibi ve $DG=AB$, yani $ABGD$ bir eşkenar dörtgen olacak şekilde tespit edilsin. Bir eşkenar dörtgende iki karşılıklı kenar daima birbirine paralel olduğundan, AB mekanizmanın her durumunda DG sabit doğrusuna paralel kalır ve böylelikle doğrusal hareket tevlidi nihayet sağlanmış olur.

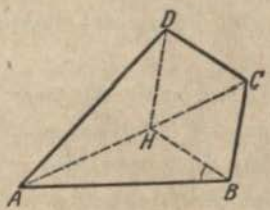
8. Kempe'nin çiftromboid'inden doğrusal hareket tevlidi hususunda ikinci ve çok güzel bir şekilde daha istifade edilebilir. Bunun için iki tane birbirine eşit $ABCDEF$ ve $A'B'CD'E'F'$ çiftromboidi alalım. Bu ikisini birbirine öyle bağlıyalım ki, C noktası müşterek olsun ve gerek DCE', gerek $D'CE$ tek birer çubuk teşkil etsin (Şek. 72). Yukarıda ispat edilenlere göre



Şek. 72

$\sphericalangle D'CE'$ nün CZ' açıortayı $A'B'$ ye paraleldir. $\sphericalangle DCE$ ve $\sphericalangle D'CE'$ ters açılar olarak teşkil edildiklerinden, her iki CZ ve CZ' açı ortayları tek bir doğru teşkil ederler. AB ve $A'B'$ bu doğruya paraleldir. Neticede AB ve $A'B'$, mafsallı mekanizma-

nın her durumunda birbirine paraleldir. Bundan başka $A'B'$ daima AB nin uzatılmış parçası üzerindedir. AB ve $A'B'$ nün paralelliğini ispat etmiş bulunduğumuzdan, bunun için C noktasının AB ve $A'B'$ den aynı uzaklıkta olduğunu ispat etmek yeter. Bunun için de, $ABCD$ ve $A'B'CD'$ romboidlerinin mekanizmanın her durumunda birbirine (simetrik olarak) eşit olduğunu ispat edeceğiz. Hakikaten, âletin her iki yarısındaki $\sphericalangle DCE$ ve $\sphericalangle D'CE'$ tepe açıları olarak birbirine eşittir. 7. ye göre ise, bu açılar bir romboidin iki karşılıklı kenarının teşkil ettiği açının iki katıdır. Romboidin kenarları da sabit olarak verilmiş olduğundan, romboit bu suretle tamamen belli olur. Bu husus aşağıki yardımcı çizimden anlaşılır : $ABCD$ romboidinin içine $BCDH$ eşkenar dörtgenini çizelim (Şek. 73). A, H, C noktaları simetri



Şek. 73

dolayısıyle bir doğru üzerinde bulunurlar (1) $HB \parallel DC$ olduğundan, $\sphericalangle ABH$ iki karşılıklı kenar arasındaki açı olup, $\sphericalangle DCE$ nin yarısı olarak belirlidir (Şek. 72). AB verilmiş, BH da gene verilmiş olan BC ye eşit olduğundan ABH üçgeni tamamen bellidir. Bu takdirde D, B nin AH ya göre simetriği ve C de, $BCDH$ eşkenar dörtgeninin dördüncü köşesi olup, bu dörtgenin üç B, H, D köşesi evvelden belli idi.

Şu halde, Şek. 72 deki âletin her iki yarısı, iddia edildiği gibi, birbirine eşit olup, neticede C nin AB den uzaklığı, ken-

(1) Bu şekil Peaucellier enversörünün şekli ile intibak eder.

disinin $A'B'$ den olan uzaklığına eşittir. Şu halde A, B, A', B' noktaları daima bir doğru üzerinde sağa sola hareket edebilir. Bu suretle mafsallı bir mekanizma vasıtasıyla yeni bir doğrusal hareket tevlit etmiş olduk.

Hattâ bu mafsallı mekanizmanın yukarda konuşulan mekanizmalara nazaran başka hizmetleri de vardır. Önceki mekanizmalar sadece birer noktaya doğrusal hareket verirler. En sonuncu mekanizma ise, bütün bir $A'B'$ doğru parçasını kendi üzerinde doğrusal olarak hareket ettirir. $A'B'$ doğru parçasına herhangi bir şekil hattâ bütün düzlem katı (rijid) olarak bağlanabileceğinden, bu halde şeklin bütün noktaları birbirine paralel ve eşit doğru parçaları çizerler.

17a. Mükemmel Sayılar

Öklid, *Elemanlar*'ının aritmetiğe hasredilmiş olan üç kitabının sonuncusu bulunan IX. kitabının sonunda önce, kitabımızın 1. Bölümünde anlatmış olduğumuz, asal sayıların sonsuz miktarda olduğunun ispatını verdikten sonra «mükemmel sayılar» konusunu ele almaktadır. «Mükemmel sayılar» terimi *Platon*'da da, bilhassa «Devlet» adlı eserindeki düğün sayısı denilen sayıya ait ve bugün bizim için güç anlaşılır evgenik hesapları ihtiva eden esrarengiz pasajında olmak üzere, birçok kereler geçmektedir.

Bugünkü Matematik çerçevesi içinde düşünüldüğü takdirde, bu teori ve ona daha sonraki matematikçilerin ilâve edebildikleri *teorem*ler, anayolların dışında mütevazi bir hayat süren bir merak konusundan başka birşey değildir. Buna rağmen bu konuyu burada ele almamızın sebebi, onun *metod* bakımından ufak bir kıvılcım ihtiva etmesidir ki, bu kıvılcım hemen bundan sonraki bölümde görüleceği gibi, Euler tarafından canlandırılmış ve o zamandanberi bugünkü matematikte parlayan en büyük alevlerden biri — Asal Sayıların Dağılımı bahsi — haline gelmiştir.

Öklide göre, kendisinin bütün bölenlerinin toplamına eşit olan bir sayıya mükemmeldir denir. Meselâ 6 bir mükemmel sayıdır, çünkü kolayca denenebileceği gibi 6 nin bütün bölenleri 1, 2, 3 olup, aşikâr olarak $1+2+3=6$ dır. Sayıları sırayla denemeye devam edersek, ikinci mükemmel sayı olarak $28=1+2+4+7+14$ e rastlarız. Bundan sonra kolay kolay bir mükemmel sayı bulamayız. Şimdi hedefimiz bütün mükemmel sayıları deneme suretiyle değil, fakat sistematik olarak bulmaktır.

1. Asal bir sayının hiçbir zaman mükemmel olamıyacağı aşikârdır. Çünkü bir p asal sayısının bütün bölenleri 1 ve p olup, mükemmel sayıların tarifinde sayının kendisi bölen olarak sayılmadığından bütün bölenlerin toplamı sadece 1 olarak daima p den küçük kalır.

2. Çok basit olan bu ilk neticeyi tespit ettikten sonra, şimdi ihtiyatla ilerliyeceğiz. Kendisi asal olmayan, fakat bir asal sayının karesi olan 9 sayısının bölenleri aşikâr olarak 1 ve 3 ten ibarettir (1 den 8 e kadarki sayıların 9 u bölüp bölmediğine bakmak yeter). $1+3=4$ toplamı 9 dan daha az olduğundan, 9 bir mükemmel sayı olamaz.

Buna uygun şekilde, p^2 gibi *herhangi bir* asal sayı karesinin de 1 ve p bölenlerini haiz olduğu aşikârdır. Fakat bu ikisi ile p^2 nin bütün bölenlerinin tüketildiği, *bütün* p ler için 9 halindeki deneme metodu ile teyit edilemez, bunun için bir *ispata* ihtiyaç vardır. Öklid bunu tamamen farketmiş ve bunun için lûzumlu olan yardımcı teoremleri hazırlamıştır. Biz de bunu, 11. Bölümde görmüş olduğumuz asal çarpanlara ayrılışın tekliği teoremini kullanarak, aslında tıpkı Öklid'deki gibi, fakat biraz başka türlü formüle edilmiş bir ispatını vereceğiz. Hakikaten p^2 nin p den başka bir çarpanı bulunsaydı, kendisi aşikâr olan $p^2=p\cdot p$ şeklindeki asal çarpanlara ayrılıştan başka türlü, yani diğer bazı asal çarpanları ihtiva eden, bir asal çarpanlara ayrılışı haiz olurdu.

3. Daha umumî olarak, daha yüksek bir asal sayı kuvveti de mükemmel olamaz. Çünkü yukarıkine benzer şekilde p^α nın bütün bölenleri, p nin daha küçük kuvvetleri olan

$$(1) \qquad 1, \quad p, \quad p^2, \cdots, \quad p^{\alpha-1}$$

den ibaret olup, bunların toplamı, Öklid'in sırf bu vesileyle çıkarttığı, geometrik serinin toplam formülüne göre

$$(1a) \qquad 1+p+p^2+\cdots+p^{\alpha-1}=\frac{p^\alpha-1}{p-1}$$

olarak bulunur. Buradaki $p-1$ paydası en küçük değer olarak $p=2$ için 1 değerini alır ve daha büyük her p için 1 den büyük değer alır. Şu halde $p^\alpha-1$ in $p-1$ de biri $p^\alpha-1$'e eşit veya ondan küçük olup, hiçbir zaman $p^\alpha-1$'i geçemez. Şu halde p^α nın bütün bölenlerinin toplamı en çok $p^\alpha-1$ olup, muhakkak surette p^α dan küçüktür. Şu halde p^α mükemmel bir sayı olamaz.

4. Bu ön tecrübeden sonra, $72=2^3\cdot3^2$ yahut daha umumî olarak p^3q^2 gibi iki farklı asal çarpandan teşekkül eden bir sayının mükemmel olup olmadığını anlamak artık zor değildir. Evvelâ aşağıdaki sayıların hepsinin p^3q^2 yi böldüğü hemen görülür:

$$(2) \qquad \begin{array}{cccc} 1, & p, & p^2, & p^3, \\ q, & qp, & qp^2, & qp^3, \\ q^2, & q^2p, & q^2p^2, & q^2p^3, \end{array}$$

Bunlar, α, 0 dan 3 e ve β, 0 dan 2 ye kadarki bütün tam değerleri almak üzere, $p^\alpha q^\beta$ şeklindeki sayılardan ibarettir. Bu sayılardan p^3q^2 nin *bütün* bölenlerini tükettiği hususu, gene asal çarpanlara ayrılışın tekliği teoreminden hemen elde edilir. Bu suretle verilen $N=p^3q^2$ sayısının bütün bölenleri hakkında bilgi edinmiş olduk. Bu bölenlerin toplamını bulmak için, (2) cedvelinin 2. satırında 1. satırdakilerin q^2 katı, 3. satırında ise q^2 katı bulunduğuna dikkat edelim. 1. satırdaki bölenlerin toplamı

ise $1+p+p^2+p^3$ geometrik serisidir. Şu halde bu toplamı evvelâ 1 kere, sonra q kere, daha sonra q^2 kere almalıdır; yani hepsi birden alınınca bölenlerin toplamı

$$T=(1+q+q^2)(1+p+p^2+p^3)$$

olur ve buna benzer şekilde bir $N=p^aq^b$ sayısının bölenler toplamı için

$$T=(1+q+\cdots+q^b)(1+p+p^2+\cdots+p^a)$$

(2a)
$$=\frac{q^{a+1}-1}{q-1}\cdot\frac{p^{b+1}-1}{p-1}$$

bulunur. Yalnız burada, önceki hallerin aksine, verilen N sayısı da bölenler arasında sayılmıştır ki, bunu göz önünde tutmalıyız.

5. Artık bundan sonra, toplam formülünü N sayısının ikiden fazla asal çarpan ihtiva etmesi haline teşmil etmek kolaydır: $N=p^aq^br^c\ldots$ için (2) cedvelinden başka, bu cedvelin r katı, r^2 katı, ..., r^c katını, şu halde hepsi birden $(1+r+\cdots+r^c)$ katını ve diğer her asal çarpan için buna tekabül eden bir kat almak suretiyle (Burada N sayısı da bölenler arasında sayılmıştır):

$$T=(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)(1+r+\cdots+r^c)\cdots$$

(3a)
$$=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\cdots$$

elde edilir.

6. Bütün bunlar esas itibariyle Öklid'de mevcuttur. Fakat Öklid bu hesabı sadece $N=p\cdot 2^b$, yani biri $q=2$ olan, diğeri de sadece 1. kuvvette $(a=1)$ giren, iki asal çarpanlı bir sayı halinde yapmıştır. Bu özel hal için yukarıki umumî (2a) formülü

$$T=\frac{2^{b+1}-1}{2-1}\cdot\frac{p^2-1}{p-1}$$

verir. Şu halde bu N sayısının, N nin de içinde sayıldığı bölen-

lerinin T toplamı $N+N$ yani $2N$ ye eşit olduğu zaman mükemmel olur:

$$T=(2^{b+1}-1)(p+1)=2N,$$

yahut N nin ifadesi yerine konursa

$$(2^{b+1}-1)(p+1)=2\cdot p\cdot 2^b=2^{b+1}\cdot p$$

olur. Buradan derhal

$$2^{b+1}(p+1)-(p+1)=2^{b+1}p,$$

yahut

$$2^{b+1}=p+1,$$

yahut nihayet

$$p=2^{b+1}-1 \tag{4}$$

çıkar. Şu halde p, herhangi bir asal sayı olmayıp ta, $2^{b+1}-1$ şeklinde ise N sayısı mükemmel olur. Bununla beraber, b ye herhangi bir değer verilirse $2^{b+1}-1$ in her zaman bir asal sayı olması mutlaka icabetmez. Bununla beraber, *Öklid* ile birlikte aşağıdaki neticeyi tespit edebiliriz:

$N=(2^{n+1}-1)\cdot 2^n$ *sayısı*, $2^{n+1}-1$ *asal olduğu zaman daima mükemmel bir sayıdır.*

7. Sırayla $n=1, 2, 3, \ldots$ vaz'ederek bu formülden hangi mükemmel sayıların elde edilebileceğine bakalım:

$n=1$, $N=(2^2-1)\cdot 2 = 3\cdot 2 = 6$

2, $(2^3-1)\cdot 2^2 = 7\cdot 4 = 28$

3, $(2^4-1)\cdot 2^3 = 15\cdot 8$ (15 asal olmadığından işe yaramaz)

4, $(2^5-1)\cdot 2^4 = 31\cdot 16 = 496$

5, $(2^6-1)\cdot 1^5 = 63\cdot 32$ (63 asal olmadığından işe yaramaz)

6, $(2^7-1)\cdot 2^6 = 127\cdot 64 = 8128$

.....

Öklidin neticesinin yeni bir problem doğurduğu görülüyor: *Hangi n ler için* $2^{n+1}-1$ *asaldır?* Bu problemin çözümüne doğru derhal *bir* adım atılabilir: Her halükârda $n+1$ bir asal sayı olmak zorundadır. Çünkü $n+1$ bir bileşik sayı olsa, meselâ $n+1=u\cdot v$ olsa, $2^{n+1}-1=2^{uv}-1=(2^u)^v-1$ olup,

$$x^v-1=[x^{v-1}+x^{v-2}+\cdots+x+1][x-1]$$

şeklindeki geometrik seriye dair formülde $x=2^u$ vaz'edilirse

$$(2^u)^v-1=[2^u)^{v-1}+\cdots+(2^u)+1][(2^u)-1]$$

olur, yani $2^{uv}-1$ iki çarpana ayrıldığından asal olamaz. Şu halde $2^{n+1}-1$, olsa olsa $n+1$ asal olduğu takdirde asal olabilir. Yukarıki cedvelin devamında 11, 7 yi tâkip eden ilk asal sayı olup, n nin bu kısımda mükemmel sayı vermesi muhtemel ilk değeri $n=10$ olur. Fakat bununla $2^{11}-1$ in hakikaten bir asal sayı olduğu ve böylece $(2^{11}-1)\cdot 2^{10}$ nın mükemmel olduğuna dair hiçbir iddiada bulunulmuş olmaz. Hakikaten de biraz uzunca bir deneme neticesinde $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ bulunur. Ondan sonra gelen sayılardan hangilerinin mükemmel olup, hangilerinin olmadığı, hattâ bu sayıların sonsuz miktarda bulunup bulunmadığı, bugünkü ilmin bile henüz çözüm yolunu bulamadığı açık problemlerdir.

8. Öklid'te bulunan teorem bu kadardır. Eski çağ matematikçilerinin bu konuda daha bazı şeyler bildikleri muhtelif şahitlerden anlaşılmaktadır. Evvelâ *Jamblichos* daha yakın bilgi vermeksizin, Öklid tarafından verilenlerden başka hiç bir çift mükemmel sayı bulunmadığından bahsetmektedir. Eski çağ matematikçilerinin bunu ispat etmiş olup olmadıklarını, ispat etmişlerse nasıl ettiklerini bilmiyoruz. Fakat *Euler*'in buna dair vermiş olduğu ispat tamamen, öz halinde Öklid'te bulunan (3a) formülüne dayanmakta olup, iddianın ispatı bu formülden kısa bir hesapla elde edilmektedir. Bu ispatı, sonra anlatacaklarımızın esas fikri için hiçbir önemi olmamakla beraber, burada kısaca verelim.

Hakikaten, N herhangi bir çift sayı olsun. Bu takdirde 2 muhakkak surette N nin asal çarpanları arasında bulunur. 2 nin N yi bölen en büyük kuvveti 2^n olsun. Geri kalan asal çarpanların çarpımı u gibi bir tek sayı gösterir ve $N = 2^n \cdot u$ olur. Bu N için (3a) ya göre T bölenler toplamını teşkil edersek, T nin ilk çarpanı

$$\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

olur. Geri kalan çarpanlar, N nin T bölenler toplamı yerine u nun U bölenler toplamını teşkil etmek istediğimiz takdirde elde olunacak çarpanların aynı olur. Yani

$$T = (2^{n+1}-1)\cdot U \tag{5}$$

olur. N nin mükemmel olabilmesi için, içinde N nin kendisinin de bölen olarak hesaba katıldığı, bu ifade $2N$ ye eşit olmalıdır:

$$(2^{n+1}-1)\,U = 2N = 2\cdot 2^n \cdot u = 2^{n+1}\cdot u.$$

Parantezi kaldırırsak

$$2^{n+1}U - U = 2^{n+1}u$$

yahut,

$$2^{n+1}(U-u) = U = (U-u) + u,$$

yahut nihayet

$$(2^{n+1}-1)(U-u) = u \tag{6}$$

buluruz. U, u da dahil olmak üzere, u nun bütün bölenlerinin toplamıdır; şu halde $U-u$, u nun kendisi hariç bütün bölenlerinin toplamına eşittir. Şimdi (6) formülü, N mükemmel bir sayı olduğu takdirde $U-u$ nun u yu bölmesi, yani u nun bir böleni olması icabettiğini ifade eder. Fakat $U-u$ hem u nun böleni, hem de onun *bütün* bölenlerinin toplamı olduğu takdirde, $U-u$, u nun *biricik* böleni olur. Halbuki 1, u nun her zaman bir böle-

nidir. Şu halde $U-u$, 1 ile aynı olmalı ve u da bir asal sayı olmalıdır. Böylece (6) formülü basitleşerek $u=2^{n+1}-1$ şekline girer ki, bu takdirde $N=2^n(2^{n+1}-1)$ olur. Şu halde Öklid tarafından verilen mükemmel sayılar, bütün çift sayılar arasında yegâne mükemmel olanlardır.

9. Burada konumuzla alâkalı ikinci bir probleme çatıyoruz ki bugünkü ilim tarafından henüz altedilemiştir: *Acaba tek mükemmel sayılar mevcut mudur?* Böyle hiçbir mükemmel sayı bilinmemektedir ve böyle bir sayının mevcut olması da pek az muhtemeldir, fakat durumun hakikaten böyle olduğu şimdiye kadar hiç kimse tarafından ispat edilememiştir.

10. Eski çağ matematikçilerinin, bu konuda Öklid'te anlatılanlardan daha fazla bilgileri bulunduğu Platon'un «Kanunlar» adlı eserinin 5. kitabındaki çok dikkat edilmemiş bir pasajdan sezilebilir. Orada Platon, yeni kurulacak bir devlette topraksızlar ve toprak sahiplerinin sayısının öyle seçilmesini tavsiye ediyor ki, bu sayı mümkün olduğu kadar çok böleni haiz olsun. Misâl olarak ta $60-1$ böleni bulunduğunu söylediği 5040 sayısını veriyor. Platon'a göre kanun koyucu, bunları şehrin büyüklük durumuna göre uygun bir şekilde yerleştirebilecek kadar aritmetikten anlamalıdır. Evvelâ herhangi bir sayının, özellikle 5040'ın, bölenler sayısının nasıl bulunacağına bakalım. Bunun için, yukarıda bir sayının bölenlerinin toplamını bulmak için yapmış olduğumuz muhakemenin aynına ihtiyaç vardır. Meselâ p^3q^2 nin bütün bölenleri (2) cedveli vasıtasıyla verildiğine göre, o cedvelden bölenlerin toplamını okuduğumuz kadar kolaylıkla bölenlerin sayısını da, yani $4\cdot3-1=12-1$'i de okuyabiliriz (Bölenleri sayarken N nin kendisi hesaba katılmamıştır). Buna benzer şekilde $N=p^aq^b$ nin bölenlerinin sayısı

$$Z=(a+1)(b+1)-1,$$

ve nihayet umumî olarak $N=p^aq^br^c\ldots$ nin bölenlerinin sayısı

$$Z=(a+1)(b+1)(c+1)\cdots-1$$

olarak bulunur. Şu halde

$N=5040=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$ için özellikle

$$Z=(4+1)(2+1)(1+1)(1+1)-1=5\cdot3\cdot2\cdot2-1=60-1$$

bulunur. Platon'da 59 sayısının onun lisanında alışılmamış derecede dolambaçlı olarak $60-1$ şeklinde ifade edilmiş olması ve kanun koyucunun bu iş hakkında bilgi sahibi olması lâzım geldiğinin ileri sürülmesi, bizi bizzat Platon'un bu iş hakkında bilgi sahibi olduğu tahminine götürüyor.

11. Bir sayının bölenlerinin toplamı ile bölenlerinin sayısı problemlerinin birbiri ile ilgisi, her ikisinin de daha umumî bir konunun, bir N sayısının bölenlerinin s. kuvvetlerinin toplamını bulmak probleminin özel halleri olduğuna dikkat etmek suretiyle daha açık anlaşılır. (Meselâ $N=6$ için bölenlerin s. kuvvetleri toplamı $1^s+2^s+3^s$ tir). Hakikaten $s=1$ için bu toplam T bölenler toplamından başka birşey olmadığı gibi, $s=0$ için bu toplama giren her terim 1'e eşit olduğundan, toplamın değeri N nin bölenler sayısına eşit olur. $s=2$ için bütün bölenlerin karelerinin toplamını elde ederiz, ilâh.... Her s için (3a) ya benzer bir formül teşkil edilebilir. Bunun için yapılacak muhakeme yukarıkinin tamamen aynıdır. Aynı şeyi $s=-1$ için de düşünmeye hiçbir engel yoktur. Meselâ $N=6$ için bölenlerin (-1). kuvvetlerinin, yani makûslarının toplamı

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

olur. Bölenlerin makûsları toplamı için de (3a) nın aşağıki benzerinin cari olacağı derhal görülür :

$$(7) \qquad R=\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^a}\right)\left(1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^b}\right)\left(1+\frac{1}{r}+\cdots+\frac{1}{r^c}\right)\cdots.$$

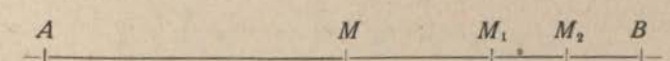
Bu toplam formüllerinin hepsi, (2) tipindeki cedvelin bir sayının bütün bölenleri hakkında verdiği umumî bakıştan ibaret olan tek bir esas fikre dayanır ki, bu esas fikre eski çağ matematikçileri sahip olmuş ve onun, Platon'un imasından anlaşılabileceği gibi, bütün güzellik ve önemini farketmiş olmalıdırlar.

17b. Asal Sayılar Dizisinin, Sonsuzluğuna dair Euler'in İspatı

Mükemmel sayılar bahsını tekrar ele alıp devam ettirmiş olan *Euler*, aynı esas düşünceyi asal sayılar dizisinin sonsuz olduğunun Öklidinkinden başka türlü bir ispatına da uygulamıştır. Öklidin, kendi kitabında mükemmel sayılar bahsından hemen önde bulunan ispatını 1. Bölümde vermiştik.

Önce iki basit ihtara ihtiyaç vardır.

1. AB, 2 m uzunluğunda bir doğru parçası olsun.



Bu doğru parçası üzerinde A dan kalkarak AB nin M orta noktasına kadar, sonra oradan MB nin M_1 orta noktasına kadar, gene oradan M_1B nin M_2 orta noktasına kadar, ilâh... gidersek, kendisine ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım, daima B nin önünde kalırız. Kat'ettiğimiz doğru parçaları sırasıyla 1 m, 1/2 m, 1/4 m, ilâh... olup, hepsi birden 2 m. den daha az eder :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<2.$$

Bu doğru parçaları 1/2 oranında değil de herhangi bir $x<1$

oranında küçülselerdi, buna benzer bir netice elde edilirdi. Hakikaten geometrik serinin

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

toplam formülü, daha kesin olarak $x<1$ için sağdaki ikinci kesrin pozitif olduğunu ve birinci kesirden çıkarılınca onu küçülttüğünü ifade eder. Yani başka deyimle

$$1+x+x^2+\cdots+x^n<\frac{1}{1-x}$$

olur. Özellikle, p herhangi bir asal sayı ise $1/p$ mutlaka 1 den küçüktür. Şu halde eşitsizlik, x yerine $1/p$ konulduğunda doğru kalarak şu neticeyi verir:

p herhangi bir asal sayı, n herhangi bir tam sayı ise daima

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}$$

dir.

2.

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

vaz'edersek, aşikâr olarak

$$A_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2},$$

$$A_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>A_2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{3}{2},$$

$$A_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{16}>A_3+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)>1+\frac{4}{2}$$

ve aynı şekilde umumî olarak,

$$(2) \qquad A_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$$

dir. m arttıkça A_m de artar. Meselâ $m/2 = 999$ ve neticede $A_m > 1000$ olması için $m = 1998$ almak yeter. Aynı şekilde A_m nin bir milyonu, ilâh... geçmesi için m ye verilmesi lâzım gelen değerler kolayca bulunur (1).

3. p herhangi bir asal sayı olduğuna göre (1) i p ye kadarki bütün asal sayılar için yazalım :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2-1}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{3}{3-1}$$

. . . . . .

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} < \frac{p}{p-1}$$

ve bütün bu toplamların R_p çarpımını teşkil edelim. Bu çarpım sağ tarafların M_p çarpımından küçük kalacaktır :

$$R_p < M_p = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{p}{p-1}.$$

R_p çarpımının teşkiline ise bir önceki derste alışmıştık. Bütün parantezleri açarsak, bu toplam

---

(1) Bundan başka buradan, ne kadar ilerlenirse ilerlensin daima 2 nin bir kuvvetine rastlanacağından, n, 2 nin bir tam kuvveti olmasa bile $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ ifadesinin, terimlerinin gittikçe küçülmesine rağmen, n arttıkça bütün sınırları aşacağı, yani matematikçilerin söyledikleri gibi «$1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ sonsuz serisinin ıraksak olacağı» neticesi çıkar. Kendi başına enteresan olan bu durumla, yakınsaklık ve sonsuz toplam fikirlerinin burada lüzumu olmayıp, bunlar buradaki basit muhakemeleri sadece karıştırır.

$$\frac{1}{2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{3^{\beta}} \cdots \frac{1}{p^{\mu}}$$

şeklinde bir takım terimlerden teşekkül eder ki, burada $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ den her biri ayrı ayrı n ye kadar değerler alabilir; başka kelimelerle R_p, $N = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdots p^n$ sayısının bütün bölenlerinin makûslarının toplamına eşit olup, bu sayılar baştan itibaren bir yere kadar bütün sayılar değil, fakat asal çarpanları 2, 3, 5, ..., p içinde bulunan ve bundan başka bunlardan hiçbirini n. den daha yüksek kuvvette ihtiva etmeyen sayılardır. Meselâ

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$

olup, bu ifade $36 = 2^2 \cdot 3^2$ nin bütün bölenlerinin makûsları toplamına eşittir.

4. Şimdi esas ispata giriyoruz. m herhangi bir pozitif tam sayı olduğu takdirde, A_m ifadesi baştan 2^m ye kadar olan bütün pozitif tam sayıların makûsları toplamından ibaret olur. Şimdi

(3) $$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^m$$

sayılarına çarpan olarak giren bütün asal sayıları düşünelim; bunların en büyüğü q olsun. Bu takdirde (3) sayıları sadece 2, 3, 5, ..., q asal çarpanlarından teşekkül eder ve bunların hiçbiri (3) sayılarına m. kuvvetten daha büyük bir kuvvette girmez. Çünkü bu asal sayıların en küçüğü olan 2 sayısı (3) tekilerin herhangi birine m. den daha büyük kuvvette girmiş olsaydı, o sayının kendisi de 2^m den büyük olacağından (3) teki dizinin ötesine geçerdi. 3, 5, ... asal sayılarının m. kuvveti 2^m den büyük olduğundan, 2 için söylenenler bunlar için daha kuvvetle doğru olur. *Şu halde* (3) *sayılarının hepsi de* $2^m \cdot 3^m \cdot 5^m \cdots q^m$ *sayısının içinde bulunur.*

Şimdi 3. te nazarı itibara alınan R_p çarpımını herhangi bir p asal sayısı için değil de, yukarda anlatılan q sayısı için teşkil eder ve n yerine m alırsak, bu R_q iladesi A_m nin bütün terimlerini ihtiva ettiği gibi, daha birçok başka terimler de ihtiva eder. Bu durum 3. ün sonunda verilen nümerik misâlde kolayca görünür: burada $A_2 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$ ün bütün terimleri bulunduğu gibi daha başka birçok terimler de bulunur. Şu halde her halükârda $A_m < R_q$ olup, 3. e göre de $R_q < M_q$ dür. Nihayet, (2) den $1 + m/2 < A_m$ elde edilir. Şu halde hepsi birden

$$(4) \qquad 1 + \frac{m}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{q}{q-1}$$

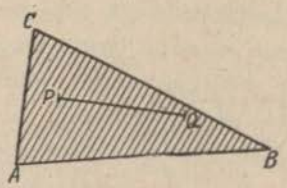
verir. Şimdi bir kere daha hatırlayalım: m keyfî bir pozitif tam sayı, q, (3) sayılarının asal çarpanları içinde en büyüğü idi. m yi yeter derecede büyük seçmek suretiyle (4) ün sol tarafının istenildiği kadar büyük yapılabileceğini daha 2. de görmüştük. Eğer asal sayılar sonlu sayıda bulunsaydı, q asal sayısı bunların en büyüğünü geçemez, şu halde sonunda onda karar kılardı. Neticede (4) ün sağ tarafı da yeter derecede büyük bir m den sonra sabit kalırdı. Böylece bir tenakuz elde etmiş olduk. Şu halde asal sayılar dizisi sonlu olamaz.

