

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı: 26

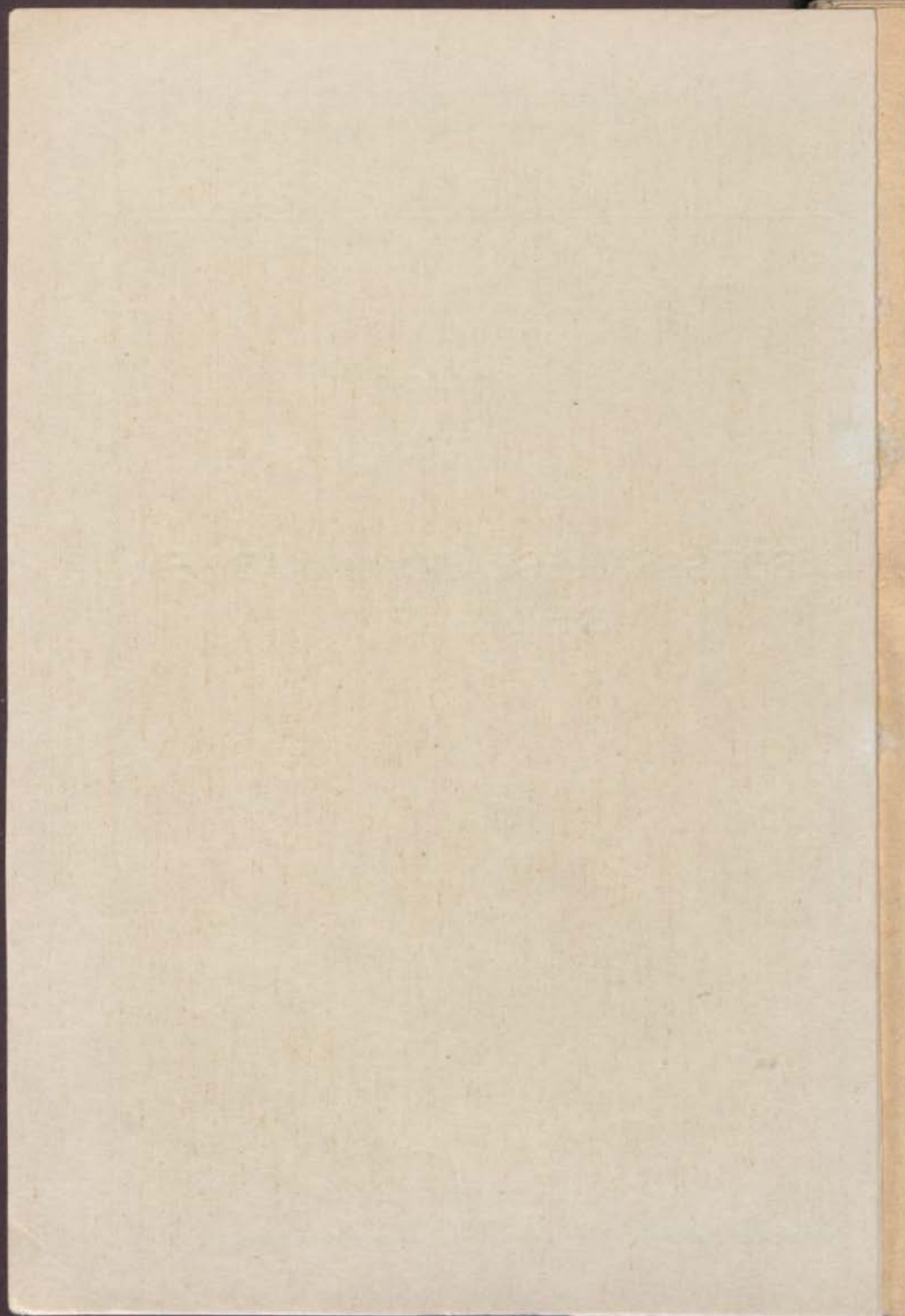
V. G. BOLTYANSKII

EŞDEĞER VE EŞPARÇALANABİLEN
ŞEKİLLER

Ceviren:

Altıntaş BÜKE

İSTANBUL — 1964



TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ YAYINLARI

Sayı: 26

V. G. BOLTYANSKII

EŞDEĞER VE EŞPARÇALANABİLEN
ŞEKİLLER

Çeviren:

Altıntaş BÜKE

İSTANBUL — 1964

İSMAIL AKGÜN MATBAASI
Cağaloğlu, Servili Mescit Sokak, No. 24
İSTANBUL — 1964

BU KİTAP HAKKINDA

Bu kitapçık, alan ve hacim teorileri için temel teşkil eden bir problemler sınıfını inceler. Düzlem şekiller halinde göz önüne alınan esas problem şu sorudan doğar: İki çokgenin alanları eşit ise, bunlardan birini sonlu sayıda parçalara ayırarak, diğerini teşkil edecek tarzda birleştirmek mümkün müdür? Kitapçığın ikinci kısmı, katı cisimler için benzer problemi inceler. Konuların elemanter karakteri sebebi ile, bu kitapçıkta ispat olunan bazı teoremlerin nispeten yeni araştırmaların mahsulü olması şaşırtıcı görünebilir.

İlk dört bölüm için, okuyucunun yalnız bir yıllık cebir ile yarım yıllık düzlem geometrinin esaslarına ihtiyacı vardır. Uzay geometri ile thrigonometri son iki bölümde kullanılmaktadır. Kitabın sonuna doğru bazı ispatlar oldukça zordur ve ilk okuyuşunda öğrenci bu teoremlerin yalnız ifadelerini öğrenmeyi arzu etmelidir.

BU YAYINLAR HAKKINDA

Matematiğin kendi değeri yanında, fizik, kimya ve dola-
yısıyla mühendislik, askerlik gibi pratik sahalara ve bilhassa
son zamanlarda biyoloji, ekonomi ve hattâ sosyal bilimlere
yardımı hızla arttığından, bu bilim her millet için hayati bir
önem kazanmıştır.

Öteyandan, matematik de bu bilimlerin problemlerini
çözebilmek için gerek metod, gerekse fikir bakımından
gelişmek zorundadır.

Bundan dolayı bir çok memleketlerde bu sahaya daha
fazla sayıda istidatları çekmek ve bunları erkenden keşfetmek,
en nihayet bunların eğitimi için her türlü fedakârlığa katlan-
mak en önemli bir milli eğitim siyaseti olmuştur.

Yeni istidatları erkenden keşfetmek için düşünülen ted-
birlerin başında, matematik kültürünü geniş kitlelere yaymak
gelir.

İkinci Dünya Harbinden sonra birçok memleketlerde,
gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik
bilimlerine karşı ilgilerini arttırmak için yeni bir tip mate-
matik literatürü meydana gelmiştir. Bu çeşit literatürde
aranılan özellikler kısaca şunlar olmalıdır: a) Problem vaz'ı
sun'î olmamalı, b) Bunları anlamak için fazla ön bilgiye
ihtiyaç bulunmamalı, c) Okuyucuyu aktif işbirliğine ve bir
şeyler keşfetmeğe sevk etmeli.

İşte Türk Matematik Derneği bu cereyanı memleketimize
de getirmek maksadiyle bu yayınlara başlamış bulunmaktadır.
Bu yayınlar, resmi müfredata bağlı ders veya yardımcı
kitaplar olmayıp, konuları yukarıki prensiplere uygun olarak

seçilmiş eserlerdir. Bunların anlaşılması için lise matematiğinin bir kısmı ile okuyucunun sağduyusu ve iyi niyeti kâfidir.

Tamamen hizmet olan bu teşebbüsümüzün mali kaynağı, Milli Eğitim Bakanlığımızın ve Ford Foundation'nun bağışlarıdır.

Türk Matematik Derneği

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1. Bolyai-Gerwin teoremi; Çokgenlerde esparçalanabilme	1
1. Parçalama metodu	1
2. Bolyai-Gerwin teoremi	4
3. Tamamlama metodu	10
BÖLÜM 2. Hadwiger-Glur Teoremi	14
4. Hareketler	15
5. Hadwiger-Glur teoremi	21
BÖLÜM 2. Esparçalanabilme ve aditif invariantlar kavramı	28
6. $J_1(M)$ aditif invariantı	28
7. T -esparçalanabilme	30
8. $J_1(M)$ invariantının özellikleri	30
9. Bir merkeze göre simetrik çokgenler	33
BÖLÜM 4. Esparçalanabilme ve grup kavramı	36
10. Gruplar	36
11. Hareket grupları	39
12. S grubunun bir özelliği	40
BÖLÜM 5. Çokyüzlüler için Dehn ve Hadwiger teoremleri	48
13. Esparçalanabilen çokyüzlüler	48
14. Hadwiger teoremi	49

15. Dehn teoremi	54
16. Hadwiger teoreminin ispatı	59
17. n -boyutlu çokyüzlüler	70

BÖLÜM 6. Hacim hesabı için metodlar	72
--	-----------

18. Limitler metodu	72
19. parçalama ve tamamlama metodlarının eşdeğerliği ...	77

EK	89
-----------	-----------

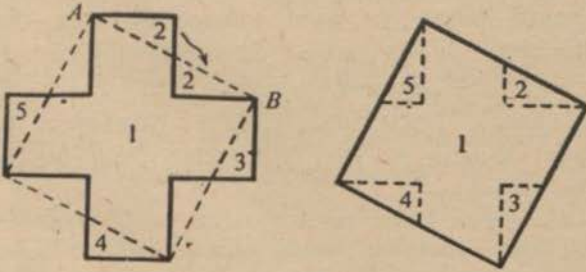
1. Çokyüzlülerin eşparçalanabilirlikleri için gerek ve yeter şartlar	89
2. Çokyüzlülerin G -eşparçalanabilirliği	91

BİBLİYOGRAFYA	93
----------------------------	-----------

1. Bolyai-Gerwin teoremi; Çokgenlerde eşparçalanabilme

1. PARÇALAMA METODU

Şek. 1 de görülen iki şekli düşünelim. Haç biçimindeki şekli teşkil eden bütün doğru parçaları eşit uzunluktadır, ve karenin kenarı AB doğru parçasına eşittir. Resimde görülen noktalı çizilmiş doğrular her iki şekli, aynı sayıda denk parçalara ayırır. (Her iki şekildeki mütekabil parçalar aynı numara ile gösterilmiştir.) Bu husus şöyle,

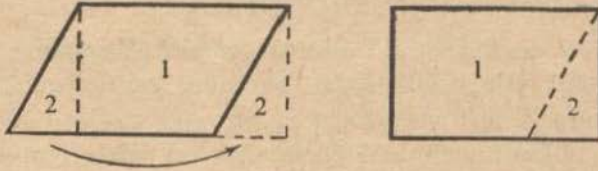


Şek. 1

aşğıdaki şekilde ifade edilir: Şek. 1 de görülen şekiller eşparçalanabilir (veya denkparçalanabilir). Başka bir deyimle: Eğer iki şekilden bir tanesi sonlu sayıda parçalara ayrılabilirse, öyle ki, bu parçalar ikinci şekli meydana getirecek tarzda birleştirilebilsin; bu takdirde iki şekile eşparçalanabilir denir. Eşparçalanabilen şekillerin eşit alanları haiz oldukları aşikârdır. Bu, parçalamaya

metodu diye bilinen ve alan hesabında kullanılan basit metodun esasını teşkil eder. (İki bin seneden daha fazla bir zamandan, Öklidden beri bilinen) bu metod şöyledir: Bir şeklin alanını hesaplamak için şekil sonlu sayıda öyle parçalara ayrılmaya çalışılır ki, bu parçalar tekrar birleştirilmekle (alanı önceden bilinen) basit bir şekil elde edilsin.

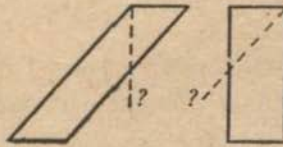
Bu metodun tatbikatı olarak ortaokul geometrisinde raslanan bazı misâlleri burada hatırlıyalım. Şek. 2 de bir



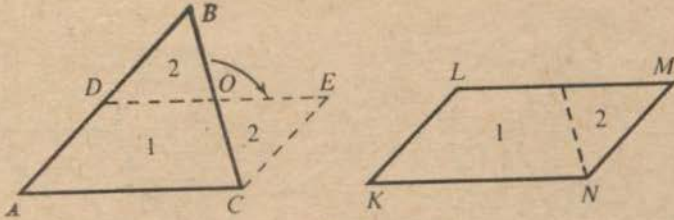
Şek. 2

paralelkenarın alanını hesaplamak için bir usul gösterilmiştir: aynı taban ve aynı yüksekliği haiz olan bir paralelkenar ve bir dik dörtgen eşparçalanabilirler; o halde alanları eşittir*. Benzer şekilde, Şek. 3 bir üçgenin alanının nasıl hesaplanabileceğini gösterir: üçgenin alanı, aynı tabanı ve yarı yüksekliği haiz bir paralel-

*) Yalnız suna dikkat etmelidir ki, bir üçgeni kaydırmakla elde edilen bu basit metod her zaman istenilen sonucu vermeyebilir.

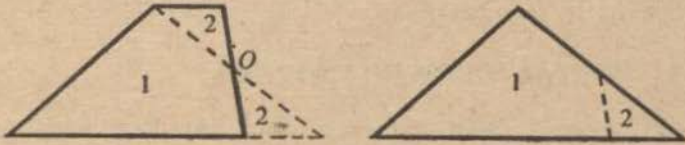


Yukardaki şekildeki gibi hallerde aynı taban ve yüksekliği haiz olan dik dörtgeni inşa etmek için paralelkenarı ikiden daha fazla sayıda parçaya ayırmak lâzım olabilir (aşağıda yardımcı teorem 3'ün ispatına bakınız).



Şek. 3

kenarın alanının aynıdır, onun için bu iki şekil eşparçalanabilir. Nihayet, Şek. 4 de bir trapezin alanını hesaplamak için bir metod gösterilmiştir.

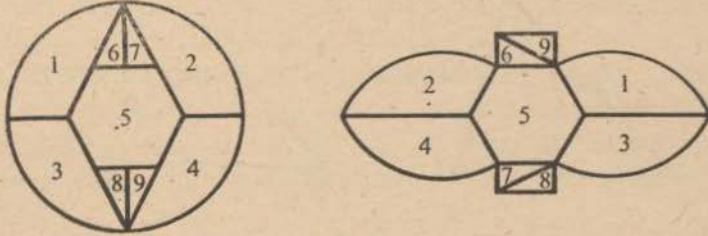


Şek. 4

Tabii eşparçalanabilme problemi eğrisel şekiller için de söylenebilir (Şek. 5); fakat biz burada bu tip şekillerle değil, yalnız çokgenlerle meşgul olacağız *.

Böylece, eşparçalanabilen bütün çokgen çiftlerinin alanları da eşittir. Derhal akla aksinin doğru olup olmadığı sorusu gelir: İki çokgenin alanları eşit ise eşparçalanabilirler mi? Bu sorunun müspet cevabı (hemen hemen aynı

*) Eğrisel şekillerin alanlarının ölçülmesi problemi, çokgenlerin alanlarının ölçülmesi probleminin limit hali olarak düşünülebilir. Bunun için düzlem geometriden bilinen daire alanının hesabını hatırlatmak kâfidir. Bu sebeple dikkatimizi çokgenler üzerinde toplayacağız ve daha esaslı bir problem olan alanların ölçülmesini asla gözönüne almayacağız. Benzer şekilde, Bölüm 5 ve 6 da da yalnız çokyüzlülerle meşgul olacağız; eğrisel yüzeylerin çevreledikleri cisimlerin hacimlerini hesaplamayı denemeyeceğiz.



Şek. 5

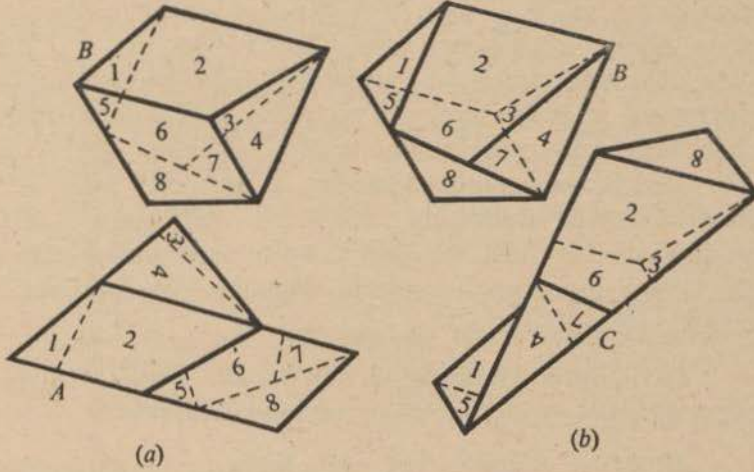
zamanda) Macar matematikçi Bolyai (1832 de) ve bir Alman subayı olan amatör matematikçi Gerwin tarafından (1833 de) verilmiştir. Şimdi bu teoremin ispatını görelim.

2. BOLYAI - GERWIN TEOREMİ

Bu teoremi ispat etmeden önce bir kaç yardımcı teorem ispat edelim.