Bu ispat 1. Bölümdekinden çok daha karışıktır. Fakat bunun önemi, 1. Bölümün sonunda birkaç tanesine işaret edilmiş olan, pek çok benzer probleme teşmil edilebilir olmasında ve bugünkü matematiğin en bol problemli, ve güç ve en aktüel alanı olan Asal Sayıların Dağılımı Bahsının tamamiyle ona dayanmasıdır. Bütün bu alan için, burada kroki halinde verilmiş olan ve rüşeym halinde eski çağdan gelen bu fikir esas teşkil eder.

18a. Maksimum problemlerinin dayandığı prensipler

Şimdiye kadar, 3., 5. ve 6. Bölümlerde olduğu gibi, birçok kereler maksimum promlemleriyle uğraştık, ve bu arada bazı büyük matematikçilerin, daha büyük işleri arasında yaratmaya vakıt buldukları bazı küçük matematik san'at eserlerini okuyucuya sunmak fırsatını bulduk. Bu bölümde, evvelkilerden müstakil olarak, bu konunun prensipleri hakkında bazı şeyler söyleyeceğiz ki, bunlar evvelki bölümlerde anlatılanların estetik yönü yanında başka bir esaslı tarafını da sonradan ortaya çıkarmış olacaktır.

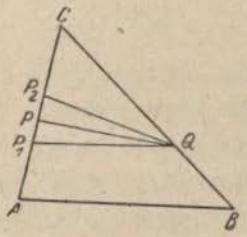
Şimdi evvelce ele alınmış olanlardan farklı ve esas hususları iyice belirtmek için bilhassa basit seçilmiş bir maksimum problemi ile uğraşacağız. Meselâ kartondan kesilmiş gibi düşünebileceğimiz *bir üçgen yüzeyi verilmiş olsun. (Kenarlar üzerindeki noktaları da ihtiva eden) bu üçgen yüzeyi üzerinde birbirinden mümkün olduğu kadar uzak iki P, Q noktası aranıyor* (Şek. 74). Netice derhal tahmin edilebilir: Üçgenin en uzun kenarının uç noktaları. Fakat bu iddia nasıl ispat edilir ?



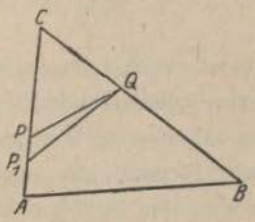
Şek. 74

Bu cins ispatlar için kolaylıkla neticeye götüren, fakat evvelki bölümlerde kullanmamış olduğumuz, basit ve umumî bir reçete vardır. Ona göre şöyle düşünülür: P, Q noktalarından biri, meselâ P, üçgenin bir *iç* noktası ise, bu P, Q noktalarının

maksimum uzaklığı haiz olmadığı muhakkaktır. Çünkü PQ nün P den öteye uzatılışı üzerinde Q ye olan uzaklığı P ninkinden daha fazla olan, fakat gene de üçgen içinde kalan P noktaları mevcuttur. Böyle olmayıp ta P, Q nün her ikisi de üçgenin kenarları üzerinde bulunur, fakat bunlardan biri, meselâ P, üçgenin köşelerinden birini teşkil etmezse, bu takdirde de P ye komşu öyle bir P_1 noktası bulunabilir ki, gene kenar üzerinde bulunsun ve Q ye uzaklığı P ninkinden daha büyük olsun. Bu husus, PQ, P nin üzerinde bulunduğu kenara ister dik (Şek. 75a), ister eğik (Şek. 75b) durumda olsun, elemanter bir



(Şek. 75a)



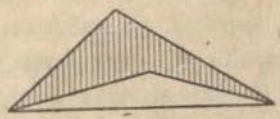
(Şek. 75b)

mülâhaza ile derhal görülebilir. Şu halde bir maksimum, ancak P ve Q nün her ikisinin de üçgenin köşelerinde bulundukları takdirde vukubulabilir, aksi halde bir maksimum durumunun mevcut olamıyacağı muhakkaktır; şu halde PQ, üçgenin bir kenarı olmak zorunda olup, bu kenar da tabiatıyle en büyük kenar olmalıdır.

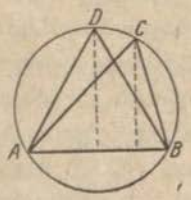
Aynı prensip, bu neticeyi derhal n-köşeli haline nakletmeye imkân verir : *Bir n-köşeli yüzeyi üzerinde birbirinden en uzak nokta çifti, bu n-köşelinin köşelerinin ikişer ikişer uzaklıklarının en böyüğünü veren iki köşedir.* Burada n-köşelinin konveks olması hiç te şart değildir. Meselâ içeri girmiş bir köşeyi haiz olan Şek. 76 daki dörtgende birbirinden en uzak noktalar, bu dörtgenin iki sivri ucudur.

Aynı prensip, önceki bölümlerde görmüş olduğumuz maksi-

mum problemlerinde de çok daha basit bir şekilde hareket etmek imkânını verirdi. Meselâ bir dairenin içine çizilmiş üçgenler (Şek. 77) arasında eşkenar olanının en büyük alanı haiz oldu-



Şek. 76



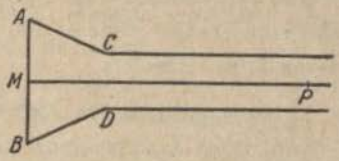
Şek. 77

ğunu ispat etmek için, sadece eşkenar olmayan, yani AC, BC ile göstereceğimiz iki farklı kenarı haiz böyle herhangi bir üçgen alarak, onun AB tabanı üzerinde daire içine çizilmiş bir ABD ikizkenar üçgeni inşa ederiz. Bu üçgenin *yüksekliği* ilk üçgeninkinden daha büyük olduğundan *alanı* da daha büyüktür. Şu halde eşkenar olmayan hiçbir üçgen maksimum alanı haiz olamaz, demek ki maksimum alanı haiz üçgen eşkenar olmalıdır. Yükseklik ayakları üçgeni halinde de işi aynı şekilde kısa kesebilirdik.

O halde neden o problemlerde diğer çözümlere o kadar emek ve hüner harcadık ? Neden bu bölümdeki problem hakkında da yukarıda verilen çözüm ile yetinmiyeceğiz ? Çünkü bu çözüm, matematikçilerin iki yüz sene boyunca gözden kaçırmış oldukları ve ancak 19. yüzyılın ikinci yarısında bir *Weierstrass*'ın keskin görüşü sayesinde aydınlığa çıkmış olan kaba bir mantık hatası ihtiva etmektedir.

Bu hata, metodumuzu aşağıdaki basit şekle (Şek. 78) tatbik edince açıkça görülebilir. Bu şekildeki yüzey parçasının sonsuza kadar uzanmasından, onun üzerinde uzaklığı maksimum olan hiçbir nokta çiftinin mevcut olamıyacağı daha işin başlangıcında aşikârdır. Meselâ P noktası sağa doğru ne kadar uzak-

laşırsa, MP uzaklığı da o kadar büyür. Şimdi metodumuzu bu hale tatbik edersek, önceki cümlede söylenene rağmen onun mükemmel işlediğini görürüz. P, Q noktalarının yüzeyin içinde veya kenarında bulundukları halde, hattâ P, Q şeklin 4 köşesinin herhangi ikisi ile çakıştığı takdirde bile aşikâr olarak derhal P



Şek. 78

ye komşu öyle P_1 noktaları bulunabilir ki, Q ye olan uzaklıkları P ninkinden daha fazla olsun. Bunun ancak bir istisnası vardır ki, o da PQ nün AB ile çakışması halidir. Şu halde burada da A, B den başka her nokta çiftine karşılık, daha büyük uzaklığı haiz bir komşu çift bulmayı sağlayan bir usûl mevcuttur. Demek ki A, B den başka hiçbir nokta çifti maksimum uzaklığı veremez. Şimdi önceki ispatlara benzerliği tam olarak uygularsak, AB nin verilen yüzey parçasının noktaları arasındaki maksimum uzaklık olması icabeder.

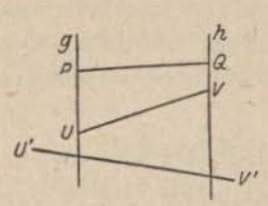
Görülüyor ki muhakeme şekli evvelkilerin tamamen aynıdır. Fakat bu muhakeme burada saçma bir netice veriyor. Öyleyse, bu muhakemenin önceki hallerde ikna edici kudreti haiz olduğunu nereden biliyoruz?

Buradaki hatayı ortaya çıkarmak kolaydır: Bu bölümün başındaki problemde üçgenin en büyük kenarının iki ucundan başka hiçbir nokta çiftinin maksimum uzaklığı veremiyeceği hakikaten gayet doğru olarak ispat edilmiştir. Fakat bu iki nokta arasındaki uzaklığın üçgen yüzeyine ait herhangi iki nokta arasındaki uzaklıktan daha büyük olduğunu nereden biliyoruz? Eğer maksimum problemimizin hakikaten bir çözümü mevcut olduğunu önceden bil-

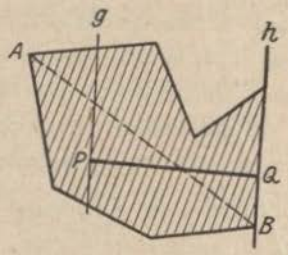
seydik, yukardaki çözümün bu maksimum çözüm olduğuna mantık bakımından hükmedebilirdik, çünkü maksimum için başka bir imkân kalmıyor. Fakat maksimum probleminin hakikaten bir çözümü mevcut olduğunun ispatı yukarıda *bulunmamaktadır*. İşte bundan dolayıdır ki, Şek. 78 teki saçma netice ortaya çıkmıştır. Çünkü bu son halde geri kalan bütün muhakemelerin yolunda olmasına rağmen, hiçbir maksimum çözüm mevcut olmaması elde edilen neticenin caiz olmasına imkân vermez.

Bu suretle önceki bölümlerde verilen görünüşte yüklü ispatların sadece estetik değil fakat aynı zamanda mantık bakımından da manası anlasılmış oluyor. Geriye bu bölümde verilen problemin (Şek. 74) çözümünü tamamlamak için lâzım gelen ve Şek. 78 de işlemeyen ispat kısmını vermek kalıyor.

Evvelâ çok basit bir ihtarda bulunacağız: g ve h gibi iki paralel doğru (Şek. 79) verildiğine göre, bunların PQ ortak dikmesinin



Şek. 79



Şek. 80

uzunluğu, bunlardan birinin üzerindeki bir noktayı diğerinin üzerindeki bir nokta ile birleştiren hiçbir UV doğru parçasının uzunluğundan daha büyük olamaz. g nin solundaki bir U' noktası ile h nın sağındaki bir V' noktasını birleştiren $U'V'$ doğru parçasının uzunluğu ise PQ nün uzunluğundan daha da büyüktür.

Teoremimizi üçgen özel hali için ayrıca ele almaya lüzum

olmayıp, maksimum uzaklık teoremini doğrudan doğruya bir n-köşeli için fazla güçlük çekmeden ispat edebiliriz.

P, Q bu n köşelinin içinde veya köşesinde bulunan herhangi iki nokta olsun. Bu noktalarda, onları birleştiren PQ doğrusuna g ve h dikmelerini çıkalım. Bu dikmeler bütün şekilden bir paralel şerit ayırırlar. Fakat g üzerinde n-köşeliye ait olarak hiç olmazsa P noktası bulunduğundan, g nin ötesinde veya en kötü halde g üzerinde n-köşelinin, meselâ A gibi, bir köşesi bulunmalıdır. Aynı şekilde h nın ötesinde veya en kötü halde h nın üzerinde gene n-köşelinin B gibi bir köşesi mevcut olur. Bu takdirde AB uzaklığı her halükârda PQ den daha küçük olamaz. Şu halde n-köşelinin ikişer ikişer köşeleri arasındaki uzaklığın en büyüğü de daha kuvvetle PQ den küçük olamaz. Şu halde ikişer ikişer köşeler arasındaki uzaklıkların en büyüğü aranılan maksimumdur.

Bundan sonraki bölümde şimdiye kadar temas ettiklerimizden çok daha zor olan bir maksimum problemi ile uğraşacağız. Orada verilen bir çevre uzunluğunu haiz (doğru parçaları veya eğrilerle çevrili) şekiller arasında en büyük alana sahip olan sorulacak ve biz, daireden başka hiçbir şeklin maksimum alanı veremiyeceğini ispat edeceğiz. Fakat *dairenin*, aynı çevreyi haiz diğer bütün şekillerin *hepsinden daha büyük* bir alanı haiz olduğunun ispatını orada vermiyeceğiz. Dairenin bir eğri şekil olması işleri o kadar zorlaştırır ki, yukarıda bahsettiğimiz mütevazi birinci ispat bile büyük bir meharet ister. Onu aşağıda vermeden evvel, burada kendimizi sadece ona hasretmek suretiyle yapacatahdidin neden ileri geldiğini, ve o ispatın neden problemin tam çözümü olamıyacağını açıklamak istedik.

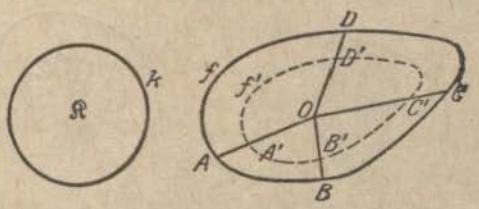
18b. Verilen bir çevreyi haiz maksimum alanlı şekil (Steiner'in Dört mafsal metodu)

Sabun köpükleri neden küre şeklindedir? Çünkü onlar kendilerini çevreleyen daha kuvvetli ortamlar tarafından tazyik edildiğinden, koheziyon sebebiyle mümkün olduğu kadar kalın bir yüzey tabakası teşkil etmeye yönelirler. Köpük içindeki havanın daha fazla sıkıştırılması burada mevzuubahis olmadığından, bu esnada balonun hacmi sabit kalır. Şu halde sabun köpüklerinin küre şeklini alması, onların verilen bir hacmı haiz cisimler içinde en küçük yüzeylisini bulmak problemini çözmeyi başarabilmelerindendir.

Her sabun köpüğünün, her su damlasının yapmaya muktedir bulunduğu şeyi burada çok daha mütevazi bir şekilde — uzayda değil de düzlemde — başarmaya, yani şu problemi çözmeye çalışacağız: Verilmiş bir alanı haiz bütün kapalı eğriler içinde çevresi en küçük olanını bulmak.

1. Bu bölüme başlık teşkil eden «verilen bir çevreyi haiz şekiller içinde *alanı* en büyük olanını bulmak» problemi, yukarıda ifade edilmiş olan «alanı verilmiş şekiller içinde *çevresi* en küçük olanını bulmak» probleminden ancak görünüş bakımından farklıdır. Zira farzedelim ki, çevresi k uzunluğunda olan $\mathfrak{K}$ dairesi değil de, çevre uzunluğu f olan diğer bir $\mathfrak{F}$ şekli verilmiş bir çevre uzunluğunu haiz şekiller arasında en büyük alanı haiz olsun (Şek. 81), yani $\mathfrak{F} > \mathfrak{K}$, fakat $f = k$ bulunsun. Bu takdirde $\mathfrak{F}$ şeklini, içinde seçeğimiz bir O noktasını çevre üzerindeki noktalara birleştiren OA, OB, OC,... doğru parçalarını aynı oranda kısaltmak suretiyle, biraz küçültelim. Bu küçültme mikyasını öyle seçelim ki, çevresi f' olan küçültülmüş $\mathfrak{F}'$ şeklinin alanı $\mathfrak{K}$ nınkinin aynı olsun. Bu esnada şeklin çevresi de küçülmüş olduğundan, $f' < k$ olur, yani $\mathfrak{F}'$, kendisiyle aynı alanı haiz dairenin çevresinden de daha küçük bir çevreyi haiz olur. Şu halde

bu son durumun mümkün olamıyacağı ispat edilirse, bu bölümün başındaki problemin çözümünün de daire olduğu ispatlanmış olur. Bunun gibi aksi yönde de muhakeme yürütebilirdik. Şu halde bu iki iddia mantık bakımından birbirine tamamen denktir.



Şek. 81

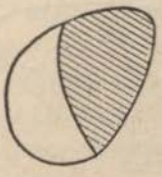
2. Biraz önce, bir yüzey parçasının çevre ve alanına dair şu teoremi açıkca söylemeksizin kullandık :

I. Bir yüzey parçasını bir O noktası merkez olmak üzere $1 : r$ *oranında bir benzerlik transformasyonu ile küçültürsek, başlangıçtaki yüzey parçası ile küçültülmüş yüzey parçasının çevrelerinin birbirine oranı* $1 : r$, *alanlarınınki de* $1 : r^2$ *olur.*

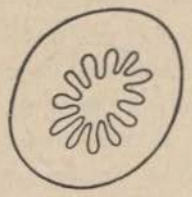
Şimdi çevre ve alan hakkında ilerde kullanacağımız diğer teoremleri de bir araya toplayalım. Bunların ispatına burada hiç dokunmayacağız. Çünkü aksi takdirde bu kavramların nasıl tarif edildiğini ele almak lâzım gelir ki, burada bunu yapmak niyetinde değiliz. Bu münakaşa yapıldığı takdirde — ki bu geniş ve sistematik bir tahlili icabettirir — burada Romen rakamları ile işaretlenmiş ifadelerin doğru olup olmadığının araştırılması lâzımgelir. Her ne olursa olsun, biz bundan sonra yalnız bu Romen rakamlı hakikatleri kullanacağımızdan, açık bir durum önünde bulunmaktayız.

II. Eğer bir yüzey parçası bir diğerinin parçası ise, birincinin alanı ikincininkinden küçüktür (Şek. 82).

Şek. 83 ten hemen görülebileceği gibi, çevre için buna benzeyen teorem doğru değildir : İçteki yüzey parçasının kıvrımları yeter derecede çok olursa, çevresi dıştakinden daha büyük olur. Fakat, kendimizi sadece *konveks* yüzey parçalarına hasredersek teorem doğru olur.



Şek. 82



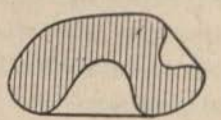
Şek. 83

Eğer bir yüzey parçasına ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen o yüzey parçasına ait ise, ona konveks denir. Şek. 84 konveks olmayan bir yüzey parçasını göstermektedir : *P*, *Q* onun içinde iki nokta olmakla beraber, onları birleştiren doğru parçası tamamen ona ait *değil*dir. Şimdi konveks yüzey parçaları için şu teoremler vardır :

III. Bir konveks yüzey parçası diğer bir konveks yüzey parçasını çevreliyorsa, birincinin çevresi ikincisininkinden uzundur (Şek. 82).

IV. Konveks olmayan her yüzey parçası, alanı büyütülüp çevresi küçültülmek suretiyle bir konveks yüzey parçası haline yuvarlaklaştırılabilir (Şek. 85).

Şek. 84

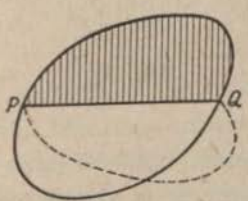


Şek. 85

Burada münakaşa etmeden işin başına koyduğumuz bu dört hakikat sezgi bakımından tamamen aşikârdır; olsa olsa III ten biraz şüphelenilebilir. Fakat sezgi bakımından aşikâr oluş nedir ki?

3. Şimdi bu bölümün hedefi olan, *Steiner*'ın düşünce silsilesine giriyoruz. Evvelâ, *çevresi verilmiş kapalı eğriler içinde alanı maksimum olanın her halükârda konveks olması lâzım geldiğini* tespit ederek işe başlayacağız. Bu vâkıa IV ve I den derhal okunabilir; zira IV e göre yüzey parçasını konveks hale getirirsek, çevresi küçülür ve alanı büyür; sonra bu eğriyi eski çevresini tekrar bulacak surette bir benzerlik transformasyonu vasıtasıyla büyütürsek, alanı *I*'e göre gene büyümüş olur. Yani, konveks olmayan her yüzey parçasına karşılık, onunla aynı çevreyi fakat ondan daha büyük bir alanı haiz olan bir konveks yüzey parçası inşa edebiliriz. Şu halde konveks olmayan bir yüzey parçası, çevresi verilmiş olan yüzey parçaları içinde hiçbir zaman maksimum alanı haiz olamaz.

4. Şu halde bundan sonra sadece konveks eğrilerle uğraşmak yeter. Evvelâ şunu göstereceğiz: *Verilmiş bir çevre uzunluğunu haiz bir konveks şekle karşılık, aynı çevre uzunluğunda ve alanı en aşağı ona eşit öyle bir ikinci konveks şekil bulabiliriz ki, bu şekil bir simetri eksenini haiz olsun.*

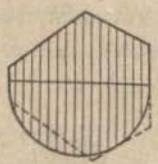


Şek. 86

P, çevreyi teşkil eden eğri üzerinde bir nokta olsun (Şek. 86). Şimdi onun üzerinde öyle bir Q noktası arayalım ki, P den iti-

baren ölçülen bütün çevreyi iki eşit kısma bölsün. PQ kirişi verilen yüzey parçasını iki kısma ayırır; bunlardan alanı daha büyük olanını ele alalım ve onun PQ doğrusuna göre simetriğini teşkil edelim. Bu takdirde, simetriği ile birlikte alınan bu parça alanı daha büyük, fakat çevresi aynı olan bir şekil teşkil eder. Şu halde başlangıçtaki şekil yerine çevresi aynı fakat alanı daha büyük yeni bir şekil koyabileceğimizden, ilk şekil maksimum olamaz. Yukarıki iddia ilk şeklin her iki parçasının *eşit* alanlı olması halinde de doğrudur: Bu halde simetri işlemi aynı alan ve aynı çevreyi haiz yeni bir şekil verir ki, bu şeklin başlangıçtakine üstünlüğü PQ gibi bir simetri eksenine sahip olmasıdır.

Şimdi biraz daha fazla bilgi temin edebiliriz: Başlangıçtaki şekil bir daire ise, PQ onun herhangi bir çapı olacak ve yeni şekil de aynı daireden ibaret olacaktır. Fakat bunun aksi de doğrudur: Yeni şekil ancak, eskisinin simetriğini aldığımız yarısı bir yarım daire olduğu zaman bir daire olabilir. Bununla beraber şeklin bu yarısının bir yarım daire olması, fakat diğer yarısının böyle olmaması mümkündür (Şek. 87). Bu halde yukarıki



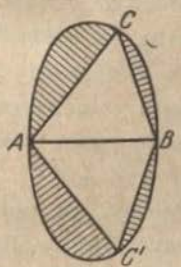
Şek. 87

iddianın aksi doğru olmazdı, yani eski şekil bir daire olmadan da yeni şekil daire olurdu. Fakat bu halde böyle bir halin ortaya çıkmasından sakınabilir ve aksi ifadenin doğruluğunu kurtarabiliriz. Zira bu halde alanları eşit iki yarı şekilden hangisinin simetriğini alacağımız hususu bizim serbest seçimimize kalmıştır; biz de kaide olarak şunu vaz'ederiz: Eşit iki yarı şekilden yarım daire *olmayanın* simetriği alınacaktır.

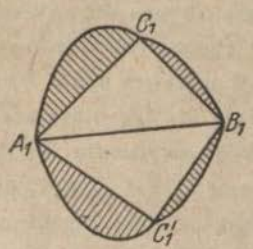
Şimdi 4. teki iddianın ispatına devam edebiliriz: Yeni şekil konveks olmadığı takdirde, onu yuvarlaklaştırmak suretiyle konveks yapabilir ve sonra uygun bir ölçüde büyütmek suretiyle eski çevresini tekrar elde ederiz. Bu esnada simetri ekseni muhafaza edilir. Şu halde yeni şekil konveks olmazsa yerine daha iyisi konulabileceğinden, bu hali şimdiden sonra nazarı itibara almıyacağız.

5. Şimdiye kadarki bildiklerimizi toplarsak: Başlangıçtaki şekil bir daire olmadığı takdirde, onu ya «düzeltebiliriz» (ki bu takdirde o şekil maksimumu vermez, yahut aynı alan ve aynı çevreyi haiz öyle bir konveks şekil bulabiliriz ki, bir daire olmasın ve bir simetri eksenini haiz olsun.

Şimdi bir simetri eksenini haiz ve daireden farklı bir konveks şekilden, aynı çevreyi haiz ve alanı da ilk şekildekinden küçük olmamakla kalmayıp, onunkinden hakikaten daha büyük



Şek. 88



Şek. 89

olan diğer bir şekil elde edilebileceğini göstereceğiz. Bu gösterildiği takdirde, *daire olmayan* bir şeklin *her zaman* «düzeltilebileceği» ispat edilmiş olur.

İlk olarak, çevre eğrisi üzerinde şeklin AB simetri eksenini bir dik açı altında *görmeyen* bir C noktasının mevcut olduğu neticesini çıkaracağız (Şek. 88). Aksi takdirde AB nin her noktası

bir dik açı altında görüleceğinden Thales teoremi yahut (istenirse) çevre açısı teoremine (S. 35 Şek. 24) göre çevre eğrisi çapı AB olan bir daire olurdu ki, biz bunun tam aksini farzetmiştik.

Şimdi ABC üçgeninin yanına dik kenarları $A_1C_1 = AC$ ve $B_1C_1 = BC$ olan bir $A_1B_1C_1$ dik üçgeni çizelim ve bunun A_1B_1 e göre $A_1B_1C_1'$ simetriğini alarak bu şekilde meydana gelen $A_1C_1B_1C_1'$ dik dörtgenlerinin kenarları üzerine Şek. 88 deki mukabillerinin üzerlerinde oturan taranmış parçaları ekliyelim (Şek. 89). Bütün bu işlemler şöyle de anlatılabilirdi: Şek. 88 deki $ACBC'$ dik dörtgeninin kenarları köşe noktalarında menteşelenmiş dört çubuk gibi ve dört taranmış parça da onlara katı olarak bağlanmış düşünüldüğü takdirde, mafsallar öyle oynatılmalıdır ki C ve C' de dik açılar meydana gelsin. *Steiner'in dört mafsal metodu* adı da buradan gelmektedir.

Bu suretle meydana getirilen şeklin çevresi eskisinin aynı kalmıştır, çünkü aynı dört yaydan teşekkül etmiştir. Alanın dört taranmış parçaya düşen kısmı da aynı kalmıştır. Şu halde bütün iş iki dörtgenin yahut ta simetri dolayısı ile bu dörtgenlerin ikişer katı bulundukları ABC ve $A_1B_1C_1$ üçgenlerinin mukayesesine kalmıştır. Bir üçgenin alanı tanınmış bir teoreme göre tabanı ile yüksekliği çarpımının yarısına eşittir. Buna göre $A_1B_1C_1$ üçgeninin alanı $1/2\ A_1C_1 \cdot B_1C_1$ dir. ACB nin B den AC ye indirilen yüksekliği, C deki açı dik olmadığından dolayı mutlaka BC den küçüktür. Şu halde ACB üçgeninin alanı $1/2\ AC \cdot BC$ den küçüktür. $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ olduğundan ACB nin alanı $A_1C_1B_1$ ninkinden mutlaka daha küçük olup, neticede yeni şeklin alanı eskisinden muhakkak daha büyük olur.

Böylece her şey gösterilmiş oluyor: daire olmayan her şekle karşılık onunla aynı çevreyi haiz, fakat alanı onunkinden daha büyük olan diğer bir şekil inşa edebiliriz. Şu halde verilmiş çevreyi haiz şekiller içinde daireden başka hiçbiri maksimum alanı haiz olamaz.

Problemin tamamının neye bu suretle çözülmüş olamıyacağı, dairenin aynı çevreyi haiz bütün şekiller içinde hakikaten maksimum alanı haiz bulunduğunun neye yukarda tam olarak ispat edilmiş sayılamıyacağı hakkında önceki bölümde etraflı açıklamada bulunmuştuk. Bu problemin tam manasıyle çözümü, her ne kadar esas fikirleri bakımından burada yapılabilirse de, bunun için ancak matematikle sistemli bir surette uğraşmış bir kimsenin hakkıyla anlayabileceği bir matematik tekniğine ihtiyaç vardır. Bu tekniği öğretmek ise bu kitabın gayesi değildir.

19. Peryodik Ondalık Kesirler

1. Âdi kesirleri ondalık kesirlere çevirirken, aşağıki misâllerle açıklanan, birbirinden tamamen farklı bir takım hallerle karşılaşıldığı herkesçe bilinmektedir :

$$\text{I} \quad \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad , \quad \frac{3}{40} = 0{,}075$$

$$\text{II} \quad \frac{4}{9} = 0{,}4444\ldots, \quad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots,$$

$$\text{III} \quad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots, \quad \frac{7}{30} = 0{,}2333\ldots .$$

I misâlleri bunların en basitleri olup, ondalık kesirlerin paydaları 10 'un kuvvetleri olan âdi kesirler olarak tarifine dönersek bunlar

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}, \quad \frac{3}{40} = \frac{75}{1000}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklemlerde bir fevkalâdelik yoktur. Onlar sadece, verilen kesirlerin pay ve paydaları uygun birer sayı ile çarpılmak suretiyle, bu paydaların 10 'un bir kuvveti şekline sokulduğunu gösterir. Bu husus, paydaları 10 'un yeter

derecede büyük bir kuvvetini bölen bütün kesirler için de cari olur. Bu türlü paydalar için basit bir kriterium, onların 2 ve 5 ten başka hiçbir asal çarpan ihtiva etmemeleridir. Hakikaten $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ şklinde bir sayı, γ, α ve β dan büyüğünü gösterdiği takdirde, 10^{γ} yı böler. Şu halde paydası $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ olan bir kesir, pay ve paydası uygun bir sayı ile çarpılmak suretiyle, daima paydası 10^{γ} olan bir ondalık kesir haline sokulabilir.

2. Eğer bir kesrin paydası 2 ve 5 ile bölünemiyen diğer bir k çarpanı ihtiva ediyorsa, onun pay ve paydasının uygun bir sayı ile çarpılması suretiyle bir ondalık kesir haline sokulmasının mümkün olmadığı aşikârdır. Çünkü

$$\frac{1}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot k}=\frac{a}{10^{\delta}}=\frac{a}{2^{\delta}\cdot 5^{\delta}}$$

farzedilirse,

$$2^{\delta-\alpha}\cdot 5^{\delta-\beta}=a\cdot k$$

olur, yani k (1 den farklı olduğundan) faraziyeye aykırı olarak 2 veya 5 ile bölünmek mecburiyetinde olur. Zira asal çarpanlara ayrılışın tekliği dolayısı ile $a\cdot k$ ve neticede k ya 2 ve 5 ten başka asal çarpanlar giremez.

II ve III te bu türlü misâller verilmiştir. Burada 4/9, 1/7, 1/6 ve 7/30 kesirlerinin bir «sonsuz ondalık kesre» çevrilebildiğinden bahsedilir. Halbuki bu aslında hiçbir ondalık *kesir* değildir. Çünkü bu kesrin paydası nedir ? Bir «sonsuz ondalık kesirde» hiçbir basamak sonuncu basamak olmadığından, 10 'un hiçbir kuvveti böyle bir kesrin paydası olmak için kâfi gelmez, ve yukarıda umumî olarak düşünmüş bulunduğumuz gibi paydası meselâ 3 ile bölünebilen bir kesir de hiçbir zaman pay ve paydasını uygun bir sayı ile çarpmak suretiyle bir ondalık kesir haline sokulamaz.

Şu halde buradaki «sonsuz ondalık kesir» terimi teşmil edilmiş ve gayrıhas manada anlaşılmalıdır. Bizi burada bu yeni matematik varlığın şeklî kısmı alâkadar etmekte olup, o da sonsuz

ondalık kesrin mütemadiyen yeni basamaklarını veren ve hiçbir zaman sonu gelmeyen işlemden ibarettir. Bu şekilde elde edilen sonsuz ondalık kesirler *peryodik*tir, yani onu teşkil eden rakamlarda belirli bir yerden itibaren aynı bir rakam grubu istisnasız olarak tekerrür eder. Elimizde 10 tane rakam bulunduğundan, sonsuz bir ondalık kesirde bu rakamların biri veya diğeri tabiatıyla bir çok kere zuhûr edecektir, fakat bu tabiatiyle her sonsuz ondalık kesrin peryodik olmasını icabettirmez. Böyle bir peryodik olmayan sonsuz ondalık kesir misâli

$$0{,}101\ 001\ 0001\ 00001\ldots,$$

kesri tarafından verilir ki, bunun teşkil kaidesi sadece 0 ve 1 leri ihtiva etmesi ve n. 1 den sonra tam n tane sıfırın gelmesidir.

3. Paydaları 2 ve 5 ten başka diğer asal çarpanları da ihtiva eden kesirler için II ve III te misaller verilmişti. Bu türlü kesirlerin sonsuz ondalık kesre açılımlarının peryodik olduğunu göstereceğiz. Bilindiği üzere, bir âdi kesre tekabül eden ondalık kesri devamlı bir bölme işlemi ile elde ederiz :

$$\begin{array}{l}
1:7=0{,}142857\ldots \\
10 \\
\underline{7} \\
30 \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{14} \\
60 \\
\underline{56} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{49} \\
1
\end{array}$$

1 kalanı zuhûr eder etmez, başlangıçtaki 1 den hareket eden hesap işlemleri yeniden başlar, şu halde 1, 3, 2, 6, 4, 5 kalanları ile 1, 4, 2, 8, 5, 7 bölümleri sıralarını muhafaza ederek tekerrür ederler, şu halde ortaya çıkan sonsuz ondalık kesir 142857 peryodunu haiz olur. Bundan sonra da birçok defalar yukarda anlatılan tarzda bölme problemleriyle uğraşacağımızdan, onlar için kısa bir yarış tarzı ithâl edeceğiz. Meselâ

$$1:7=0,\overline{142857}\ldots$$
$$1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5\ 1$$

yazacağız, ki burada bölümün her basamağının altında ona ait kalan bulunacak ve sonsuz ondalık kesrin peryodu, üzerine çekilen bir çizgi ile belirtilecektir.

Diğer bir misâl de şudur :

$$3:=41=0,\overline{0\ 7\ 3\ 1\ 7}\ldots.$$
$$3\ \ 30\ 18\ 7\ 29\ 3$$

Burada 3 kalanı zuhûr edince bölümün rakamları tekrarlanmaya başlar, çünkü bölüm başlangıçtaki 3 ten başlamıştır. *Bölüm*deki rakamlar, buradaki 7 de olduğu gibi, daha evvel tekrarlanabilir, fakat bölüm işleminin tekrarı ve peryodun tamamlanabilmesi için esas kriteryum, *kalanlar*ın tekrarlanmasıdır.

Fakat bölüme devam edildikçe, evvelden geçmiş bulunan kalanlardan birinin tekrar zuhûr edeceği muhakkaktır. (Kesrin payı da burada kalanlar arasında sayılır). Hakikaten kalanlar için elimizde ancak sonlu sayıda imkân vardır: a/b nin ondalık kesre açılışında, yani a nın b ile bölünüşünde kalanlar ancak $1, 2, 3, \ldots, b-1$ sayıları arasında olabilirler. Şu halde mümkün olan kalanların sayısı a/b kesrinin b paydasından 1 eksiktir. Bu esnada 0 kalanı hiçbir zaman zûhur etmez, çünkü 0 kalanının zuhûru bölümün bir yerde tam olarak yapılabilmesi ve neticede ondalık kesrin sonlu olması demektir. Bu hal ise, yukarıda gör-

müş olduğunuz gibi, ancak sadece 2 ve 5 asal çarpanlarını ihtiva eder bir payda için mümkündür. Şu halde a/b nin açılımı bir peryodik ondalık kesir vermek mecburiyetinde olup, bu kesrin peryodu en çok b—1 tane basamak ihtiva eder. Verilen misâllerde görüldüğü üzere 1/7 için peryodun bu en büyük uzunluğuna erişilmiş, fakat 3/41 için erişilememiştir. Mümkün olan en büyük uzunlukta diğer bir peryot örneği

$$\frac{1}{17} = 0,\overline{0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7}\ \ldots$$
$$1\ 10\ 15\ 14\ 4\ 6\ 9\ 5\ 16\ 7\ 2\ 3\ 13\ 11\ 8\ 12\ 1$$

olup, burada peryot uzunluğu $b-1=17-1\,16$ dır.

4. Şimdi paydaları 10 ile aralarında asal olan, yani 2 ve 5 asal çarpanlarını hiç ihtiva etmeyen kesirleri düşünelim. Bunlarda a/b nin ondalık açılımının mümkün olan en büyük peryot uzunluğunu daha yakından tayin edebiliriz.

a/b kesri tabiatıyla *kısaltılmış*, yani a ile b aralarında asal olarak alınacaktır. Bu takdirde bölme esnasında zuhûr edecek kalanlar da b ile aralarında asal olurlar. Hakikaten r, b ile aralarında asal bir kalan olsun. Hesabın bundan sonraki adımı, $10\,r$ yi b ile bölmekten ibarettir. Bu bölmedeki bölüm q olsun, yani b, $10\,r$ nin içinde en çok q defa bulunsun, ve geriye r_1 kalanı artsın:

$$10\,r = qb + r_1\ ,$$

yahut

$$(1) \qquad r_1 = 10\,r - qb\ .$$

Bu takdirde r, b ile aralarında asaldır. Çünkü b nin hiçbir asal çarpanı ne 10 u ne de r yi, neticede $10\,r$ yi bölmediğinden $10\,r - q\,b$ yi de bölemez. Şu halde, b ile aralarında asal bir r kalanını aynı özeliği haiz bir r_1 kalanı takip eder. Başlangıçta b ile aralarında asal bir a «kalanından» hareket edildiğinden, ondan sonraki bütün kalanlar da b ile aralarında asal olurlar. Bu-

radan şu neticeyi çıkarabiliriz: *a/b nin peryot uzunluğu en çok, b ile aralarında asal kalanların sayısı kadar olabilir.*

Verilen bir b sayısı ile aralarında asal kalanların sayısı, kendi başına da enteresan bir sayıdır. Bu sayıyı, Sayılar Teorisinde $\varphi(b)$ ile göstermek âdet olmuştur. Meselâ $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(7)=6$, $\varphi(8)=4$ tür. Özellikle bir p asal sayısı kendisinden küçük bütün sayılarla aralarında asal olduğundan, her p asal sayısı için

$$\varphi(p)=p-1 \tag{2}$$

dir. Hulâsa olarak: b, 10 ile aralarında asal olduğu takdirde, a/b nin peryodu en çok $\varphi(b)$ tane basamak ihtiva eder.

5. b nin 2 ve 5 ten farklı bir tek asal çarpanı bile bulunsa a/b nin ondalık kesre açılımının peryodik olması lâzım geldiğini ispat etmiştik. Hakikaten, mümkün olan sonlu sayıda kalandan hiç olmazsa biri bir kere tekerrür etmek mecburiyetinde idi. Böylece her ne kadar bir peryodun mevcut olması icabettiğini öğrenmiş oluyorsak ta, peryodun nerede (yani kaçıncı basamakta) başlayacağı hakkında henüz bir bilgimiz yoktur. Yukarıdaki II örneklerinde peryot hemen virgülden sonra, III tekilerde ise virgülden itibaren birkaç basamak atladıktan sonra başlıyordu. II deki paydalara bakarsak, onların hem a hem de 10 ile aralarında asal olduklarını görürüz. Şimdi b, 10 ile aralarında asal olduğu takdirde, a/b kısaltılmış kesrinin ondalık açılımında peryodun daima hemen virgülden sonra başlayacağını ispat edeceğiz. Bunun için ilk tekerrür edecek olan kalanın en baştaki kalan, yani payın kendisi, olduğunu göstermemiz lâzımdır. Hakikaten r_m, r_n gibi iki kalan birbirinin aynı olduğu, yani $r_m=r_n$ bulunduğu takdirde, ondan önce gelen r_{m-1}, r_{n-1} kalanları da (eğer her ikisinden de önce gelen kalanlar mevcutsa) birbirinin aynı olmak zorundadırlar. Çünkü r_m ve r_n sırasıyla $10\,r_{m-1}$ ve $10\,r_{n-1}$ in b ile bölünmesinden meydana gelmiştir:

$$10\,r_{m-1} = q_{m-1}\cdot b + r_m\,,$$

$$10\,r_{m-1} = q_{n-1}\cdot b + r_n\,.$$

Bunları taraf tarafa çıkarsak, $r_m = r_n$ dolayısıyla

$$10\,(r_{m-1} - r_{n-1}) = (q_{m-1} - q_{n-1})\,b$$

elde edilir. Buna göre $10\,(r_{m-1} - r_{n-1})$, b ile bölünebilir. b, 10 ile aralarında asal olduğundan, buradan $r_{m-1} - r_{n-1}$ 'in b ile bölünebildiği ortaya çıkar. Şu halde $r_{m-1} - r_{n-1}$ farkı

$$0,\quad \pm b,\quad \pm 2b,\quad \pm 3b,\ldots$$

dizisinde zuhûr etmelidir. Fakat r_{m-1} ve r_{n-1}, kalan olarak pozitif ve b den küçük bulunduklarından, onların farkının mutlak değeri b den küçük olur. Şu halde ancak

$$r_{m-1} - r_{n-1} = 0$$

yahut

$$r_{m-1} = r_{n-1}$$

olabilir. Şu halde peryot mümkün olduğu kadar erken, yani hemen virgülden sonra başlar.

6. Peryot uzunluğunu λ ile gösterirsek, a/b nin ondalık kesre açılışında λ tane bölme adımından sonra gene a kalanını elde ederiz. Her bölme adımında bölünenin sonuna bir 0 eklediğimizden, netice itibariyle λ. adımda a yı değil de, $a\cdot 10^{\lambda}$ yı b ile bölerek a kalanını elde etmiş olduk. Şu halde $a\cdot 10^{\lambda} - a$, b ile bölünebilir. Şimdi

$$a\cdot 10^{\lambda} - a = a\,(10^{\lambda} - 1)$$

olduğundan ve a, b ile aralarında asal bulunduğundan $10^{\lambda} - 1$ 'in b ile bölünebilmesi icabeder. Hattâ λ, $10^{\lambda} - 1$ in b ile bölünebildiği *en küçük* üstür. Zira peryot, a kalanın ilk tekerrüründe tamamlanır; şu halde λ, $a\cdot 10^{\lambda}$ nın b ile bölümünde a kalanını

bıraktığı en küçük üs olup, yukarıki iddianın ispatı buradan çıkar.

Şu halde aşağıki teoremi elde etmiş olduk :

I. a/b nin peryodunun λ uzunluğu, $10^{\lambda}-1$ in b ile bölünebilirliği en küçük λ sayısıdır.

Bu teoremin içinde ayrıca belirtilmeye lâyık iki ifade de bulunmaktadır. Bunların *birincisi* şudur : Bu teoremde 10 ile aralarında asal olarak verilmiş her b ye karşılık $10^{\lambda}-1$, b ile bölünebilecek şekilde bir λ üssünün mevcut olduğu ifade edilmiştir. Böyle bir λ nın aşikâr olmayan mevcudiyeti, burada λ nın peryottaki basamakların sayısı oluşunun neticesidir. Peryodun mevcudiyeti ise daha önce 3. te ispat edilmişti. Yukarıki ifadelerden *ikincisi* de şudur: Burada λ, sadece b ye tâbi olarak elde edilmiştir, a ya tâbi *değil*dir. Aynı b paydasını haiz olan kısaltılmış a/b kesirleri aynı λ peryot uzunluğunu haizdirler. λ nın b ye tâbi oluşunu $\lambda = \lambda(b)$ yazmak suretiyle belirteceğiz.

7. Şimdi a/b nin çeşitli a 'lar için ondalık açılımlarını göz önüne alalım :

$$1:7 = 0,\overset{1\ 326451}{\overline{142857}}\ldots$$

açılımını zaten evvelce görmüştük. Şimdi onunla mukayese etmek üzere 2 : 7 yi hesaplıyalım :

$$2:7 = 0,\overset{2\ 645132}{\overline{285714}}\ldots.$$

2/7 ye ait olan 285714 peryodu 1/7 ye ait olan 142857 den sadece bir dairevî permütasyonla elde edilir. Bunun böyle olacağı, 2/7 açılımının başladığı 2 kalanının 1/7 nin açılımında da zuhûr ettiği ve birbirinin aynı olan kalanlardan sonra gelen bölümlerin de hep birbirinin aynı olacağı düşünülürse, derhal anlaşılır. 3, 4, 5, 6 kalanları da 1/7 nin açılımında zuhûr ederler; burada

hakikaten 7 ye ait kalanların 6 sı da zuhûr etmelidir, çünkü 1/7 açılımının peryodu 6 basamaklıdır. Peryottaki rakamları dairevî sırada düşünürsek, yani son rakamdan sonra ilk baştakini getirir ve böylece devam edersek, bundan başka peryodun her rakamına, onun kendisinden bölme işlemi ile meydana geldiği kalanı tekabül ettirirsek, şöyle bir cedvel elde ederiz :

Kalanlar	132645
Bölümler	142857

Bu cedvelden meselâ 6/7 nin 8 ile başlayan bir peryodu haiz olduğunu ve neticede bu peryodun 857142 olması ve şu halde $6/7 = 0{,}\overline{857142}\ldots$ olması lâzım geldiğini derhal okuyabiliriz.

Araştırmamızın başında tespit etmiş olduğumuz gibi, yalnız bölümler peryodik olmakla kalmaz, kalanlar da peryodik olarak tekerrür ederler. Bu sebepten bundan sonra sadece peryotlar yerine, *bölüm peryotları* ve *kalan peryotlarından* bahsedeceğiz.

8. a/b nin peryot uzunluğunun, yukarıda düşündüklerimize göre nasıl olsa geçemiyeceği $\varphi(b)$ uzunluğuna her zaman erişmesi icabetmez. Misâllerimizin gösterdiği gibi 1/7 ve 1/17 hallerinde mümkün olan en büyük peryot uzunluğuna erişilmekle beraber, 3/41 için durum böyle değildir. Peryodun hakikî uzunluğunu bulmak, güç bir problem olup, bu uzunluk aslında ancak bazı hallerde doğrudan doğruya hesaplanabilir. Bununla birlikte, $\lambda(b)$ *hakikî peryot uzunluğu* hakkında $\lambda(b) \leq \varphi(b)$ den daha fazla bilgi veren bir iddiada bulunabiliriz.

Düşüncelerimizi, $\lambda(21) < \varphi(21)$ olduğunu göreceğimiz, yeni 1/21 örneği üzerinde geliştirelim. 21 ile aralarında asal olan kalanların sayısı

$$\varphi(21) = 12$$

olup, bu eşitlik o kalanları saymak suretiyle kolayca ispatlanabilir. Halbuki 1/21 in ondalık açılımı için

$$1:21=0,\underset{1\ 10\ 16\ 13\ 4\ 19\ 1}{\overline{0\ 4\ 7\ 6\ 1\ 9}}\ldots,$$

bulunur ki, bu da peryot uzunluğu için $\lambda(21)=6$ verir. Şu halde bölüm işlemi esnasında 21 ile aralarında asal olan 12 tane kalandan hepsi değil, sadece 6 sı zuhûr eder ki, bunları kendilerine tekabül eden bölümlerle birlikte gene bir cedvelde toplayacağız :

(A)

Kalanlar	1	10	16	13	4	19
Bölümler	0	4	7	6	1	9

Bu cedvelden meselâ

$$\frac{10}{21}=0,\overline{476190}\ldots,\qquad \frac{4}{21}=0,\overline{190476}\ldots.$$

olduğu okunur. Buna karşılık 2 kalanı burada bulunmamaktadır. Bundan dolayı 2/21 in yeni bir şey vereceği *beklenmeli*dir. Hakikaten :

$$2:21=0,\underset{2\ 20\ 11\ 5\ 8\ 17\ 2}{\overline{0\ 9\ 5\ 2\ 3\ 8}}\ldots,$$

olup, bu da şu cedveli verir :

(B)

Kalanlar	2	20	11	5	8	17
Bölümler	0	9	5	2	3	8

Burada yalnız 2 kalanı yeni olmakla kalmayıp, bütün kalanlar yenidir. Esasen burada eski kalanlardan hiçbirinin bulunamıyacağı baştan görülebilirdi. Çünkü her kalan bölüm işleminin kendisinden sonraki kısmını tamamen belirttiğinden, (A) cedvelindeki bir kalanın zuhûru o cedveldeki altı basamaklı bütün kalan peryodunun da zuhûrunu icabettirirdi. Şu halde (B) deki kalanlar peryodu (A) ya ait tek bir kalan bile ihtiva etse, (A) daki bütün kalanları ihtiva ederdi ki, zaten 6 kalan ihtiva ettiğinden

geriye (A) da bulunmayan hiçbir kalan için yer kalmazdı. Bu ise mümkün olamaz, çünkü 2 kalanı (A) da bulunmayanlar arasından seçilmişti. Şimdi (A) ve (B) cedvelleri bir arada, 21 paydalı ve 1 den küçük bütün kısaltılmış kesirlerin mümkün olan bütün paylarını teşkil eden, $\varphi(21) = 12$ tane kalanı ihtiva ederler.

9. 21 paydası için teşkil etmiş olduğumuz (A) ve (B) cedvellerinin inşasında şimdi belirteceğimiz bir umumî düşünce yatmaktadır.

Eğer $1/b$ nin açılımı $\lambda(b) = \varphi(b)$ en büyük peryot uzunluğunu haiz ise b için, 7. de $1/7$ için verildiği gibi, sadece bir tek peryot cedveli mevcuttur.

Buna karşılık $b = 21$ halinde olduğu gibi $\lambda(b) < \varphi(b)$ ise, $1/b$ nin açılımında sadece $\lambda(b)$ tane kalan bulunabilir ki, bunlarla bir (A) cedveli düzenleyebiliriz. Fakat bu cedvel, b ile aralarında asal alan bütün $\varphi(b)$ tane kalanı değil, ancak ondan daha az olan $\lambda(b)$ tane kalan ihtiva eder. Şimdi r, (A) da bulunmayan bir kalan olsun. Bu takdirde r/b yi ondalık kesre açarak, 6. dan bildiğimiz üzere, peryotları gene $\lambda(b)$ tane rakam ihtiva eden bir ondalık kesir elde ederiz. Buradaki kalanlar ve bölümleri yeni bir (B) cedveline koyalım. Bu cedvel, (A) da bulunmayan r kalanını ihtiva ettiğinden kalanlarının hiçbiri (A) da bulunmayıp, hepsi yeni olur. Çünkü (A) nın herhangi bir kalanının (B) de bulunuşu, (A) nın bütün kalanlarını da birlikte sürükleyeceğinden (B) de r ye yer bırakmıyacaktı.

(A) ve (B) cedvelleri birlikte b ile aralarında asal $2 \cdot \lambda(b)$ tane farklı kalan ihtiva ederler. Ya bunlar mümkün olan bütün kalanlardır, ki bu takdirde $2\lambda(b) = \varphi(b)$ olur, yahut daha başka kalanlar da vardır. s, ne (A)da ne de (B)de bulunmayan böyle bir kalan ise, s/b yi ondalık kesre açarak bir (C) peryot cedveli tertip ederiz, ki bu da bize ne (A)da ne de (B)de bulunmayan $\lambda(b)$ tane yeni kalan verir. Şimdi hepsi birlikte $3 \cdot \lambda(b)$ tane birbirinden farklı ve b ile aralarında asal kalan elde etmiş olduk.

Eğer $3\lambda(b) = \varphi(b)$ ise, mümkün olan bütün kalanlar tüketilmiş olur. Aksi halde yukarıki işlemi üst üste tekrarlıyarak, $\varphi(b)$ tane kalanın hepsi tükeninceye kadar kalan cedvelleri tertiplemeye devam ederiz. Burada önemli olan husus, bir cedvel teşkiline sebep olan her kalanın derhal daha $(\lambda - 1)$ tane yeni kalan vermesidir.

Bu cedvel teşkili işlemlerinin bitiminde, b ile aralarında asal $\varphi(b)$ tane sayının birbiriyle hiçbir ortak kalanı bulunmayan k tane cedvele yerleştirilmiş olduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$\varphi(b) = k \cdot \lambda(b) \tag{3}$$

olup, şu teoremi ispat etmiş olduk:

$\lambda(b)$ peryot uzunluğu $\varphi(b)$ nin bir bölenidir (1).

Bir p asal sayısı için, yukarıda işaret edilmiş olduğu gibi, $\varphi(p) = p - 1$ dir. Özellikle, bir p asal sayısı için a/p kesrinin $\lambda(p)$ peryot uzunluğunun $p - 1$ 'in bir böleni olduğu neticesini elde ederiz ki, zaten buna dair $\lambda(3) = 1$, $\lambda(7) = 6$, $\lambda(17) = 16$, $\lambda(41) = 5$ misâllerini evvelki hesaplarımız arasında görmüştük.

Kalanların muhtelif peryotlara dağılışını bir de 39 paydası misâlinde yürütelim:

$$1 : 39 = 0,\overset{1\ 10\ 22\ 25\ 16\ 4\ 1}{\overline{0\ 2\ 5\ 6\ 4\ 1}}\ldots \tag{A}$$

olup, buna ait kalan ve bölümler cedveli kolayca düzenlenebilir. Burada yalnız şu soru hatıra gelir: Acaba burada 39 ile aralarında asal olan bütün kalanlar geçmiş midir? Aşikâr olarak 2 kalanı burada geçmediğinden onu bundan sonraki peryodlar cedvelini teşkilde kullanacağız.

$$2 : 39 = 0,\overset{2\ 20\ 5\ 11\ 32\ 8\ 2}{\overline{0\ 5\ 1\ 2\ 8\ 2}}\ldots . \tag{B}$$

(1) $\varphi(b)$ nin kendisinin teşkil ettiği gayrıhas bölen burada hariç tutulmamıştır.

Burada 6 tane yeni kalan bulmuş olduk. 39 la aralarında asal olan ve (A) ile (B) de henüz bulunmıyan en küçük kalan 7 dir. 7 den hareket ederek yeni bir kalan ve bölümler cedveli elde ederiz :

(C) $$7:39=0,\overset{7\ 31\ 37\ 19\ 34\ 28\ 7}{\overline{1\ 7\ 9\ 4\ 8\ 7}}\ \ldots$$

39 ile aralarında asal olan ve (A), (B) ve (C) deki 18 kalan arasında bulunmayan en küçük kalan 14 olup, ondan hareket ederek

(D) $$14:39=0,\overset{14\ 23\ 35\ 37\ 29\ 17\ 14}{\overline{3\ 5\ 8\ 9\ 7\ 4}}\ \ldots$$

elde ederiz. Şimdi 39 la aralarında asal 24 tane farklı kalan bulmuş olduk ki, bunlar 39 la aralarında asal olan bütün kalanlardan ibarettir. Çünkü 1 den 39 'a kadar olan sayılar içinde yalnız 3 veya 13 ile bölünebilenlenler 39 ile ortak bir böleni haizdir. Burada 3 ile bölünebilen sayılar, 1 den 39 'a kadar olan bütün sayıların tam üçte biri kadar, yani 13 tanedir. Bunlara bir de 13 ile bölünebilen 13 ve 26 sayılarını ilâve etmelidir (buna karşılık 39 sayısı daha önce 3 ün katı olarak hesaba katılmıştır). Şu halde 1 den 39 'a kadar olan sayılar içinde hepsi birden 15 tanesi 39 la (trivial olmayan) bir ortak böleni haizdir. Buna göre geriye $39-15=24$ tane 39 la aralarında asal kalan kalıyor. Yani $\varphi(39)=24$ olup, $\lambda(39)=6$ olduğu yukarıdaki açılımlarla gerçeklenmiş oluyor. Burada $\varphi(39)=4\cdot\lambda(39)$ olduğundan, 4 tane kalanlar ve bölümler peryodu vardır.

10. Peryot uzunluğu hakkındaki bilgilerimizden şimdi önemli bir netice çıkaracağız. Bunun için şu basit yardımcı teoreme ihtiyaç vardır :

x ve k pozitif tam sayılar ise, x^k-1, $x-1$ ile bölünebilir.

$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}$ geometrik serisini hatırlarsak ispat derhal aşikâr olur, çünkü bu serinin toplamını bulmak için

onu sadece $(x-1)$ ile çarparız ki, bu çarpımda birçok terimler birbirini götürdüğünden

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})(x-1)=x^k-1$$

olur.

Şimdi $x=10^{\lambda(b)}$ vaz'edersek, $10^{\lambda(b)}-1$ 'in $10^{k\cdot\lambda(b)}-1$ 'i böldüğü neticesi çıkar. Özellikle buradaki k yı (3) denklemindeki k olarak seçersek.

$$10^{k\lambda(b)}-1=10^{\varphi(b)}-1$$

olur ve böylece $10^{\lambda(b)}-1$, $10^{\varphi(b)}-1$ 'in bir böleni olur. 6. daki teoreme göre ise b, $10^{\lambda(b)}-1$ 'in bir böleni olduğundan, neticede $10^{\varphi(b)}-1$ 'in de böleni olur. Bu hakikatı şöyle bir teorem şeklinde ifade edelim :

Eğer b, 10 ile aralarındaki asal bir sayı ise, $10^{\varphi(b)}-1$, b ile bölünebilir.

Bu teoremde artık peryodik ondalık kesirlerden hiçbir eser kalmamıştır, çünkü $\varphi(b)$ ondalık kesirlerden tamamen müstakil bir manayı haizdir. (2) eşitliği yukarıkinin özel hali olarak şu teoremi verir :

p, 10 u bölmeyen bir asal sayı ise, $10^{p-1}-1$, p ile bölünebilir.

Bu teoremlerin ikisinde de 10 sayısı önemsiz bir rol oynar. Bu sayı, kullandığımız sayı sisteminin tabanı olması dolayısı ile tesadüfen işin içine girmiştir. Yoksa, keyfî bir g tabanlı sayı sistemi ve ona tekabül eden g-adik kesirleri ele almak, ve muhakemelerimizde bundan başka hiçbir değişiklik yapmamak suretiyle şu neticelere de varabilirdik :

II. b, g ile aralarında asal bir sayı ise, $g^{\varphi(b)}-1$, b ile bölünebilir, ve bunun özel hali olarak

III. p asal sayısı g yi bölmezse, $g^{p-1}-1$, p ile bölünebilir.

Burada, elimizdeki ondalık kesirler özel konusundan çok daha öteye geçen ve klâsik sayılar teorisinin esas teoremlerinden birini teşkil eden bir teorem elde etmiş olduk. III teoremine, onu keşfetmiş olan *Fermat*'ya izafetle «Küçük Fermat Teoremi» denir. Burada «küçük» sıfatından maksat, onu 13. Bölümde bahsetmiş olduğumuz ve bugüne kadar hâlâ ispat edilemiyen «büyük» Fermat Teoreminden ayırt etmektir.