YARDIMCI TEOREM 1. *Eğer bir A şekli bir B şekli ile eşparçalanabilirse ve B şekli de bir C şekli ile eşparçalanabiliyorsa, A ile C şekilleri de eşparçalanabilirler. (Şek. 6 ya bakınız.)*

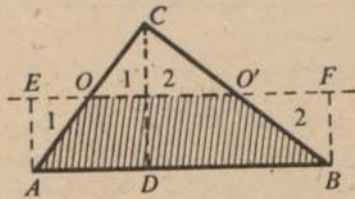
B şeklini parçalayan öyle doğrular çizelim ki, bunların meydana getirdiği küçük parçalar tekrar birleştirilince A şekli meydana gelsin (Şek. 6 a daki kalın çizgi'ler); sonra B şeklini öyle parçalayalım ki bunları tekrar birleştirtince C şekli elde edilebilsin (Şek. 6 b deki kalın çizgiler). Her iki gruptaki çizgiler birlikte gözönüne alınırsa B şeklini daha küçük parçalara ayırır. Bu küçük parçalar Şek. 6 a ve 6 b de 1 den 8 e kadar numaralanmıştır. Kolayca görülür ki, bu küçük parçalar uygun şekilde tekrar birleştirilmekle ya A şekli veya C şekli elde edilir. O halde A ve C şekilleri eşparçalanabilirler.



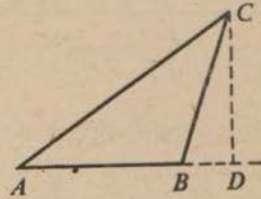
Şek. 6

YARDIMCI TEOREM 2. Her üçgen uygun bir dikdörtgen ile eşparçalanabilir.

AB doğru parçası ABC üçgeninin en uzun kenarı * ve CD de, C köşesinden AB ye indirilen yükseklik olsun (Şek. 7). D noktası A ile B nin arasına düşecektir; zira



Şek. 7



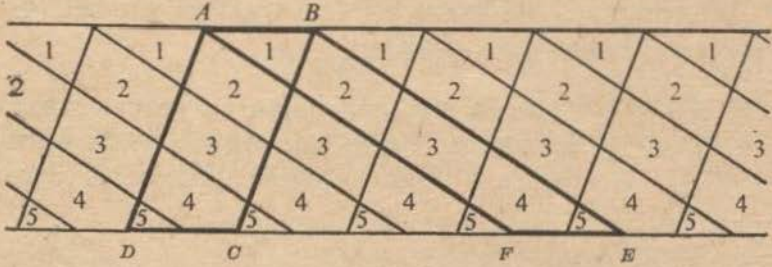
Şek. 8

* Yani, ABC üçgeninin diğer iki kenarından hiç biri daha uzun değildir.

aksi halde, ya $\angle A$ veya $\angle B$ genişaçı olacak ve dolayısıyla AB en uzun kenar olmayacaktır (Şek. 8). CD nin orta noktasından AB ye paralel bir doğru çizelim ve bu doğruya A ve B den birer dik indirelim. $AEFB$ dikdörtgeni ABC üçgeni ile eşparçalanabilir. Gerçekten, Şek. 7 de «1» ile numaralanmış üçgenler aralarında, keza «2» numaralılar da aralarında denkdirlir. ABC ve $AEFB$ şekillerinin her ikisi de, Şek. 7 de taranmış olan trapez ile 1 ve 2 numaralı üçgenlerin uygun şekilde birleştirilmesiyle elde edilirler.

YARDIMCI TEOREM 3. *Ortak bir tabanı ve aynı alanı haiz iki paralel kenar eşparçalanabilirler.*

$ABCD$ ve $ABEF$ ortak AB tabanını ve aynı alanı haiz iki paralel kenar olsunlar (Şek. 9). Bu paralelkenar-



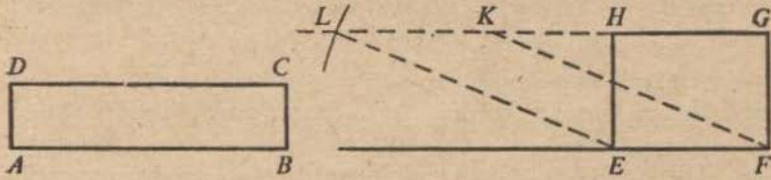
Şek. 9

ların yükseklikleri de eşittir. O halde DC ve FE doğru parçaları aynı doğru üzerinde bulunurlar. AB nin bulunduğu doğru üzerinde, AB ye eşit olan bir seri doğru parçası ve bunlardan her birinin uç noktasından AB ve AF doğrularına birer paralel çizelim. Şu halde, AB ve DE paralel doğruları arasında kalan şerit, bir takım çokgenlere bölünmüştür (Şek. 9). Bunlardan her biri AB ye eşit bir uzunluk kadar yatay olarak kaydırılırsa

kendisine denk bir çokgen üzerine kondurulabilir. (Bunu ispat ediniz!) Şek. 9 da denk olan çokgenler aynı numara ile işaretlenmiştir. $ABCD$ ve $ABEF$ paralelkenarlarının her birinin bir tane «1» numara, bir tane «2» numara, ... v.s. ihtiva ettiğine dikkat etmelidir. O halde bu paralelkenarlar eşparçalanabilirler*.

YARDIMCI TEOREM 4. *Eşit alanları olan iki dik dörtgen eşparçalanabilirler.*

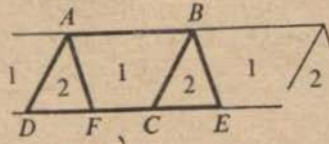
$ABCD$ ve $EFGH$ alanları eşit olan iki dik dörtgen olsunlar (Şek. 10). AB , BC , EF ve FG doğru parçaları



Şek. 10

içinde en uzununu seçelim; ve bunun AB doğru parçası olduğunu farzedelim. E merkezli ve AB yarıçaplı daire, GH yarım doğrusunu bir L noktasında keser. ($AB \geq EH$ olduğu için merkezi E , yarıçapı AB olan dairenin HG

*) $ABCD$ ve $ABEF$ paralel kenarlarının AF ve BC kenarları kesişmezlerse, Şek. 9 aşağıda çizilen şekli alır. Bu takdirde $ABEF$

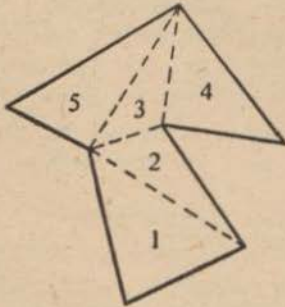


paralelkenarını elde etmek için $ABCD$ paralelkenarından bir üçgen ayırıp (2 numaralı üçgen), geriye kalan parçanın diğer tarafına ilâve etmek kâfidir (2 nci sayfadaki alt nota bakınız).

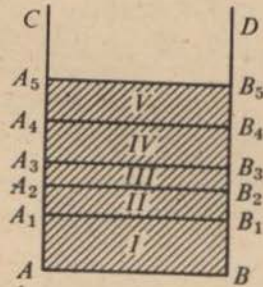
doğrusu ile ortak bir noktası vardır.) AB doğru parçası EL doğru parçasına eşittir ($AB = EL$). LHG doğrusu üzerine $LK = EF$ doğru parçasını taşıyarak $EFLK$ paralelkenarını inşa edelim. Bu paralelkenarın alanı, $EFGH$ dik dörtgeninin alanına eşittir (ve dolayısıyla $ABCD$ dik dörtgeninkine). Yardımcı teorem 3'e göre $EFGH$ ve $EFLK$ paralelkenarları, ortak EF kenarları olduğu için, eşparçalanabilirler. Fakat $ABCD$ ve $EFLK$ paralelkenarlarının AB ve EL kenarları eşittirler. Onun için yardımcı teorem 3'e göre, bunlar eşparçalanabilirler*. Nihayet, $EFLK$ paralelkenarı $ABCD$ ve $EFGH$ dik dörtgenlerinin her biriyle eşparçalanabilen olduğundan, dik dörtgenler de birbirleriyle eşparçalanabilmektedirler (Yardımcı teorem 1).

YARDIMCI TEOREM 5. *Her çokgen uygun bir dik dörtgenle eşparçalanabilmektedir.*

Her çokgen (konveks olsun veya olmasın) sonlu sayıda üçgenlere ayrılabilir (Şek. 11 de, 1, 2, 3, ... ile gösterilmiştir). Herhangi bir AB doğru parçası alalım ve



Şek. 11



Şek. 12

*) $EFLK$ döndürülerek EL doğrusu AB ye paralel yapılabilir; sahife 17 ye bakınız.

bunun uçlarından AC ve BD diklerini çıkalım (Şek. 12). ABB_1A_1 dik dörtgeni ile 1 numaralı üçgenin alanları eşit olacak şekilde AB ye paralel A_1B_1 doğrusunu çizelim. 1 üçgeni ile ABB_1A_1 dik dörtgeni (I ile işaretlenmiş olan) eşparçalanabilirler. Gerçekten, yardımcı teorem 2 ye göre 1 üçgeni ile eşparçalanabilen bir dik dörtgen vardır. Keza bu dik dörtgenle I dik dörtgeni alanları aynı olduklarından, eşparçalanabilirler (Yardımcı teorem 4); o halde 1 üçgeni ile I dik dörtgeni eşparçalanabilirler (Yardımcı teorem 1). Bundan sonra, $A_1B_1B_2A_2$ dik dörtgeni ile (II ile işaretli) 2 üçgeninin alanları aynı olacak şekilde AB ye paralel A_2B_2 doğru parçasını çizelim. 2 üçgeni ile II dik dörtgeni eşparçalanabilir. Böylece devam ederek 3 üçgeni ile eşparçalanabilen III dik dörtgenini, ... çizelim; böylece teşkil olunan $I, II, III, \dots$ dikdörtgenleri hep bir arada, bir dik dörtgen meydana getirirler (Şek. 12 de taranmış kısım), ve çizimden dolayı bu dikdörtgenle ilk çokgen eşparçalanabilirler.

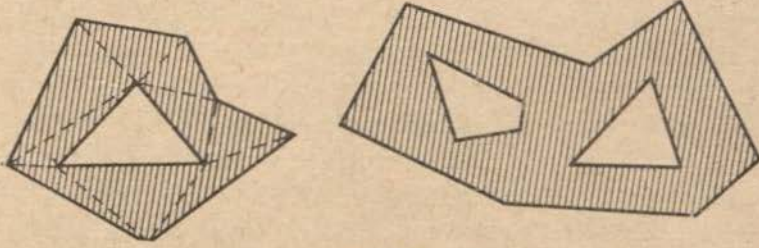
Şimdi artık yukarda bahsedilen teoremin ispatını yapabiliriz.

BOLYAI - GERWIN TEOREMİ. *Alanları eşit olan iki çokgen eşparçalanabilirler.*

İspat: Yardımcı teorem 5 e göre çokgenlerden her biri birer dikdörtgenle eşparçalanabilirler. Elde edilen iki dik dörtgenin alanları eşit olacağından, eşparçalanabilirler (Yardımcı teorem 4). O halde yardımcı teorem 1 e göre ilk iki çokgen de eşparçalanabilirler.

İhtar: Bolyai - Gerwin teoreminde «çokgen» terimi, yalnız bir tek kapalı kırık çizgi ile çevrelenmiş şekiller için değil, bir çok kapalı kırık çizgi ile çevrelenmiş daha karışık şekiller için de kullanılmıştır (Şek. 13). Gerçekten, Yardımcı teorem 5 in ispatında «çokgenlerin» yalnız,

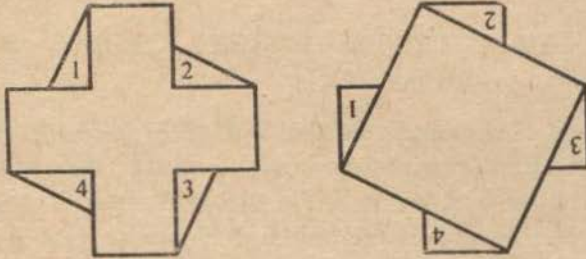
üçgenlere parçalanabilme karakteristik özeliği kullanılmıştır. Fakat bu özellik, kapalı kırık çizgilerle çevrelenmiş bütün şekil'erde mevcuttur (Şek. 13).



Şek. 13

3. TAMAMLAMA METODU

Alanların hesabında, çok defa, parçalama metodu yerine buna «dual» olan ikinci bir metod kullanılır. Bu metoda *tamamlama* metodu denir. Şimdi bu metodu görelim. Verilen iki şekli denk parçalara ayıracağımız yerde, bunlara öyle denk parçalar ilâve edelim ki elde

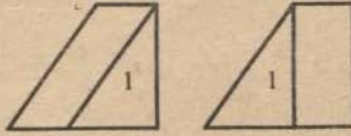


Şek. 14

edilen yeni şekiller de denk olsun. Mese'â Şek. 1 de görülen şekilleri alalım. Bunlar eşparçalanabildiklerinden eşit alanı haizdirler. Fakat alanlarının eşitliği değişik bir yoldan da gösterilebilir (Şek. 14). Hem haç hem de kareye dört tane birbirine denk üçgen ilâve edilerek aynı

şekil elde edilir. Buradan ilk iki şeklin (yani haç ve karenin) alanlarının eşit olduğu çıkar.

Tamamlama metodu elemanter geometri teoremlerinin ispatında başarı ile kullanılabilir. Meselâ, yükseklik ve tabanları aynı olan bir paralelkenarla bir dik dörtgenin alanlarının da eşit olduğunu göstermek için Şek. 15 e

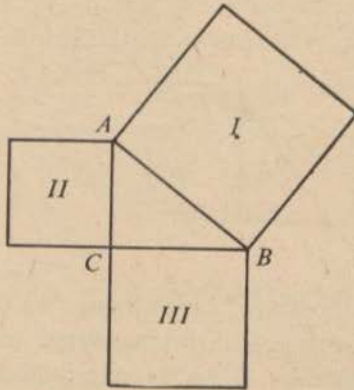


Şek. 15

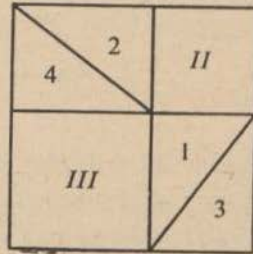
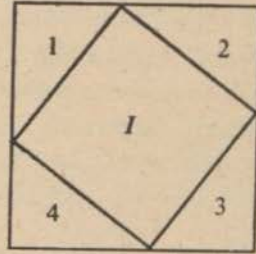
bakalım. Bu şekilden görüleceği üzere, paralelkenar ve dik dörtgene aynı üçgeni ilâve etmekle birbirine denk olan trapezler elde etmek mümkündür. O halde paralelkenar ile dik dörtgenin alanları eşittir *.

Bu metod kullanılarak Pitagor teoremi de kolayca ispat edilebilir. ABC bir dik üçgen olsun. Hipotenüs üzerine inşa edilen I karesinin alanının, dik kenarlar üzerine inşa edilen II ve III karelerinin (Şek. 16) alanları toplamına eşit olduğunu ispat etmek için, Şek. 17 ye bakalım. Bu resimden, iki denk şekil — kenar uzunlukları ABC üçgeninin dik kenarları toplamına eşit olan iki kare — elde etmenin mümkün olduğu görülür; öyle ki her birinde ABC üçgenine denk dört tane üçgen, ya I karesine veya II ve III karelerinin toplamına ilâve edilsin. Böylece, Pitagor teoremi ispat edilmiş olur. İki metod arasında mukayeseyi temin için (Şek. 18) de Pitagor

*) Paralelkenarların alanını hesaplamak için bu metod, mutad olan metoda tercih edilir (Şek. 2). Gerçekten, Şek. 15 de gösterilen metod, Şek. 2 de gösterilen yerine daima kullanılabilir (Sahife 2 deki alt nota bakınız).



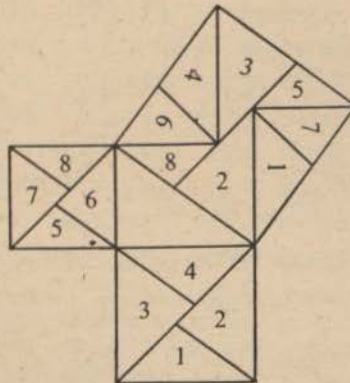
Şek. 16



Şek. 17

teoreminin parçalama metodu ile nasıl ispat edileceğini gösteren bir çizim verilmiştir.

Her birine, birbirlerine denk çokgen'ler ilâve ederek denk şekiller elde etmek mümkün olabilen çokgenlere

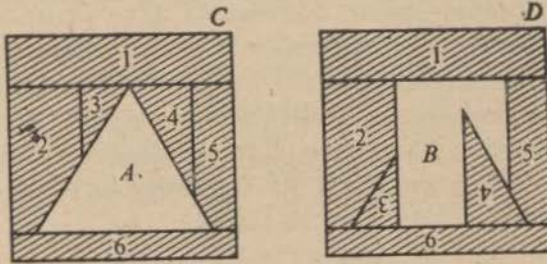


Şek. 18

eştamamlanabilen çokgenler diyeceğiz. Eştamamlanabilen şekillerin eşit alanları olacakları aşîkârdır. Derhal akla şu gelir: acaba tersi de doğru mudur? Yani alanları eşit olan iki çokgen eştamamlanabilen şekiller midir? Bu sorunun müspet bir cevabı, Bolyai-Gerwin teoreminin tatbiki ile elde edilir. İspatı aşağıdadır:

TEOREM. *Alanları eşit olan iki çokgen eştamamlanabilen şekillerdir.*

İspat. A ve B , alanları eşit olan iki çokgen olsunlar. A ve B şekillerini içlerine alabilecek kadar büyük iki denk kare seçelim. Bu karelerden A ve B çokgenlerini kesip çıkarırsak, eşit alanlı, C ve D şekillerini elde ederiz (Şek. 19 da taranmış şekillerdir). C ve D eşit alanlı şekiller



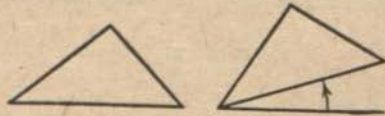
Sek. 19

olduklarından (Bolyai-Gerwin teoremine göre) eşparçalanabilirler. Onun için C ve D şekilleri denk parçalar çiftlerine ayrılabilirler. Bu da, A ve B nin, eştamamlanabilir olduğunu gösterir.