Yukarıki teoremleri daha iyi açıklamak için birkaç misâl verelim :

$p=5$:

$$2^{5-1}-1=\ 15=\ 3\cdot 5,$$
$$3^{5-1}-1=\ 80=16\cdot 5,$$
$$4^{5-1}-1=255=51\cdot 5,$$

$p=7$:

$$2^{7-1}-1=63\ \ \ =9\cdot 7,$$
$$3^{7-1}-1=728\ \ \ =104\cdot 7,$$
$$5^{7-1}-1=15624\ =2232\cdot 7,$$
$$10^{7-1}-1=999999=142857\cdot 7,$$

$b=6,\ \ \varphi(b)=2$:

$$5^2-1=24=4\cdot 6,$$
$$7^2-1=48=8\cdot 6,$$

$b=9,\ \ \varphi(9)=6$:

$$2^6-1=63\ \ \ =7\cdot 9,$$
$$4^6-1=4095\ =455\cdot 9,$$
$$5^6-1=15624=1736\cdot 9,$$

$b=10,\ \ \varphi(10)=4$:

$$3^4-1=80\ \ \ =8\cdot 10,$$
$$7^4-1=2400=240\cdot 10,$$
$$9^4-1=6560=656\cdot 10.$$

11. Esas konudan bu kadarlık bir uzaklaşmadan sonra gene ondalık kesirlere dönelim. b paydası 10 ile aralarında asal olan kısaltılmış bir a/b kesrinin, peryodu hemen virgülden sonra başlayan bir peryodik ondalık kesre açıldığını evvelce görmüştük. Şimdi karşıt olarak herhangi bir ondalık kesir verilmiş olduğuna göre, onun hangi kesirden meydana geldiğini öğrenmek istiyoruz. Verilen peryodik ondalık kesrin peryot uzunluğu λ ve peryodu da P olsun. Burada P, peryodu teşkil eden λ tane rakamın açılımdaki sırada olmak üzere yazılmasından elde edilen λ rakamlı ondalık sayıdır, meselâ $1/7 = 0{,}\overline{142857}\ldots$ de $P = 142857$ (yüz kırk iki bin sekiz yüz elli yedi) dir. Şimdi, λ tane basamaklı P peryodunu haiz olan a/b kesri kolayca elde edilebilir. Çünkü a nın b ile bölünüşünde λ tane basamaktan sonra a kalanı tekrar zuhûr edeceğinden, $a \cdot 10^{\lambda} - a$, b ile bölünebilmeli, hattâ bölüm, a nın zuhûru ile henüz tamamlanmış olan peryoda eşit olmalıdır. Şu halde

$$a(10^{\lambda} - 1) = b \cdot P,$$

yahut

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^{\lambda} - 1}. \tag{4}$$

Sağdaki kesir ekseriya kısaltılmamış durumda olup, kısaltılınca a/b şekline girer. 2 ve 5, 10^{λ} nın bölenleri olduklarından bunlar $10^{\lambda} - 1$ 'i ve neticede bu sonuncunun bir böleni olan b yi bölmezler. Böylece, her «salt peryodik» yani peryodu hemen virgülden sonra başlayan sonsuz ondalık kesrin paydası 10 ile aralarında asal olan bir a/b kesrinden doğduğunu göstermiş olduk. Bunun karşıtını ise zaten evvelce biliyorduk.

12. Buraya kadar yalnız salt peryodik kesirleri göz önüne aldık. Fakat 1. deki III örneklerinde virgül ile peryot başlangıcı arasında diğer bir takım rakamların bulunduğu misâller de görmüştük. Bu türlü ondalık kesirlere »karışık peryodik» denir. *Sonlu* ondalık kesirler, paydaları sadece 2 ve 5 çarpanlarını ihtiva

eden âdi kesirlere, *salt peryodik* sonsuz ondalık kesirler paydaları ne 2, ne de 5 ihtiva eden âdi kesirlere tekabül ettiklerinden, *karışık peryodik* sonsuz ondalık kesirler için ancak üçüncü imkân kalıyor : Yani bunlar, kısaltılmış paydaları 10 ile ortak bir çarpan ve bir de 2 ve 5 ten farklı başka bir veya bir takım asal çarpanlar ihtiva eden âdi kesirlerden doğarlar. Burada bu üçüncü halden bu kadarlık bahsetmekle yetineceğiz. Zaten bu hal burada etraflı bir incelemeye değecek kadar yeni bir şey ihtiva etmemektedir.

13. Yukarıki temel konulardan sonra, peryodik ondalık kesirlerin peryotlarının önemli olmaktan çok, eğlendirici bir özeliğine işaret edelim. 1/7 nin peryodu olan 142857, 6 tane rakamdan ibarettir. Bu peryodu iki eşit parçaya ayırıp, bunları toplayalım :

$$142 + 857 = 999$$

1/17 nin peryodu 16 rakamdan ibarettir. 0588235294117647 olan bu peryodu da yukarıki gibi iki eşit parçaya ayırdıktan sonra bu parçaları toplayalım :

$$05882352 + 94117647 = 99999999.$$

09 olan 1/11 in peryodu için ise

$$0 + 9 = 9$$

elde ederiz. Şimdi paydası bir asal sayı olan ve peryodu çift sayıda rakam ihtiva eden her a/p kesrinde peryodun iki yarısının toplamının aynı özeliği haiz olduğunu ispat edeceğiz.

Buna göre λ peryot uzunluğunu çift farz delim : $\lambda = 2l$. Peryot ta P olsun. P nin iki yarısına da sırayla A ve B diyelim. Burada P, λ basamaklı bir ondalık sayı, A ve B de l basamaklı birer ondalık sayı olarak okunacaklardır. Bu takdirde, rakamların ondalık basamak değerlerini göz önünde tutarak

$$P = A \cdot 10^l + B$$

olur. a/p kesrinin, kendi açılımındaki P peryodundan nasıl hesaplanacağını biliyoruz : (4) denklemine göre

$$\frac{a}{p} = \frac{P}{10^\lambda - 1} = \frac{A \cdot 10^l + B}{10^\lambda - 1}. \tag{5}$$

Faraziyemize göre $\lambda = 2 \cdot l$ olduğundan,

$$10^\lambda - 1 = 10^{2l} - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1) \tag{6}$$

olur. (5) ten p nin $10^\lambda - 1$ 'i bölmesi icabettiği neticesi çıkar ki, bu 6. daki teorem vasırasıyla da doğrudan doğruya gösterilebilirdi. Şimdi p, $10^\lambda - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1)$ i böldüğünden, bir asal sayı olarak $(10^l - 1)$ ve $(10^l + 1)$ çarpanlarından en aşağı birini bölmek zorunda olur. Fakat p, muhakkak ki $(10^l - 1)$ i bölemez, çünkü l, λ dan küçüktür. Peryot uzunluğu olan λ ise, Teorem I 'e güre $10^\lambda - 1$ 'in p ile bölünebildiği en küçük üstür. *Şu halde* p, $10^l + 1$ *'i bölmelidir.* (5) ve (6) dan

$$\frac{a}{p} = \frac{A \cdot 10^l + B}{(10^l - 1)(10^l + 1)}$$

elde edeiiz ki, bu da her iki tarafın $10^l + 1$ ile çarpılmasıyla

$$\frac{a(10^l + 1)}{p} = \frac{A \cdot 10^l + B}{10^l - 1}$$

şekline girer. Burada sol taraf bir tam sayıdır, çünkü evvelce tespit etmiş olduğumuz gibi p, $10^l + 1$ 'i böler. Neticede

$$\frac{A \cdot 10^l + B}{10^l - 1}$$

de bir tam sayı olur. Burada

$$\frac{A \cdot 10^l + B}{10^l - 1} = \frac{A(10^l - 1) + A + B}{10^l - 1} = A + \frac{A + B}{10^l - 1}$$

olup, A tam olduğundan

$$\frac{10^l-1}{A+B}=h \tag{7}$$

da bir tam sayıdır. Şimdi iddia ediyoruz ki, $h=1$ dir. Çünkü A, l tane rakamdan mürekkep olup, en yüksek değerini bu rakamların hepsi de mümkün olan en yüksek değere, yani 9 'a eşit olduğu zaman alır. l tane 9 dan teşekkül eden sayı ise 10^l-1 'e eşittir. Şu halde $A\leq 10^l-1$ dir. Aynı şekilde l rakamlı B sayısı için de $B\leq 10^l-1$ dir. Şu halde

$$A+B\leq 2\cdot(10^l-1)$$

dir. Fakat burada eşitlik işareti mümkün olmadığından, daha doğru olarak

$$A+B<2\cdot(10^l-1) \tag{8}$$

dir. Çünkü $A+B=2(10^l-1)$ olsaydı A *ve* B nin her ikisinin de en büyük değerlerini alması, yani

$$A=10^l-1, \qquad B=10^l-1$$

olması icabederdi. Bu takdirde gerek A, gerek B, l tane 9 dan ibaret olurdu. Bu ise mânasızdır, çünkü bu takdirde 9 'un kendisi peryot olurdu ki, bu da peryodun *bir* rakamlı olması demek olup, peryodun *çift* sayıda rakam ihtiva etmesine dair baştaki faraziyemize aykırıdır. Şu halde (8) eşitsizliği doğrudur. (7) den ise, h bir tam (pozitif) sayı olmak üzere

$$A+B=h(10^l-1) \tag{9}$$

elde edilir. Buradaki h, (8) e göre 2 den küçük olmak zorundadır. Şu halde geriye ancak

$$h=1$$

imkânı kalıyor. Bu takdirde (9) dan

$$A+B=10^l-1$$

elde ederiz ki, bu da $A+B$ nin tamamen 9 'lardan ibaret l rakamlı bir sayı olduğunu gösterir. Zaten ispat etmek istediğimiz şey de bundan ibaretti.

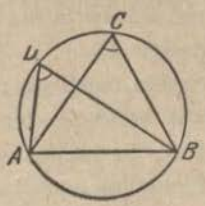
20a. Dairenin karakteristik bir özeliği

Yağmur yağarsa, ortalık ıslanır; ortalık ıslaksa mutlaka yağmur yağmış olması icabetmez. Bu misâl, çocuklara bir teorem ile onun karşıtı arasındaki farkı anlatmak için kullanılagelmiştir. Bu fark bu misâlde ne kadar açık görünürse görünsün, günlük hayatta da o kadar müphem kalmaktadır. Şuurlarına hitap edilir edilmez meseleyi gün gibi aşikâr gören kimselerin, hattâ bazı keskin zekâlı hukukçuların bile günlük hayatta bir cümle ile onun karşıtını gayrı şuurî olarak birbirine karıştırdıkları görülmüştür. Hattâ nutuk çeken bazı politikacıların bu karışıklıktan ustaca istifade ederek, siyasî hasımlarının söyledikleri bir cümleyi aksine çevirip onlarla alay ettikleri; fakat dinleyicilerden hiç birinin işin farkına varamadıkları olmuştur. Biz matematikçiler öğretim tecrübelerimizden şu kesin kanaate varmışızdır: Matematik tahsiline başlayan bir öğrenci sistemli olarak öyle yetiştirilmelidir ki, şuur altında bile bu karıştırmayı yapmasın.

Fakat araştırıcı Matematik için, bir teoremden onun aksine bilerek geçmek en verimli prensiplerden biridir. Bu prensibin, verilen teoremlerden yeni teoremlere ve yeni kavramlara bizi nasıl sevkettiğini, birbirinden müstakil olarak ta okunabilecek olan, önümüzdeki iki bölümde anlatacağız.

İşe bir matematik teorem ve onun karşıtına dair basit bir misalle başlıyalım. Çevre açısı teoremini (Şek. 90) henüz hepiniz hatırlıyacaksınız: aynı kirişi gören bütün çevre açıları

birbirine eşittir (¹). Fakat burada önemli olan, bu teoremin karşıtının da doğru olmasıdır: Sabit bir AB doğru parçasını aynı bir açı (¹) altında gören noktaların geometrik yeri bir dairedir. Okullardaki öğretimde, bütün daire bahsının en hayatî noktasının



Şek. 90

burası olduğu lâyıkı ile belirtilmemiştir. Zira bu teoremin kendi karşıtı ile birlikte doğru olması, çevre açısı özeliğinin daire için karakteristik olması, yani dairenin onun vasıtasıyla tarif edilebilmesi, yani onun dairenin klâsik tarifi — sabit bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri — yerine konulabilmesi demektir. Hakikatte daire bahsının bütün güzel teoremleri ancak çevre açısı teoremi ispatlandıktan sonra ve klâsik tarif yerine ona dayanılarak ispat edilir. Çevre açısı teoremi bu mânada bütün daire bahsının mafsal noktası, dairenin asıl tarifidir.

Bu ön temrinden sonra, dairenin diğer bir özeliğine dönecek ve onun da karakteristik bir özelik olduğunu göstereceğiz. Evvelâ ufak bir ihtar verelim. Okulda açı denilince, iki *doğru*nun birbirine göre eğimini anlamaya alışmışızdır ki, bu da tabiatıyla orada sebepsiz değildir. Fakat burada iki eğrinin birbirine göre eğimini nazarı itibara almamıza hiçbir engel yoktur; iste-

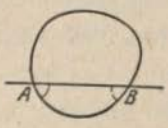
(¹) Eğer D, AB alt kirişi üzerinde ise, AD ışınının D den öteye uzatılmış parçasının DB ile teşkil ettiği açı alınmalıdır (Aksi takdirde, «komşu açı» dan bahsetmek icabeder).

nildiği takdirde eğriler arasındaki bu açıyı, eğrilerin kesiştiği S noktasında bu eğrilere çizilen teğetler arasındaki açı olarak tarif ederek, doğru kenarlı açılar kavramına irca edebiliriz (Şek. 91).

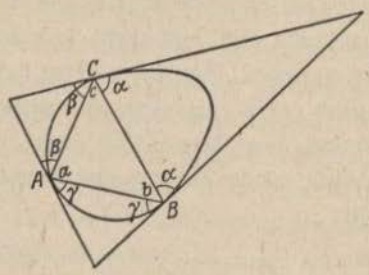
Şek. 91

Aşikâr olarak, daire şu özeliği haizdir : Bir dairenin herhangi iki noktasını birleştiren kiriş, daireyi iki eşit (tabiatıyla eğri) açı altında keser. Şimdi bu teoremin karşıtını teşkil edeceğiz. Bunun için şu soruyu kendimize soralım : *Herhangi iki noktasını birleştiren her kirişi tarafından eşit iki açı altında kesilen bir eğri daima bir daire midir, yoksa bu özeliği haiz başka eğriler de var mıdır?* (Şek. 92) Şimdi bu özeliğin de daire için karakteristik olduğunu göstereceğiz.

Bunun için, herhangi iki noktasını birleştiren her kirişi tarafından eşit iki açı altında kesilen herhangi bir kapalı eğri düşünelim (Şek. 93). A, B, C bu eğrinin herhangi üç noktası ol-



Şek. 92



Şek. 93

sun ; bunları birleştiren üç kirişten başka, eğrinin bu noktalardaki üç teğetini de çizelim. Bu takdirde, meydana gelen açılar arasında, farzedilen özelik dolayısı ile, Şek. 93 te ifade edilen eşitlikler cari olur.

Diğer taraftan A etrafındaki üç açının toplamı iki dik açı olduğu gibi, aynı şey, B ve C noktalarında da doğrudur, yani

$$\alpha+\beta+\gamma=2R$$
$$\alpha+b+\gamma=2R$$
$$\alpha+\beta+c=2R$$

dir (Burada R harfi, «dik açı» için kullanılmıştır). Bunları taraf tarafa toplamak suretiyle

$$(a+b+c)+2(\alpha+\beta+\gamma)=6R$$

elde ederiz. Şimdi bir üçgenin açıları toplamının $2R$ ye eşit olduğu teoremini ABC üçgenine uygulayalım:

$$a+b+c=2R$$

olur. Bunu bir evvelki eşitlikte yerine koyarsak,

$$2(\alpha+\beta+\gamma)=4R,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=2R$$

elde eder ve bunu

$$a+\beta+\gamma=2R$$

ile karşılaştırırsak, $a=\alpha$ buluruz. Tamamen aynı şekilde $b=\beta$, $c=\gamma$ bulunur.

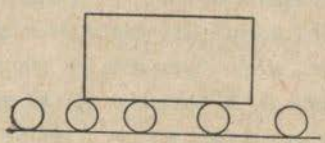
Bu hazırlayıcı mülâhazalardan $c=\gamma$ neticesini aklımızda tutalım ve şimdi asıl ispatı yapalım. D, eğrinin herhangi bir başka noktası olsa, ABC üçgeni için yaptıklarımızı ABD üçgeni için de aynen yapabiliriz. ABD üçgeninde ve ondan doğacak olan Şek. 93 ün benzerinde A, B noktaları ve neticede o noktalardaki teğetler ile bunların arasındaki γ açısı evvelkilerin aynı kalmıştır. Şu halde D deki d açısı da aynı γ ya eşit olduğundan, $d=c$ olacaktır. Şu halde AB kirişi D ve C noktalarından aynı açı altında görülür. Şu halde, çevre açısı teoreminin, yukarda bahsetmiş olduğumuz, karşıtına göre D noktası A, B, C noktalarının

belirttiği daire üzerinde bulunduğu gibi, aynı şekilde eğrinin başka herhangi bir noktası da aynı daire üzerinde bulunur. Şu halde bu eğri bir dairedir.

Yukarıki özeliğin aksine, önümüzdeki bölümde dairenin öyle bir özeliğini göreceğiz ki, bu özelik sadece daireye değil, fakat daha başka bir sürü eğriye de aittir. Bu yeni halde, bir teoremin karşıtını alma prensibi bizi yeni bir kavrama, yeni özelikle birbirine bağlı eğrilerin teşkil ettiği şayanı dikkat bir eğri sınıfına sevkedecektir.

20b. Sabit genişlikli eğriler

1. Daire, bütün noktaları verilen bir noktadan (merkez) aynı uzaklıkta bulunan bir eğri olarak tarif edilir. Dairenin bu özeliğinden en yakın pratik istifade araba tekerleğinde görülür: Tekerleğin eşit uzunluktaki ispitleri vasıtasıyla arabanın dingili, tekerlek nekadar dönerse dönsün, ufkî zemin üzerinde sabit yükseklikte tutulur ve böylelikle arabanın ufkî hareketi sağlanmış olur. Ağır yükleri ufkî olarak hareket ettirmek için bazan dingile bağlı tekerlek yerine, iptidaî bir tarz olan (meselâ sandık şeklindeki) yükün altına sokulmuş silindir şeklinde kütükler kullanılır (Şek. 94). Daire kesitli bu silindirlerin üzerinde yük, zeminden sabit yükseklikte kalarak yuvarlanır.

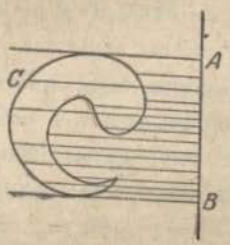


Şek. 94

Her nekadar bir tekerleğin, dingil yeri merkez olmak üzere, bir daire şeklinde olması lâzım geldiği aşikâr ise de — çünkü

başka her tekerlek biçimi arabanın ilerlerken yukarı ve aşağı çıkıp inmesini icabettirir — çok şayanı dikkattir ki, yukarda bahsedilen kütüklerin vazifelerini istediğimiz şekilde görmeleri için mutlaka daire kesitli silindir biçiminde olmalarına lûzum yoktur. Çünkü bu halde kesitin *merkezi* hiçbir rol oynamamakta, daha ziyade burada önemli olan özeliği bu kesitin iki paralel teğeti arasındaki mesafenin — daire halinde olduğu gibi — daima aynı kalması teşkil etmektedir. Daire bütün doğrultularda aynı genişliktedir, matematikçilerin deyimi ile daire bir «sabit genişlikli eğri» dir. Bu özeliğin daireyi tamamen karakterize ettiği düşünülebilir — tıpkı bundan önceki bölümde bahsedilen özeliğin *yalnız* daireye ait olması gibi. Fakat bir sürpriz olarak, durum burada farklıdır. Yani, evvelden beklenmiyen bir şey olarak, daireden farklı olan büyük bir eşit genişlikli eğri sınıfı mevcuttur ki, bu eğrilerden bazılarını aşağıda öğreneceğiz.

2. Herhangi bir C kapalı eğrisinin verilmiş bir doğrultudaki genişliğini, bu eğrinin bütün noktalarının o doğrultuyu haiz bir doğru üzerindeki izdüşümlerini almak suretiyle buluruz (Şek. 95).



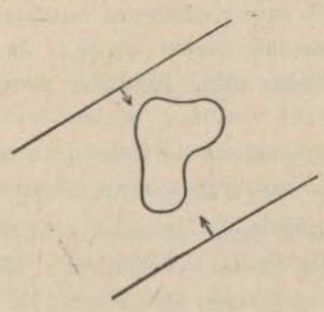
Şek. 95

Bu izdüşümler doğru üzerinde bir AB doğru parçası doldururlar ki, bu doğru parçasının uzunluğu o doğrultudaki «genişliği» verir.

A ve B noktalarındaki iki en dış izdüşüren doğrular C eğrisi ile en az bir ortak noktayı haiz olmak, fakat eğriyi

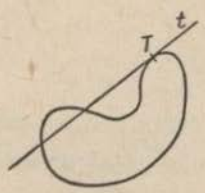
kendilerinin tamamen bir tarafında bırakmak özeliğini haizdir. Bu özelikteki bir doğruya, eğrinin *destek doğrusu* denir.

Kapalı bir eğri her doğrultuda tam iki destek doğrusunu haizdir. Bu iddianın doğruluğu ya Şek. 95 'e bakarak her hangi bir doğrultu için anlaşılabilir, yahut verilen doğrultuyu haiz ve C eğrisini aralarında bırakan iki doğru alarak bunların herbirini tam eğriye bitişinceye kadar (kendisine paralel kalmak şartıyla) C eğrisine doğru sürmek suretiyle anlaşılabilir (Şek. 96).

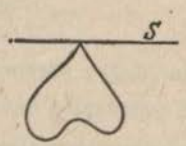


Şek. 96

Destek doğrusu kavramı, teğet kavramının aynı değildir. Meselâ Şek. 97a da t doğrusu eğriye T noktasında teğettir, fakat onun bir destek doğrusu değildir. Şek. 97b deki s doğrusu ise bir destek doğrusudur fakat eğriye teğet değildir.

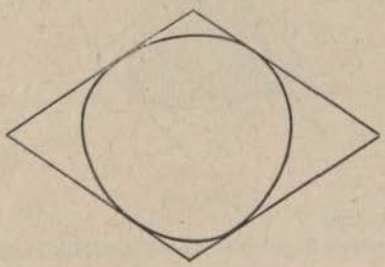


Şek. 97a



Şek. 97b

Sabit bir b genişlikli bir eğrinin her paralel destek doğru çiftinin açıklığı b ye eşitti. Böyle bir eğriye iki tane paralel destek doğru çifti çizilirse (Şek. 98), bunların teşkil ettiği paralelkenar bir eşkenar dörtgen olmak zorundadır. Eğer bu iki doğru çifti birbirine dik ise, eşkenar dörtgen de dik, yani bir kare olur. Bu karenin kenarı eğrinin b genişliğine eşittir. Şu halde

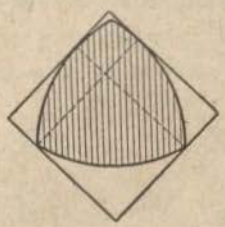


Şek. 98

sabit genişlikli bir eğrinin dışına çizilen bütün kareler birbirine eşittir. Bu husus, bir levhadan kesilen sonlu genişlikte bir şekille kare şeklinde bir çerçeveden ibaret bir model vasıtasıyla müşahhas bir hale sokulabilir. Çerçevenin kenar uzunluğu eğrinin genişliğine eşit olduğu takdirde, çerçeve her doğrultuda eğriye tamamen uyar, yani çerçeve arada hiç boşluk kalmadan eğri etrafında döndürülebilir. Yahut karşıt olarak : Sabit genişlikli her eğri uygun bir karenin içinde hiç aralık bırakmadan serbestçe döndürülebilir ve bir karenin içinde bu şekilde serbestçe döndürülebilen her eğri aşikâr olarak sabit genişliklidir.

3. Daireden farklı olan en basit sabit genişlikli eğri, kenarları daire yayları, köşeleri de karşılarındaki kenarların merkezleri olan bir eşkenar daire yayları üçgenidir (Şek. 99). Buradaki her üç daire yayı aynı yarı çapı haiz olup, bu yarı çapın uzunluğu aynı zamanda eğrinin b sabit genişliğine eşittir. Zira birbi-

rine paralel iki destek doğrusundan ya birisi bir köşeden geçer ve diğeri karşıki daire yayına teğet olur, yahut her ikisi de köşelerden geçer fakat bu halde ikisi de daire yaylarına teğet olur. Her iki halde de birbirine paralel destek doğruları arasındaki uzaklık, teğete değme noktasında dik olan yarıçapa eşittir.

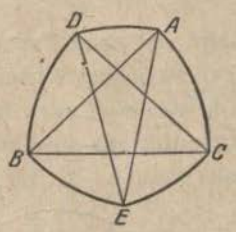


Şek. 99

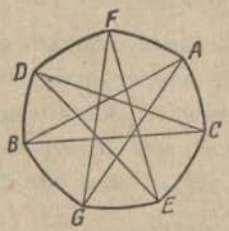
Bu daire yayları üçgeninin sabit genişlikli eğri olarak evvelâ teknikte farkına varılmıştır. Hakikaten, kinematikçi *Reuleaux* hareket mekanizmalarını tasnif ederken bu eğrinin bir kare içinde aralık bırakmadan döndürülebildiğini tespit etmiştir. Bu özeliğin eşit genişlikli bütün eğriler için karakteristik olduğunu ise yukarda görmüştük.

4. Reuleaux çokgeninin çizimine esas teşkil eden düşünce, yani eşit yarıçaplı daire yaylarını her köşenin karşısına bir yay gelecek şekilde sıralama işi birçok tarzda yürütülebilir. Meselâ düzlemin bir noktasını B köşesi olarak tespit edelim ve B merkezi etrafında b yarıçaplı bir daire yayı çizelim. Bu yay üzerinde A ve C gibi iki yeni köşe noktası alalım. Buraya kadarki çizime göre $BC = b$ olduğundan, merkezi b ve yarıçapı C olan daire yayı da B noktasından geçer. Şimdi bu yeni yay üzerinde yeni bir köşe olarak bir D noktası alalım. D merkezli ve b yarıçaplı daire yayı C den geçer. Şimdi şekli kapatmak için, bu sonuncu yay üzerindeki E noktasını keyfî değil de, aynı zamanda B den geçen A merkezli ve b yarıçaplı yayın da üzerinde bulunacak şekilde seçelim, yani E her iki yayın kesişme noktası

olsun. Böylelikle eşit genişlikli bir *ADBEC* daire yayları beşgeni meydana gelmiş oldu (Şek. 100a). Yukarıki çizimdeki adımları daha çok tekrarlamak suretiyle daha çok sayıda köşe ihtiva eden sabit genişlikli daire yayları çokgenleri inşa edebiliriz; meselâ (Şek. 100b) bu türlü bir yedigen göstermektedir. Yukarıki çizim



Şek. 100a



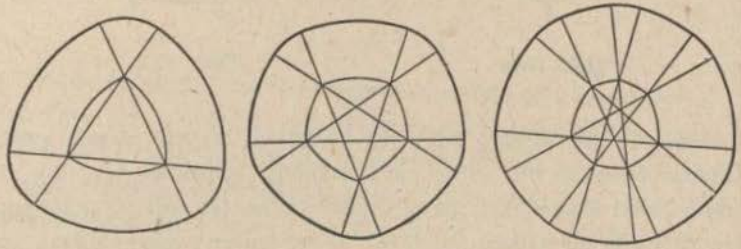
Şek. 100b

kaidesinde her köşenin karşısına bu köşeyi merkez olarak kabûl eden b yarıçaplı bir daire yayı tekabül ettirildiğinden, bu çizimle sabit b genişlikli daire yayları çokgenleri elde edildiği açıktır. İlerdeki bir tatbikat için bir daire yayları çokgenindeki her köşeyi yarıçaplar vasıtasıyla karşılarında bulunan daire yayları üzerindeki köşelerle birleştirelim. Bu suretle daire yayları çokgeni içinde eşkenar bir yıldızlı (düz) çokgen meydana gelir. Bu çokgenin her köşesinden çıkan kenarları arasındaki açı, o köşenin karşısındaki daire yayına tekabül eden merkez açısıdır.

Bu kaideye göre çizilmiş olan daire yayları çokgenlerinin kenar sayıları daima *tek*tir. Hakikaten bir köşeyle onun karşısındaki kenarı işaretledikten sonra, işaretlenmiş köşeden hareket ederek daire yayları çokgeni üzerinde dolaşalım. Evvelâ bir kenar, sonra bir köşe, sonra gene bir kenar, sonra gene bir köşe, ilâh... üzerinden geçilerek nihayet işaretlenmiş yayın önündeki köşeye gelinir. Şu halde bu yol üzerinde tam kenar sayısı kadar köşeye rastlanır. Bu sayıya n diyelim. İşaretlenmiş köşeden işaretlenmiş kenara bir de aksi yönden gidilebilir. Bu esnada da

tam n tane kenar ve n tane köşe üzerinden geçilir, çünkü birinci yoldaki her köşenin karşısında ikinci yola ait bir kenar ve birinci yoldaki her kenarın karşısında ikinci yola ait bir köşe bulunur. Bunlara bir de işaretlenmiş köşe ile onun karşısındaki işaretlenmiş kenarı ilâve edersek, hepsi birden $(2n+1)$ köşe ve $(2n+1)$ kenar eder.

5. Şimdiye kadar verilmiş olan daire yayları çokgenlerinin hepsi de köşeler ihtiva etmektedir. Fakat bu çokgenlerden *hiçbir köşesi bulunmayan* sabit genişlikli eğriler de elde edilebilir. Bu maksatla yukarıki biçimde olan bir eğriye karşılık ona d uzaklığında dıştan paralel olan eğriyi çizelim (Şek. 101a, b, c). Bu çizim,

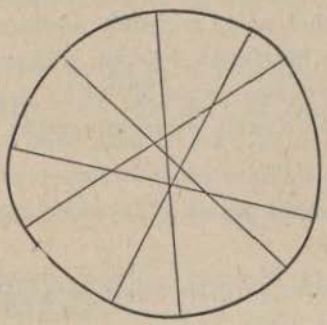


Şek. 101a Şek. 101b Şek. 101c

ilk eğrinin içine çizilmiş olan «köşegen çokgen» in yardımı ile kolayca yapılabilir. Bunun için sadece, ilk eğrideki her yayın merkezini sabit tutarak yarı çapını d kadar arttırmak yeter. Bu esnada ilk eğrinin herhangi bir köşesi sıfır yarıçaplı bir daire yayı sayılır, şu halde ikinci eğride onun yerine d yarıçaplı bir daire gelir. Bu suretle meydana gelen eğriler, iki farklı yarıçapta daire yaylarından teşekkül eder ki, buradaki her iki türlü daire yayları tek sayıdadır. Daima bir çeşit yay ile onun karşısında bulunan farklı çeşitteki yay aynı merkezi haizdir (ilk eğrinin bir köşesi).

Nihayet, ikiden daha fazla sayıda farklı yarıçap almak, fakat şimdiye kadar çizmiş olduğumuz şekillerdeki inşa prensibini

— yani aynı merkezli iki daire yayının, merkez açıları ters açılar olacak tarzda karşı karşıya bulunması prensibi — buraya aktarmak suretiyle sabit genişlikli daha umumî daire yayı çokgenleri elde edebiliriz (Şek. 102).



Şek. 102

Yukarıki inşa metodumuz bize sonsuz sayıda sabit genişlikli eğri verir. Bununla beraber, bu eğrilerin hepsinin ortak özeliği yalnız daire yaylarından teşekkül etmiş olmalarıdır. Yanlış anlamaların önüne geçmek için hemen işaret edelim ki, en küçük bir parçası bile daire yayı olmayan sabit genişlikli eğriler de mevcuttur.

6. Eşit genişlikli eğrilere dair vermiş olduğumuz bu misâllerden sonra, bu eğriler hakkında bazı umumî teoremler ortaya koyacağız. Yukarıki misallerin hepsi de *konveks*, yani kendilerini kesen her doğru ile ancak iki ortak noktası olan, eğrilerdir. İşi basitleştirmek için burada yalnız *konveks* olan sabit genişlikli eğrileri gözönüne alacağız (1) ve bundan sonra açıkça söylenilmediği hallerde bile hep konveks eğriler düşünülecektir.

(1) İspat edilebilir ki, sabit genişlikte her eğri mutlaka konveks olmak mecburiyetindedir. Fakat bunun burada ispatı bizi çok uzağa götürür.

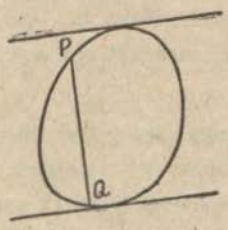
Daha doğru olmak için şu kesin tarifleri verelim : Bir konveks eğri, bir konveks bölgenin sınırıdır. Bir konveks bölge, iki noktası ile birlikte o noktaların belirttiği doğru parçası üzerindeki bütün noktaları da ihtiva etmek özeliği ile karakterize edilir. Konveks bölge misâlleri şunlardır : Kare, daire yüzeyi, üçgen, elips ve buraya kadar verilen sabit genişlikli eğrilerin içindeki bölgeler. Konveks bölgenin bir destek doğrusu, o bölgenin sınırı ile ortak olarak ya bir tek nokta, yahut bütün bir doğru parçasını haizdir. Bununla birlikte sabit genişlikli eğriler için şu teorem caridir :

I. Sabit genişlikli bir eğri, her destek doğrusu ile tek bir ortak noktayı haizdir.

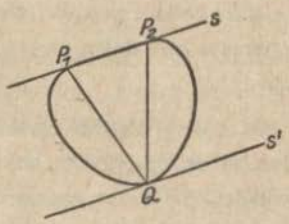
Bunu ispat için, şu basit ihtarı yapacağız :

II. Sabit b genişlikli bir eğrinin iki noktası arasındaki uzaklık en çok b ye eşittir.

Hakikaten, P ve Q eğri üzerinde iki nokta olduğuna göre (Şek. 103), PQ doğru parçası eğrinin PQ doğrultusuna dik her iki



Şek. 103



Şek. 104

destek doğrusu arasında kalmalıdır. Şu halde bu destek doğruları arasındaki uzaklık en az PQ ye eşit olmalıdır. Diğer taraftan bu doğrular arasındaki uzaklık b ye eşit olduğundan, PQ uzunluğu b yi geçemez, ki ispat edilecek şey de bu idi.

Şimdi Teorem I deki iddianın aksine, bir s destek doğrusu üzerinde eğrinin P_1 ve P_2 gibi iki noktasının bulunduğunu farzedelim (Şek. 104). Bu takdirde eğrinin diğer tarafındaki s ye paralel olan s' destek doğrusunu çizelim. s' üzerinde eğrinin Q gibi bir noktası bulunsun. s ve s' doğruları birbirinden gene b uzaklığındadır.

P_1QP_2 üçgeninin iki dik açısı bulunamıyacağından, P_1Q ve P_2Q doğru parçalarının her ikisi de s ye dik olamaz. Neticede onlardan biri b den daha uzun olur ki, bu da Teorem II ye aykırıdır. Şu halde bir destek doğrusu üzerinde eğriye ait iki nokta bulunduğu faraziyesi bir tenakuz vermiş olup, böylece Teorem I ispatlanmış olur.

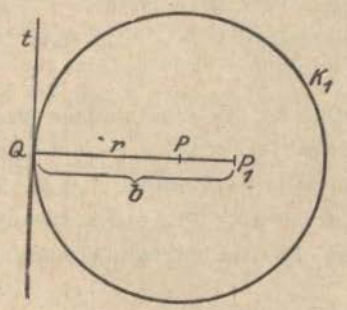
İki paralel destek doğrusu üzerinde alınan birer noktayı birleştiren doğru parçasının ancak bu doğru parçası destek doğrularına dik olduğu zaman b uzunluğunu haiz olduğu, aksi takdirde b den daha uzun olduğu keyfiyetini bir defa daha kullanarak derhal şu teoremi elde ederiz :

III. Sabit genişlikte bir eğrinin iki paralel destek doğrusunun eğriye değdikleri noktaları birleştiren doğru parçası, bu destek doğrularına diktir.

7. Şimdi sabit b genişlikli bir eğrinin herhangi bir noktası merkez olmak üzere b yarıçaplı bir daire çizersek, bu daire Teorem II ye göre bütün eğriyi çevreler. Şimdi eğrinin, dairenin tamamen içinde olamıyacağını, yani en aşağı bir noktasının daire çevresi üzerinde bulunacağını göstereceğiz.

P, b sabit genişlikli bir C eğrisi üzerinde herhangi bir nokta olsun. P merkez olmak üzere öyle bir daire çizelim ki, bu daire C yi çevrelesin, fakat kendi çevresi üzerinde C nin en aşağı bir Q noktası bulunsun (Şek. 105). Bu suretle belirtilen daireye K_1 diyelim. K_1 in r yarıçapı en çok b ye eşit olabilir, çünkü P merkezli ve b yarıçaplı dairenin C yi zaten çevrelediğini biliyoruz. Şu halde K_1 dairesini elde etmek için, olsa olsa K dairesini merkezi sabit kalmak üzere büzmek kâfi gelecektir.

K_1 dairesinin Q noktasındaki t teğeti yalnız dairenin değil, aynı zamanda C eğrisinin de bir destek doğrusudur. Çünkü bu doğru C nin Q noktasından geçmekte ve K_1 in çevrelediği C



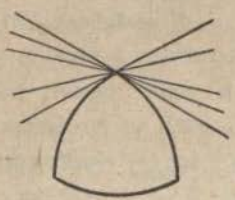
Şek. 105

eğrisi bu doğrunun tamamen bir tarafında bulunmaktadır. C nin öbür tarafındaki t ye paralel olan s destek doğrusunun t den olan uzaklığı (eğrinin sabit genişliğinin b olması dolayısıyla) b ye eşit olup, Teorem III e göre s nin P_1 değme noktası Q noktasından t ye çıkılan dikme üzerinde bulunmaktadır. Eğer $r = b$ ise, P_1, P ile çakışır; eğer $r < b$ ise, P noktası Q ile P_1 arasında bulunur. Halbuki bu sonuncu hal mümkün değildir. Çünkü bu takdirde Q, P, P_1 noktaları hem C ye ait olacak, hem de bir doğru üzerinde bulunacaktır. Bir konveks eğri ise, bir doğru tarafından ancak iki noktada kesilebilir. Bir doğru ise konveks bir eğri ile ancak bu doğru eğrinin destek doğrusu olduğu takdirde ikiden fazla ortak noktası haiz olabilir. Fakat Teorem I 'e göre sabit genişlikli bir eğrinin bir destek eğrisi ile bir tek ortak noktası vardır. Şu halde P_1, P ile çakışmalı, yani $r = b$ olmalıdır.

Burada P, C nin keyfî bir noktası idi. Böylece o noktada C nin s destek doğrusunu inşa etmiş olduğumuzdan, şu teoremi ifade edebiliriz:

IV. Sabit genişlikli bir eğrinin her noktasında en aşağı bir destek doğrusu vardır.

Sabit genişlikli bir eğri öyle noktaları da haiz olabilir ki, bunlarda birden fazla destek eğrisi bulunsun. Böyle noktalara *köşe* diyeceğiz. Vermiş olduğumuz misâllerde köşeli eğriler birçok defa geçmişti. Bir köşeye ait iki destek doğrusunun teşkil ettiği açının içinde kalan bütün doğrular da aşikâr olarak destek doğruları olduklarından, konveks bir eğri bir köşede bütün bir destek doğruları *demeti*ni haizdir (Şek. 106). Bu destek doğruları içinde iki kenar doğrusu mevcut olup, bunlar demeti sınırlarlar.



Şek. 106

P, C nin keyfî bir noktası ise, Teorem IV'e göre o noktada en aşağı bir tane s destek doğrusu çizebiliriz. s ye P noktasındaki dikmeyi çıkalım. Bu dikme C yi eğrinin karşı tarafındaki bir Q noktasında keser, ve PQ nün uzunluğu b ye eşittir. Q merkezli ve b yarıçaplı daire C yi çevreler ve s yi teğet olarak kabûl eder. Bu durumu aşağıki teoremde tespit edelim:

V. b sabit genişlikli bir eğrinin her P noktasından, dairegi çevreleyen ve P de eğrinin o noktasındaki tek (veya birden fazla ise, istenilen bir tane) destek doğrusuna teğet olan b yarıçaplı bir daire geçer.

8. Aşağıki teorem de sabit genişlikli bir eğri ile bir daire arasında bir ilgi kurar:

VI. Sabit b genişlikli bir eğri ile üç (veya daha çok sayıda) ortak noktası bulunan bir dairenin yarıçapı en çok b ye eşittir.

Böyle bir dairenin b yarıçapına da ulaşabileceğini Reuleaux'nun daire yayları üçgeni gösterir: Bunu görmek için bu üçgenin üç kenarından birini bir tam daireye tamamlamak kâfi gelir. Eşit genişlikli eğri ile hattâ sonsuz sayıda ortak noktayı haiz olan bu daire b yarıçapını haizdir.

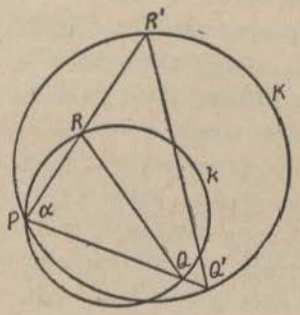
İspat. k dairesi sabit b genişlikli C eğrisiyle P, Q ve R ortak noktalarını haiz olsun. PQR üçgenindeki üç açıdan en aşağı bir tanesi diğer ikisinden küçük değildir — bu açı ya diğer ikisinden de büyük yahut diğerlerinden birine eşit ve öbüründen büyük, yahut ta diğer ikisine eşit olabilir. Bu, P noktasındaki açı olsun ve kendisine α diyelim. b eşit genişliğini haiz eğrinin P noktasından geçen destek doğrusunu (veya destek doğrularından birini) çizelim ve bu destek doğrusuna P noktasında değen b yarıçaplı daireyi çizelim, ki bu daire C yi tamamen çevreler. Şu halde Q ve R noktaları K dairesinin içinde veya üzerinde bulunurlar. Eğer Q ve R nin her ikisi de K üzerinde bulunurlarsa, K ve k nın çakışması lâzımdır, çünkü P, Q, R gibi üç tane noktadan ancak *tek* bir daire geçebilir. Bu şıkta artık ispat edilecek bir şey kalmamıştır.

Aksi halde PQ ve PR yi K ile Q' ve R' kesim noktalarına kadar uzatalım (Şek. 107). Bu takdirde $Q'R'$ nün QR den daha uzun olduğunu ispat edeceğiz.

Evvelâ Q ile Q' çakıştığı takdirde (Şek. 108a), R', R den farklıdır, çünkü Q ve R nin ikisinin de K üzerinde bulunması hali yukarda ele alınmıştı (1). Buradaki $\sphericalangle QRR' = \delta$, PQR üçgeninin bir dış açısıdır. Bir elemanter geometri teoremine göre ise, bir dış açı ona bitişik olmayan iki iç açının herbirinden bü-

(1) Şek. 108a ve Şek. 108b, Şek. 107 nin bilhassa belirtilmiş parçaları olarak düşünülmelidir.

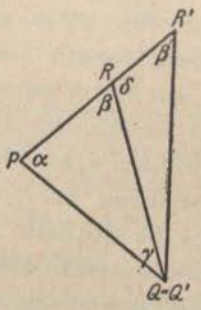
yüktür. Buna göre, içinde bulunduğumuz halde $\delta > \alpha$ dır. Bundan başka, β, QRR' üçgeninde bir dış açı olduğundan $\beta > \beta'$ dür. Halbuki PQR üçgeninde $\alpha \geqq \beta$ seçilmigti. Şu halde toplu



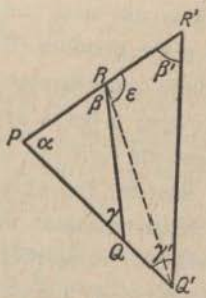
Şek. 107

olarak $\delta > \alpha \geqq \beta > \beta'$ 'dür. Bu eşitsizlikler zincirinden $\delta > \beta'$ neticesini çıkarırız. Şu halde QRR' üçgeninde QR' kenarının karşısındaki açı QR nin karşısındakinden daha büyük olup, buradan, gene elemanter geometrinin tanınmış bir teoremine göre, $QR' > QR$ elde edilir.

Eğer yalnız R, R' den farklı olmakla kalmayıp, Q de Q' den farklı ise (Şek. 108b), evvelâ $\beta + \gamma = \beta' + \gamma'$ olduğuna dik-

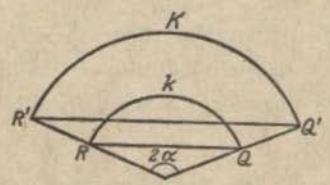


Şek. 108a



Şek. 108b

kat edelim. Çünkü PQR ve $PQ'R'$ üçgenlerindeki açıların toplamları dolayısıyla bu eşitliğin her iki tarafı da $180° - \alpha$ ya eşittir. Bundan dolayı aynı zamanda $\beta' > \beta$ ve $\gamma' > \gamma$ olamaz. Meselâ (şeklimizde olduğu gibi) bu eşitsizliklerden ilki doğru olmasın, yani $\beta' \leqq \beta$ olsun. Bu takdirde $QQ'R'R$ dörtgenindeki iki köşegenden β' açısını bölmeyenini, yani $Q'R$ yi, çizelim. ($\gamma' \leqq \gamma$ halinde ise QR' nün çizilmesi lâzım gelir). Bundan sonra Şek. 108a dakine tamamen benzer tarzda evvelâ $Q'R > QR$ olduğu ispat edilir. $\measuredangle Q'RR'$, ε ile gösterilsin. ε, $PQ'R$ üçgeninin dış açısı olduğundan $\varepsilon > \alpha$ dır. Bundan başka $\alpha \geqq \beta$, $\beta \geqq \beta'$ idi. Şu halde hepsi birlikte $\varepsilon > \beta'$ verir. Böylece $Q'R'R$ üçgenindeki $Q'R'$ kenarının karşısındaki açı, $Q'R$ nin karşısındaki açıdan daha büyük olur ki, bu da bize $Q'R' > Q'R$ verir. Evvelce $Q'R > QR$ olduğunu da ispat etmiş bulunduğumuzdan, neticede $Q'R' > QR$ elde edilir.



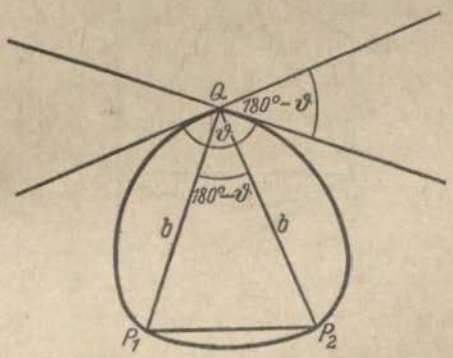
Şek. 109

Şu halde Şek. 107 deki bu eşitsizlik bütün şıklarda cari olur. Şimdi bu şekle dönelim. İnceleme konusu olan k dairesi QR kirişi üzerinde α çevre açısını haizdir. K dairesi ise $Q'R'$ kirişi üzerinde aynı α çevre açısını haizdir. Şu halde K ve k dairelerinde sırasıyla $Q'R'$ ve QR kirişleri aynı 2α merkez açılarına tekabül ederler. Bu merkez açılarını üst üste getirirsek, Şek. 109 elde edilir. Buradan derhal, bu kirişlerin oranının ait oldukları dairelerin yarıçapları oranına eşit olduğu görülür. $Q'R' > QR$ olduğundan, buna göre K nın b yarıçapının k nınkinden daha büyük olması icabeder ki, ispatı istenen şey de bu idi.

9. Daireden farklı en basit sabit genişlikli eğri olan Reuleaux çokgeni köşeleri haizdir. Aşağıki teorem, Reuleaux çokgeninin köşeleri vasıtasıyla bütün sabit genişlikli eğriler arasında karakterize edilebildiğini ifade eder :

VII. Sabit genişlikli bir eğrinin herhangi bir köşesindeki açı 120° den daha küçük olamaz. 120° lik bir açıyı haiz tek sabit genişlikli eğri Reuleaux'nun daire yayları üçgeni olup, bu üçgen hattâ böyle üç tane köşeyi haizdir.

İspat. Bir köşedeki açıyı o köşeden geçen destek eğrileri demetinin en dıştaki iki doğrusu arasında kalan açı ile ölçeriz. Eğer bir Q köşesindeki açı ϑ ise, o köşedeki destek doğruları demetinin açıklığı $180° - \vartheta$ dır (Şek. 110). Q noktasında bu des-



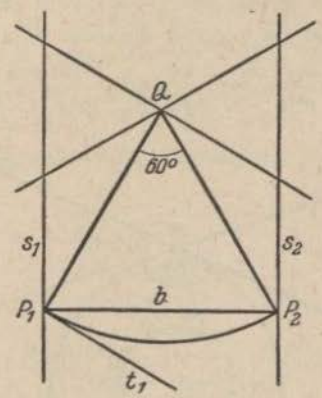
Şek. 110

tek doğrularının herbirine çıkılan dikmeler de $\sphericalangle P_1QP_2$ ile verilen aynı $180° - \vartheta$ açıklığında bir doğru demeti teşkil ederler. Bu dikmelerden herbirinin Q den eğriyi kestiği diğer noktaya kadar uzunluğu (Teorem III e göre) b dir.

Şu halde eğri üzerinde Q köşesinin karşısına yarıçapı b ve merkez açısı $180° - \vartheta$ olan bir P_1P_2 daire yayı isabet eder. Bu yaya ait P_1P_2 kirişinin uzunluğu da II 'ye göre b genişliğini ge-

çemez. Bu suretle eşit kenarlarının uzunluğu b olan QP_1P_2 ikizkenar üçgeninin taban uzunluğu en çok eşit kenarların uzunluğu kadardır. Neticede bu üçgenin Q tepesindeki açı en çok 60° dir. Halbuki bu P_1QP_2 açısı $180° - \vartheta$ idi. Şu halde $180° - \vartheta \leq 60°$, yani $\vartheta \geq 120°$ olur. Burada ϑ herhangi bir Q köşesindeki açı olduğundan, teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Şımdi $\vartheta = 120°$ ise, P_1QP_2 açısı da 60° dir ve QP_1P_2 ikizkenar üçgeni bu takdirde eşkenar olur (Şek. 111). Bu takdirde



Şek. 111

P_1P_2 uzunluğu da tam eğrinin b genişliğine eşit olur. Şu halde P_1P_2 ye dik olan her iki s_1 ve s_2 destek doğrusu P_1 ve P_2 nin kendilerinden geçmelidir. Buradan P_1 ve P_2 nin de eğrinin köşeleri olması lâzımgeldiği neticesi çıkar. Çünkü eğrinin P_1 ve P_2 noktaları arasında kalan parçasının bir daire yayı olduğu yukarda tespit edilmişti. P_1 noktasında yalnız s_1 doğrusu destek doğrusu olmakla kalmaz, fakat aynı zamanda daire yayının P_1 noktasındaki t_1 teğeti de aynı noktada bir destek doğrusudur. Şimdi bu s_1 ve t_1 doğruları aralarında, kolayca görüleceği üzere, 120° lik bir iç açı teşkil ederler. Şu halde bunlar P_1 deki destek

doğruları demetinin en dış doğruları olmak zorundadır, çünkü hiçbir köşedeki açı 120° den daha küçük olamazdı. Şu halde P_1 (ve aynı şekilde P_2) köşesindeki açı tam 120° liktir. Fakat bu takdirde P_1 ve P_2, Q nün özeliklerini haiz olurlar. Şu halde bunların karşılarında da b yarıçapında ve 60° lik merkez açılı daire yayları bulunur. Böylelikle Reuleaux daire yayları çokgeni elde edilerek ispatın ikinci kısmı da tamamlanmış oldu.

10. Bu bölümün başında bir takım sabit genişlikli eğri misâlleri inşa ettik. Buna karşılık, Teorem I den VII ye kadar tespit etmiş olduğumuz özelikler, mevcudiyetleri hakkında hiçbir şey söylemeksizin, bütün sabit genişlikli eğriler için doğrudur. Şimdi öyle bir umumî inşa metodu vereceğiz ki, sabit genişlikli her eğri onun vasıtasıyla inşa edilebilsin. Bu suretle mümkün olan bütün sabit genişlikli eğrileri gözönüne almış olacağız. Teorem V bu eğrilerin bilhassa önemli bir özeliğini verir. Bu özelik vasıtasıyla sabit genişlikli eğriler, karşılıklı iki nokta arasındaki iki yarısından birinin yalnız Teorem V teki şartlara uygun, fakat bunun dışında keyfî olarak verilmesiyle karakterize edilebilir. Daha açık olarak aşağıki teoremi ileri sürebiliriz :

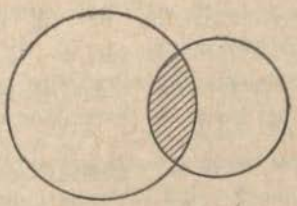
VIII. Kiriş uzunluğu b olan, tamamı iki ucunda kirişe çıkılan dikmeler arasında kalan, herhangi bir noktasından geçen ve kendisinin o noktadaki destek doğrusuna teğet olan ve bu doğrunun kendisi ile birlikte aynı tarafında bulunan b yarıçaplı dairenin tamamen çevrelediği bir Γ konveks eğri yayı (1) *sabit b genişlikli bir eğriye tamamlanabilir.*

11. Γ nın sabit genişlikli bir eğriye tamamlanabilmesinin mümkün olduğunu ispat için, dikkatimizi aranan *eğri*nin sınırını teşkil edeceği bir sabit genişlikli *bölge* üzerine çevirmek suretiyle biraz dolambaçlı bir yol tutmak uygundur.

Evvelâ bir ön ihtar: Bir çok bölgeler verildiği zaman bun-

(1) Yani kirişi ile birlikte konveks bir bölge çevreleyen bir yay.

ların hepsinde ortak olan bölge parçasına o bölgelerin *ortak kısmı* denir. Meselâ iki dairenin ortak kısmı bir daire yayları iki köşelisidir (Şek. 112).



Şek. 112

Herhangi bir sayıda bir takım konveks bölgelerin ortak kısmı da ister istemez konvekstir.

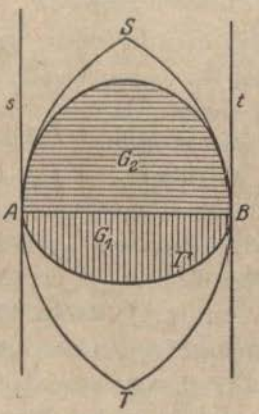
Bunun için ortak kısmın herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının da tamamen bu ortak kısma ait olduğunu ispat etmek lâzımdır. Bu ise aşikârdır. Çünkü P ve Q noktalarının her ikisinin de ortak kısma ait olması demek, bunların verilen bölgelerin herbirine ait olması demektir. Bu bölgeler konveks olduklarından, P ve Q ile birlikte bütün PQ doğru parçasını da ihtiva ederler. Şu halde PQ doğru parçası bütün bu bölgelere, neticede onların ortak kısmına da aittir.

Yukarıki muhakeme için konveks bölgeler cümlesindeki bölgelerin sonlu veya sonsuz sayıda olması arasında hiçbir fark yoktur.

12. Şimdi Γ eğri parçası Teorem VIII de istenilen özelikleri haiz olsun (Şek. 113). Bu takdirde AB kirişinin uzunluğu b dir ve bu kiriş Γ ile birlikte bir G_1 konveks bölgesi sınırlar. AB ye A ve B de dik olan s ve t doğruları G_1 in destek doğrularıdır. b yarıçaplı ve Γ nın bir noktasında onun bir destek doğrusuna teğet olan her daire Γ yı tamamen çevreler.

Şimdi G_1'e AB kirişi, B merkezli AS daire yayı ve A mer-

kezli BS daire yayı tarafından çevrelenen ABS üçgen biçimli bölgesini ekleyelim. Bu sonuncu bölgeye G_2 diyelim. G_1 ve G_2 konveks bölgeleri birlikte bir G konveks bölgesi teşkil ederler; bu bölge bir taraftan Γ diğer taraftan AS ve BS daire yayları ile sınırlıdır.



Şek. 113

Şimdi b yarıçaplı ve merkezleri Γ üzerinde bulunan bütün daireleri göz önüne alalım. G bölgesi ile sonsuz sayıdaki bütün bu daireler D gibi bir konveks ortak kısmı haizdir (Bu ortak kısım şekilde taranmıştır). Şimdi D nin, Γ yı bir sınır parçası olarak kabûl eden ve b sabit genişlikli bir bölge olduğunu iddia ediyoruz.

Eğer Γ hakikaten D ye ait olursa, ancak onun sınırının bir parçası olabilir, çünkü Γ zaten G nin sınırında idi. Diğer taraftan Γ, merkezi Γ nın herhangi bir noktası olan b yarıçaplı her dairenin tamamen içindedir. Yani Γ nın herhangi iki noktası birbirinden en çok b uzaklığında bulunabilir. Çünkü Γ, faraziyeye göre, A ve B merkezli ve b yarıçaplı dairelerin ve neticede $SATBS$ daire yayları iki köşelisinin içindedir. Γ, AB nin bir ta-

rafında bulunduğundan, tamamen G_2 nin AB ye göre simetriği olan G_2' bölgesi içinde bulunur. G_2' içinde ise, aşikâr olarak, mümkün olan en büyük uzaklık b dir. Şu halde özellikle Γ nın da herhangi iki noktası arasındaki uzaklık b yi geçemez. D konveks olduğundan, Γ ile birlikte Γ nın her kirişi de D nin içindedir. Şu halde G_1, D nin bir parçasıdır.

D nin içinde b den daha büyük bir uzaklık mevcut olamaz. D, G nin, yani kısmen G_1, kısmen de G_2 nin içinde bulunduğundan, burada bahis konusu olan uzaklıklar, ya G_1 in iki noktası, veya D nin G_2 deki iki noktası, yahut ta D nin biri G_1 de bulunan P_1, diğeri G_2 de bulunan P_2 gibi iki noktası arasındaki uzaklıklardır. Birinci haldeki uzaklıklar yukarıda söylenenlere göre b yi geçemiyecekleri gibi, aynı şeyin ikinci hal için de doğruluğu açıktır. Üçüncü haldeki P_1, P_2 noktaları arasındaki uzaklık ta b yi geçemez. Çünkü P_1P_2 yi birleştirdikten sonra bu doğru parçasını Γ yı bir P noktasında kesinceye kadar uzatırsak, bu üç nokta doğru üzerinde PP_1P_2 sırasında dizilmiştir. P merkezli b yarıçaplı daire D yi, şu halde bu üç noktayı da ihtiva eder, neticede P_1 ve P_2 noktaları b uzunluğunda bir yarıçap üzerinde bulunurlar, şu halde birbirinden uzaklıkları en çok b ye eşit olur.

Buna göre, D bölgesinin hiçbir doğrultudaki genişliği b yi geçemez. Şimdi onun her doğrultuda tam b genişliğinde olduğunu iddia ediyoruz. AB doğrultusundaki genişlik zaten b olarak alınmıştı. Şimdi diğer bir keyfî doğrultuyu gözönüne alalım ve D nin bu doğrultuya dik olan s_1 ve s_2 destek doğrularını çizelim. Bunlardan biri, s_1, Γ ile bir Q ortak noktasını haizdir. Q noktasında s_1 e b uzunluğunda bir dikme çıkalım; bu dikmenin uç noktasına M diyelim. Bu takdirde M, D ye aittir. Bunu ispat için M nin hem G nin içinde, hem de Γ nın noktaları merkez olmak üzere çizilen b yarıçaplı bütün dairelerin içinde olduğunu göstermek lâzımdır. Bunun için de, M nin Γ nın her noktasından en çok b uzaklığında olduğunu göstermelidir. Bu sonuncu husus s_1 e Q noktasında değen M merkezli ve b yarıçaplı dairenin, Γ üzerinde yapılmış

olan faraziyeye göre, Γ yı tamamen çevrelediğinden, yani Γ nın her noktasının M den en çok b uzaklığında olmasından çıkar. Bundan başka özellikle A ve B de M den en çok b uzaklığında bulunduklarından, M noktası $SATBS$ daire yayları iki köşelisi içinde, hattâ bunun Γ nın karşı tarafındaki yarısında, yani G_2 de bulunur. Şu halde M, daha kuvvetle G de bulunur. Böylece M nin, D nin ortak kısmı olarak tarif edildiği bütün bölgelere ait olduğu ispat edilmiş oldu. Şu halde M, D nin içindedir.