Bu bölümdeki teoremler gösterir ki, düzlem çokgenler için, eşparçalanabilme ve eştamamlanabilmenin her biri, eşit alanları haiz olma özeliğine eşdeğerdir. İlerde 5. ve 6. bölümlerde göreceğimiz üzere (orada, çokyüzlüleri gözönüne alacağız), katı cisimler için hal başkadır.

2. Hadwiger-Glur Teoremi

Bolyai-Gerwin teoremi, çokgenler için «alanların eşitliği» ve «eşparçalanabilme» nin denk olduğunu gösterir. Bu teorem, ilerdeki araştırmalarımız için çeşitli imkânlar açar. Hususiyle, şu mühim soru hatıra gelebilir: parçalarının sayısı veya dağılışı hakkında bazı şartlar ilâvesiyle çokgenler eşit alanlı yapılabilirler mi? Bu çeşit kayda değer bir netice, 1951 de İsviçreli matematikçilerden Hadwiger ve Glur tarafından e'de edilmiştir. Hadwiger ve Glur, Bolyai-Gerwin teoreminde ilâve şartın o suretle vazedilebileceğini göstermişlerdir ki eşit alanlı çokgenlerden birinin parçalanışındaki kısımlarla ikincisinin mütekabil parçalanışının, *mütekabil kenarları birbirlerine paralel olsunlar*. İlk bakışta bu imkânsız gibi görülür; mese-lâ denk iki üçgenin keyfi bir açı kadar birbirine nazaran



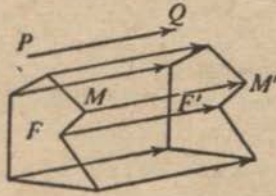
Şek. 20

döndürülerek (Şek. 20), mütekabil kenarları paralel olacak şekilde denk parçalara nasıl ayrılabilceğini görmek zordur. Bununla beraber, böyle bir parçalama yalnız üçgenler için değil fakat, her hangi bir çokgen için de mevcuttur. Bu bölümde bunun bir ispatı verilecektir.

4. HAREKETLER

Şimdi, tekrar geçen bölümde verilen Bolyai-Gerwin teoreminin ispatına dönelim. Yardımcı teorem 3 ün ispatında (Şek. 9), $ABCD$ paralelkenarı, kendisini tamamiyle örten (1, 2, 3, ... ile numaralanmış) bir takım parçalara ayrılmıştı; ve bunların başka bir şekilde terkibi ile $ABEF$ paralelkenarı meydana geliyordu. Şek. 9 dan görüldüğü üzere $ABEF$ paralelkenarını elde etmek için kendisini teşkil eden parçalara bir öteleme tatbik etmek kâfidir; yani her bir parçayı belirli bir doğru parçası boyunca döndürmeden kaydırmak kâfidir *. Hususiyle, Şek. 2 den

*) Burada bir ötelemenin tarifini hatırlıyalım: $\vec{PQ}$ yönlenmiş bir doğru parçası (bir vektör) olsun; yönü Şek. 21 de bir okla işaret edilmiştir. Her hangi bir M noktasından, PQ ye paralel, eşit ve aynı yönlü MM' doğru parçasını çizelim. Bu takdirde M' noktası M noktasından $\vec{PQ}$ kadar bir öteleme ile elde edilmiştir denir. Bir F şeklinin bütün noktalarına



Şek. 21

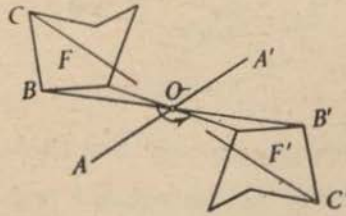
böyle bir dönüşüm tatbik edersek, yeni bir F' şekli elde edilir, ve F' , F den $\vec{PQ}$ kadar bir öteleme ile elde edilmiştir denir. Bu hareketin bir makûsu olduğu aşîkârdır. Yani F şekli de F' şeklinden elde edilebilir. Bunun için F' ne, $\vec{QP}$ ile intibak eden fakat aksî yönde yönlenmiş, $\vec{QP}$ kadar bir öteleme tatbik etmek kâfidir. Burada sunu da kaydedelim ki F şeklinin kendisinin de F in bir ötelemesi ile elde edildiği farzedilebilir («sıfır doğru parçası» ile yapılan öteleme ile).

görüldüğü gibi iki paralelkenarın eşparçalanabilir olduğu ötelemeler yardımıyla görülebilir.

Fakat Şek. 3 ve Şek. 4 deki şekillerin eşparçalanabilir olduğunu görmek için ötelemeler kâfi değildir. Bunun için ötelemelerle beraber bir noktaya nazaran simetri* (bir merkeze nazaran simetri) kullanmak lâzımdır. Şek. 3 de BOD üçgeni yerine, O noktasına göre simetriği olan COE üçgenini alırsak, $ADEC$ paralelkenarını elde ederiz. $KLMN$ paralelkenarı ise bundan bir öteleme ile elde edilebilir. Şek. 4 deki şekillerin eşparçalanabilir oldukları da tamamen benzer tarzda gösterilebilir. Yardımcı teorem 2 nin ipatı için de, bir merkeze nazaran simetriyi kullanmıştık (Şek. 7).

Şimdi de yardımcı teorem 4 ün ispatını hatırlıyalım (Şek. 10). $ABCD$ ve $EFGH$ dik dörtgenlerinin eşparçalanabilir olmalarının ipatı iki kısma ayrılmıştı: Önce $EFGH$ dik dörtgeni ile $EFKL$ paralelkenarının eşparçalanabilir

* Bir noktaya nazaran (bir merkeze göre) simetrinin tarifini hatırlıyalım: O bir nokta (simetri merkezi) olsun. Eğer AA' , orta noktası O olan bir doğru parçası ise, bunun uç noktaları A ve A' ne O merkezine nazaran simetriktirler denir. Eğer bir F şeklinin bütün



Şek. 22

noktaları (O ya göre) simetriğine dönüştürülürse, yeni bir F' şekli elde edilir. Bu takdirde F ve F' şekillerine birbirlerine nazaran (O merkezine göre) simetriktirler denir; ve bir şekli diğerine çeviren dönüşüme de bir merkeze göre simetri adı verilir (Şek. 22).

olduğu kaydedilmiş, sonra da bu paralelkenar ile $ABCD$ dik dörtgeninin eşparçalanabilen şekiller olduğu gösterilmişti. $EFGH$ ve $EFKL$ şekillerinin eşparçalanabilir oldukları yalnız ötelemeler kullanarak görülebilir (yardımcı teorem 3'e dayanarak; zira $EFGH$ ve $EFKL$ paralelkenarlarının tabanları ortaktır). Her ne kadar $ABCD$ ve $EFKL$ paralelkenarlarının AB ve EL kenarları eşit iseler de, paralel değildirler. Bundan ötürü yardımcı teorem 3 ü kullanmak için, $EFKL$ paralelkenarını, önce EL kenarı AB ye paralel oluncaya kadar döndürmelidir. Böylece yardımcı teorem 4 ün yukarda verilen ispatı, $EFKL$ şeklinin verilen bir açı kadar dönmesini intaç eder (ve tabii, şekli teşkil eden bütün parçalarının).

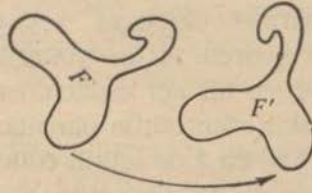
Görülüyor ki Bölüm 1 de tetkik edilen hallerin hemen hepsinde, şekillerin eşparçalanabilir olduklarını görmek için, yalnız bir merkeze göre simetri (merkezî simetri) ve ötelemeler kâfidir. Fakat yardımcı teorem 4 bir istisna teşkil eder. Orada ispatı tamamlamak için şekli uygun bir açı kadar döndürmek icap eder. Hemen akla şu sual gelir: Yardımcı teorem 4 ün ispatını dönmeler kullanmadan yapmak mümkün müdür? Daha genel olarak, tabanları eşit olan her hangi iki çokgenin eşparçalanabilir şekiller olduklarını, parçalarını döndürmeden, yalnız merkezî simetriler ve ötelemeler kullanarak göstermek mümkün müdür? Bu suale cevap verebilmek için hareketlerin bazı özelliklerini tetkik etmeliyiz.

Bir merkeze göre simetriler, ötelemeler ve dönmeler birer hareket misâlidirler*. Herhangi bir hareket aşağıdaki şekilde temsil edilebilir: Bir F şekli, düzleminden «olduğu gibi kaldırılıp», «şekli bozulmadan» yeni bir F' vaziyetine

*) Merkezî simetriler, dönmelerin özel halidirler. Gerçekten bir şeklin, bir noktaya göre simetriğini almak için onu simetri merkezi etrafında 180° lik bir açı ile döndürmek kâfidir (Şek. 22).

getirilmiş olsun. F şeklini F' şekline çeviren bu dönüşüne bir *hareket* denir (Şek. 23)*. Hareketleri küçük harflerle göstereceğiz.

Her d hareketinin bir makûs hareketi vardır: Şöyle ki, bu hareket her şekli d ile dönüştüğü durumdan tekrar ilk başlangıç haline dönüştürür. Meselâ, $\overrightarrow{PQ}$ boyunca yapılan ötelemenin makûs hareketi, $\overrightarrow{QP}$ boyunca yapılan



Şek. 23

ötelemedir (doğrultuları terstir). Bir merkezî simetrisinin makûs hareketi gene kendisidir. Bu ihtarları, ayrı bir yardımcı teorem olarak söyleyelim:

YARDIMCI TEOREM 6. *d hareketi bir öteleme veya bir merkezî simetri ise, d ye tekabül eden makûs hareket de bir öteleme veya bir merkezî simetridir.*

Hareketler ardarda yapılabilir; meselâ yönlenmiş bir doğru parçası boyunca bir öteleme (birinci hareket), sonra bir noktaya göre bir simetri (ikinci hareket) tatbik

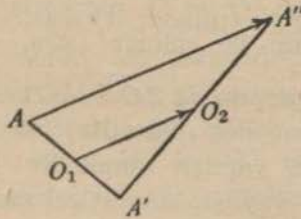
*) Burada yalnız bir şeklin (F şeklinin) hareketinden bahsediyoruz. Fakat ekseriya hareket terimi (içindeki bütün şekillerle beraber) bütün bir düzlem için kullanılır. Meselâ « PQ doğru parçası kadar öteleme» düzlemin içindeki bütün şekillere tatbik edilmelidir; yani *bütün düzlem*, olduğu gibi vaziyetini değiştirir kabul edilmelidir. «Bir O merkezine nazaran simetri» de bütün düzlemin bir hareketini gösterir. v.s.

edebiliriz. Eğer önce d_1 hareketini sonra d_2 hareketini tatbik etmişsek, $d_1 \cdot d_2$ ile göstereceğimiz yeni bir (bileşke) hareket elde ederiz. Bu yeni harekete d_1 ve d_2 hareketlerinin *çarpımı* denir *.

YARDIMCI TEOREM 7. *Merkezleri O_1 ve O_2 olan iki merkezi simetrisinin çarpımı, $\overrightarrow{2O_1O_2}$ yönlenmiş doğru parçası boyunca yapılan bir ötelemedir.*

A ve A' noktaları O_1 e nazaran simetrik, A' ve A'' de O_2 ye nazaran simetrik olsunlar. O_1O_2 doğru parçası, $AA'A''$ üçgeninin iki kenarının orta noktalarını birleştirir. O halde AA'' doğru parçası O_1O_2 doğru parçasına paraleldir, fakat uzunluğu O_1O_2 ninkinin iki katıdır (Şek. 24)**.

Böylece, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{2O_1O_2}$ boyunca yapılan bir öteleme, her



Şek. 24

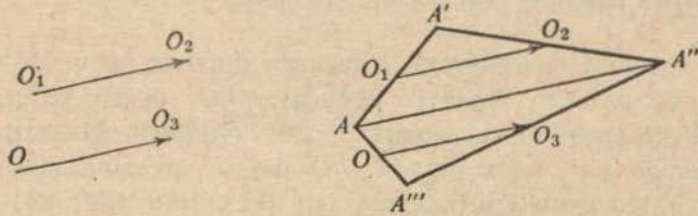
hangi bir A noktasını, O_1 ve O_2 merkezlerine göre yapılan iki simetrisinin çarpımı olan hareketin dönüştürdüğü A'' noktasına dönüştürür.

*) Bazan birbirini takip eden d_1 ve d_2 hareketlerinin birleşkesini $d_1 \cdot d_2$ yerine, $d_2 \cdot d_1$ ile göstermek daha elverişli olur.

**) Eğer A noktası O_1O_2 doğrusu üzerinde ise, A , A' , A'' noktaları aynı doğru üzerinde bulunurlar, yani bu noktalar bir üçgen belirtmezler. Bu halde, neticenin doğruluğunun tahkiki, mümkün olan bütün özel haller gözönüne alınarak yapılabilir.

YARDIMCI TEOREM 8. O_1, O_2, O_3 noktalarına göre üç merkezi simetrisinin çarpımı, yine bir merkezi simetridir.

O noktasını o suretle seçelim ki, $\overrightarrow{O_1O_2}$ ve $\overrightarrow{OO_3}$ yönlendirilmiş doğru parçaları eşit, paralel ve aynı yönlü olsun (Şek. 25). Bu takdirde O_1 ve O_2 merkezlerine göre yapılan



Şek. 25

simetrilerin çarpımı, O ve O_3 merkezlerine göre yapılan simetrilerin çarpımı ile çıkarılır (zira, yardımcı teorem

7'ye göre her iki çarpım da $2\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{OO_3}$ doğru parçası boyunca bir ötelemeden ibarettir). O halde O_1, O_2, O_3 merkezlerine göre yapılan simetriler yerine O, O_3, O_3 merkezlerine göre yapılan simetrileri çarpabiliriz. Bunlar ise aşikâr olarak, O merkezli bir simetridir (çünkü merkezi O_3 olan iki simetri ardarda yapılırsa neticede her nokta ilk durumuna dönmüş olur) *.

YARDIMCI TEOREM 9. Eğer d_1 ve d_2 hareketlerinden her biri bir öteleme veya bir merkezi simetri ise, çarpımları da bir öteleme veya bir merkezi simetridir.

*) Gerçekten, bu ispatta $(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = (S \cdot S_3) \cdot S_3 = S \cdot (S_3 \cdot S_3) = S$ dir (burada S_1, S_2, S_3, S , merkezleri sırasıyla, O_1, O_2, O_3, O olan merkezi simetrilerdir). Çarpımın «assosiyatif kaldesi» ilerde paragraf 10 daki 4. özellikte gerçekleştirilecektir.

Bir öteleme iki merkezi simetrisinin çarpımı olduğuna göre (yardımcı teorem 7 den kolayca görülür), bu yardımcı teoremden gözönüne alınan hareketlerin çarpımı, iki, üç, veya dört merkezi simetrisinin çarpımı olarak düşünülebilir. Zira iki merkezi simetrisinin çarpımı bir ötelemedir (yardımcı teorem 7); üç merkezi simetrisinin çarpımı bir tek merkezi simetridir (yardımcı teorem 8); dört merkezi simetrisinin çarpımı, iki merkezi simetri çarpımı demektir (çünkü üç merkezi simetri çarpımı bir tek merkezi simetridir); bu iki merkezi simetri çarpımı da bir ötelemedir. Görülüyor ki, bütün hallerde çarpım ya bir merkezi simetri veya bir ötelemedir.

5. HADWIGER - GLUR TEOREMİ

Bir çift çokgenin eşparçalanabilir şekiller oldukları yalnız öteleme ve merkezi simetrisi yapmakla görülebiliyorsa, bunlara *S-eşparçalanabilir* çokgenler diyeceğiz *. Bunu şöyle izah edelim: İki çokgenden biri sonlu sayıda $M_1, M_2, M_3, \dots$ parçalarına, diğeri de aynı sayıda ve sırasıyla bunlara denk $M'_1, M'_2, M'_3, \dots$ parçalarına ayrılabiliriyorsa öyle ki, denk M_1 ve M'_1 çokgenlerinden biri diğerinden bir öteleme veya bir merkezi simetri ile elde edilebilsin, ve benzer şekilde bütün diğer M_2 ve M'_2, M_3 ve $M'_3, \dots$ v.s. çokgen çiftleri için de bu özellik doğru olsun; bu takdirde gözönüne alınan iki çokgene *S-eşparçalanabilen* çokgenler denir.

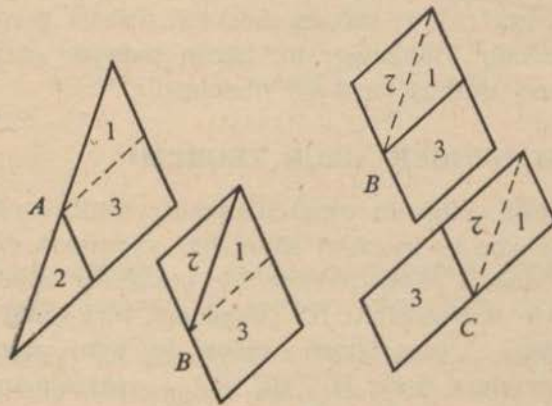
Şimdi aşağıdaki teoremi ispat edeceğiz: «*eşit alanlı iki çokgen S-eşparçalanabilirler.*» Bu teoremin ispatı, tamamiyle Bolyai-Gerwin teoremine benzer şekilde yapılır, ve ispat, benzer yardımcı teoremlere dayanır.

YARDIMCI TEOREM 1a. *A ve C, her ikisi de B*

*) Bu terim daha etraflı olarak ileride 11. paragrafta görülecektir.

çokgeni ile S-esparçalanabilen iki çokgen iseler, birbirleri ile de S-esparçalanabilirler.

B çokgenini daha küçük çokgenlere ayıralım; bu parçalar (ötelemeler ve merkezî simetriler kullanarak) A çokgenini meydana getirecek tarzda birleştirilebilir. B yi bir de o suretle parçalıyalım ki, bu parçaları (ötelemeler ve merkezî simetriler kullanarak) uygun şekilde birleştirmek suretiyle C çokgeni elde edilsin (Şek. 26).



Şek. 26

B nin her iki parçalanışı beraber düşünülürse, şekildeki iki çeşit doğru vasıtası ile B daha küçük çokgenlere parçalanır. Görülüyor ki, A ve C şekillerinin her biri bu küçük parçaların uygun birleşimleri ile elde edilir ve bunun için ötelemeler ve merkezî simetriler kâfidir. Böylece A ve C çokgenleri belirli bir tarzda daha küçük parçalara ayrılmış olur. B şeklinin parçalarını $M_1', M_2', M_3', \dots$ ile, A çokgeninin bunlara tekabül eden parçalarını $M_1, M_2, M_3, \dots$ ile, C çokgenininkileri de $M_1'', M_2'', M_3'', \dots$ ile gösterelim. M_1 ve M_1'' çokgenlerinden her biri M_1' den, bir öteleme veya bir merkezî simetri ile elde edilebilir.

O halde M_1' , M_1 den bir öteleme veya bir merkezi simetri ile elde edilebilir (yardımcı teorem 6); ve bunun neticesi olarak M_2'' çokgeni M_1 den bir öteleme veya bir merkezi simetri ile elde edilir (yardımcı teorem 9). Benzer şekilde M_2 çokgeninden M_2'' , M_3 den M_3'' , ... v.s. bir öteleme veya bir merkezi simetri ile elde edilebilir. Böylece devam edilerek A ve C çokgenlerinin S -eşparçalanabilen oldukları görülür.

Şunu da kaydedelim ki burada öteleme ve merkezi simetrilerin yalnız yukarda (yardımcı teorem 6 ve 9 da) ispat edilen özellikleri kullanılmıştır.

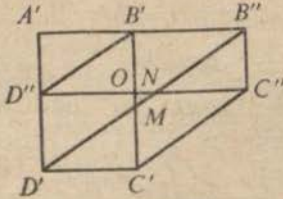
YARDIMCI TEOREM 2a. *Her üçgen uygun bir dik dörtgenle S -eşparçalanabilendir.*

Paragraf 2 de yardımcı teorem 2 nin ispatına bakınız. Şek. 7 de «1» ile numaralanmış üçgenlerden her biri diğerinden (merkezi O olan bir simetri ile elde edilirler; «2» ile numaralanmış üçgenlerden her biri de diğerinden (merkezi O' olan) bir simetri ile elde edilir. Şek. 7 de taranmış olan trapez ise yerinde kalır, veya başka bir deyimle «sıfır doğru parçası» boyunca yapılan bir öteleme ile değişir. O halde Şek. 7 de görülen ABC ve $ABFE$ şekilleri S -eşparçalanabilendirler

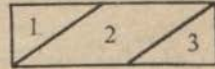
YARDIMCI TEOREM 3a. *Alanları eşit, tabanları eşit uzunlukta ve paralel olan iki paralel kenar S -eşparçalanabilendirler.*

Bir öteleme kullanılarak paralel kenarların paralel olan tabanları üst üste getirilebilir. Bundan sonra paragraf 2 deki yardımcı teorem 3 ün ispatı kullanılarak iki şeklin S -eşparçalanabilen olduğu görülür. Şek. 9 da, aynı numara ile işaretlenmiş parçaların her biri diğerinden ötelemeler yardımıyla elde edilir.

götürelim. Bu ötelemeyi o şekilde yapalım ki, A noktası A' ile çakışsın ve AD_1 kenarı $A'D'$ üzerine gelsin (bu, D' ile B' nün adlarının değiştirilmesini icap ettirebilir). Bu suretle A' köşesindeki açısı $A'B'C'D'$ dik dörtgeni ile ortak olan $A'B''C''D''$ dik dörtgenini elde ederiz (Şek. 27c). Bu inşa esnasında, her safhada elde edilen paralel kenarlar bir önceki ile S -eşparçalanabilendir. O halde en son elde ettiğimiz $A'B''C''D''$ dik dörtgeni, ilk $ABCD$ dik dörtgeni ile S -eşparçalanabilendir (Yardımcı teorem 1a ya bakınız). O halde $A'B''C''D''$ ve $A'B'C'D'$ dik dörtgenlerinin S -eşparçalanabilen olduğunun gösterilmesi kalıyor. Fikrimizi tespit için $A'B'' > A'B'$ olduğunu farzedelim (buna göre, $A'D'' < A'D'$ olur). $B''D'$, $B'D''$ $C''C'$ doğru parçalarını çizelim (Şek. 28); bu doğru parçalarının



Şek. 28



Şek. 29

birbirlerine paralel olduklarını göstereceğiz. Başlangıçta verilen $ABCD$ ile $A'B'C'D'$ ve $A'B''C''D''$ dik dörtgenleri eşit alanlı olduklarından

$$A'B' \cdot A'D' = A'B'' \cdot A'D'' \quad (1)$$

dür. Her iki taraftan $A'D'' \cdot A'B'$ çarpımı çıkarılarak

$$A'B' \cdot D'D'' = A'D'' \cdot B'B''$$

elde edilir; veya $B'C'$ ve $D''C''$ doğru parçalarının kesiş-

tiği noktaya O dersek bu eşitlik

$$A'B' \cdot OC' = A'D'' \cdot OC'' \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. (1) ve (2) eşitlikleri oran şeklinde yazılırsa

$$\frac{A'B'}{A'D''} = \frac{A'B''}{A'D'} = \frac{OC''}{OC'}$$

bulunur.

Böylece, $A'B'D''$, $A'B''D'$ ve $OC''C'$ dik üçgenleri benzer üçgenlerdir. O halde $\sphericalangle A'D''B' = \sphericalangle A'D'B'' = \sphericalangle B'C'C''$ dür, ve $B''D'$, $B'D''$, $C'C''$ doğru parçaları birbirlerine paraleldirler.

$B''D'$ doğrusunun $B'C'$ ve $C''D''$ doğrularıyla kesiştikleri noktalar sırasıyla M ve N olsun. Bu takdirde $\Delta B''C''N \cong \Delta MC'D'$ dür ($B''C''C'M$ ve $NC''C'D'$ dörtgenleri paralelkenar olduklarından, $B''C'' = MC'$ ve $C''N = C'D'$ dür). Bundan başka, $B'B''ND''$ ve $B'MD'D''$ paralelkenarları eşit alanlıdırlar ve $B'D''$ tabanları ortaktır. Bunun neticesi olarak yardımcı teorem 3a ya göre S -esparçalanabilendirler. Nihayet, $A'B'D''$ üçgeni de $A'B'C'D'$ ve $A'B''C''D''$ dik dörtgenlerinin her ikisinin de ortak parçasıdır. Bütün bu söylediklerimizden şu neticeyi elde ederiz: $A'B'C'D'$ ve $A'B''C''D''$ dik dörtgenlerinin her biri üç parçaya ayrılabilindiğinden (Şek. 29), bunlar S -esparçalanabilendirler (her iki şekilde de «1» ve «3» ile numaralanmış mütekabil parçalar birbirlerine denktirler ve biri diğerinden bir öteleme ile elde edilir; «2» ile numaralanmış paralelkenarlar da S -esparçalanabilendirler).

YADRIMCI TEOREM 5a. *Her çokgen uygun bir dik dörtgenle S -eşparçalanabildir.*

HADWİGER-GLUR TEOREMİ*. *Eşit alanlı iki çokgen S -eşparçalanabildirler.*

Yardımcı teorem 5a ve Hadwiger-Glur teoremini ispat etmek için, yardımcı teorem 5 ve Bolyai-Gerwin teoremlerini ispat ederken söylediklerimizi aynen tekrarlamak kâfidir. Yalnız «eşparçalanabilen» yerine « S -eşparçalanabilen» ve yardımcı teorem 1, 2, ... yerine yardımcı teorem 1a, 2a, ... dememiz lâzımdır.

Hadwiger-Glur teoreminden derhal şu netice çıkarılır: Eşit alanlı iki çokgen o suretle parçalanabilirler ki, denk olan parçaların mütekabil kenarları paralel olsun. Meselâ A ve B eşit alanlı iki çokgen ise, bunlardan birisini o suretle parçalayabiliriz ki, yalnız ötelemeler ve bir merkeze göre simetriler kullanarak elde edilebilecek uygun parçaların tekrar birleştirilmesiyle ikinci çokgen elde edilebilir. Bu söylediklerimizin neticesi olarak hemen şunu da kaydedelim ki, iki çokgenden biri diğerinden bir öteleme (Şek. 21) veya bir merkeze göre simetri i' e (Şek. 22) elde ediliyorsa, mütekabil kenarları paraleldir.

*) Bibliyografyada [2] ye bakınız.

3. Eşparçalanabilme ve aditif invariantlar kavramı

Hadwiger-Glur teoremini ispat ettikten sonra, onunla ilgili olan şu soruya cevap vermeğe çalışalım: alanları eşit olan çokgenleri, biri diğerinden *yalnız ötelemeler* kullanmakla elde edilebilecek parçalara ayırmak mümkün müdür? Diğer tâbirle, bundan evvelki kısımda söylenenler merkezi simetrliler kullanılmadan yapılabilir mi? Bu bölümde bu sorunun cevabı araştırılıyor. Göreceğiz ki, eşit alanlı her çokgen çiftini yukarda söylenen şekilde, yalnız ötelemelerle parçalamak mümkün değildir; meselâ alanları eşit çokgenlerden biri üçgen biri paralel kenar ise, böyle bir parçalama hiç bir zaman yapılamaz.

Bu neticeyi elde etmek için aşağıda tarif edeceğimiz *aditif invariant* kavramını kullanacağız. Bu kavram ilerdeki paragraflarda da kullanılacaktır.

6. $J_1(M)$ ADİTİF İNVARİYANTI

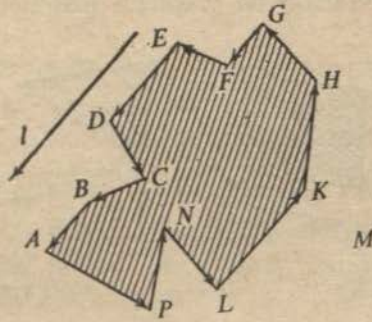
M her hangi bir çokgen olsun. Bunun kenarlarını şu şekilde yönlileyelim: bir kenar üzerinde ok yönünde gidilirse solda kalan noktalar çokgene ait olsun; halbuki sağda kalan noktalar çokgene ait olmasın (Şek. 30)*.

*) Çokgenin kenarları boyunca birer birer, oklarla gösterilen yönlerde gidilirse, çokgen etrafında tam bir devir yaparak hareket noktasına dönmüş olur. Bu takdirde, pozitif yönde giderek, çokgen etrafında bir devir yapıldı denir.



Şek. 30

Her hangi bir yönlenmiş l doğrusu alalım, yani yönü bir okla gösterilmiş bir doğru alalım. M çokgeninin l doğrusuna paralel olan kenarlarının uzunluklarının cebrik toplamına $J_1(M)$ diyelim. Bu toplamda l doğrusu ile aynı yönde olan kenarların uzunluklarını pozitif (Şek. 31 de AB , DE ve FG kenarları), aksi yönde olan kenarların uzunluklarını negatif (Şek. 31 de KL kenarı)



Şek. 31

işaretle alalım. Eğer M nin l doğrusuna paralel hiç kenarı yoksa, $J_1(M)$ i sifıra eşit alalım. $J_1(M)$ sayısına bir *aditif invaryant* denir. (Bu terimi kullanmamızın sebebi aşağıda izah edilecektir.)

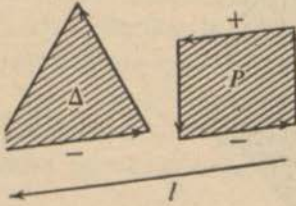
$J_1(M)$ invaryantının çokgenlerin eşparçalanabilmesi problemindeki önemi, aşağıda söyliyeceğimiz teoremle belirir.

7. T - EŞPARÇALANABİLME

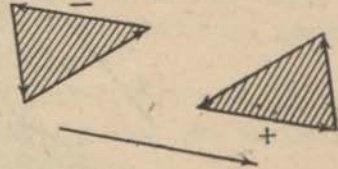
Eğer iki çokgenin eşparçalanabilme özeliği yalnız ötelemeler yardımı ile gösterilebiliyorsa, bunlara *T-esparçalanabilen* çokgenler diyeceğiz.

TEOREM. *A ve A' iki çokgen ve l de yönlenmiş bir doğru olsun. Eğer $J_1(A) \neq J_1(A')$ ise, A ve A' çokgenleri T-esparçalanabilen olamazlar.*

Bu teoremin ispatı aşağıda verilmiştir. Fakat önce bu teoremden çıkan basit bir neticeyi kaydedelim: Δ herhangi bir üçgen, P de alanı Δ ninkine eşit olan bir paralel kenar olsun (paralelkenarın tabanı üçgeninkine paralel olarak seçilmiştir (Şek. 32)). l doğrusunu da üçgen ve paralel kenarın tabanlarına paralel olarak seçelim ve kenarların işaretlerini de yukarıda söylenen kaideye göre



Şek.32



Şek. 33

tesbit edelim (Şek. 32). Bu takdirde $J_1(P) = 0$, $J_1(\Delta) \neq 0$ buluruz; o halde $J_1(P) \neq J_1(\Delta)$ dır. Buna göre P ve Δ şekilleri T-esparçalanabilen değildir. Şek. 33 deki denk üçgenler de T-esparçalanabilen değildir.

Şimdi yukarıda söylediğimiz teoremin ispatını verelim.

8. J(M) İNVARİYANTININ ÖZELLİKLERİ

YARDIMCI TEOREM 10. *l yönlenmiş bir doğru ve*

M ile M' de birbirlerinden bir öteleme ile elde edilebilen iki çokgen olsunlar. Bu takdirde $J_1(M) = J_1(M')$ dir.

Başka bir deyimle, her hangi bir çokgene bir öteleme tatbik edersek J_1 sayısı değişmez. Bu sebepten dolayı J_1 için invaryant terimi kullanılmıştır (öteleme ile değişmez).

Bu yardımcı teorem aşikârdır. Zira bir çokgene bir öteleme tatbik edersek kenarlarının uzunluk ve doğrultusunda hiç bir değişiklik olmaz.

YARDIMCI TEOREM 11. l yönlenmiş bir doğru ve A da bir çokgen olsun. A yı $M_1, M_2, \dots, M_k$ gibi sonlu sayıda bir takım çokgenlere parçalarsak

$$J_1(A) = J_1(M_1) + J_1(M_2) + \dots + J_1(M_k) \quad (3)$$

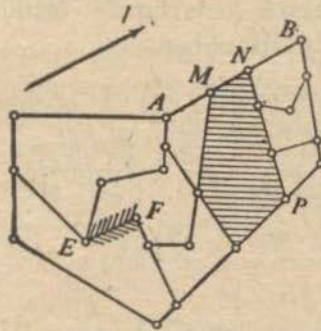
dır.

Başka bir deyimle, eğer A çokgeni bir takım daha küçük çokgenlerin bir araya gelmesi ile meydana gelmişse, $J_1(A)$, küçük çokgenlerin invaryantlarının toplanması ile elde edilir. Bunun için aditif invaryant ismi kullanılır.

İspat. $A, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinin kenarlarını teşkil eden bütün doğru parçalarını alalım ve bunların kesim noktalarını (yani $A, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinin köşelerini) işaretliyelim. Bu suretle sonlu sayıda (ve mümkün olduğu kadar kısa) doğru parçaları elde ederiz. Bu doğru parçalarına *halka* diyelim. Şek. 34 bir çokgenin daha küçük parçalara ayrılmasını gösteriyor. AB kenarı AM, MN ve NB olmak üzere üç halkadan meydana gelmiştir. Taranmış çokgenin NP kenarı da yine üç halkadan meydana gelmiştir.

A çokgeninin (veya $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinden her hangi birinin) $J_1(A)$ invaryantının hesabında l doğ-

rusuna paralel olan kenarların cebrik toplamı yerine, l doğrusuna paralel olan halkaların cebrik toplamı alınabilir. Zira her kenarın uzunluğu kendisini meydana getiren halkaların uzunlukları toplamına eşittir. Buna göre (3) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamı hesaplamak için $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinin her birindeki l doğrusuna paralel bütün halkaların cebrik toplamını almak kâfidir.



Şek. 34

Tamamiyle A çokgeninin *içerisinde* kalan bir halka (yalnız uç noktalar çokgenin kenarları üzerinde olabilir) alalım: Şek. 34 deki EF halkası gibi. Böyle bir halka $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinden *ikisine* ait olacaktır. Çokgenler halkanın iki karşı tarafında bulunacaklardır (biri sağ, diğeri sol tarafında). Bu çokgenlerden birinin invaryantının hesabında halka $(+)$ işareti ile alınıyorsa diğer çokgenin invaryantının hesabında $(-)$ işareti ile gelecektir. Buna göre bütün halkaların cebrik toplamında bu iki terim birbirini götürcektir. Görülüyor ki, (3) eşitliğinin sağ tarafını hesaplarken tamamiyle A çokgeninin *içerisinde* kalan halkaları ihmal etmek mümkündür.