QM, s_1 ve s_2 ye dik bulunduğundan ve Q ve M noktaları D ye ait olduğundan, s_1 ve s_2 destek doğrularının birbirinden uzaklığı en aşağı $QM = b$ dir. Fakat bu uzaklık *bundan büyük* te olamaz, çünkü aksi takdirde s_1, s_2 üzerindeki değme noktaları arasındaki uzaklık b yi geçerdi ki, yukarda gösterildiği gibi, D de böyle bir durum zuhûr edemez.

Bu suretle Teorem VIII 'i ispat etmiş olduk. Bundan başka Γ eğri yayının başka bir sabit genişlikli eğriye tamamlanamıyacağı, yani C eğrisinin Γ ile tamamen belirlendiği de kolayca görülür.

13. Son olarak, sabit genişlikli eğrilerin şayanı dikkat bir özeliğini ispatsız olarak verelim: Aynı b sabit genişlikli bütün eğriler aynı çevre uzunluğunu haizdir, şu halde özellikle bu çevre uzunluğu b çaplı dairenin çevre uzunluğuna eşittir. 4. ve 5. de çizilmiş olan daire yayları çokgenleri için bu husus, aynı merkez açısına tekabül eden daire yaylarının benzer oluşu yardımıyla, kolayca ispat edilebilir. Fakat sabit genişlikli umumî eğriler için ispat, alışmış olduğumuz mülâhazalar çevresini çok aşar; çünkü bu ispat, ancak zor bir iş olan eğri uzunluğu kavramının kesin tarifini verdikten sonra mümkün olur.

21. Elemanter Geometri çizimlerinde pergelden vazgeçilemiyeceği

1. Daha Öklid'te karşılaştığımız elemanter geometri çizimleri cedvel ve pergelle yapılmaktadır. Hattâ elemanter geometriyi bütün geometri içinde, kendisine konu teşkil eden geometrik şekillerin cedvel ve pergelle çizilebilmesinin mümkün olması ile sınırlandırmak âdet olmuştur. Bu iki âlet ise tamamen belirli bir rol oynamamaktadırlar: Birçok problemleri arzuya göre bu âletlerin birine veya ötekine havale edebiliriz. Hattâ, *Mascheroni*nin ve onunkilerden çok daha eski olmakla beraber ancak yakın zamanda yeniden bulunan Danimarkalı matematikçi *Mohr*'un araştırmalarına göre, cedvel ve pergelle yapılabilen bütün çizim problemleri sadece pergelle de yapılabilir (1). Aksi istikamette en ileri giden *Jacob Steiner*, *sabit bir daire kendi merkezi ile birlikte çizilmiş olarak* verildiği takdirde bütün elemanter geometri çizimlerinin sadece cedvelle yapılabileceğini göstermiştir. Bu sabit daireden de vazgeçmenin mümkün olmadığı kolaylıkla görülebilir ki, bu husus aşağıda diğer şeylerle birlikte ispat edilmiş olacaktır. Daha açık olarak, *merkezi bilinmeyen* sabit bir dairenin verilmiş olmasının bütün çizimleri yalnız cedvelle yapılabilir hale getirmeye yetmediğini göstereceğiz. Hattâ, merkezleri bilinmeyen *kesişmeyen iki dairenin* de verilmiş olması yetmez. Buna karşılık merkezleri bilinmeyen *kesişen* iki dairenin, merkezi verilmiş Steiner dairesiyle aynı hizmeti gördüğünü biliyoruz. Aynı şey merkezleri bilinmeyen üç kesişmeyen daire için de doğrudur.

2. *Steiner*'e göre, bir daire kendi merkezi ile birlikte çizilmiş olarak verildiği takdirde bütün elemanter geometri çizimleri yalnız cedvelle yapılabileceğinden, burada iş yalnız cedvel yar-

---

(1) Bu türlü araştırmalarda bir doğru (kendisi çizilemiyeceği için) kendisine ait iki nokta ile gösterilir.

dımıyla ne kendisi verilmiş fakat merkezi verilmemiş tek bir dairenin merkezini bulmaya, ne de kendileri verilmiş fakat merkezleri verilmemiş kesişmeyen iki dairenin merkezlerini bulmaya imkân olmadığını ispata kalıyor. Şu halde, iki tane *imkânsızlık ispatı* yapmalıyız. Bu ispatları, evvelâ dairenin merkezini veya dairelerin merkezlerini yalnız cedvelle çizilebilir farzetmek ve sonra bunu bir tenakuza götürmek suretiyle yürüteceğiz. Bu *indirekt* ispat, muhteva bakımından tasvir prensibine dayanacaktır.

Evvelâ şuna dikkat edelim: İki dairenin merkezlerinin yalnız cedvel vasıtasıyla bulunamıyacağı iddiası, tek daireye dair olandan daha ileri giden bir iddia olup, tabiatıyla bu ikinci iddiayı ihtiva eder. Bununla beraber, daha basit olan merkezi bilinmeyen tek daireye dair iddianın ispatını, geometri bakımından daha basit oluşundan ve düşüncelerimizin esaslarını belirtmeye yettiğinden dolayı, ötekinin önüne alacağız.

3. Şimdi, çizili olarak verilmiş bir dairenin merkezini herhangi bir usûlle yalnız cedvel kullanmak suretiyle çizdiğimizi farzedelim. Şu halde, daireyi yahut birbirlerini kesen bir takım doğrular çizilmiş ve bunların bir takım kesim noktaları doğrularla birleştirilmiştir. Bu esnada daire üzerinde bulunmayan bir nokta, üzerinde bulunduğu doğrular vasıtası ile tespit edilebileceğinden, bu işler sonunda dairenin merkezi iki doğrunun kesişme noktası olarak ortaya çıkacaktır. Şu halde bu suretle elde edilen şekil, bir daire ile içlerinden ikisi bu dairenin aradığımız merkezinde kesişen bir takım doğrulardan mürekkeptir.

Şimdi bu şeklin özel bir *tasvir*ini gözden geçireceğiz. Bu, evvelâ daireyi gene bir daireye, her doğruyu bir doğruya ve her kesişme noktasını da gene bir kesişme noktasına dönüştüren bir tasvirdir. Tabiatıyla bu türlü pek çok tasvir vardır: Meselâ bir şeklin kendine benzer olarak her büyütülüş veya küçültülüşü böyle bir tasvirdir. Fakat bu benzerlik tasvirleri burada hiç te işimize yaramaz. Daha ziyade öyle bir tasvir vereceğiz ki, dai-

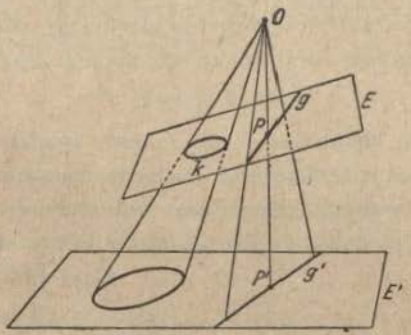
remizi gene bir daireye ve her doğruyu gene bir doğruya çevirsin, fakat şeklin biçimini öyle bozsun ki, dairenin merkezini muhakkak suretle tasvir dairesinin merkezinden başka bir noktaya çevirsin.

Böyle bir tasvir verebildiğimiz takdirde, ispatımız bitmiş olur. Çünkü hakikaten tasvirdeki şekil orijinal şekilden ne kadar farklı olursa olsun, mümkün olduğu farzedilen çizim bakımından iki şekil arasında hiçbir fark yoktur. Orijinal şekil üzerinde yapılan meselâ bir doğrunun çizilmesi, bir kesişme noktasının bulunması yahut iki kesişme noktasının bir doğru ile birleştirilmesi gibi her işleme karşılık, tasvir esnasında daire, doğru ve kesişme noktası olmak özelikleri değişmediğinden, tasvirdeki şekilde de aynı işlem yapılabilir ve tasvirdeki işlemlerin sırası orijinaldekilerin aynı olur. Fakat faraziyeye göre, orijinal dairenin merkezi tasvirdeki dairenin merkezine dönüşmediğinden tasvirdeki çizim bize tasvir dairesinin merkezini veremez: Orijinal şekilde dairenin merkezinde kesişen iki doğruya tasvirde öyle iki doğru tekabül eder ki, bunların kesişme noktaları tasvirdeki dairenin merkezinden farklıdır. Şu halde tasvirdeki şekilde de, dairenin merkezini verdiğini farzettiğimiz çizim adım adım takip edilmekle beraber, tasvirdeki dairenin merkezi elde edilemedi. Bu durum çizim metodunun gayesiyle tenakuz teşkil eder. Şu halde böyle bir çizim metodu mevcut olamaz, yani önceden verilmiş fakat merkezi bilinmeyen bir dairenin merkezini yalnız cedvelle inşa etmek mümkün değildir.

İki daire hali için sonradan vereceğimiz ispat ta buna tamamen benzer tarzda cereyan edecektir.

4. Şimdi iş, yukarda anlatılan tarzda bir tasvir vermeğe kalıyor. Biz böyle bir tasviri sadece uzayda yapılan bir merkezî izdüşürme ile elde edeceğiz. E şekil düzleminin dışında bir O noktası alındığını ve bu noktadan düzlemin her P noktasına giden ışınları çizdiğimizi düşünelim (Şek. 114). OP ışını E' tasvir yahut

izdüşüm düzlemini, P nin tasviri yahut izdüşümü olan, P' noktasında keser. P noktası için olduğu gibi, E deki bütün şekil de nokta nokta E' düzlemine tasvir edilir. Tasvirdeki şekil, meselâ O noktasına konmuş nokta şeklindeki bir ışık kaynağı karşısın-



Şek. 114

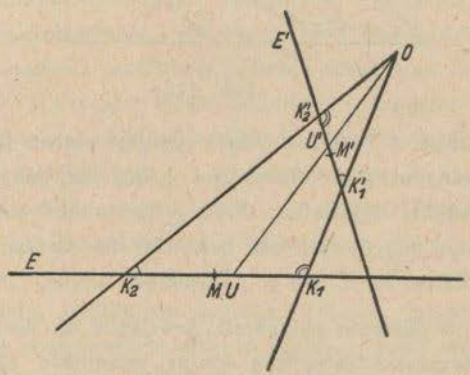
da E deki şeklin E' üzerine düşen gölgesi olarak tasavvur edilebilir. Bu esnada aşikâr olarak her g doğrusu gene g' gibi bir doğruya dönüşür. Hakikaten, O yu g üzerindeki noktalara birleştiren ışınlar hep O ve g nin belirttiği düzlem içinde bulunurlar ki, bu düzlem de E' yü g' doğrusunda keser.

Fakat bir dairenin izdüşümü genellikle bir daire olmaz. O yu k daire çevresine birleştiren ışınlar, genellikle eğik olan bir dairesel koni teşkil ederler. (Bir koninin O tepesini taban dairesinin M merkezine birleştiren doğru daire düzlemine dik olduğu takdirde, koniye «dik» denir. Geri kalan bütün dairesel konilere «eğik» denir). Şimdi E' izdüşüm düzlemi koniyi bir konik üzerinde keser ki, bu da bilindiği gibi genel olarak bir daireden farklıdır. Fakat bizim maksadımız için vazgeçilmez şart, dairenin gene bir daireye tasvir edilmesidir. Bu ise, iki özel halde hakikaten sağlanabilir.

Bu hallerden birincisi trivial olup, bu hal E şekil düzlemi

ile E' tasvir düzleminin birbirine paralel olması halidir. Bu takdirde izdüşürme ile elde edilen tasvir aşikâr olarak bir benzerlik dönüşümü olup, bu benzerlik E', E ye daha uzak veya daha yakın bulunduğuna göre bir büyütme veya bir küçültmedir. Bu hal, şeklimizin biçimini değiştirmediğinden ve bilhassa dairenin merkezini gene tasvirdeki dairenin merkezine dönüştürdüğünden — ki bu bizim tam mani olmak istediğimiz şeydi — işimize yaramaz.

İkinci hal hakkında, evvelâ burada ispatsız zikredeceğimiz ve muhakeme zincirini kesintiye uğratmamak için ispatını ancak bu bölümün sonunda vereceğimiz bir teorem bize bilgi verir (Şek. 115). Eğik koninin taban dairesini ihtiva eden düzleme dik



Şek. 115

olan ve bu dairenin merkezi ile koninin O tepesinden geçen düzlem, eğik koninin bir simetri düzlemidir. Bu düzlemde koninin en kısa OK_1, ve en uzun OK_2 doğurayları bulunur. Bu simetri düzlemi burada şekil düzlemi olarak alınacaktır. Koninin taban dairesi şekilde sadece kendi K_1K_2 çapı ile temsil edilecektir; bu dairenin düzlemi şekil düzlemine diktir. Daire düzlemine paralel her düzlem koniyi tabiatiyle gene bir daire boyunca ke-

secektir. OK_1 ve OK_2 sınır doğuraylarını K_1' ve K_2' noktalarında $\sphericalangle OK_1'K_2' = \sphericalangle OK_2K_1$ ve neticede (bir üçgenin bütün açılarının toplamı 2 dik açıya eşit olduğundan) $\sphericalangle OK_2'K_1' = \sphericalangle OK_1K_2$ de olacak şekilde kesen bir düzlem için, koniyi bir *ters kesit* üzerinde kesiyor denir. Bu takdirde, ispatını sonraya bıraktığımız yardımcı teorem şöyle ifade edilebilir:

Daire tabanlı bir eğik koninin herhangi bir ters kesiti de bir dairedir.

Bir daire kesitine paralel bütün kesitler de daire olduklarından, bu teoreme göre daire tabanlı bir eğik koni üzerinde iki paralel daire kesiti ailesi mevcuttur ki, bunlar birbirinden hiçbir bakımdan farklı değildirler.

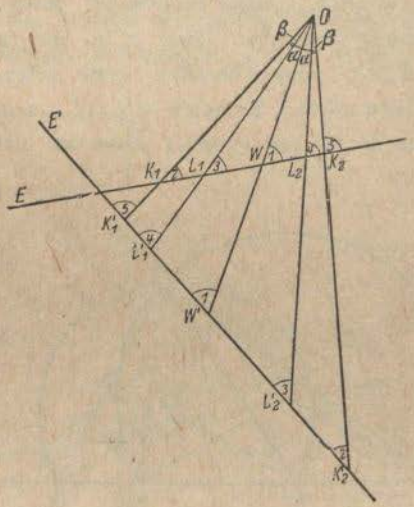
Şimdi E deki K_1K_2 dairesinin E' deki $K_1'K_2'$ dairesi üzerine O noktasından yapılan izdüşümü, ispatımızda bize lâzım olan izdüşümdür. Hakikaten, derhal göreceğimiz üzere, K_1K_2 nin M merkezi $K_1'K_2'$ nin M' merkezi üzerine *düşmez*. Evvelâ K_1OK_2 ve $K_1'OK_2'$ üçgenlerinin O noktasında aynı açıortayını haiz olduğunu kaydedelim. Bu açıortay, bu üçgenlerin herbirinde K_1K_2 veya $K_1'K_2'$ karşı kenarını yanındaki kenarların oranında böldüğünden ve bu kenarlar da faraziyeye göre (yani *eğik* konide) birbirine eşit olmadıklarından, ne K_1K_2 nin M ortasından, ne de $K_1'K_2'$ nin M' ortasından geçer. Bundan başka M ve M' merkezleri açı ortayın başka başka taraflarında bulunurlar. Bu son hususu görmek için, $OK_1'K_2'$ üçgeninin OU' ye göre simetriğini alalım. Bu üçgenin simetriği OK_1K_2 ye benzer olduğundan, $K_2'K_1'$ in simetri neticesinde aldığı durum K_1K_2 ye paralel olur. Fakat şimdi (açıortay K_1K_2 ve $K_2'K_1'$ i aynı oranda böldüğünden) bu kenarların M ve M' orta noktaları açıortayın aynı tarafında bulunmalıdır. Şu halde bunların simetriden evvel açıortayın başka başka taraflarında bulunmuş olmaları icabeder. Şu halde başlangıçtaki durumda bunların O dan itibaren bir izdüşürme ile birbirine çevrilmesi imkânsızdır.

5. Bu suretle, sadece bir cedvel vasıtasıyla bir dairenin bilinmeyen merkezini bulmanın mümkün olmadığının ispatı, daire tabanlı eğik koniklerin ters kesitleri hakkındaki yardımcı teoremin ispatına dair kısmı müstesna olmak üzere, bitirilmiş bulunmaktadır. İspatın muhtelif kısımlarının birbirleriyle bağlantısını Şek. 115 üzerinde bir kere daha görebiliriz: E düzlemindeki K_1K_2 dairesi ile bir takım doğrulardan ibaret bir şeklin O noktasından itibaren E' düzlemi üzerindeki izdüşümü alındığı takdirde, doğrular doğrulara, K_1K_2 dairesi de $K_1'K_2'$ dairesine dönüşür. Fakat bu esnada K_1K_2 nin M merkezi $K_1'K_2'$ nin M' merkezine dönüşmez. Şu halde bizi E de hedefe götüren bir inşa metodu (şayet mevcut olsa), E' de hedefe götüremez. Şu halde böyle bir inşa metodunun mevcudiyeti imkânsızdır.

6. *İki* dairenin verilmiş olması halinde kullanacağımız tasvirin aranması daha zordur. Bu takdirde O izdüşürme merkezinden çıkan iki eğik koni elde ederiz ki, bu konilerin her ikisinin de E' izdüşüm düzlemi tarafından birer ters kesit boyunca kesilmelerini sağlamamız lâzımdır.

Burada iki şık ayıracağız: Birinci şıkta *E üzerindeki iki daireden biri ötekinin içinde bulunsun.* Şekil düzlemi bu iki dairenin M ve N merkezlerinden geçen ve E ye dik düzlem olsun. Bu düzlemin daireler üzerinde kestiği çaplar da K_1K_2 ve L_1L_2 olsun (Şek. 116). Şimdi eğer O noktasını OK_1K_2 ve OL_1L_2 üçgenlerinde O dan çıkan açıortayları çakışacak şekilde seçmek mümkün olursa, iki eğik konideki ters kesitlerin birbirine paralel olduğunu ve neticede aynı E' düzlemi tarafından meydana getirilebileceğini iddia edebiliriz. Bu maksadı sağlamak için OWW' açı ortayı E' düzlemini E yi kestiği açıya eşit, fakat aksi yönde bir açı altında kesmelidir. Bu takdirde Şek. 116 da aynı şekilde işaretlenmiş açılar (faraziyeye göre $\sphericalangle L_1OW = \sphericalangle L_2OW$ ve $\sphericalangle K_1OW = \sphericalangle K_2OW$ olduğundan) birbirlerine eşit olarak, hakikaten E ve E' birbirlerinin tersi olan iki kesit meydana getirirler. O noktasından yapılan bir izdüşürmede iç içe bulunan

K_1K_2 ve L_1L_2 daireleri gene iç içe bulunan $K_1'K_2'$ ve $L_1'L_2'$ dairelerine dönüşürler.

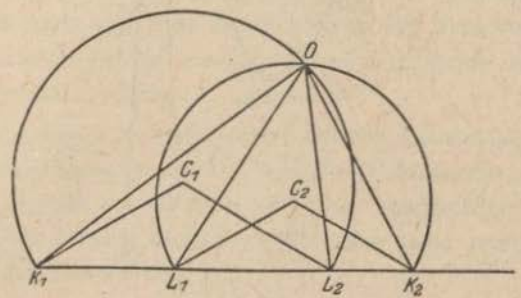


Şek. 116

Bundan sonra dairelerin merkezlerini sadece cedvel kullanmak suretiyle bulmaya imkân veren bir inşa metodunun mevcut olduğu farzedilerek, tıpkı yukarda olduğu gibi, bunun bir tenakuza yol açtığı ispat edilir. Hakikaten, E de sadece doğru çizimlerinden ibaret bir çizim E' üzerinde gene aynı tarzda bir çizime dönüşür. Fakat M ve N noktalarından hiçbiri tasvirdeki dairelerin merkezlerine dönüşmediğinden, böyle bir çizim metodu mevcut olamaz.

Şu halde iş O noktasının, OK_1K_2 ve OL_1L_2 üçgenlerinde O dan çıkan açıortayları çakışacak surette seçilmesine kalıyor. Fakat ($\sphericalangle K_1OW = \sphericalangle K_2OW$ ve $\sphericalangle L_2OW = \sphericalangle L_1OW$ den taraf tarafa toplamak suretiyle elde edileceği üzere) $\sphericalangle K_1OL_2 = \sphericalangle K_2OL_1$ olması icabettiğini düşünürsek, şöyle hareket edebiliriz:

$\sphericalangle K_1OL_2 = \sphericalangle K_2OL_1 = \delta$ yı keyfî olarak alalım ve gerek K_1L_2, gerek K_2L_1 üzerinde bunları kiriş olarak kabûl eden δ çevre açılı daire yaylarını çizelim (1). Kirişleri birbirini ayırdığından dolayı *kesişmek zorunda olan* bu iki daire yayı aradığımız O noktasında kesişirler (Şek. 117). Bu takdirde evvelâ $\sphericalangle K_1OL_2 = \sphericalangle K_2OL_1$ olup, buradan aynı zamanda $\sphericalangle K_1OL_1 = \sphericalangle K_2OL_2$ olduğu çıkar. Şu halde $\sphericalangle L_1OL_2$ açısının açıortayı $\sphericalangle K_1OK_2$ açısını da iki eşit parçaya böler ki, bizim istediğimiz de bu idi.



Şek. 117

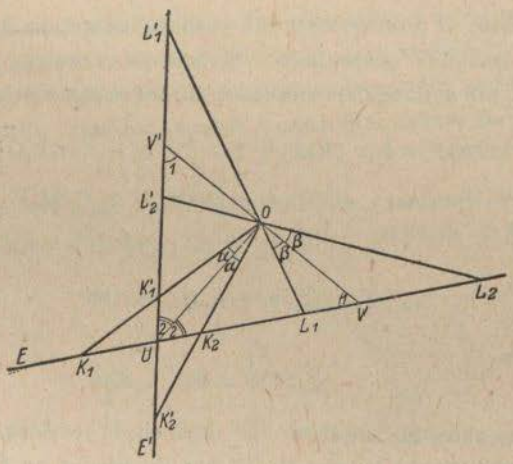
7. Şimdi geriye ikinci şık olarak, *kendileri verilmiş, fakat merkezleri verilmemiş olan iki dairenin birbirinin tamamen dışında olmaları* hali kalıyor. Bu şıkta tabiatıyla birbirinin tamamen dışında olan iki izdüşürme konisi elde edeceğimizden, O nun hiçbir durumunda OK_1K_2 ve OL_1L_2 üçgenlerinin açı ortayları çakışamazlar.

Bu şıkta konilerden birinin ters konisini (yani koniyi doğuran yarı doğruların O dan itibaren uzatılması ile elde edilen

(1) Bu dairelerin merkezleri C_1 ve C_2 ise, $K_1C_1L_2$ ve $L_1C_2K_2$ merkez açıları da birbirlerine eşit olmalıdır. Buradan Şek. 117 nin inşası için aşağıki talimat elde edilir:

$$\sphericalangle C_1K_1L_2 = \sphericalangle C_2L_1K_2 = 90^\circ - \delta$$

tamamlayıcı yarı doğruların teşkil ettiği koni) yardıma çağırmak lâzımdır (Şek. 118). E' düzleminin, OL_1L_2 nin ters konisi olan $OL_1'L_2'$ konisini $L_1'L_2'$ de ve OK_1K_2 yi de $K_1'K_2'$ de E düzlemine tekabül eden ters kesitler olarak kesebilmesi için, evvelâ $\sphericalangle L_1OL_2$ nin OV açıortayının E düzlemini kestiği açının, OV nin geriye



Şek. 118

doğru uzatılmasıyla elde edilen, $\sphericalangle L_1'OL_2'$ nin OV' açı ortayının E' düzlemini kestiği açıya eşit olması, ikinci olarak $\sphericalangle K_1OK_2$ nin OU açıortayının E ve E' düzlemlerini eşit açılar altında kesmesi lâzımdır. Düzlemlerin doğrulara göre durumları şekilden okunabilir. VOV' nün durumundan UVV' üçgeninin eşkenar olduğu çıkar. OU nun E ve E' ile teşkil ettiği açıların eşitliğinden de UO nun UVV' ikizkenar üçgeninin U dan çıkan açıortayı olduğu görülür. Bir ikizkenar üçgende tepeden çıkan açıortaylar aynı zamanda yükseklik olduklarından, yani tabana (burada VV') dik bulunduklarından, VOU ve $V'OU$ açıları dik açılardır. Bu takdirde Şek. 118 deki açı adlarıyla:

$$\sphericalangle K_1OL_1 = 90° + \alpha - \beta$$

$$\sphericalangle K_2OL_2 = 90° - \alpha + \beta,$$

şu halde

$$(1) \qquad \sphericalangle K_1OL_1 + \sphericalangle K_2OL_2 = 180°$$

olur. Şu halde O noktası öyle bir yerde bulunmalıdır ki, O daki açılar (1) eşitliğini gerçeklesin. Bu olduğu takdirde $\sphericalangle K_1OK_2$ ve $\sphericalangle L_1OL_2$ nin açıortayları hakikaten birbirine dik olurlar, çünkü :

$$\begin{aligned} 2\sphericalangle UOV &= 2\sphericalangle UOK_2 + 2\sphericalangle K_2OL_1 + 2\sphericalangle L_1OV \\ &= (\sphericalangle K_1OU + \sphericalangle UOK_2 + \sphericalangle K_2OL_1) \\ &\quad + (\sphericalangle K_2OL_1 + \sphericalangle L_1OV + \sphericalangle VOL_2) \\ &= \sphericalangle K_1OL_1 + \sphericalangle K_2OL_2 = 180°, \end{aligned}$$

ve neticede

$$\sphericalangle UOV = 90° \quad \text{dir.}$$

Bu gerçekleştiği takdirde E' düzlemini şekildeki gibi almak mümkündür, ki bu suretle E' her iki koniyi de E ye tekabül eden ters kesitlere göre keser. E düzleminin O noktasından E' üzerine izdüşümü burada da ispatta ihtiyaç duyulan tasviri verir. Bu tasvirden, önceki gibi, K_1K_2 ve L_1L_2 dairelerinin merkezlerini bulmak için yalnız doğru çizimlerinden ibaret bir inşa metodunun mevcut olamıyacağı neticesini çıkarırız.

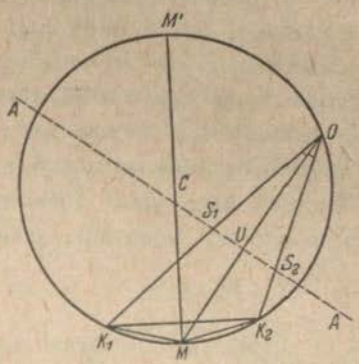
Yukarıda anlatılan durumda bir O noktası bulmak için, $\sphericalangle K_1OL_1 = \varphi$ ve $\sphericalangle K_2OL_2 = \psi$ açılarından bir tanesini keyfî olarak seçebiliriz; fakat bunların toplamı 180° olmalıdır. Bundan sonra K_1L_1 kirişini φ çevre açısı altında gören daire yayı ile K_2L_2 kirişini ψ çevre açısı altında gören daire yayını çizeriz. Faraziyeye göre K_1L_1 ve K_2L_2 iç içe girmiş bulunduklarından, bu iki daire yayı birbirini kesmek zorundadırlar; bunların O kesişme noktası aradığımız noktadır.

Bu suretle, birbirini kesmeyen iki dairenin, merkezleri de verilmeden, yalnız çevrelerinin verilmesinin bütün elemanter geometri çizimlerini yalnız cedvelle yapılabilir hale getirmeye yetmediğinin ispatı tamamlanmış oluyor.

Ek

Daire tabanlı eğik konilerin ters kesitlerine dair teoremin ispatı. 4. te daire tabanlı eğik konilerin ters kesitlerine dair bir teorem ifade etmiş ve bu teoremi devamlı surette kullanmış olmakla birlikte, ispatını sonraya bırakmıştık. Şimdi bu ispatı vereceğiz.

Bunun için eğik koniyi şekilde gene arakesiti ile gösterelim (Şek. 119 a bakınız). Şekil düzlemi koninin O tepesinden



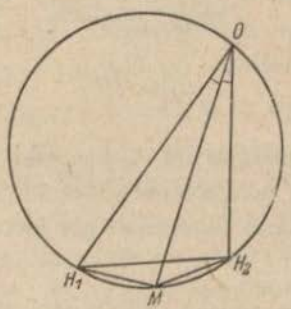
Şek. 119

geçsin ve taban düzlemine dik olarak taban dairesini K_1K_2 çapı üzerinde kessin. Bu takdirde şekil düzlemi, eğik koninin bir simetri düzlemidir. Bizim hedefimiz diğer bir simetri düzlemi bulmaktır.

OK_1K_2 üçgeninin dışına çizilmiş dairesini inşa edelim. Bundan başka bu üçgende $\sphericalangle K_1OK_2$ nin açıortayını çizdikten sonra

bu açıortayı daireyi bir M noktasında kesinceye kadar uzatalım. $\sphericalangle K_1OM$ ve $\sphericalangle K_2OM$ birbirine eşit olmak zorunda bulunduklarından, eşit çevre açılarının karşısında eşit yayların bulunması dolayısı ile, K_1M ve K_2M daire yayları da birbirine eşit olmalıdır. Şu halde üçgenin dışına çizilen dairenin C merkezinden K_1K_2 kirişine indirilen, ve neticede bu kirişi iki eşit parçaya ayıran, dikme de bu daireyi M noktasında keser. Şimdi bu daireyi $M'CM$ ekseni etrafında döndürürsek bir küre meydana gelir. Bu küre üzerinde koninin K_1K_2 taban dairesi ile birlikte O tepesi de bulunur; şu halde küre, koninin dışına çizilmiştir. Bu suretle M noktası K_1K_2 taban dairesinin her noktasından aynı uzaklıkta bulunur.