Şimdi de A çokgeninin çevresi üzerinde bulunan ve l doğrusuna paralel olan bir halka alalım (Şek. 34 deki

AM halkası gibi). Böyle bir halka $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinden yalnız birisine aittir ve bu çokgen ile A çokgeni halkanın aynı tarafında bulunur. Onun için bu halka, $J_l(A)$ invaryantını veren toplamda ve $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \dots + J_l(M_k)$ toplamında aynı işarette bulunur. Buna göre (3) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade $J_l(A)$ ya eşittir. Bu suretle (3) eşitliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi paragraf 7 de söylenen teoremin ispatını kolayca verebiliriz. A ve A' çokgenlerinin T -eşparçalanabilen çokgenler olduğunu farzedelim. Yani A çokgeni $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokgenlerinin, A' çokgeni de $M_1', M_2', \dots, M_k'$ çokgenlerinin birleşmesi ile meydana gelmiş olsun, öyle ki, M_1 ve M_1' çokgenlerinden biri diğerinden yalnız bir öteleme yapılmakla elde edilebilsin. M_2, M_2' çifti ve diğer çiftler için de benzer özellik doğru olsun. Yardımcı teorem 10 a göre

$$\begin{aligned} J_l(M_1) &= J_l(M_1'), \quad J_l(M_2) = J_l(M_2'), \quad \dots, \\ J_l(M_k) &= J_l(M_k') \end{aligned} \quad (4)$$

dür. Yardımcı teorem 11 e göre de

$$\left. \begin{aligned} J_l(A) &= J_l(M_1) + J_l(M_2) + \dots + J_l(M_k) \\ J_l(A') &= J_l(M_1') + J_l(M_2') + \dots + J_l(M_k') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dür. (4) ve (5) den $J_l(A) = J_l(A')$ elde edilir. Görülüyor ki $J_l(A) \neq J_l(A')$ ise, A ve A' çokgenleri T -eşparçalanabilen olamazlar.

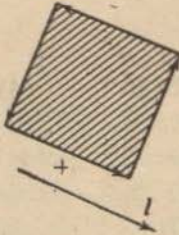
9. BİR MERKEZE GÖRE SİMETRİK ÇOKGENLER

Yukarda ispatı verilen teorem aşağıdaki şekilde de söylenebilir: A ve A' gibi iki çokgen her l doğrusu için

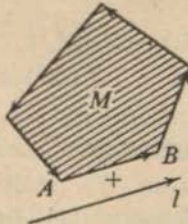
$J_1(A) = J_1(A')$ eşitliğini gerçekleştiriyorsa (ve yalnız bu halde) T -eşparçalanabildir. Yani A ve A' çokgenlerinin T -eşparçalanabilen olmaları için $J_1(A) = J_1(A')$ olması gerektir. Bu şartın yeter olduğu da kolayca görülebilir. O halde teorem aşağıdaki şekilde söylenebilir:

TEOREM. *Şayet A ve A' alanları eşit iki çokgen ise her yönlennmiş l doğrusu için $J_1(A) = J_1(A')$ eşitliği gerçekleşiyorsa, A ve A' çokgenleri T -eşparçalanabildir ([2] ye bakınız).*

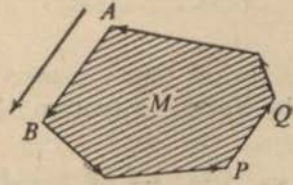
Şimdi aşağıdaki problemi vazedebiliriz. Bir kare ile T -eşparçalanabilen bütün konveks çokgenleri bulmak. Kolayca görülür ki bir Q karesi için $J_1(Q)$ invaryantı, l doğrusunun seçilişine bağlı olmadan sıfırdır (l nin, karenin bir kenarına paralel olduğu hal Şek. 35 de gösterilmiş-



Şek. 35



Şek. 36



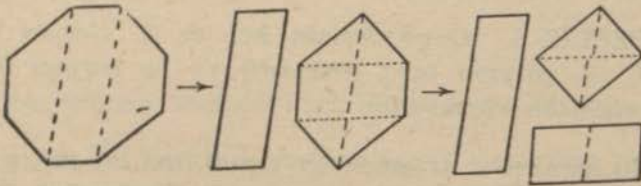
Şek. 37

tir). O halde problemimiz aşağıdaki gibi ifade olunabilir: Yönlennmiş her l doğrusu için J_1 invaryantı sıfıra eşit olan bütün konveks çokgenleri bulunuz. M böyle bir çokgen olsun. M nin bir AB kenarını ve buna paralel olan bir l doğrusunu alalım. Bu takdirde, M nin AB ye paralel bir kenarı daha olması lâzımdır (zira aksi halde $J_1(M) \neq 0$ dır ve AB nin uzunluğunun ya $+$ veya $-$ işaretlisine

eşittir; Şek. 36 ya bakınız). AB ye paralel olan kenarı PQ ile gösterirsek *

$$J_1(M) = \pm [(AB) \text{ nin uzunluğu} - (PQ) \text{ nün uzunluğu}]$$

dur; $J_1(M)$ sıfır olacağından, $AB = PQ$ olmalıdır. Buna göre, M çokgeninin her kenarına karşı, aynı uzunlukta ve buna paralel diğer bir kenarı mevcuttur (fakat aksi yönde yönelmiştir). O halde M çokgeni bir noktaya göre simetriktir. Bunun makûsunun doğru olduğu aşîkârdır: Bir M çokgeni bir noktaya göre simetrik ise, her hangi bir l doğrusu için $J_1(M)$ invaryantı sıfır olmalıdır. Buna göre *konveks bir çokgenin bir kare ile T-eşparçalanabilen olması için gerek ve yeter şart, bir noktaya göre simetrik olmasıdır.*



Şek. 38

Bu neticeyi yukarda söylediğimiz (fakat ispat etmediğimiz) teoremden elde ettik. Bununla beraber okuyucu, Şek. 38 i tetkik ederek (bu teoreme başvurmadan) kolayca ispat edebilir ki, bir noktaya göre simetrik olan bir çokgen, bir takım paralelkenarlara dönüştürülebilir (çokgeni parçalara ayırıp, her parçaya bir öteleme tatbik etmek suretiyle), ve bunlarda bir kareye dönüştürülür (yardımcı teorem 3 ün ispatına bakınız).

*) , M çokgeni konveks olduğu için bir l doğrusuna paralel olan ikiden fazla kenarı olamaz.

4. Eşparçalanabilme ve Grup kavramı

10. GRUPLAR

Bölüm 2 de düzlemin *hareketleri* ile meşgul olduk. Verilen bir düzlemdeki bütün hareketlerden müteşekkil cümleyi D ile gösterelim. Her hangi bir harekete, bu D cümlesinin *elemanı* denir. Meselâ her öteleme ve her merkezî simetri D cümlesinin birer elemanıdır. İki hareketin çarpımını evvelce tarif etmiştik; buna göre D cümlesi aşağıdaki özeliği haizdir:

ÖZELİK 1. D cümlesinin her d_1, d_2 eleman çifti için $d_1 \cdot d_2$ çarpımı tarif edilmiştir ve bu çarpım da D cümlesinin bir elemanıdır.

Bu hareketler arasında bir tanesi özel bir rol oynar. Bu da bütün şekli olduğu gibi sabit bırakandır. Buna «sıfır hareket» denebilir. e harfi ile göstereceğimiz bu harekete *idantik* hareket adını vereceğiz. İdantik hareket, her hangi bir d hareketi için $d \cdot e$ ve $e \cdot d$ çarpımlarını d ile idantik olmaları karakteristik özeliğini haizdir:

$$e \cdot d = d \cdot e = d.$$

Zira göz önüne alınan şekile önce e hareketi tatbik edilse (yani ilk vaziyetinde sabit bırakılsa), sonra d hareketi yapılırsa, netice yalnız d yi tatbik etmekle elde edilenin aynıdır; yani $e \cdot d = d$ dir. Benzer şekilde $d \cdot e = d$ olduğu kolayca görülür. e hareketinin bu özeliği 1 sayı-

sının çarpımda oynadığı rolü hatırlatır (her hangi bir a sayısı için, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dır). Bu benzerlikten dolayı e hareketine *birim* adı da verilir.

ÖZELİK 2. D cümlesi idantik eleman denen bir e elemanını ihtiva eder; öyle ki, D nin her d elemanı için

$$e \cdot d = d \cdot e = d \quad (6)$$

olsun.

Bundan başka, her d hareketinin bir makûs hareketi mevcuttur; bu da d^{-1} ile gösterilir. d hareketi ile makûsu d^{-1} in çarpımı (tabii d^{-1} hareketi ile d nin de çarpımı) öyle bir hareket olmalıdır ki, bütün şekli ilk durumunda sabit bıraksın. O halde

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e$$

dir. Bu neticeyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

ÖZELİK 3. D cümlesinin her d elemanına, yine D içinde bulunan öyle bir d^{-1} elemanı tekabül ettirebiliriz ki

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e \quad (7)$$

olsun; bu d^{-1} elemanına d nin makûsu denir.

d_1, d_2 ve d_3 üç hareket olsunlar. Bir A şeklinin d_1 hareketi ile B şekline dönüştüğünü farzedelim. d_2 hareketi ile de B şekli C şekline, ve nihayet d_3 hareketi ile C şekli D şekline dönüşsün. Şimdi $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ çarpımını düşünelim. Bu çarpım d_1 ile d_2 nin çarpımı olan hareketi, d_3 ile çarpmakla elde edilir. Kolayca görülür ki $d_1 \cdot d_2$ hareketi A şeklini C şekline dönüştürür; d_3 hareketi

ile de C şekli D şekli olur. Böylece, $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ hareketinin sonunda A şekli D ye dönüşür. Üç hareketin çarpımını başka bir sırada yapalım; $d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3)$ hareketini alalım. d_1 hareketi ile A şekli B ye dönüşür. $(d_2 \cdot d_3)$ ile de B şekli D ye dönüşür. O halde, $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ ve $d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3)$ hareketlerinin her ikisi de A yı aynı şekle dönüştürürler; yani bu iki hareket idantiktir. O halde şöyle diyebiliriz:

ÖZELİK 4. D cümlesinin herhangi üç d_1, d_2, d_3 elemanı için

$$(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3 = d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3) \quad (8)$$

dir. Bu özeliğe assasiatif özellik denir.

Görülüyor ki, bütün hareketlerden müteşekkil D cümlesi, yukarda söylediğimiz 1-4 özelliklerini haizdir. Bir takım elemanlardan müteşekkil bir cümlede çarpım tarif edilmiş ve 1-4 özellikleri câri ise, bu cümleye bir *grup* denir *.

*) Burada yalnız elemanları hareketler olan grupları inceliyeceğiz (aşağıya bak). Elemanları hareketler olmıyan bir grup misâli olarak *bütün pozitif sayıların cümlesi* G yi söyleyebiliriz. Grup içinde tarif edilen çarpım operasyonu sayıların âdi çarpımıdır (1 sayısı bu grubun idantik elemanıdır; bir a sayısının makûsu da $\frac{1}{a} = a^{-1}$ dir). Daha başka bir çok grup misâli verilebilir.

Grup kavramı modern matematikde önemli bir rol oynar. Daha fazla öğrenmek isteyen okuyucular için P.S. Alexandroff'un *An Introduction to the Theory of Groups* (Newyork: Hafner Publishing Company, 1959) isimli kitabı tavsiye edilebilir. Bu kitap grupları çok elemanter bir noktadan tetkik etmektedir. Bir çok da enteresan misâller ihtiva eder. Şunu da kaydedelim ki, Alexandroff grup operasyonu olarak çarpım yerine *toplam* almıştır.

(Bu kitap, bu yayınların dokuzuncusu olarak Prof. Ali Yar tarafından türkçeye çevrilmiştir (çevirenin notu)).

11. HAREKET GRUPLARI

Evvelce düzlemdeki bütün hareketlerden müteşekkil D cümlesinin bir grup teşkil ettiğini gördük. Şimdi de yalnız ötelemeler ve bir merkeze nazaran simetrilere müteşekkil S cümlesini düşünelim. Bu cümle de bir gruptur. Gerçekten, S cümlesinin elemanları hareketlerdir. Bunlardan herhangi bir çift için *çarpım* tarif edilmiştir (zira herhangi bir hareket çifti için tarif edilmiştir). O halde yardımcı teorem 9 a göre bu çarpım gene S cümlesinin bir elemanıdır. Yani özellik 1 mevcuttur. e hareketi bir öteleme olduğundan S cümlesine aittir ve bu sebepten özellik 2 nin gerçekleşeceği aşîkârdır. Bundan başka, (6) eşitliği herhangi bir hareket için doğru olacağından, özel olarak ötelemeler ve merkezî simetrliler, yani S cümlesinin elemanları için de doğrudur. Bir ötelemenin makûsu gene bir öteleme, aynı şekilde bir merkeze göre simetrisinin makûsu da gene bir merkezî simetri olduğundan (yardımcı teorem 6), herhangi bir hareket için doğru olan (7) eşitliği, özel olarak S cümlesinin elemanları için de doğrudur. Bunun neticesi olarak S cümlesinde 3. özellik de doğrudur. Nihayet, *bütün* hareketler için doğru olan, (8) eşitliği ile gösterilen assosiatif özeliğin, ötelemeler ve merkezî simetrliler için de doğru olduğunu söyleyebiliriz. O halde S cümlesi bir gruptur.

Tamamen benzer şekilde düzlemdeki *bütün ötelemelerden* meydana gelen T cümlesinin de bir grup olduğu gösterilebilir.

Bir G cümlesinin elemanları hareketler ise, bu elemanların çarpımları tarif edilmiş ise ve ayrıca 1-4. özellikler de gerçekleşiyorsa, bu G cümlesine bir *hareket grubu* denir. Hareket gruplarına misâl olarak yukarıda gördüğümüz D , S ve T gruplarını zikredebiliriz. Hareket gruplarına başka bir misâl olarak n bir tam sayı olmak üzere,

sabit bir nokta etrafında $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-2)\pi}{n}$

açıları ile yapılan dönmelerden müteşekkil Z_n cümlesini söyleyebiliriz (0 açısı ile dönme idantik hareket *e* dir). Z_n nin bir grup olduğunun gösterilmesini okuyucuya bırakıyoruz. Yalnız şunu kaydedelim ki, bu misâlde de görüldüğü gibi, bazan grubun elemanları sonlu sayıda da olabilir (Z_n grubu n tane eleman ihtiva eder).

G bir hareket grubu ve A ile A' de iki çokgen olsunlar. A yı $M_1, M_2, \dots, M_k$ şeklinde, A' yü de $M'_1, M'_2, \dots, M'_k$ şeklinde parçalara ayırdığımızı farzedelim; öyle ki, birbirlerine tekabül eden parçaların birinden diğerine G ye ait bir hareketle geçilsin (yani G grubu içinde öyle $g_1, g_2, \dots$ v.s. hareketleri bulunsun ki, g_1 hareketi ile M_1 çokgeni M'_1 ne g_2 hareketi ile M_2 çokgeni M'_2 ne v.s. dönüşsün). Bu takdirde A ve A' çokgenlerine *G-eşparçalanabilen* denir. Eğer G grubu S veya T grublarından biri ise, yukarda tetkik ettiğimiz *S-* veya *T-eşparçalanabilme* kavramını elde ederiz. Eşit alanlı bütün çokgen çiftleri *D-eşparçalanabilendir* (Bolyai-Gerwin teoremi) ve hattâ *S-eşparçalanabilendirler* (Hadwiger-Glur teoremi). Fakat eşit alanlı bütün çokgen çiftleri *T-eşparçalanabilen* değildirler. (Meselâ, eşit alanlı bir üçgen ve bir paralelkenar *T-eşparçalanabilen* değildir.)

12. S GRUBUNUN BİR ÖZELİĞİ *

Okuyucunun aklına gelebileceğini tahmin ettiğimiz bir sorunun cevabını aşağıda bir teorem olarak ifade edelim:

TEOREM. *Alanları eşit herhangi iki çokgen çiftinin eşparçalanabilen olmalarını temin eden en küçük hareket*

*) Bu paragraf ilk okuyuşta terkedilebilir.

grubu S dir. Diğer bir tâbirle, G bir hareket grubu ise ve eşit alanlı herhangi bir çokgen çifti G -eşparçalanabilen iseler, G grubu bütün S grubunu ihtiva eder (yani, bütün ötelemeleri ve merkezi simetrileri ihtiva eder).

İspat. İspat bir çok yardımcı teoreme dayanır. Bu yardımcı teoremlerin gösterilmesinde G grubunun, teoremdaki şartlara uyan bir grup olduğunu farzedeceğiz.

YARDIMCI TEOREM 12. P ve Q düzlemde lâlettâ-yin seçilmiş noktalar olduklarına göre, G grubunda P noktasını Q ye dönüştüren bir hareket mevcuttur. (Bir hareket grubunun bu özeliğine transitif özellik denir.)

Bir an için faraziyemizin yanlış olduğunu farzedelim; yani öyle iki P ve Q noktası bulduğumuzu farzedelim ki, G grubuna ait hiç bir hareket P yi Q ye dönüştürmesin. Düzlem de, G grubuna ait hareketlerle P nin dönüştüğü noktaların cümlesine P nin yörüngesi diyelim. M bir çokgen olsun; M nin, tepeleri P nin yörüngesi içinde bulunan bütün açılarının toplamını $I_r(M)$ ile gösterelim. Eğer M ve M' çokgenlerinden biri diğerinden, G grubuna ait bir hareket yardımı ile elde edilebilirse, $I_r(M) = I_r(M')$ dür. Bundan başka, bir A çokgeni bir takım daha küçük $M_1, M_2, \dots, M_n$ çokgenlerine ayrılmışsa, n bir tam sayı olmak üzere

$$I_r(A) = I_r(M_1) + I_r(M_2) + \dots + I_r(M_n) + n\pi$$

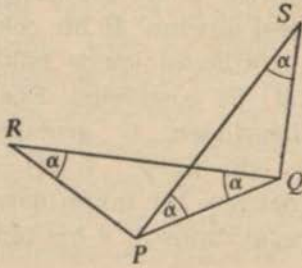
eşitliği gerçekleşir. (Bu, açı hesapları ile kolayca görülür.) $I_r(M)$ sayısının bu özelliklerinden (paragraf 8 dekine benzer şekilde), A ve A' gibi G -eşparçalanabilen iki çokgen için, n bir tam sayı olmak üzere, $I_r(A) = I_r(A') + n\pi$ olduğu kolayca görülür.

Şimdi PQR ve PQS gibi birbirine denk, geniş açılı, iki ikizkenar üçgen alalım; bunların taban açıları α olsun.

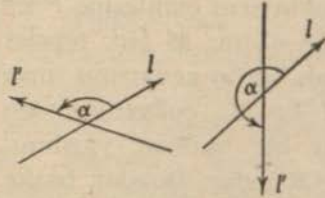
PQR nin geniş açısı P de, PQS ninki ise, Q de olsun (Şek. 39). P noktası, P nin yörüngesi üzerinde bulunduğundan, ve fakat Q noktası bu yörünge üzerinde bulunmadığından, $I_r(PQR)$ sayısı (R noktasının P nin yörüngesi üzerinde olup olmamasına göre) $\pi - \alpha$ veya $\pi - 2\alpha$ ya eşittir. $I_r(PQS)$ sayısı ise α veya 2α ya eşittir. Buna göre ($\alpha < \pi/4$) olduğundan),

$$I_r(PQR) = I_r(PQS) + n\pi$$

eşitliği hiç bir n tam sayısı için gerçekleşemez. O halde PQR ve PQS üçgenleri G -esparçalanabilen değildir. Bu ise, G grubunun özelliklerine aykırıdır (eşit alanlı, daha da fazla olarak, birbirlerine denk olan çokgenler G -esparçalanabilmektedirler). Böylece çelişme ile yardımcı teorem ispat edilmiş olur.



Şek. 39



Şek. 40

YARDIMCI TEOREM 13. G grubu en az bir merkezi simetri ihtiva eder.

İspata başlamadan önce hareketlerin bir kaç özeliğini (ispatsız olarak)* kaydedelim. Düzlemdeki her hareket,

*) Hareketlerin bu özelliklerinin ispatı O. Schreier'in *Modern Algebra and Matrix Theory* (Newyork: Chelsea Publishing Company, 1959) isimli kitabında (S. 162-168) bulunabilir.

aşağıdaki üç tipten birine aittir: bu hareket ya bir öteleme, ya bir dönme, veyahut da *kayan simetri* (ingilizce, *sliding symmetry*) diyebileceğimiz bir harekettir ki, bir doğruya göre bir simetri ile ^{*}, bu doğru boyunca yapılan bir ötelemenin bileşkesinden ibarettir. Bu doğruya kayan simetrinin *ekseni* denir. Eksen tek olarak belirlidir; yani, eksenleri çakışmayan iki kayan simetri *farklı* hareketlerdir. En son şunu da kaydedelim ki, eksenleri arasındaki açı α olan iki kayan simetrinin çarpımı, 2α açısı ile yapılan bir *dönme*dir. Bu özellikleri yardımcı teorem 13 ün ispatında kullanacağız.

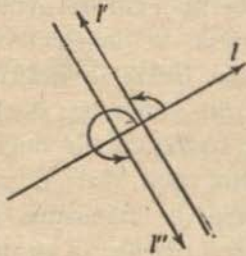
Şimdi yardımcı teorem 13 ün ispatına geçelim. İlk önce bir l doğrusu seçelim; şöyle ki, eğer G grubu en az bir kayan simetri ihtiva ediyorsa, l doğrusu olarak bu simetrinin eksenini alalım; aksi halde l doğrusunu lâlettâyin seçelim. l doğrusunun iki yönünden herhangi birini seçebiliriz. l' de yönlenmiş herhangi bir doğru ve l ile l' arasındaki açı da α olsun (Şek. 40); G grubu, açısı α olan bir dönme ihtiva ederse, l' doğrusuna l nin *yörüngesinde* bulunuyor diyelim. Özel olarak, l ye paralel olan her doğru l nin yörüngesi içindedir (zira, l ile arasındaki açı sıfırdır).

Bir an için (yardımcı teorem 13 ün aksine olarak) G grubunun hiç bir merkezi simetri ihtiva etmediğini farzedelim. Buna göre, l nin yörüngesinde bulunan her l' doğrusuna paralel olan öyle bir l'' doğrusu bulunabilir ki, bunun yönü l' nünkinin aksi olsun ve l nin yörün-

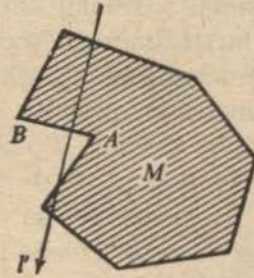
^{*}) Bir doğruya göre simetri tanımını hatırlıyalım: l bir doğru olsun. Eğer AA' , l doğrusuna dik olan bir doğru parçası ise ve AA' nün orta noktası l doğrusu üzerinde bulunuyorsa, A ve A' uç noktalarına l doğrusuna nazaran *simetrik*tirler denir. Bir F şeklinin her noktasının (l doğrusuna nazaran) simetriği alınırsa yeni bir F' şekli elde edilir. F ve F' şekillerine, l doğrusuna nazaran *simetrik*tirler denir.

gesinde bulunmasın. (Aksi halde G grubu açılarının farkı π olan iki dönme ihtiva eder. O halde buna göre, açısı π olan bir dönme, yani bir merkezi simetri ihtiva eder. Şek. 41 e bakınız).

Lâlettâyin bir M çokgeni alalım. Bunun bir kenarı AB olsun. l' de bu kenarı dik olarak kesen bir doğru olsun. l' doğrusunu şö'ye yönleyelim: doğru üzerinde pozitif yönde ilerlersek, AB kenarını kestiği noktada M çokgeninin içinden dışına çıkalım (Şek. 42). Bu şekilde yönlenmiş l' doğrusu, l doğrusunun yörüngesinde ise, AB kenarına pozitif bir işaret verelim; şayet l' ne paralel



Şek. 41



Şek. 42

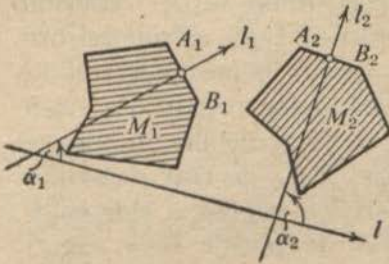
ve aksi yönde yönlenmiş olan l'' doğrusu l nin yörüngesi üzerinde ise AB ye negatif işaret verelim; nihayet, eğer bu şartlardan hiç birisi gerçekleşmiyorsa, AB kenarına sıfır değerini verelim. Şimdi M çokgeninin kenarlarının uzunluklarının cebrik toplamını hesaplıyalım ve işaret olarak şimdi söylediğimiz şekilde tâyin edilen işaretleri alalım. (Eğer AB kenarına sıfır değer verilmişse, bu kenar cebrik toplamda nazarı itibara alınmaz). Bu cebrik toplamı $J'_1(M)$ ile gösterelim.

$J'_1(M)$ sayısı aşağıdaki iki özeliği haizdir: (1) *aditif*dir (3) formülüne bakınız), ve (2) *invarianttır*. (M_1 ve

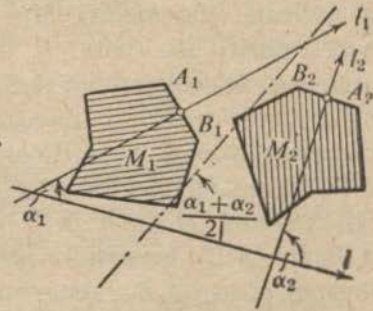
M_2 çokgenlerinden biri diğerinden G ye ait bir hareketle elde edilebiliyorsa, $J'_1(M_1) = J'_1(M_2)$ dir.)

Aditif olduğu yardımcı teorem 11 in ispatına benzer bir ispatın aynen tekrarlanması ile gösterilebilir.

$J'_1(M)$ in invariant olduğunu gösterelim, g , G grubuna ait bir hareket olsun ve M_1 çokgenini M_2 ye dönüştürsün. M_1 çokgeninin bir kenarı A_1B_1 olsun. M_2 de buna tekabül eden kenar A_2B_2 olsun (yani A_2B_2 , A_1B_1 in g hareketi ile dönüştüğü kenar olsun). Nihayet, l_1 doğrusu A_1B_1 kenarına l_2 doğrusu da A_2B_2 kenarına dik olsun. Bu doğrulardan her biri o şekilde yönlenmiş olsunlar ki, doğru üzerinde pozitif yönde gidilirse gözönüne alınan



Şek. 43



Şek. 44

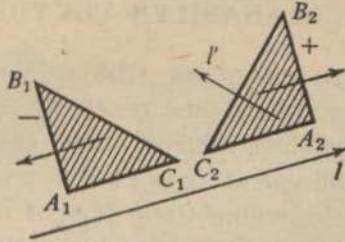
kenar ile kesim noktasına gelindiği zaman, tekabül eden çokgenin içinden dışına çıkılsın (Şek. 43). l_1 ve l_2 doğrularının l doğrusu ile yaptıkları açılar da sırasıyla α_1 ve α_2 olsun. l_1 doğrusunun, l doğrusunun yörüngesi üzerinde bulunduğunu farzedelim. Bu takdirde l_2 nin de l nin yörüngesi üzerinde bulunacağını gösterelim. (1) Eğer g hareketi öteleme ise, l_2 doğrusu l_1 doğrusuna paralel olur. Yönleri de aynı olacağından, l_2 de l nin yörüngesi üzerinde bulunur. (2) Eğer g bir dönme ise, açısı $\alpha_1 - \alpha_2$ dir. Fakat G grubu α_1 açılı bir dönme ihtiva ettiğinden

(l_1 doğrusu l nin yörüngesi üzerinde olduğu için), $(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \alpha_2$ açısı ile yapılan bir dönmeyi de ihtiva edecektir. O halde l_2 doğrusu da l nin yörüngesi üzerindedir. g bir kayan simetri ise g nin eksenini ile, l doğrusu arasındaki açı $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ dir. Bu takdirde başlangıçtaki seçiliş şartına göre l doğrusu da bir kayan simetrisinin eksenidir (Şek. 44). O halde G grubu açısı $\alpha_1 + \alpha_2$ olan bir dönme ihtiva eder. Bundan başka, (yukarıda işaret ettiğimize göre) G açısı α_1 olan bir dönme ihtiva ettiğinden, açısı $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 = \alpha_2$ olan bir dönmeyi de ihtiva eder. Buna göre, bu halde de l_2 doğrusu l nin yörüngesi üzerinde bulunur. Bütün bu söylediklerimizden şu neticeyi elde ederiz: M_1 çokgeninin A_1B_1 kenarının işareti pozitif ise (yani, l_1 doğrusu l nin yörüngesi üzerinde ise) M_2 çokgeninin A_2B_2 kenarı da pozitif işaretlidir. Benzer şekilde A_1B_1 kenarının işareti negatif ise, A_2B_2 kenarındakinin de negatif olacağı gösterilebilir. En nihayet A_1B_1 kenarının değeri sıfır ise A_2B_2 de sıfır değerlidir. (M_1 çokgeni M_2 den g^{-1} hareketi yapılarak elde edilir. O halde A_2B_2 kenarının işaretinin pozitif veya negatif oluşuna göre, A_1B_1 kenarının işareti de sırasıyla pozitif veya negatif olur). Yani, M_1 ve M_2 çokgenlerinin müteakik kenarları, $J'_1(M_1)$ ve $J'_1(M_2)$ cebrik toplamlarında aynı katsayılarla bulunurlar. O halde $J'_1(M_1) = J'_1(M_2)$ dir.

$J'_1(M)$ sayısının aditif ve invaryant olmasından (paragraf 8 ve 9 a bakınız), M_1 ve M_2 gibi G -eşparçalanabilen çokgenler için $J'_1(M_1) = J'_1(M_2)$ eşitliği elde edilir.

Şimdi, Şek. 45 de görülen durumda birbirine denk $A_1B_1C_1$ ve $A_2B_2C_2$ dik ikizkenar üçgenlerini alalım. $A_2B_2C_2$ üçgeninin B_2C_2 kenarının değeri sıfırdır; zira bu kenara dik olan l doğrusu ile l doğrusu arasındaki açı $3/4 \pi$ dir ve açısı $3/4 \pi$ olan bir dönme de G grubu-

nun içinde olamaz (çünkü, bu dönmeyi dört defa ardarda yapmak'a açısı 3π olan bir dönme, yani bir merkezi simetri elde edilir). Benzer şekilde A_1C_1 , B_1C_1 ve A_2C_2 kenarlarının her birine sıfır tekabül ettiği görülür. A_2B_2 kenarı ise pozitif işaretlidir; fakat A_1B_1 negatif işaretlidir. Görülüyor ki, $J'_1(A_1B_1C_1) \neq J'_1(A_2B_2C_2)$ dir (zira



Şek. 45

bu sayılardan biri pozitif, diğeri negatiftir). O halde $A_1B_1C_1$ ve $A_2B_2C_2$ üçgenleri G -eşparçalanabilen değildirler. Bu ise G grubunun özelliklerine aykırıdır.

YARDIMCI TEOREM 14. G grubu bütün merkezi simetrisi ihtiva eder.

s , G grubuna ait bir merkezi simetri olsun (yardımcı teorem 13). O , bu simetrinin merkezi, ve O da düzlemde lâlettâyin seçilmiş bir nokta olsun. g , G grubuna ait ve O noktasını O , noktasına dönüştüren bir hareket olsun (yardımcı teorem 12). G grubuna ait gsg^{-1} hareketinin O noktasını sabit bıraktığı ve merkezi O olan bir simetri olduğu kolayca görülebilir. O halde O noktasına göre simetri de G grubuna aittir.

Teoremin ispatını tamamlamak için, yardımcı teorem 7'ye göre, G grubunun bütün ötelemeleri de ihtiva ettiğini kaydetmek yetişir.

5. Çokyüzlüler için Dehn ve Hadwiger teoremleri

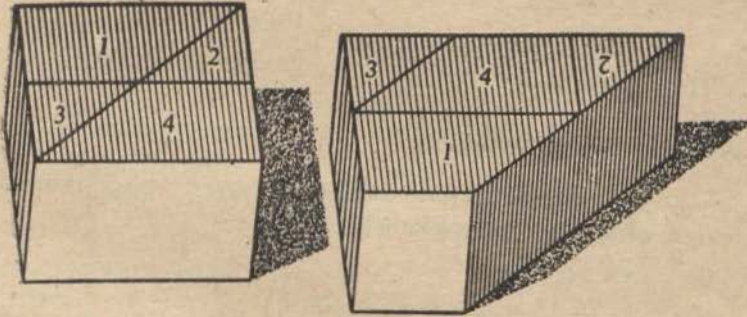
13. EŞPARÇALANABİLEN ÇOKYÜZLÜLER

Şimdi de katı cisimlerin (çokyüzlülerin) eşparçalanabilme ve eştamamlanabilme problemlerini tetkike başlayalım. İki çokyüzlüden birisi sonlu sayıda bir takım parçalara ayrılabilirse, öyle ki, bu parçaların uygun şekilde tekrar birleştirilmeleriyle ikincisi meydana gelsin, bu takdirde bu çokyüzlüler eşparçalanabilendirler denir.

Eşparçalanabilen iki çokyüzlünün eşit hacimli olmaları aşîkârdır. Tabii, derhal akla aksinin doğru olup olmadığı suali gelir: Eşit hacimli bütün çokyüzlü çiftleri eşparçalanabilen midir? Başka bir tâbirle şöyle diyebiliriz: Bolyai ve Gerwin teoremine benzer bir teorem çokyüzlüler için de söylenebilir mi? Aşağıda bu sorunun cevabının negatif olduğunu göreceğiz.

İlk önce bu sorunun bir negatif cevabının mânasını inceliyeceğiz. Böyle bir negatif cevap, eşit hacimli hiç bir çokyüzlü çiftinin eşparçalanabilen olamayacağı mânasına mı gelir? Tabii ki böyle değildir. Eşparçalanabilen çokyüzlülerin mevcut olduğu aşîkârdır. Meselâ, yükseklikleri aynı olan, tabanlarının alanları da eşit olan iki dik prizma eşparçalanabilendirler (Şek. 46). Bu Bolyai-Gerwin teoreminden derhal görülür (aşağıda, paragraf 19 da, dik olsun veya olmasın, eşit hacimli her hangi iki prizmanın eşparçalanabilen olduğunu göreceğiz). O halde yukardaki sorunun cevabı negatiftir demek ne demektir? Bundan şu anlaşıl-

maktadır: Eşit hacimli olan *bütün* çokyüzlüler eşparçalanabilen değildirler. Yani, eşit hacimli ve eşparçalanabilen çokyüzlüler vardır (meselâ, prizmalar); *fakat* eşit hacimli olup eşparçalanabilen *olmayan* çokyüzlüler de mevcuttur. Bu ilk önce [1] de Alman matematikçi Dehn tarafından ispat edilmiştir. Dehn hacimleri eşit olan bir küp ile bir düzgün üçgen pramidin (dört yüzünün) eşparçalanabilen



Şek. 46

olmadıklarını göstermiştir. Tabii, bunlardan başka da eşparçalanabilen olmayan, fakat hacimleri eşit olan çokyüzlüler vardır.