OM doğrusu eğik konide özel bir rol oynar ki, bu rol ona ***koninin ekseni*** adının verilmesine sebep olmuştur. Hakikaten, bu eksenden geçirilen herhangi bir düzlem koniyi tepesi O olan ve H_1 ve H_2 adını vereceğimiz diğer köşeleri taban dairesi üzerinde bulunan bir üçgen şeklinde keser. Aynı düzlem, küreyi de OH_1H_2 kesit üçgeninin dışına çizilmiş dairesi boyunca keser. Bu dışa çizilmiş daire üzerinde M noktası da bulunmakta olup, neticede Şek. 119 a tamamen benzer bir şekil elde ederiz (Şek. 120). OM ekseni OH_1H_2 üçgeninin de açıortayı olmalıdır, çünkü M noktasının

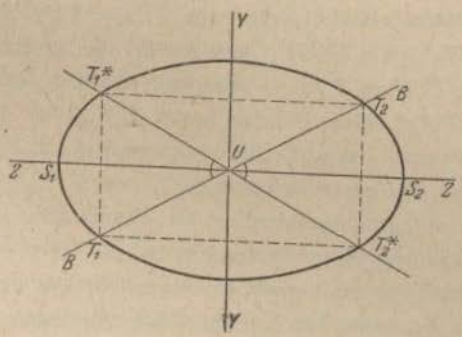


Şek. 120

koninin taban dairesine göre durumu sebebiyle H_1M ve H_2M kirişleri aynı uzunlukta olup, bu kirişler eşit büyüklükte $\sphericalangle H_1OM$ ve $\sphericalangle H_2OM$ çevre açılarının meydana gelmesine sebep olurlar. Şu halde aşağıki kısmî neticeyi kaydedebiliriz:

Eğik koninin ekseninden geçen her düzlem koniyi öyle bir üçgen boyunca keser ki, eksen bu üçgenin bir açıortayı olsun.

Şimdi koniyi eksenine *dik* bir A düzlemi ile keselim. Bu düzlem tabiatıyla, koni eksenini ihtiva eden şekil düzlemine de diktir. Şek. 119 da A düzleminin şekil düzlemi ile arakesiti AA ile gösterilmiştir. A düzleminde, bu düzlemin eğik koniyle ara kesiti olarak bir kesit şekli meydana gelir. Şek. 121 de, A düz-



Şek. 121

lemi şekil düzlemi olarak alınmak suretiyle, bu kesit şekli gösterilmektedir. Buna göre koninin ekseni bu yeni şekil düzlemine diktir. Eski şekil düzlemi, yenisini ZZ doğrusu boyunca keser. Eksenden geçen herhangi bir B düzlemi A düzlemini BB boyunca kessin ve koninin BB üzerindeki noktaları T_1, T_2 olsun. T_1OT_2 üçgeninde UO ekseni aynı zamanda T_1T_2 ye dik olduğundan ve yukarda işaret edilen kısmî neticeye göre T_1OT_2 açısını(1)

(1) Bu açı şekilde tabiatıyla gösterilmemiştir, çünkü O noktası şekil düzleminde bulunmayıp, bu düzleme U dan çıkıldığı tasavvur edilen dikme üzerinde bulunmaktadır.

iki eşit parçaya böldüğünden, $T_1U = T_2U$ olmalıdır. Şu halde U noktası A düzlemindeki koni kesitinin bir simetri merkezidir. (1)

Şimdi kesit eğrisi ZZ ye göre T_1 ve T_2 nin sırasıyla simetrikleri olan T_1^* ve T_2^* noktalarını da ihtiva etmelidir; çünkü yeni şekil düzlemini ZZ boyunca kesen eski şekil düzlemi eğik koninin simetri düzlemi bulunduğundan, ZZ Şek. 121 in simetri ekseni olmalıdır.

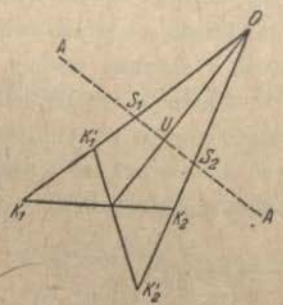
Şimdi, U da ZZ ye dik olan YY doğrusunun da şeklin bir simetri ekseni olduğu kolaylıkla görülür. Çünkü 4 tane T_1, T_2^*, T_2, T_1^* noktası merkezi U olan bir dik dörtgen teşkil ederler. ($T_1U = T_2U$ sebebiyle bunların simetriklerinde de $T_1^*U = T_2^*U$ dur; bundan başka $\sphericalangle T_1UT_1^*$ ve $\sphericalangle T_2UT_2^*$ ters açıları da birbirine eşit olduğundan, $T_1^*T_1U$ ve $T_2^*T_2U$ üçgenleri birbirine eşit olup, böylece $T_1T_1^* = T_2T_2^*$ olur. Bundan başka $T_1T_1^*$ ve $T_2T_2^*$ ZZ ye dik olarak birbirine paralel bulunduklarından, $T_1T_2^*T_2T_1^*$ bir paralelkenardır. Bu paralelkenarın T_1T_2 ve $T_1^*T_2^*$ köşegenleri birbirine eşit olduğundan, kendisi bir dikdörtgen olur.) Böyle bir mülâhaza sadece bizim özel şeklimiz için cari olmakla kalmaz, fakat daha umumî olarak şu teoremi ortaya atabiliriz: Bir simetri ekseni ile onun üzerinde bulunan bir simetri merkezini haiz bir şekil, ikinci bir simetri eksenini de haiz olup, bu simetri ekseni simetri merkezinden geçen ve birinci simetri eksenine dik olan doğrudan ibarettir.

Bunun eğik koni için mânası, koninin ekseninden geçen ve Şek. 119 ve 121 deki şekil düzlemine dik olan düzlemin, koninin ikinci bir simetri düzlemini teşkil ettiğidir. Çünkü bu düzlem, Şek. 119 da şekil düzlemine U noktasında dik olarak çıkıldığını düşünmemiz lâzım gelen, YY doğrusunu ihtiva etmektedir.

---

(1) Bu kesit şeklinin daha yakından bir inceleme neticesinde bir elips olduğu meydana çıkar. Fakat bu husus bizi alâkadar etmez.

Koninin bu ikinci simetri düzlemine göre simetriğini alırsak, simetrik koni ilk koni ile çakışır. Bu ifade yukarıda incelenen simetri özeliğinin başka bir türlü ifadesidir. Bu simetri esnasında koni üzerinde bulunan K_1K_2 dairesi kendi simetriği olan $K_1'K_2'$ üzerine dönüşür ki, bu da tabiî gene bir daire olmak ve koni üzerinde bulunmak zorundadır (Şek. 122). Bu so-



Şek. 122

nuncu daire, koninin K_1K_2 daire kesitine tekabül eden ters kesittir. $K_1'K_2'$ dairesinin üzerinde bulunduğu düzlemin durumu, yukarıda ters kesitin tarifinde verilen durumun aynıdır. Bundan başka K_1K_2 dairesi kendi simetriği ile çakışamaz, çünkü bu hal ancak daire düzlemi koninin eksenine dik olduğu zaman vaki olabilir. Bu takdirde ise konimiz, faraziyemize aykırı olarak bir dik koni olurdu.

Bu suretle, eğik konilerin ters kesitlerine dair evvelce kullanmış bulunduğumuz teoremi ispat etmiş olduk.

22. 30 sayısının bir özeliği

Ne 10, ne de 21 bir asal sayı değildir. Fakat $10 = 2 \cdot 5$ ve $21 = 3 \cdot 7$ nin (1 den büyük) hiçbir ortak böleni yoktur. Bundan dolayı, böyle sayılara «aralarında asal sayılar» denir. 6 ve 10 sayıları aralarında asal değildir, çünkü 2 ortak bölenini haizdir.

10 sayısı 1 den 9 a kadarki sayılar içinde şunlarla aralarında asaldır: 3, 7, 9; bunlardan 9 sayısı bir asal sayı değildir, fakat buna rağmen 10 ile aralarında asaldır. 12 için durum başkadır: Burada 1 den 11 e kadarki sayılar içinde sadece 5, 7, 11 sayıları 12 ile aralarında asaldır ki, bunların kendileri de hep asal sayılardır. Kolayca deneneceği üzere aşağıki sayılarda da 12 halinde öğrenmiş olduğumuz durum caridir:

3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Acaba 30 sayısı, kendinden küçük ve kendisiyle aralarında asal olan sayıların hepsinin asal sayılar olması özeliğini haiz en son sayı mıdır? Aşağıda bunun böyle olduğu ispat edilecektir.

Evvelâ çok basit bir ihtarla işe başlıyalım. 4 ten itibaren yukarıki özeliği haiz her N sayısı 2 ile bölünebilmelidir; çünkü bu sayı tek olsaydı, 4 onunla aralarında asal ve ondan küçük bir sayı olacaktı ki, 4 ün kendisi asal değildir. Aynı şekilde 9 dan itibaren böyle her N sayısı 3 ile de bölünebilmelidir. Böyle bir sayı zaten 2 ile de bölünebileceğinden neticede $2 \cdot 3$ ile de bölünebilir. Aynı tarzda muhakemeye devam ederek, şu cedveli elde ederiz:

N	4 ten itibaren		$2 =$	2	ile bölünebilmelidir.
N	9 dan	»	$2 \cdot 3 =$	6	» »
N	25 ten	»	$2 \cdot 3 \cdot 5 =$	6	» »
N	49 dan	»	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$	210	» »
N	121 den	»	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =$	2319	» »

Şu halde 4 ile 9 arasında yalnız 4, 6, 8 sayıları, 9 ile 25 arasında yalnız 12, 18, 24 sayıları, 25 ile 49 arasında yalnız 30 sayısı (30 ile bölünebilen bir sonraki sayı 60 olup, 49 sınırını aşar) bahis konusu olabilir. 49 ile 121 arasında ise hiçbir sayı bahis konusu olamaz, çünkü 210, 121 den büyük olduğu gibi, 30 da zaten 49 dan küçüktü. Eğer 13^2 nin $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ den, 17^2 nin $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$ ten küçük ve umumî olarak,

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ldots$$

den ibaret asal sayılar dizisi 1. bölümdeki gibi

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6,\ p_7,\ldots$$

ile gösterilmek üzere, $n = 4$ ten itibaren

(1) $$p_{n+1}^2 < p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n$$

olduğunu bilsek, aynı muhakemeyi sonsuz kere tekrarlıyabiliriz.

1. Bölümde verilen Öklid'in ispatı, aslında,

$$p_{n+1} < p_1\cdot p_2\cdots p_n$$

olduğunu bize öğretir. Burada bizim muhtaç olduğumuz şey ise

$$p_{n+1} < \sqrt{p_1\cdot p_2\cdots p_n}$$

eşitsizliği olup, Öklid'in ispatının bize verdiğinden *daha fazla* bir şeydir. Öte yandan, (1) 'i ispat ettiğimiz zaman bu bölümün başında ortaya atmış olduğumuz problem de çözülmüş olur. Şu halde bundan sonra yalnız (1) in ispatı ile uğraşacağız ki, bu eşitsizlik belki kendi başına da ilgi çekmeye lâyıktır.

Aslında (1) den çok daha fazlası doğrudur : $p = 11$ den sonra gelen ilk asal sayı yalnız $\sqrt{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11} = \sqrt{2310} = 48{,}06\cdots$ nın altında olmakla kalmaz, bu sayı hakikatte çok daha küçük olup

13 e eşittir, ve s.; fakat asal sayıların fevkalâde intizamsız dağılışı karşısında onlara dair umumî ifadelerde bulunmak son derece zor olup, Rus Matematikçisi *Tschebyschef* çok ağır matematik vasıtalar kullanarak p_n den sonra gelen ilk p_{n+1} asal sayısı için $p_{n+1} < 2p_n$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu, tabiatiyle burada muhtaç olduğumuzdan yani (1) in ifade ettiğinden çok daha ileri giden bir neticedir. Fakat burada bahis konusu olan soru, bundan çok daha hafif olan (1) ifadesinin basit ve elemanter vâsıtalarla ispat edilip edilemiyeceğidir.

Münster Üniversitesinden *Bonse* adlı bir talebe 1907 senesinde çok keskin görüşlü bir muhakeme ile bu soruya müspet cevap vermeye muvaffak olmuştur. Bu muhakeme, yalnız *Tschebyschef*'in kullanmış olduğu Analiz ve sonsuz işlemler'e dair vasıtalardan sakınmakla kalmaz, fakat aynı zamanda, matematiğe dair 1. Bölümde farzedilenden daha fazla bir ön bilgiye de ihtiyaç göstermez.

1. İspatın esas fikri doğrudan doğruya, 1. Bölümde vermiş olduğumuz, Öklid'in ispatına bağlanır. Bununla beraber, burada ilk n tane asal sayıdan

$$K = p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \qquad \text{veya} \qquad M = p_1 p_2 \cdots p_n - 1$$

ifadeleri teşkil edilecek yerde, $p_1, \cdots, p_n$ sayılarının yalnız bir kısmı, meselâ bunların i tanesi alınarak aşağıki p_i tane ifade teşkil edilir :

$$\begin{aligned}
M_1 &= p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 1 - 1, \\
M_2 &= p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 2 - 1, \\
M_3 &= p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 3 - 1, \\
M_4 &= p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot 4 - 1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_{p_i} &= p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \cdot p_i - 1.
\end{aligned}$$

Bunlardan tam Öklid muhakemesi örneğine göre şu neticeler elde edilir :

a) *Bu ifadelerin hiçbiri* $p_1, p_2, \cdots, p_{i-1}$ *sayılarından biri ile bölünemez.*

b) *Bunların en çok bir tanesi* p_i *ile bölünebilir.* Çünkü bunlardan herhangi ikisi, meselâ $p_1 \cdots p_{i-1} x - 1$ ve $p_1 \cdots p_{i-1} y - 1$ 'in her ikisi de p_i ile bölünebilirse, onların farkı olan $p_1 \cdots p_{i-1}(x-y)$ de ve, p_i ilk $i-1$ tane çarpanı bölemiyeceğinden, $x-y$ de p_i ile bölünebilmelidir. Fakat x, y 1, 2, 3, 4, $\cdots, p_i$ sayılarından herhangi ikisi olduğundan, bunların farkının mutlak değeri en çok, birinin 1, diğerinin p_i olması halinde, $p_i - 1$ e eşittir, yani daima p_i den küçüktür. Şu halde p_i bu farkı bölemez, çünkü bir sayı hiçbir zaman kendisinden daha küçüğünü bölemez.

c) *Aynı şekilde yukarıki ifadelerin en çok bir tanesi* p_{i+1} *ile, gene en çok bir tanesi* p_{i+2} *ile, ilâh..., en çok bir tanesi* p_n *ile bölünebilir.*

Şimdi ilk hayatî muhakeme geliyor: $p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n$ sayılarının miktarı $M_1, \ldots, M_{p_i}$ ifadelerinin miktarından daha küçük ise, diğer kelimelerle

$$n - i + 1 < p_i \tag{2}$$

ise, M ifadeleri arasında en aşağı öyle bir tanesi vardır ki, $p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n$ sayılarının hiçbirisi ile bölünemez, çünkü bu ifadelerin herbiri bu sayıların en çok bir tanesi ile bölünebiliyordu. Bundan başka a) dolayısı ile $p_1, \cdots, p_{i-1}$ sayılarından hiçbiri de bu ifadeyi bölemiyeceklerinden, ilk n tane asal sayıdan hiçbiri onu bölemez. Bu ifadeye M_h diyelim. Şimdi bu M_h — burada muhakeme tıpkı Öklid ispatındaki örneğe göre cereyan eder — ya bir asal sayıdır, ki bu takdirde p_n den büyük bir asal sayı teşkil eder, yahut bir takım asal çarpanlara ayrılır ki, bunlar arasında $p_1, \cdots, p_n$ bulunamaz, şu halde bu çarpanların hepsi p_n den büyük olur. Her halükârda p_n den sonra gelen ve M_h yı bölen

veya M_h ya eşit olan, şu halde muhakkak surette M_h yı geçmeyen bir asal sayı mevcuttur. M ifadelerinin en sonuncusu olan M_{p_i} bunların hepsinden daha büyük olduğundan, bu asal sayı da M_{p_i} yi de geçemez. Burada, gözönüne aldığımız bu asal sayının hemen p_n den sonra gelen asal sayı, yani p_{n+1}, olacağını iddia etmiyoruz. Fakat bu böyle olmasa bile, o asal sayı p_{n+1} den daha da büyük olur ki, neticede p_{n+1} daha kuvvetle M_{p_i} yi geçemez:

$$p_{n+1} \leqq p_1 \cdots p_i - 1 < p_1 \cdots p_i.$$

Buna göre araştırmamızın neticesi şimdilik şudur: (2) *cari olduğu takdirde*

$$p_{n+1} < p_1 \cdots p_i \tag{3}$$

dir.

2. Buraya kadarki düşüncelerin vermiş olduğu bu netice aşikâr olarak, Öklid ispatının vermiş olduğu

$$p_{n+1} < p_1 \cdots p_n$$

neticesinin keskinleştirilmiş bir şeklidir. Çünkü (3) teki i, n den daha küçük olup, bu formüldeki sağ taraf Öklid ispatının verdiği sağ taraftan daha küçüktür. Fakat bütün mesele, bu kazancımızın ne kadar büyük olduğudur. Çünkü (2) şartı i yi istediğimiz kadar küçük almamıza imkân vermez, bil'âkis i o kadar büyük olmalıdır ki, $p_i, \ldots, p_n$ sayılarının miktarı, yani $n-i+1$, onların ilki olan p_i den daha küçük olsun. Hakikaten ince bir şart! Bu şartın tesir genişliği hakkında basit bir misâl üzerinde fikir edinelim.

$n=5$ olsun, yani bahis konusu ilk 5 tane 2, 3, 5, 7, 11 asal sayısı bulunsun. $p_i=3$ olarak, yani $i=2$, seçsek, $p_i, \ldots, p_n$ grubu 3, 5, 7, 11 den ibaret ve bunların sayısı $n-i+1=5-2+1=4$ olur ki bu da yukarıki dört asal sayının en küçüğü olan $p_i=3$ ten daha küçük değildir. Şimdi i yi 1 birim daha

büyütelim, yani 3 olarak seçelim. Bu takdirde $p_i = 5$ olur ve 5, 7, 11 sayıları şimdi 3 tane olup, 3 bunların en küçüğü olan 5 ten hakikaten daha küçüktür. i daha da büyük seçildiği takdirde (2) şartının daha kuvvetle gerçekleşeceği açıktır.

Şimdi ispat etmek istediğimiz iddia şudur: *i yi (2) şartına uygun değerlerin mümkün olan en küçüğü olarak seçtiğimiz takdirde*

$$p_1 \cdots p_i < p_{i+1} \cdots p_n \tag{4}$$

olur.

$n = 5$ için bu iddia doğrudur. Çünkü doğrudan doğruya hesap yapmak suretiyle $2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11$ olduğu görülür. Bu iddianın daha öteye de doğru kaldığını görmek için, i nin iddiadaki değerinin n arttıkça nasıl değiştiğini daha yakından incelemek lâzımdır.

$n = 5$ ten $n = 6$ ya geçersek, yani ilk 6 asal sayı olan 2, 3, 5, 7, 11, 13 ü gözönüne alırsak, burada da $p_i = 5$ olacağı aşikârdır. Çünkü önceki halde $n - i + 1 = 3$ sayısı 5 ten hattâ 2 birim daha küçüktür. Şimdi 13 sayısı gruptaki sayılara katıldığından, gruptaki sayı miktarı 4 olur ki, bu da hâlâ $p_i = 5$ ten küçük kalır. Ancak $n = 7$ haline geçtiğimiz zaman gruba 17 de katılarak gruptaki sayı miktarı 5 e çıkar ki, bu da artık $p_i = 5$ ten daha küçük değildir. Şu halde burada i yi bir birim daha büyük, yani $p_i = 7$ olarak almak lâzımdır. Bu son durumda grup 6 taneye kadar asal sayı, yani 7, 11, 13, 17, 19, 23 sayılarını ihtiva edebilir. Şu halde $p_i = 7$ seçimi, müteakıp 3 adım, yani $n = 7, 8, 9$ için kâfi gelir; bundan sonra $p_i = 11$ olmalıdır, ve bu kere 7 den hemen sonra gelen sayı ondan 2 değil, 4 birim daha büyük olduğundan, bu seçim daha 3 değil, hattâ 5 müteakıp adım için kâfi gelir. Umumî durum hakkında en iyi fikri, p_i lerin kalın rakamlarla gösterildiği, aşağıki cedvelden edinebiliriz:

$n=5$: 2, 3, **5**, 7, 11
$n=6$: 2, 3, **5**, 7, 11, 13
$n=7$: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17
$n=8$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19
$n=9$: 2, 3, 5, 7, 11, **13**, 17, 19, 23
$n=10$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29
$n=11$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31
$n=12$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 27, 31, 37
$n=13$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41
$n=14$: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43
$n=15$: 2, 3, 5, 7, 11, **13**, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
.....

n arttıkça en uygun i nin nasıl seçileceğine dair umumî bir görüşe sahip olduktan sonra, iş (4) iddiasının da bu esnada doğruluğunu muhafaza edip etmediğini araştırmaya kalıyor. Bu iddianın henüz $n=6$ için de cari olduğu aşikârdır. Çünkü

(5) $$2\cdot3\cdot5<7\cdot11$$

ise, aynı zamanda

(6) $$2\cdot3\cdot5<7\cdot11\cdot3$$

olur; $n=5$ ten $n=6$ ya geçerken i nin değeri değişmediğinden (6), (5) ten dolayı aşikârdır.

$n=6$ dan $n=7$ ye geçerken durum başkadır. Burada 7 çarpanı eşitsizliğin sağ tarafından sol tarafına geçer, fakat buna karşılık ta sağ tarafına bir 17 çarpanı girer. Burada öğrenmek isteyeceğimiz şey,

(7) $$2\cdot3\cdot5\cdot7<11\cdot13\cdot17$$

eşitsizliğinin doğru olup olmadığıdır. Bu eşitsizliği, hesap yapmadan, (6) dan doğrudan doğruya elde edemeyiz. Çünkü her ne kadar (6) eşitsizliğinin solunu 7 ve sağını 17 ile çarptığımızda bu

eşitsizlik doğru kalırsa da, bu yolla elde edeceğimiz netice

$$2\cdot3\cdot5\cdot7 < 7\cdot11\cdot13\cdot17$$

olup, bunun sağ tarafında arzu edilmeyen bir 7 çarpanı bulunmaktadır.

Eğer (6) yerine (5) i hareket noktası olarak alırsak, (7) yi ondan hiç hesap yapmadan pek alâ çıkarabiliriz. Çünkü (5) in solunu 7·7 ve sağını 13·17 ile çarparsak,

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7 < 7\cdot11\cdot13\cdot17$$

elde ederiz ki, bu son eşitsizliği de 7 ile kısaltırsak (7) eşitsizliğini elde ederiz.

Her ne kadar yukarıki muhakeme $n = 6$ dan $n = 7$ ye geçiş özel haline ait ise de, ispat sırasında her türlü sayısal hesaptan sakınmış olduğumuz için, bundan sonraki geçişler için de aynı muhakemenin cari olacağı açıktır. Bunun dayandığı husus, n arttıkça i nin hiçbir zaman iki kere üst üste artmaması, daha ziyade her defasında araya bir «dinlenme aralığı» nın girmesidir. Hattâ bu dinlenme aralığı önümüzdeki maksat için olan ihtiyacımızdan da daha geniştir; çünkü bu aralık cedvelin de belirttiği gibi gerçekte daima ikiden fazla, yani en aşağı üç (ve ekseriya daha çok) adım ihtiva eder. Şu halde (7) umumî olarak doğrudur.

3. (4) ün her iki tarafını $p_1\cdots p_i$ ile çarparsak

$$(p_1\cdots p_i)^2 < p_1\cdots p_n,$$

yahut

$$p_1\cdots p_i < \sqrt{p_1\cdots p_n} \tag{8}$$

elde ederiz. Bunu (3) te teksif edilmiş olan 1. in neticesi ile birleştirirsek, (1) iddiasını ispat etmiş oluruz.

4. Buna, *Bonse*'nin daha yakından incelediği şu iddiayı ekleyelim:

(9) $$p_{n+1} < \sqrt[3]{p_1 \cdots p_n}.$$

(8) den daha keskin olan bu iddia da tıpkı aynı şekilde ispat edilebilir. Bu ispat sadece, 2. nin sonundaki muhakemenin dayandığı «dinlenme aralığı» nın orada lâzım olan iki adım yerine en aşağı 3 adım ihtiva ettiği vâkıasını kullanarak (8) deki kare kök yerine küp kök getirilebilmesinden meydana gelir. Aynı zamanda, bu işin hemen daha ileri götürülemiyeceği de açıktır.

Okuyucu, bütün bu muhakeme dizisinin 1. Bölümde bulunanlardan başka hiçbir ön bilgiye ihtiyaç göstermediğini, yani burada alışılagelmiş okul matematiğinden sadece en küçük bir parçadan başka hiçbir şey kullanılmadığını teslim edecektir. Bu muhakeme dizisi yalnız salt akla hitap etmiştir. Bu yüzden de bu bölüm matematiğin sadece, hedefine varmak için terkip ettiği ve üst üste yığdığı muhtelif dallarına ait bilgilerin çeşitliliği bakımından değil, fakat aynı zamanda böyle çeşitli bilgilerden vazgeçtiği ve buradaki asal sayı kavramı gibi tek bir kavramdan hareket ederek âdeta hiç yoktan hakikî fikirler yarattığı yerlerde de ne kadar ince düşünceye ihtiyaç gösteren ve ne kadar zor bir şey olabildiğini o derece açık belirtmektedir. Bu sonuncu bölüm muhakemelerinin güçlüğü bakımından diğerlerinin seviyesini ne kadar aşarsa aşsın, bütün kitabın asıl sebep ve amacını da o kadar kuvvetle ve o derece saf olarak aksettirmektedir.

Kitaptaki Bölümlere Dair Notlar

1. Hakkında

Buradaki teoremin Öklid'teki metni şudur: *οι πρωτοι αριθμοι πλειους εισι παντος του προτεθεντος πληθους πρωτων αριθμων*, yani: Verilen herhangi bir asal sayı cümlesinde (*) bulunandan daha çok miktarda asal sayı vardır. (Öklid, IX. Kitap, Teorem 20)

Asal sayılar dizisindeki *boşluklara* dair iddianın ispatı *Kronecker*. Vorlesungen über Zahlentheorie I, Leipzig 1901, S. 68 den alınmıştır.

Meselâ $1, 5, 9, 13, \ldots, 4n+1, \ldots$ veya $3, 7, 11, 15, \ldots, 4n-1, \ldots$ gibi her ikisi de 4 ortak farkını haiz benzer bazı dizilerin de sonsuz miktarda asal sayı ihtiva ettikleri yukarıki gibi elemanter usûllerle gösterilebilir. Gene 4 ortak farklı bir dizi olan $2, 6, 10, \ldots, 4n+2, \ldots$ dizisi ise hep çift sayılardan teşekkül etmekte olup, 2 den başka hiçbir asal sayı ihtiva etmez. Genel olarak, ilk terimi ile ortak farkı aralarında asal olan her dizide sonsuz sayıda asal terim bulunur. Bu teorem 1837 de *Dirichlet* tarafından Yüksek Matematik vasıtalarını kullanmak suretiyle zorluğu ile meşhur bir travayda ispat edilmiştir. (Abh. d. preuss. Ak. d. Wiss. 1837, S. 45—71 = Dirichlet's Werke I, S. 307—342).

Spengler hakkında ileri sürülen mütalaâyı daha etraflı olarak «Die Antike» Bd. 1, S. 175—203, 1925 te *O. Toeplitz*'in «Mathematik und Antike» (yani «Matematik ve Eski Çağlar») adlı makalesinde bulmak mümkündür.

(*) Burada sonlu bir cümle kastediliyor.

Bu bölümün konusu hakkında daha fazla bilgi için *H. W. E. Jung*. Sayılar teorisine Giriş (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 12) ye bakınız. [Çevirenin Notu]

2. Hakkında

Konumuzun bir tramvay işletmesinin ray şebekesi olarak tefsiri, eğri şebekesinin muhakkak bir düzlem üzerinde bulunması lâzım geldiğini hatıra getirirse de, bu mutlaka şart değildir. Bu bölümde elde edilen bütün neticeler uzayda alınan bir eğri şebesi için de otomatik olarak doğru kalır. Bu hususta, konumuzla dış görünüş bakımından bir benzerlik arzeden Bölüm 10 un konusu tamamen farklı bir durum arzeder.

3. Hakkında

2. ye dair. Bu mülâhaza derhal elipse nakledilebilir. Bu halde düzgün üçgenin yerini, her köşesinde elipse çizilen teğetin karşıki kenarına paralel bulunduğu bir üçgen alır.

3. e dair. Ön ihtarı, onu bize şifahen bildiren, *E. Steinitz*'e borçluyuz.

Bu bölümün konusu hakkında daha fazla bilgi için *N. E. Kazarınoff*. Geometrik Eşitsizlikler, (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 13) e bakınız. [Çevirenin Notu]

4. Hakkında

Anaxagoras'ın ifadesi için *Diels*: Die Fragmente der Vorsokratiker I, Nr. 46 B 3, 2 Aufl. S. 314_{16-19}'a *Platon*'unki için Kanunlar VII, 819 d_5—$820c_9$'a bakınız.

Birinci ispat zamanımıza kadar gelmiş olan Eski Yunan matematik eserlerinin hiçbirinde bulunmamaktadır. Halbuki o, tabiatı icabı pek âlâ bir Eski Yunan matematik eserinde bulunabilirdi ve belki de, bugün kaybolmuş olan, böyle bir eserde mevcuttu. İkinci

ispat açık olarak *Öklid*, Elemanlar X, 27 Ek Teorem (Heiberg baskısı Cilt 3, S. 408) 'de bulunmaktadır; fakat *Aristoteles* (Aristo)'in Analytica priora 41 a_{26} ve 50 a_{37} de yaptığı bir ima, bu ispatın Öklid'ten çok daha eski olduğunu göstermektedir.