Bu bölümde bir küp ile bir düzgün dört yüzünün eşparçalanabilen olmadıklarını gösteren Dehn teoreminin bir ispatını vereceğiz. Bu ispat, İsviçreli matematikçi Hadwiger'in bazı güzel fikirlerinden faydalanılarak yapılmıştır.

14. HADWIGER TEOREMİ

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ lălettâyin seçilmiş reel sayılar olsunlar. $n_1, n_2, \dots, n_k$ gibi, hepsi birden sıfır olmayan ve

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_k\alpha_k = 0 \quad (9)$$

şartını gerçekliyen bir takım tam sayılar mevcutsa, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayılarına *lineer bağılırlar* denir. (9) şeklindeki bir eşitliğe de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayıları arasında bir *lineer bağıllık* diyeceğiz. Şu noktayı tekrar belirtelim ki, $n_1, n_2, \dots, n_k$ sayılarının hepsi tamsayılardır (pozitif, negatif veya sıfır), ve en az bir tanesi sıfırdan farklıdır.

Verilmiş bir lineer bağlı sayı takımı için bir çok lineer bağıllık mevcut olabilir. Meselâ

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \sqrt{2} - 1, \alpha_3 = 3\sqrt{2} + 1, \alpha_4 = 2\sqrt{2}$$

sayılarını gözönüne alalım.

Bu sayılar arasında aşağıdaki lineer bağıllıkların mevcut olduğunu gerçeklemek kolaydır:

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-1)(3\sqrt{2} + 1) + 1 \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-1)(3\sqrt{2} + 1) + 0 \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

$$0 \cdot 1 + (-1)(\sqrt{2} - 1) + (-1)(3\sqrt{2} + 1) + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 0$$

Şunu da kaydedelim ki α_1 ve α_2 aynı birimle ölçülemiyen (yani, sıfırdan farklı ve kesirleri irrasyonel olan) iki sayı iseler, lineer bağlı olamazlar. Gerçekten

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 = 0$$

lineer bağıllığına göre α_1/α_2 ($\alpha_2 \neq 0$) kesri, iki tam sayının kesri olan $-n_2/n_1$ e eşittir; yani rasyoneldir.

Şimdi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayılarının her birine başka bir sayı tekabül ettiren, bir kaidenin mevcut olduğunu farzedelim:

α_1 e $f(\alpha_1)$ sayısı tekabül etsin,
 α_2 ye $f(\alpha_2)$ sayısı tekabül etsin,

 α_k ya $f(\alpha_k)$ sayısı tekabül etsin.

Aşağıdaki özeliği gerçekledikleri takdirde, $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ..., $f(\alpha_k)$ sayılarına, α_1 , α_2 , ..., α_k sayılarının bir aditif fonksiyonunu * belirtir diyeceğiz: α_1 , α_2 , ..., α_k sayıları arasındaki her

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_k\alpha_k = 0$$

lineer bağıllığının benzeri olan

$$n_1f(\alpha_1) + n_2f(\alpha_2) + \dots + n_kf(\alpha_k) = 0$$

denklemini, $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ..., $f(\alpha_k)$ sayıları arasında bir lineer bağıllıktır.

Eğer α_1 , α_2 , ..., α_k sayıları lineer bağıl değillerse $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ..., $f(\alpha_k)$ sayıları lâlettâyin seçilebilir.

Meselâ, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{5}$ sayılarını alalım. Bunlar aynı birimle ölçülemiyen sayılar olduğundan aralarında bir lineer bağıllık mevcut olamaz. Buna göre α_1 ve α_2 ye tekabül eden $f(\alpha_1)$ ve $f(\alpha_2)$ sayılarının seçiminde, bunların lineer bağıl olmasını temine lüzum yoktur. Bunu şöyle de

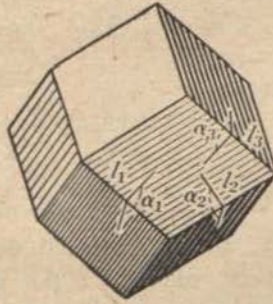
*) Modern görüşe göre, bir fonksiyon, bir cümlemin her elemanına (belirli bir kaide ile) başka bir cümlemin belirli bir elemanını tekabül ettirir. Meselâ, her x reel sayısına tekabül eden sayı olarak $\sin x$ sayısını alırsak bir fonksiyon elde ederiz (sinüs fonksiyonu); eğer pozitif tam sayılar cümlesinin her sayısına, bu tam sayının en büyük asal bölenini tekabül ettirirsek gene bir fonksiyon elde ederiz. Genel olarak, α_1 , α_2 , ..., α_k sayıları ile diğer bazı $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ..., $f(\alpha_k)$ sayıları arasında yapılan bir tekabül ile bir f fonksiyonu elde ederiz.

söyliyebiliriz: $f(1)$ ve $f(\sqrt{5})$ için seçilen değerlere bağlı olmuyarak, $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = \sqrt{5}$ için daima bir aditif fonksiyon elde edebiliriz. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayılarının lineer bağlı oldukları halde, aditif fonksiyon tarifinden derhal görüleceği gibi, herhangi bir f aditif fonksiyonuna tekabül eden $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_k)$ sayıları da lineer bağlı olurlar.

Nihayet,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (10)$$

bir A çokyüzlüsünün, iki yüzlü iç açılarının (kesişen iki yüzü arasındaki iç açılar) radyan cinsinden ölçüsü, ve $l_1, l_2, \dots, l_k$ da sırasıyla o açığa tekabül eden yüzlerin



Şek. 47

kesiştikleri kenarın uzunlukları olsunlar (Şek. 47). Eğer (10) sayıları için bir

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_k) \quad (11)$$

aditif fonksiyonu seçilmişse

$$f(A) = l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \dots + l_k f(\alpha_k) \quad (12)$$

yı tarif edelim, ve $f(A)$ ya A çokyüzlüsünün bir *invariantı* diyelim. $f(A)$ invariantı yalnız A çokyüzlüsüne değil, (11) aditif fonksiyonunun seçilişine de bağlıdır.

Şimdi aşağıdaki enteresan teoremi ifade edecek durumda bulunuyoruz.

HADWIGER TEOREMİ. *Hacimleri eşit olan A ve B çokyüzlüleri verilmiş olsun. A çokyüzlüsünün birbirinden farklı bütün iki yüzlü içaçılarını (radyan cinsinden) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ile, B çokyüzlüsünün birbirinden farklı bütün iki yüzlü iç açılarını $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ile gösterelim. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ sayı cümlesine π sayısını katalım. Eğer, böylece elde edilen*

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \quad (13)$$

sayı cümlesi için bir

$$f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_r), \\ f(\beta_1), f(\beta_2), \dots, f(\beta_s) \quad (14)$$

aditif fonksiyonu mevcut ise, öyle ki

$$f(\pi) = 0 \quad (15)$$

olsun, ve eğer A ve B çokyüzlülerine tekabül eden invariantlar eşit değillerse, yani

$$f(A) \neq f(B) \quad (16)$$

ise, bu takdirde A ve B çokyüzlüleri eşparçalanabilen değildirler.

Hadwigerin bu teoremini daha sonra (paragraf 16 da) ispat edeceğiz. Şimdi daha önce bir küp ile bir düzgün

dörtüzlünün eşparçalanabilen olmadıklarını gösteren Dehn teoreminin ispatının, Hadwiger teoreminden faydalanarak nasıl yapıldığını göreceğiz.

15. DEHN TEOREMİ

Her şeyden önce aşağıdaki yardımcı teoremi ispat edelim. Bu yardımcı teoremi (ve Hadwiger teoremini) kullanarak Dehn teoremini kolayca ispat edebiliriz.

YARDIMCI TEOREM 15. *n , 2 den büyük olan bir tam sayı, φ de kosinüsü $1/n$ olan (yani $\arccos 1/n = \varphi$ olan) bir açının radyan cinsinden ölçüsü olsun. Bu takdirde φ ve π sayıları aynı birimle ölçülemiyen sayılardır. Yani n_1 ve n_2 tam sayılarının her ikisi birden sıfır olmadıkça, aralarında*

$$n_1\varphi + n_2\pi = 0 \quad (17)$$

şeklinde bir lineer bağıllık mevcut değildir.

Bir indirekt ispat verelim. $n_1 \neq 0$ olmak üzere (17) şeklinde bir bağıntının mevcut olduğunu farzedelim. $n_1 > 0$ farzedebiliriz ($n_1 < 0$ ise (17) nin her iki tarafını -1 ile çarparız). $n_1\varphi = n_2\pi$, π nin bir tam katı olduğundan $\cos n_1\varphi$ ya $+1$ veya -1 e eşittir; yani bir tam sayıdır. Herhangi bir $k \neq 0$ tam sayısı için, $\cos k\varphi$ nin tam sayı olamayacağını gösterelim.

Trigonometriden bildiğimiz toplam formüllerine göre

$$\begin{aligned} \cos (k+1) \varphi &= \cos (k\varphi + \varphi) = \\ &\cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (k-1) \varphi &= \cos (k\varphi - \varphi) = \\ &\cos k\varphi \cos \varphi + \sin k\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikleri tophyarak

$$\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi \cdot \cos\varphi,$$

veya ($\cos\varphi = 1/n$ den)

$$\cos(k+1)\varphi = (2/n)\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \quad (18)$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için n nin çift ve tek olduğu halleri ayrı ayrı tetkik edelim.

1. hal. n sayısı tek olsun *. Matematik induksiyon kullanarak, bu halde, $\cos k\varphi$ nin, paydası n^k , payı da n ile ile asal olan bir kesir şeklinde ifade edilebileceğini gösterelim. Bunu gösterdiğimiz takdirde $k > 0$ için $\cos k\varphi$ nin yukarda söylediğimiz aksine olarak, bir tam sayı olmadığını görmüş oluruz. $k=1$ ve $k=2$ için ispatını istediğimiz ifade doğrudur:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{n} \\ \cos 2\varphi &= 2\cos^2\varphi - 1 \\ &= \frac{2}{n^2} - 1 = \frac{2-n^2}{n^2}\end{aligned}$$

(n tek olduğundan 2 ve n sayıları aralarında asaldırlar). Şimdi ispatını istediğimiz ifadenin 1, 2, ..., k sayılarından her biri için doğru olduğunu farzedip, $k+1$ sayısı

*) Dehn teoreminin ispatında, yalnız bu hal ($n=3$ hal) kullanılmaktadır.

için de doğru olduğunu gösterelim. İndüksiyon hipotezine göre

$$\cos k\varphi = \frac{a}{n^k},$$

$$\cos (k-1)\varphi = \frac{b}{n^{k-1}}$$

dir; burada a ve b , n ile asal olan tam sayılardır. Bu iki eşitlik ve (18) den

$$\begin{aligned}\cos (k+1)\varphi &= \frac{2a}{n \cdot n^k} - \frac{b}{n^{k-1}} \\ &= \frac{2a - bn^2}{n^{k+1}}\end{aligned}$$

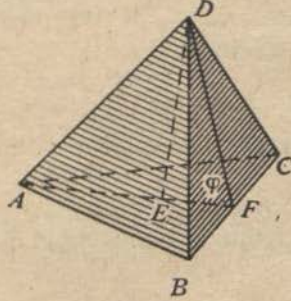
elde edilir. Ne a ve ne de 2 sayısı n ile ortak çarpan ihtiva etmediklerinden $2a - bn^2$ payı ile n sayısı aralarında asaldırlar. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

2. hal. n nin çift olduğunu farzedelim; yani, m bir tam sayı olmak üzere $n = 2m$ olsun. Bu takdirde $\cos k\varphi$, paydası $2m^k$ ve payı da m ile asal olan bir kesir şeklinde ifade edilebilir (bu da, tamamiyle 1. hale benzer şekilde indüksiyon metodu ile gösterilebilir). Böylece, $k > 0$ için, paydadaki sayının payı bölemediği gösterilmiş olur.

DEHN TEOREMİ. *Hacimleri eşit olan bir küp ile bir düzgün dörtyüzlü esparçalanabilen değildirler.*

İspat. $ABCD$ düzgün dörtyüzlüsünün D noktasındaki DE yüksekliğini çizelim (Şek. 48). E noktası ABC eşkenar

üçgeninin ağırlık merkezine düşer. Buna göre E noktasından geçen AF doğrusu bir kenar ortaydır. O halde F noktası BC kenarının orta noktasıdır. bunun neticesi olarak



Şek. 48

DF doğru parçası da BCD üçgeninin kenar ortaydır. EF doğru parçasının uzunluğu AF kenar ortayının ve tabii DF kenar ortayının üçte birine eşittir. Yani

$$\frac{EF}{DF} = \frac{1}{3}$$

dür. Buna göre, eğer DEF dik üçgeninin F deki açısını (bu açı $ABCD$ dörtyüzlüsünün bir iki yüzlü açısıdır) φ ile gösterirsek

$$\cos \varphi = \frac{1}{3} \quad (19)$$

elde ederiz.

Şimdi Hadwiger teoremini tatbik edelim. Bir A kübünün her iki yüzlü açısı $\pi/2$ ye eşittir. B düzgün dörtyüzlüsünün iki yüzlü açısını φ ile gösterelim. Hadwiger teoremindeki (13) sayıları, burada

$$\pi, \frac{\pi}{2}, \varphi \quad (20)$$

olur. Bu sayılar arasında nasıl lineer bağılıkların mevcut olduğunu araştıralım, n_1, n_2, n_3 tam sayılar olmak üzere, (20) deki sayılar arasında

$$n_1\pi + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\varphi = 0 \quad (21)$$

şeklinde bir lineer bağıllığın mevcut olduğunu farzedelim. Bu takdirde

$$(2n_1 + n_2)\pi + 2n_3\varphi = 0$$

dır. Böylece π ve φ arasında bir lineer bağıllık elde ederiz. Fakat, φ ve π aynı birimle ölçülemiyen sayılar oldukları için (19) dan dolayı, yardımcı teorem 15 e göre böyle bir lineer bağıllık mevcut olamaz). O halde $n_1 + n_2 = 0$, $n_3 = 0$ olmalıdır. Yani (21) eşitliği

$$n_1\pi + (-2n_1)\frac{\pi}{2} = 0 \quad (22)$$

şeklini alır. (20) sayıları arasında bundan başka da lineer bağıllık mevcut değildir.

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\varphi) = 1 \quad (23)$$

olarak alalım. Bu, (20) de verilen sayılar için bir aditif fonksiyon tarif eder. Gerçekten, (20) sayıları arasındaki her hangi bir lineer bağıllık için, yani (22) şeklinde bir

eşitlik için, (23) sayıları arasında benzer bir lineer bağıllık bulunabilir:

$$n_1 f(\pi) + (-2n_1) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Böylece, (20) sayıları için, (15) şartına uyan, bir aditif fonksiyon elde edilir. Şimdi küp ile düzgün dörtyüzlünün eşparçalanabilen olmadıklarının ispatını tamamlamak için, (16) nın doğru olduğunun gösterilmesi kalır.

A kübünün oniki kenarı vardır. Kenar uzunluğu l olsun. O halde A kübü için $f(A)$ invariantının değeri

$$f(A) = 12lf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

dır ((23) e bakınız). m de, B düzgün dörtyüzlüsünün bir kenarının uzunluğu olsun. B dörtyüzlüsünün $f(B)$ invariantı

$$f(B) = 6mf(\varphi) \neq 0$$

şeklinde olacaktır ((23) e bakınız). Buna göre $f(A) \neq f(B)$ dir. Bunun neticesi olarak A kübü ile B düzgün dörtyüzlüsünün eşparçalanabilen olmadıkları görülmüş ve Dehn teoremi ispat edilmiş olur.

16. HADWİGER TEOREMİNİN İSPATI

Şimdi Hadwiger teoreminin ispatına geçelim.

YARDIMCI TEOREM 16.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

(24)

ve

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l \quad (25)$$

reel sayılar olsunlar.

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_l) \quad (26)$$

(24) sayılarının bir aditif fonksiyonu olsun. Öyle

$$f(\gamma_1), f(\gamma_2), \dots, f(\gamma_l) \quad (27)$$

sayıları bulunabilir ki, (26) ve (27) sayıları, (24) ve (25) sayıları beraberce gözönüne alındıkları takdirde, bunların bir aditif fonksiyonunu versin. Başka bir tâbirle (24) sayılarının her hangi bir aditif fonksiyonu, (24) ve (25) sayılarının bir aditif fonksiyonunu verecek şekilde genişletilebilir.

$l=1$ olduğu hali, yani (24) sayılarına yalnız bir γ sayısı katılmakla elde edilen hali göstermek kâfidir (zira (25) sayıları, (24) sayılarının cümlesine birer birer katılabilir). (24) sayıları için (26) şeklinde bir aditif fonksiyonun verilmiş olduğunu farzedelim. γ da her hangi bir reel sayı olsun. Öyle bir $f(\gamma)$ sayısı bulmalıyız ki

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_l), f(\gamma) \quad (28)$$

sayıları sistemi,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \gamma \quad (29)$$

sayıları için bir aditif fonksiyon tarif etsin.

İspatı yaparken aşağıdaki iki hali ayıracağız:

1. hal. (29) daki sayılar arasında, γ nın n kat sayısı sıfırdan farklı olmak üzere

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_k\alpha_k + n_\gamma = 0$$

şeklinde hiç bir lineer bağıllık mevcut değildir. Bu halde $f(\gamma)$ nın değeri olarak her hangi bir reel sayı seçebiliriz.