Platon'un Theätet adlı diyalogunun başlangıcındaki matematiğe dair pasajın, Eski Yunanlıların $\sqrt{n}$ nin irrasyonelliğinin ispatı için evvelâ 1. tip ispatı dendikleri ve ancak sonra (Theätet) 2. ispat tipini keşfettikleri şeklinde tefsir edilip edilemiyeceğinin münakaşası işi burada çok uzatır.

Bu bölümün konusu hakkında daha fazla bilgi için *Ivan Niven*. Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 16) ya bakınız. [Çevirenin Notu]

5. ve 6. Hakkında

Schwarz, H. A.: Ges. Abh. II, S. 344—345; aynı zamanda *Steiner, J.*: Werke II, S. 726—729 a bakınız. Bundan başka, iddianın aynı zamanda hem düzlem, hem de küresel üçgenler için ifade edildiği S. 45, Nr. 7 (= Crelle 16, 1837, S. 88) e ve bir de 1841 yılına ait 3, S. 238 'e bakınız.

Fejér'in ispatı henüz basılmamış olup, müellifin izni ile ilk defa burada açıklanmaktadır.

Başlangıç üçgeninin *dar açılı* olması aşikâr olarak zarurîdir, çünkü ancak böyle bir üçgenin yükseklikleri tamamen üçgenin içinde bulunurlar. Bir açısı geniş olan bir üçgende yükseklik ayakları üçgeni, ilk üçgenin has mânada «içine çizilmiş» olamaz (Bir dik üçgende ise yükseklik ayakları üçgeni bir doğru parçası haline dejenere olur).

Schwarz'ın verdiği ispatta, başlangıç üçgeninin dar açılı olması, yükseklik ayakları üçgeninin ilk baştan ilk üçgenin içine çizilmiş farzetmek ve bunu simetrik şekillerde kullanmakla hesaba katılmıştır. Fejér'in ispatında ise, ancak neticede yüksek-

lik ayakları üçgenine gelmekteyiz. Burada başlangıç üçgeninin dar açılı olması hususu, $U'AU''$ açısının iki dik açıdan daha küçük olması ve bu sebepten $U'U''$ nün AC ve AB ile V, W kesişme noktalarının bu kenarlar üzerinde (yani kenarların uzatılmış kısımları üzerinde değil) bulunduklarını sağlamakta kullanılmıştır. Bundan başka gene dar açılılık özeliği yüzünden, E yükseklik ayağı BC kenarının uzatılışı üzerinde değil de, bu kenarın kendisi üzerinde bulunur.

Fejér'in ispatının hususî bir üstünlüğü de, bu ispatın Gayrı Öklidî Geometride de cari kalmasıdır. Halbuki Schwarz'ın ispatı Gayrı Öklidî Geometride uygulanamaz, çünkü bu ispat bir üçgende açılar toplamının 2 dik açıya eşit olduğu teoremini ve Öklid mânasında paralellik kavramını kullanmaktadır. Özellikle Fejér ispatı küresel üçgenler için de caridir. Eğer bir dar açılı küresel üçgenin aynı zamanda dar kenarlı olduğu da düşünülürse, burada Fejér'in ispatının adım adım cari kaldığı kolayca anlaşılır.

Bu bölümler hakkında daha fazla bilgi için *N. E. Kazarinoff* Geometrik Eşitsizlikler (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 13) e bakınız. [Çevirenin Notu]

8. Hakkında

Kombinatuvar Analizde daha da umumî olarak tarif edilmiş bir dağılım sayısı *Viggo Brun* tarafından ortaya atılmıştır (Kendisi buna «dağılım fonksiyonu» demektedir). Bu hususta *Netto* Lehrbuch der Kombinatorik. 2. Aufl. herausgegeben von *V. Brun* und *Th. Skolem*, Kap. 14, Leipzig 1927 ye bakınız. Dağılım fonksiyonunun metinde kullandığımız özel hali de *V. Brun* tarafından «Sur les éléments de l'analyse combinatoire» (L'Enseignement Mathématique Bd. 29 (1930) S. 231—237) adlı makalesinde ayrıca ele alınmıştır.

9. Hakkında

1. *Bachet, Diophant* külliyatının kendisi tarafından neşredilen edisyonunda, bu külliyatın bir yerinde her sayının dört kare toplamı olarak gösterilebileceği iddiasının kapalı olarak ileri sürüldüğünü belirtmiştir. *Fermat*, mektuplarından birinde bu iddiaya dair bir ispat taslağı vermiş ve nihayet *Euler* ve *Lagrange* (Oeuvres T. 3, S. 189—201, 1869) bu iddiayı metinde işaret edilen şekilde ispat etmişlerdir.

2. *Waring*: Meditationes algebraicae, 3. Aufl., S. 349, Cambridge 1782 adlı eserinde bir sayıyı göstermek için daima 9 küpün, 19 dördüncü kuvvetin ilâh... kâfi geleceği faraziyesini ileri sürmüştü. *C. G. J. Jacobi* hakkında verilen bilgiler C. G. J. Jacobi. Werke Bd 6, S. 322; *Wieferich* hakkındakiler Math. Ann. Bd. 66, S. 95—101 ve 106—108, 1909; *Hilbert* hakkındakiler Math. Ann. Bd. 67, S. 281—300, 1909; *Hardy* ve *Littlewood* hakkındakiler Math. Zeitschr. Bd. 23, 1925, S. 1—37 de bulunabilir.

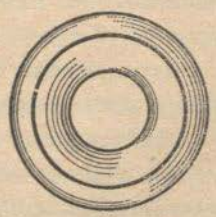
3. *J. Liouville* burada verilen ispatı sadece şifahî olarak Collège de France'ta anlatmıştır. Bu ispat ilk defa Lebesgue tarafından Exercices d'Analyse Numérique S. 113—115, 1859 da neşredilmiştir. (Bu hususta *P. Bachmann*. Niedere Zahlentheorie II, 1910, S. 329'a bakınız).

10. Hakkında

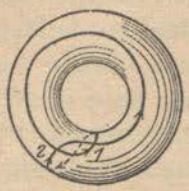
1. e dair. *Gauss*' Werke Bd. 8, S. 272, 282—286 ya bakınız. Bu teoremin bir ispatı *Julius v. Sz. Nagy*: Mathem. Zeitschr. Bd. 26, S. 579 — 592, bilhassa S. 580 — 581 de bulunmaktadır. Fakat oradaki teorem metnimizdekinden biraz farklı ifade ve ispat edilmiştir.

4. e dair. İki kat noktası bulunmayan bir kapalı eğrinin, biri iç diğeri dış olmak üzere, iki bölgeyi birbirinden ayırması aşikâr bir vâkıa değildir. Bu teorem her türlü yüzey, meselâ

gemi halkası, üzerinde de doğru değildir. Şu halde teorem düzlemdeki eğriler için ifade edilmeli ve bu ifade ispat edilmelidir. Bu ispat evvelâ *C. Jordan*, ondan sonra da başka birçokları tarafından verilmiştir. Bu teoreme, onunla ilk meşgûl olanın adı verilerek, Jordan eğri teoremi denmiştir. Jordan eğri teoremi gemi halkası üzerinde doğru olmadığından (Şek. 123 e bakınız), böyle bir yüzey için bütün muhakeme suya düşer. Hakikaten, gemi halkası üzerinde Şek. 124 te gösterildiği gibi 1212 sembolünü haiz iki tane iki kat noktalı bir eğri bulmak mümkündür.



Şek. 123



Şek. 124

5. e dair. Alterne düğümler için bilhassa *Tait*: Transactions of the Edinburgh Philosophical Society, Vol. 28, S. 145, 1879'a bakınız.

Şek. 39c de gösterilen düğüm bir deformasyon vasıtasıyla ipi koparmadan bir yonca yaprağı düğümü, yani bir alterne düğüm şekline sokulabilir. Fakat her düğüm deformasyonla bir alterne düğüm haline getirilemez. Yakın zamanda *C. Bankwitz* hiçbir izdüşümü alterne olmayan bir düğüm misali vermiştir (Math. Ann. Bd. 103 (1930), S. 161).

2. ve 10. Bölümdekilere benzer problemler, *J. Petersen*: Die Theorie der regulären Graphen, Acta Mathematica Bd 15. S. 193—220, 1891 de araştırılmıştır.

11. Hakkında

Bu konuda daha fazla bilgi için *H. W. E. Jung*. Sayılar Teorisine Giriş (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 12) ye bakınız. [Çevirenin Notu]

12a. Hakkında

Bu konuda daha fazla bilgi için *E. W. Dynkin* ve *W. A. Uspensky*. Çokrenk Problemleri (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 2) ye bakınız. [Çevirenin Notu]

12b. Hakkında

10. a dair. Geometrik şekillerin (koparmadan yapılan) deformasyonlar esnasında değişmeyen özelikleri *Analysis Situs* veya *Topoloji* denilen başlı başına bir matematik disiplini teşkil ederler. Burada düzgün çok yüzlüler hakkındaki mülâhazalarımız sırf topolojiye ait cinstendir.

Düzgün çokyüzlülerin şişirilerek bir küre şekline getirilmesi tasavvuru özel bir topolojik faraziyeye dayanır. Buradaki çokyüzlüler yerine, meselâ topolojik bakımdan halka yüzeyi (12a, 5. e bakınız) ile intibak eden çokyüzlüler alındığı takdirde çok başka neticeler elde edilir. Bu esnada 7. den 10. a kadarki mülâhazalarımızın topolojik manası daha da açık olarak meydana çıkar. Hakikaten, bir halka yüzeyi üzerinde *sonsuz sayıda* topolojik manada «düzgün» harita mevcuttur, fakat bunların hiçbiri metrik geometri manasında «düzgün» bir çokyüzlü ile gerçekleştirilemez.

Halka yüzeyi için Euler'in Çokyüzlüler teoremi (12a, 5. e bakınız).

(3*) $$e-k+f=0$$

şeklini alır. Tabiatıyle bu halde de doğru kalan (4) ve (5) denklemleri yardımı ile (6) yerine burada

$$(6^*) \qquad f(2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon) = 0,$$

ve $f \neq 0$ olduğundan

$$(7^*) \qquad 2\varphi + 2\varepsilon - \varphi\varepsilon = 0,$$

yahut

$$(9^*) \qquad (\varphi - 2)(\varepsilon - 2) = 4$$

elde ederiz. Şu halde (9) eşitsizliği yerine burada bir *eşitlik* gelmiştir. 4 ün ikişer çarpana ayrılışları, $(\varphi - 2)(\varepsilon - 2)$ için şu imkânları verir:

$$1 \cdot 4, \quad 2 \cdot 2, \quad 4 \cdot 1.$$

Şu halde φ ve ε için şu cedvel elde edllir:

φ	3	4	6
ε	6	4	3

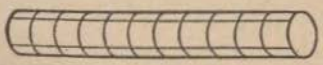
Bu değerler (9*) ı ve neticede (7*) ı gerçeklerler. Bu takdirde $f \cdot 0 = 0$ her zaman doğru olduğundan, (6*) *her* f sayısı tarafından gerçeklenir. Bundan dolayı içinde bulunduğumuz halde φ ve ε un değerinden f ve neticede e ve k hesaplanamaz.

Gerçekten de φ, ε 'un üç değer çiftinden herbirine f, e ve k nın sonsuz miktarda değeri tekabül eder.

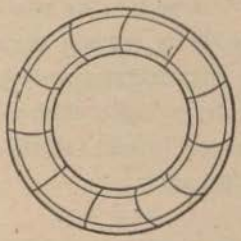
Meselâ $\varphi = 4$, $\varepsilon = 4$ çiftini seçelim ve a, b keyfî olmak üzere $a \cdot b$ $(a > 1, b > 1)$ tane kareyi bir dik dörtgen halinde sıralayalım. Bu dik dörtgenin bir silindir şeklinde sarıldıktan sonra bir halka şekline kıvırıldığını (Şek. 125 — 127) düşünelim. Bu takdirde, halka yüzeyinin hakikaten düzgün bir harita ile döşenmiş olduğu görülür; bu haritanın her köşesinde $\varepsilon = 4$ mem-

leket birleşir ve her memleketin $\varphi = 4$ sınırı vardır. Burada $f = a \cdot b$ olup, kolayca bulunabileceği üzere, $e = a \cdot b$, $k = 2ab$ dir. Bu, her $a > 1$, $b > 1$ için cari olduğundan f, e, k nın değerleri sonsuz sayıdadır. Şu halde halka yüzeyi tipinde topolojik manada sonsuz düzgün çokyüzlü vardır.

Şek. 125



Şek. 126



Şek. 127

(Halka yüzeyi üzerinde $\varphi = 6$, $\varepsilon = 3$ değer çiftine tekabül eden düzgün haritalar hakkında umumî bir bakış edinmek biraz daha zordur. Bunlar arasında Bölüm 12a, 5. te halka yüzeyinin boyanması problemi dolayısıyla bahsedilmiş olan $f = 7$, $e = 14$, $k = 21$ hali de bulunur.)

Bu çokyüzlülerden hiçbiri *metrik geometri* manasında *düzgün* olarak gerçekleştirilemez. Çünkü $\varphi = 4$, $\varepsilon = 4$ halinde dört köşeli yüzler kare olmak mecburiyetindedir. Halbuki bir nokta etrafındaki dört kare bir düzlem parçasını tam olarak kapladığından, bir çokyüzlü köşesi teşkil edemez. Şu halde böylece ne kadar çok kare eklersek ekleyelim, hiçbir surette bir çokyüzlü elde edilmeyip, bunlarla ancak bir düzlem döşenmiş olur. ($\varphi = 6$, $\varepsilon = 3$ için de durum tamamen aynıdır, çünkü bir nokta etrafındaki üç düzgün altıgen gene bir düzlem parçası kaplar. $\varphi = 3$, $\varepsilon = 6$ hali de aynıdır: bir nokta etrafındaki altı eşkenar üçgen bir düzlem parçası kapladığından, bir çokyüzlü köşesi teşkil edemez.)

Şu halde özet olarak şunları söyleyebiliriz: *Evvelâ* topolojik bakımdan düzgün olan sadece *beş çeşit çokyüzlünün* mevcudiyeti, küre tipindeki çokyüzlülerin bir özelliğidir; halka yüzeyi tipinde ise topoloji bakımından düzgün olan *sonsuz sayıda çokyüzlü çeşidi* vardır.

İkinci olarak: Topolojik düzgünlüğün mutlaka metrik geometri düzgünlüğü olarak gerçekleştirilebilmesi her zaman mümkün değildir. Meselâ halka şeklindeki çokyüzlüler için bu mümkün değildir. Buna rağmen küre tipindeki topolojik manada düzgün beş çeşit çokyüzlünün metrik geometri bakımından düzg'in çokyüzlülerle gerçekleştirilebilmesi, ancak bunların metrik geometri metodlarıyla tetkiki icabeden, diğer bazı özelikleri sayesinde mümkün olmuştur.

13. Hakkında

Bu bölüm hakkında daha fazla bilgi için *A. O. Gelfond.* Diofant Denklemleri (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 8) e bakınız. [Çevirenin Notu]

14. Hakkında

«Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst» (Crelles Journal Bd. 123 (1901). S. 241 — 257) adlı makalesinde *H. W. E. Jung*, n boyutlu uzayda buna tekabül eden problemi ele almış ve genişliği d olan n-boyutlu bir nokta sistemine ait bir yuva küresinin her zaman mümkün olan en küçük yarıçapı için

$$r = d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

değerini bulmuştur. Metnimizdeki değer $n = 2$ için bundan elde edilir.

16. Hakkında

Literatür: *Gabriel Koenigs:* Leçons de Cinématique, Paris 1897, S. 273—285. Burada, doğrusal hareket tevlit eden diğer birçok mekanizmalar da bulunur, fakat bunlar metinde verdiklerimizden daha az basittir.

18a. Hakkında

Bu konuda daha fazla bilgi için *N. E. Kazarinoff*: Geometrik Eşitsizlikler (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 13) e bakınız. [Çevirenin Notu].

18b. Hakkında

Steiner, J.: Werke Bd. II, S. 193—195. Bu ispata bölümün sonunda işaret edilen istikamette yapılan bir ilâve için *C. Carathéodory* und *E. Study:* Math. Ann. Bd. 68, S. 133—149 a bakınız. Bütün ispata dair başka bir metod için *Edler:* Göttinger Nachrichten 1882, S. 73 'e bakınız.

Simplikios'un, *Aristoteles*'in De coelo adlı eserine yazmış olduğu tefsirdeki (Berl. Ak. Ausg. VII, S. 412_{18}) bir ifadeye göre, aynı çevreyi haiz düzlem şekiller içinde dairenin en büyük alana, ve aynı yüzeyi haiz cisimler içinde de kürenin en büyük hacma sahip olduğu *Aristoteles*'ten evvel bile bilinmekte olup, bu husus *Archimedes* ve *Zonodoros* tarafından ispat edilmiştir.

Bu konuda fazla bilgi için 18a. hakkındaki notun sonunda zikredilen kitaba bakınız.

19. Hakkında

Bu bölüm hakkında bilhassa *A. Leman*: Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie (B. G. Teubners Mathematisch-physikalische Bibliothek Nr. 19) adlı kitapçığa bakınız. *Gauss*,

Disquisitiones arithmeticae adlı eserinde (Art. 312—318) peryodik ondalık kesirleri ele almakla beraber, orada Sayılar Teorisine dair, kitabının önceki bölümlerinde anlattığı, birçok ön bilgi farzetmektedir. Disquisitiones arithmeticae, Almancaya da tercüme edilmiştir: *C. F. Gauss*: Untersuchungen über die höhere Arithmetik, deutsch herausgegeben von H. Maser (Berlin: Julius Springer 1889).

4. e dair. $\varphi(n)$ sayısı n 'ye bağlı olup, Sayılar Teorisinde kendisine Euler fonksiyonu adı verilmiştir. Aşikâr olarak, $\varphi(n)$ paydası n olan 1 den küçük ve kısaltılmış âdi kesirlerin sayısı olarak ta tarif edilebilir.

8. e dair. $p, q, r, \ldots, n$ yi bölen birbirinden farklı bütün asal sayıları gösterdiğine göre, umumî olarak

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{r-1}{r} \cdots$$

dir. Bu formülün ispatı her Elemanter Sayılar Teorisi kitabında bulunur; meselâ: *Dirichlet-Dedekind*: Vorlesungen über Zahlentheorie, Braunschweig 1894, § 11, yahut *E. Landau*: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd I, Kap. 4, Leipzig 1927 'ye bakınız.

Bu konu hakkında daha fazla bilgi için *H. W. E. Jung*. Sayılar Teorisine Giriş (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 12) ye bakınız. [Çevirenin Notu].

20b. Hakkında

6. ya dair. Sabit genişlikli bir eğrinin konveks olduğunu farzetmek aslında lûzumsuzdur. Çünkü sabit genişlikli her Jordan eğrisinin konveks olması icabettiği ispat edilebilir. Fakat bu ispat, bilhassa bir Jordan eğrisinin (S. 160) topolojik karakterizasyonundaki güçlüklerden dolayı, bu kitaptaki vasıtalardan çok daha fazlasına ihtiyaç gösterir.

7. ye dair. Sabit genişlikli bir eğriye dair Teorem IV te ifade edilen özelik, bütün konveks eğriler için de cari olup, bu sonuncular için doğrudan doğruya ispat edilebilir. Bununla beraber, en iyi şekilde analitik dille yürütülen bu ispatta limit operasyonları kullanılmakta olup, bu operasyonlar, metinde verdiğimiz ispattaki bir dairenin merkezi aynı kalarak eğriye teğet oluncaya kadar büzülmesi gibi basit bir geometrik tefsire imkân vermezler.

Bütün bölüme dair: Sabit genişlikli eğriler teorisinin elemanter vâsıtalarla ele alınabilen kışmını burada hemen tamamen vermiş bulunuyoruz. Bu konunun daha zor problemleri hakkında oldukça dağınık bir literatür mevcuttur. Diferansiyel ve İntegral hesabı bilenler bilhassa *W. Blaschke* nin «Kreis und Kugel» (Leipzip 1916) adlı eserine başvurmalıdırlar.

21. Hakkında

1. e dair. *Lorenzo Mascheroni* (1750—1800), «La geometria del compasso» (Pergel geometrisi) (Pavia 1797) adlı eserinin Önsözünde, kendisinin yalnız pergelle yapılan çizimlerle meşgûl olmasına sebep olarak bilhassa pratik gayeleri göstermektedir. Türlü sebeplerden dolayı pergelle yapılan çizimler, cedvelle yapılanlardan çok daha sıhhatlidir ki, Mascheroni bu vâkıadan astronomlar tarafından âletlerindeki taksimatlı dairelerin sıhhatli olarak eşit parçalara bölünüşünde faydalanıldığından haberdardı. Bundan sonra yalnız pergelle yapılan çizimlerle etraflı bir şekilde uğraşan Mascheroni, cedvel ve pergelle yapılabilen bütün geometrik çizimlerin yalnız pergelle de yapılabileceğini keşfetti. — Mascheroni kitabının başına Napolyon için, onu Kuzey İtalyanın kurtarıcısı olarak metheden bir ithaf beyti koymuştu. Napolyon da İtalyadan dönüşünde Fransız Akademisi mensupları ile yapmış olduğu bir görüşme esnasında (10. Aralık 1797) onların dikkatini onun henüz Fransada bilinmeyen «La geometria del com-

passo» eseri üzerine çekmişti. Bu eserin fransızca tercümesinde (Géometrie du Compas, 2. éd. Paris 1928) bu konuşma şöyle anlatılmaktadır:

«*Lagrange* ve *Laplace* toplantıya dahildiler. *Bonaparte* bu meşhur matematikçiler, bilhassa *Laplace*, ile yapmış olduğu bir karşılıklı konuşmada onlara, pergel geometrisi adlı yepyeni ve henüz Fransada meçhûl bulunan eseri, bazı problemlerin bu orijinal eserde bulunan çözümlerini anlatmak suretiyle tanıttı. Kendisinin Brienne askerî okulunda matematik öğretmeni bulunmuş olan *Laplace*, *Bonaparte*'ı, dikkatle dinlendikten sonra, ona etraflarındaki bütün âlimlerin huzurunda: «Sizden her şeyi beklerdik general, fakat matematik dersi asla!» dedi.

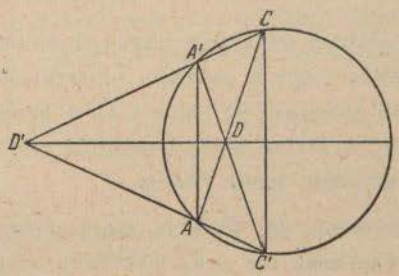
Mascheroni 1797 den itibaren Paristeki Uluslararası Metre Komisyonunun üyesi bulunmuştur.

Danimarkalı matematikçi *Georg Mohr*'un (1640 ta Kopenhag' da doğmuş olup, ölüm yılı belli değildir) yalnız, ancak yakın zamanda tekrar bulunmuş olan, «Euclides Danicus» (Amsterdam 1672) adlı eserini biliyoruz. Birinci kısmı bu bölümde bahsedilen probleme dair olan bu kitap son zamanda Danimarka Krallığı İlimler Cemiyeti tarafından yeniden bastırılmış olup, *Julius Pål* tarafından yapılmış bir Almanca tercümesi de kendisine eklenmiştir (K◊benhavn 1928).

Doğuştan bir İsviçreli olan *Jacob Steiner* (1796 — 1863) daha ziyade, önceleri *Wilhelm* ve *Alexander v. Humboldt* kardeşlerin himayelerine mazhar olduğu ve 1834 ten itibaren Üniversite profesörü ve İlimler Akademisi üyesi olarak bulunduğu Berlinde çalışmıştır. Steiner yukarda bahsedilen problemi, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften serisinde Nr. 60 olarak yeniden bastırılmış olan «Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung» (Berlin 1823) adlı risalesinde ele almaktadır.

Bir dairenin merkezini yalnız cedvelle bulmak problemi ve bunun çözüm metodu *David Hilbert*'e aittir. Hilbert'in fikri ilk olarak talebesi *Detlef Cauer*'in şu travayında tatbik mevkiine konmuştur: «Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein», Math. Ann. Bd. 73, S. 90 — 94, 1912 ve Bd 74, S. 462 — 464, 1913.

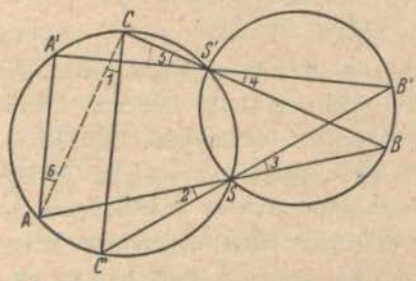
6. ve 7. ye dair. Burada sadece birbirini *kesmeyen* iki daireye dair olan iki şıkkı ele aldık. Birbirini kesen iki daire halinde de istenilen özelikte bir merkezî izdüşüm tasviri arandığı takdirde, müspet bir netice elde edemeyiz. Çünkü böyle bir tasvirin mevcudiyeti gene dairelerin merkezlerinin yalnız cedvelle inşa edilemiyeceğini ispat edecektir, halbuki 1. in sonunda bahsedildiği gibi, birbirini kesen iki daire halinde bu çizim gerçekten yapılabilir. Evvelâ Şek. 128, bir dairede iki paralel kirişten



Şek. 128

hareket ederek o dairenin bir çapının nasıl bulunabileceğini gösterir: DD' doğrusu simetri sebebiyle dairenin merkezinden geçer. Bundan sonra aynı şekilde ikinci bir çift paralel kirişten ikinci bir çap bularak, öncekiyle kesiştirdiğimiz takdirde dairenin merkezini elde ederiz. Şu halde artık geriye, yalnız cedvelle iki paralel kirişin nasıl çizilebileceği problemi kalıyor. İçinde bulunduğumuz halde bunu sağlayan çok basit bir çizim metodu Şek. 129 da gösterilmiştir, İki daireden birinde keyfî bir AA'

kirişi çizelim. Sonra A dan hareket ederek ASB ve $BS'C$ doğrularını ve A' den hareket ederek $A'S'B'$ ve $B'S'C'$ doğrularını çizelim. Bu suretle bulunan C ve C' noktaları AA' ye paralel bir CC' kirişinin uç noktalarıdır. Bu paralellik, bazen ters açılar, bazan da



Şek. 129

aynı yay karşısındaki çevre açıları olarak, herbiri bir sonrakine eşit bulunan şekilde 1 den 6 ya kadar numaralanmış açıları takip ederek derhal anlaşılır. Şu halde 1 ve 6 açıları da birbirine eşittir. Bunlar AC kesenine ait iç ters açılar olduklarından, AA' ve CC' nün paralelliğini temin ederler.

Birbirini kesmeyen üç dairenin merkezlerini bulmak için yalnız cedvelle yapılacak bir çizim metodunu burada vermiyeceğiz. Bu metod daha karışık olup, anlaşılabilmesi için bir takım güç geometrik teorilerin bilinmesine ihtiyaç vardır. Bir çizim metoduna yukarıda zikredilmiş bulunan *Cauer*'in makalesinde bakılabilir.

Ek'e dair. Okul kitaplarında verilen daha kısa, fakat daha ziyade hesapla yapılan bir ispatı (Meselâ: *Behrendsen - Götting*: - Lehrbuch der Mathematik, Oberstufe B I, S. 115—116, Leipzig 1926) burada bilhassa seçmedik, çünkü o ispat işin esasını teşkil eden daire tabanlı eğik konideki simetrileri yeter derecede belirtmemektedir.

Bu konu hakkında daha fazla bilgi için şu kitaplara bakınız:

A. S. Smogorzhevski. Yalnız Cedvelle yapılan geometrik çizimler (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 14) ve *A. N. Kostovski.* Yalnız Pergel kullanarak yapılan geometrik çizimler. (Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 7). [Çevirenin Notu].

22. Hakkında

Bonse 'nin travayı Archiv d. Math. u. Phys. (3) Bd. 12, S. 292—295, 1907 de bulunmaktadır. Aynı mecmua (3) Bd 15, S. 186—193, 1908 de *R. Remak*'ın makalesine de bakınız. Hakikatte, bugün asal sayıların dağılımı hakkında $p_{n+1} < 2\,p_n$ 'nin ifade ettiğinden çok daha fazla bilgiye sahibiz. Fakat bu bilgi, meselâ 100 ile 121, yahut 121 ile 144 gibi, birbirini takip eden iki kare arasında daima en aşağı bir asal sayı bulunduğunu ispata hâlâ kâfi değildir.

Yayınlanmış olan eserler:

1 — Eşitsizlikler (160 Krş)
2 — Çokrenk problemleri (180 Krş.)
3 — Sayılar teorisinden problemler (500 Krş.)
4 — Tesadüfî hareketler (250 Krş.)
5 — Geometrik ispatlarda hatalar (180 Krş.)
6 — Mekaniğin matematiğe bazı tatbikleri (180 Krş.)
7 — Yalnız pergelle yapılan çizimler (250 Krş.)
8 — Diofant denklemleri (220 Krş.)
9 — Gruplar teorisine giriş (375 Krş.)
10 — Eşitsizliklere giriş (425 Krş.)
11 — İndüksiyon metodu (220 Krş.)
12 — Sayılar teorisine giriş (550 Krş.)
13 — Geometrik eşitsizlikler (450 Krş.)
14 — Yalnız cetvelle yapılan çizimler (250 Krş.)
15 — İhtimaller hesabına giriş (550 Krş.)
16 — Rasyonel ve İrrasyonel sayılar (600 Krş.)
18 — İndirgemeli diziler (200 Krş.)
19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş)
21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
22 — Algoritmalar ve otomatik hesap makinaları (400 Krş.)
23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
24 — Matematiksel sonsuz (100 Krş.)
25 — Sayılar ve şekiller (850 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eserler:

17 — Çeşitli Geometriler

Matematik Derneğinin adresi:

Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü

Vezneciler—İstanbul

Fiatı 850 Krş.