2. hal. (29) daki sayılar arasında

$$n_1'\alpha_1 + n_2'\alpha_2 + \dots + n_k'\alpha_k + n'\gamma = 0, \quad n' \neq 0 \quad (30)$$

olacak şekilde bir lineer bağıllık mevcuttur. Bu halde, $f(\gamma)$ sayısını

$$n_1'f(\alpha_1) + n_2'f(\alpha_2) + \dots + n_k'f(\alpha_k) + n'f(\gamma) = 0 \quad (31)$$

eşitliğini gerçekliyecek şekilde tâyin ederiz. (31) den

$$f(\gamma) = -\frac{n_1'}{n'}f(\alpha_1) - \frac{n_2'}{n'}f(\alpha_2) - \dots - \frac{n_k'}{n'}f(\alpha_k)$$

bulunur. Bu şekilde (29) daki sayılar için bir aditif fonksiyon elde edileceğini gösterelim.

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_k\alpha_k + n_\gamma = 0, \quad (32)$$

(29) daki sayılar arasında lâlettâyin bir lineer bağıllık olsun (bu (30) dan farklı veya belki onunla aynı da olabilir). (28) deki sayılar arasında da benzer bir lineer bağıllığın mevcut olduğunu göstermeliyiz; yani

$$n_1f(\alpha_1) + n_2f(\alpha_2) + \dots + n_kf(\alpha_k) + nf(\gamma) = 0 \quad (33)$$

şeklinde bir eşitliğin olduğunu göstermeliyiz. Bunu da aşağıdaki gibi yapabiliriz: (32) eşitliğinin her iki yanını

n' ile çarpalım. Elde edilen eşitlikten, (30) u n ile çarpıp çıkaralım:

$$(n'n_1 - nn_1') \alpha_1 + (n'n_2 - nn_2') \alpha_2 + \dots + (n'n_k - nn_k') \alpha_k = 0.$$

Böylece (24) deki sayılar arasında bir lineer bağıllık elde etmiş oluruz. (26) daki sayılar da bunların bir aditif fonksiyonunu belirttiğinden

$$(n'n_1 - nn_1')f(\alpha_1) + (n'n_2 - nn_2')f(\alpha_2) + \dots + (n'n_k - nn_k')f(\alpha_k) = 0$$

şeklinde bir eşitlik mevcuttur. (31) denklemini n ile çarparak bu eşitliği ilâve edersek

$$n'n_1f(\alpha_1) + n'n_2f(\alpha_2) + \dots + n'n_kf(\alpha_k) + n'nf(\gamma) = 0$$

buluruz. Nihayet, $n' \neq 0$ olduğundan son denklemi n' ile bölerek (33) ü elde ederiz. Buna göre (28) deki sayılar, (29) daki sayıların bir aditif fonksiyonunu verir.

YARDIMCI TEOREM 17. *A, sonlu sayıda, daha küçük $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerine parçalanmış bir çokyüzlü olsun. A'nın bütün farklı iki yüzlü açılarını*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (34)$$

ile, ve $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin aralarında farklı bütün ikiyüzlü açılarını da

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s \quad (35)$$

ile gösterelim. (34) ve (35) sayılar cümlesine π yi katarak

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r \quad (36)$$

sayı cümlesini elde edelim.

$$\begin{aligned} f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_r), \\ f(\gamma_1), f(\gamma_2), \dots, f(\gamma_r) \end{aligned} \quad (37)$$

ile verilen bir aditif fonksiyon vardır. Öyle ki

$$f(\pi) = 0 \quad (38)$$

olsun. Bu takdirde, gözönüne alınan çokyüzlülerin

$$f(A), f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k)$$

invariantları

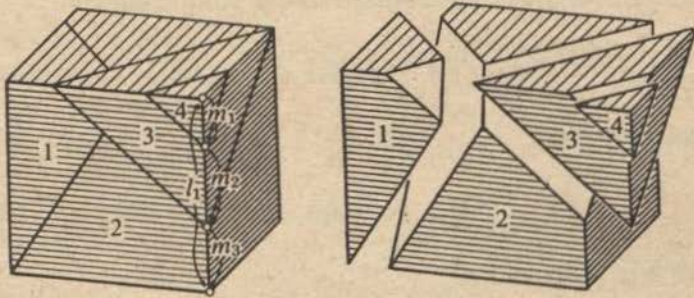
$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \dots + f(M_k) \quad (39)$$

eşitliğini gerçeklerler.

Bunu ispat için, $A, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin kenarlarını teşkil eden doğru parçalarını gözönüne alalım.

Bu doğru parçaları üzerinde $A, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin köşelerini ve bu doğru parçalarının birbirleri ile kesiştikleri noktaları işaretliyelim. Bu suretle, sonlu sayıda, daha kısa doğru parçası elde ederiz. Bu kısa doğru parçalarına *halka* diyeceğiz. Bir kübün daha küçük çokyüzlülere parçalanması Şek. 49 da görülmektedir; bu şekilde, kübün l_1 olarak isimlendirilmiş kenarı, üç m_1, m_2, m_3 halkasını ihtiva eder. Genel olarak $A, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin her hangi bir kenarında bir veya bir kaç halka vardır. A çokyüzlüsünün her halkası (yani, A çokyüzlüsünün kenarlarından biri üzerinde bulunan her halka)

$M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinden bir veya bir kaçının da bir halkasıdır. A çokyüzlüsünün halkalarından her hangi bir tanesini alalım; bunun uzunluğu m ve A çokyüzlüsünün buna tekabül eden iki yüzlü açısı α olsun. α , (34) deki sayılardan biri olduğundan, $f(\alpha)$ tarif edilmiştir. $mf(\alpha)$ çarpımına A çokyüzlüsünün, gözönüne alınan halkasının *ağırlığı* diyeceğiz. Benzer şekilde, $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinde halkaların ağırlıklarını tarif edelim. Şunu da kaydetmeliyiz ki, aynı bir halka, kendisine bitişik olan farklı çokyüzlülerde farklı ağırlıkları haiz olabilir; zira



Şek. 49

böyle bir halkada, bitişik çokyüzlüler farklı ikiyüzlü açıları haiz olabilir.

Şimdi A çokyüzlüsünün bütün halkalarını gözönüne alalım, ve bunların A çokyüzlüsündeki ağırlıklarını bulalım ve bütün bu ağırlıkları toplayalım. Bu toplamın A çokyüzlüsünün $f(A)$ invaryatına eşit olduğu kolayca görülebilir. Bunun açıkça anlaşılabilmesi için A çokyüzlüsünün l_1 kenarını alalım ve bunun m_1, m_2, m_3 gibi üç halkadan meydana geldiğini farzedelim (Şek. 49). m_1, m_2, m_3 halkalarından her birine, A çokyüzlüsünün l_1 kenarındaki ikiyüzlü açısı olan, aynı bir α_1 ikiyüzlü açısı

tekabül eder. Buna göre m_1, m_2, m_3 halkalarının ağırlıklarının toplamı

$$\begin{aligned} m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) &= \\ &= (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1) \end{aligned}$$

dir. Aynı şekilde A çokyüzlüsünün l_2 kenarının bütün halkalarının ağırlıklarının toplamı da $l_2 f(\alpha_2)$ ye eşittir, ... v.s. Buna göre, A çokyüzlüsünün bütün halkalarının ağırlıklarının toplamı, (12) toplamının aynidir; yani A çokyüzlüsünün $f(A)$ invaryantına eşittir.

Benzer şekilde, $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinden her birisinin invaryantı da bütün halkalarının ağırlıkları toplamına eşittir. (Tabii, her halkanın ağırlığı, gözönüne alınan çokyüzlü için hesaplanacaktır.)

Şimdi (39) eşitliğinin gerçeğlendiğini görelim. Bu eşitliğin sağ tarafını bulmak için $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin her birindeki bütün halkaların ağırlıklarını hesaplamalıyız. Bu toplamda, m halkasına tekabül eden terimdeki katsayıyı bulalım. m halkasına bitişik olan $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin ikiyüzlü açıları

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$$

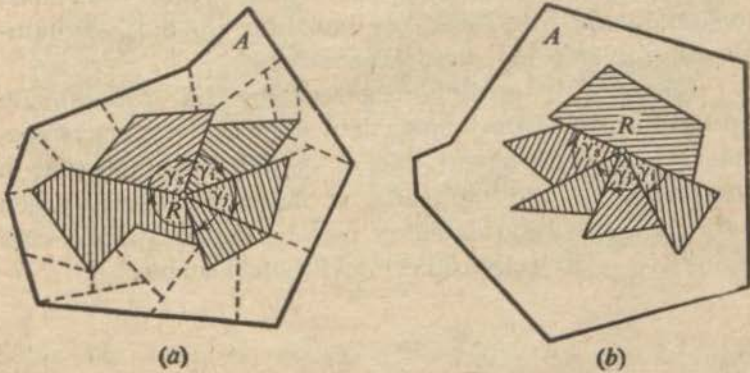
ile gösterilmiş olsunlar (bunlar (35) deki sayılar arasında bulunurlar). O halde gözönüne alınan halkanın, ikiyüzlü açısı γ_1 olan çokyüzlüdeki ağırlığı $mf(\gamma_1)$, ikiyüzlü açısı γ_2 olan çokyüzlüdeki ağırlığı $mf(\gamma_2)$, ... v.s. dir. Buna göre, m halkasına bitişik olan $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerindeki bütün m halkalarının ağırlıkları toplamı

$$mf(\gamma_1) + mf(\gamma_2) + \dots + mf(\gamma_k) \quad (40).$$

ile verilir.

Halkaların her biri aşağıdaki üç tipten birinde olacaktır:

(1) A çokyüzlüsünün tamamıyla içinde kalan halkalar (yalnız uç noktalar istisna teşkil edebilir). Eğer m böyle bir halka ise ve $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinden her biri m doğru parçasına bitişik ise bu doğru parçasını bir halka olarak kabul ediyorsa, m halkasına bitişik olan çokyüzlülerin, bu halkaya tekabül eden bütün ikiyüzlü açılarının toplamı 2π dir (Şek. 50 a ya bakınız; bu şekilde ve 50b, 51, 52a, 52b şekillerinde, A çokyüzlüsünün ve m halkasına bitişik olan çokyüzlülerin parçalanışı m halka-



Şek. 50

sına dik olan bir düzlem üzerinde gösterilmiştir. Bu şekillerde m halkasının kendisi de R noktası ile gösterilmiştir.) O halde, bu tipte

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k = 2\pi$$

veya

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k - 2\pi = 0$$

dır. Bu; (36) daki sayılar arasında bir lineer bağılıktır. Buna göre

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_r) - 2f(\pi) = 0$$

dır. (38) i kullanarak, son denklemden

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_r) = 0$$

elde edilir; o halde (40) ifadesi de sıfıra eşittir.

Eğer m , A çokyüzlüsünün içinde kalan bir halka ise, ve m doğru parçasına bitişik olan $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinden biri bu doğru parçasını bir halka olarak kabul etmezse* (yani, m doğru parçası, $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinden birinin bir yüzü üzerinde bulunursa), geri kalan çokyüzlülerden m doğru parçasına bitişik olanların iki yüzlü açılarının toplamı π dir (Şek. 50b):

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r = \pi.$$

Buna göre (40) ifadesi (yukarda izah edilene benzer sebepten) sıfıra eşit olur.

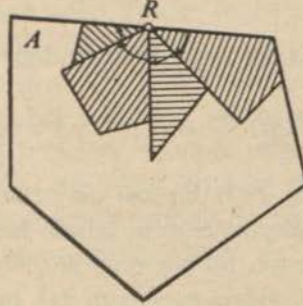
Şu halde, ağırlıklarının toplamı sıfır olduğundan, A çokyüzlüsünün içerisinde kalan halkalar (39) eşitliğinin sağ tarafının hesabında ihmal edilebilir.

(2) A çokyüzlüsünün yüzleri üzerinde olup, kenarları üzerinde bulunmayan halkalar. Bu halde

*) Eğer m doğru parçasına bitişik iki çokyüzlü için, bu doğru parçası bir halka değilse, yani, m bitişik iki çokyüzlünün yüzleri üzerinde bulunuyorsa, m doğru parçasına yalnız bu iki çokyüzlü bitişik olur. O halde m , $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerinin bir kenarı üzerinde bulunamaz, dolayısıyla bir halka değildir.

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \pi$$

α 'up (Şek. 51), evvelki haldeki gibi (40) ifadesi sıfırdır.



Şek. 51

(3) A çokyüzlüsünün kenarları üzerinde bulunan halkalar. Bu halde

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

toplamı, tekabül eden kenarın iki yüzölçüsü α ya (Şek. 52a), veya $\alpha - \pi$ açısına eşittir; yani

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \alpha$$

veya

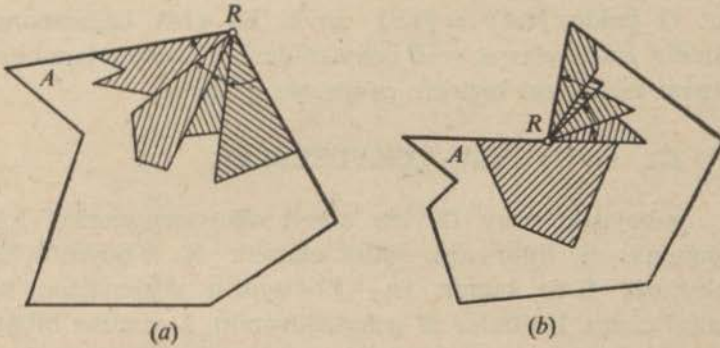
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \alpha - \pi$$

dir. Bu son hal, α açısı π den büyük ise olabilir (Şek. 52b ye bakınız). Her iki halde de

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_n) = f(\alpha)$$

dır ve gözönüne alınan halkanın, A çokyüzlüsündeki

ağırlığı olan (40) ifadesi $mf(\alpha)$ ya eşittir. Buna göre (39) eşitliğinin sağ tarafında görülen toplam, A çokyüzlüsünün bütün halkalarının ağırlıkları toplamına, yani $f(A)$ invariantına eşittir.



Şek. 52

Hadwiger teoreminin ispatı. A ve B çokyüzlüleri eşparçalanabilen o sunlar, ve $M_1, M_2, \dots, M_n$ de, bir araya getirilmekle A veya B elde edilen çokyüzlüler olsunlar. $M_1, M_2, \dots, M_n$ çokyüzlü erinin iç, ikiyüzlü açıları $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ olsunlar. Yardımcı teorem 16 ya göre, (14) aditif fonksiyonu

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$$

sayılarının bir aditif fonksiyonunu verecek şekilde genişletilebilir. (Yukarda olduğu gibi, bu aditif fonksiyon (15) şartını gerçekler.) A çokyüzlüsü $M_1, M_2, \dots, M_n$ çokyüzlülerinden meydana geldiğinden $f(A)$ invariantı

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \dots + f(M_n)$$

dir (yardımcı teorem 17). Fakat B çokyüzlüsü de $M_1,$

$M_2, \dots, M_n$ çokyüzlülerinin bir terkibi ile meydana geldiğinden

$$f(B) = f(M_1) + f(M_2) + \dots + f(M_n)$$

dir. O halde $f(A) = f(B)$ dir ki bu (16) bağıntısının aksidir. Buna göre A ve B çokyüzlülerinin eşparçalanabilen olması faraziyesi bizi bir çeyişmeye götürür.

17. n -BOYUTLU ÇOKYÜZLÜLER

n -boyutlu uzay fikrine alışık olan okuyucular için aşağıdaki ek ihtar ilgi çekici olabilir. M , n -boyutlu bir çokyüzlü, L de bunun $(n-2)$ -boyutlu yüzlerinden bir tanesi olsun. Bu halde M çokyüzlüsünün, L yüzüne bitişik tam iki tane $(n-1)$ -boyutlu yüzü vardır. Bunları A ve B ile gösterim. A ve B yüzleri arasındaki açıya, L yüzündeki *ikiyüzlü açı* denir. Bu kendi *lineer* açısı ile, yani, biri A diğeri B yüzü içinde olup, L yüzüne dik olan bir çift doğru arasında kalan açı ile ölçülür.

Eğer, $L_1, L_2, \dots, L_k$, n -boyutlu M çokyüzlüsünün $(n-2)$ -boyutlu yüzlerini teşkil ediyorsa, $l_1, l_2, \dots, l_k$ da bunların $(n-2)$ -boyutlu hacimleri, ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, M çokyüzlüsünün bu yüzlerdeki iki yüzlü açıları ise, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sayıları için hesaplanan (11) aditif fonksiyonu (sah. 52 ye bakınız) (12) toplamını tarifte kullanılabılır. Bu toplama M çokyüzlüsünün *invariantı* diyeceğiz. İnvaryant bu şekilde tarif edildiğine göre, Hadwiger teoremi, ispatı ile beraber, n -boyutlu çokyüzlüler için de doğru olur ([4] e bakınız).

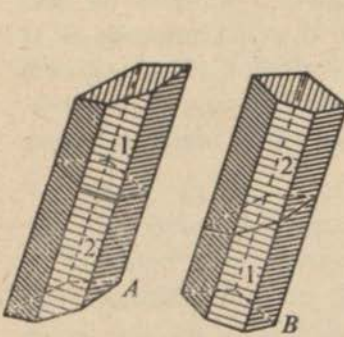
Dehn teoremi de kolayca genelleştirilebilir. Düzgün bir n -boyutlu piramidin (simpleksin) ikiyüzlü açıları $\arccos 1/n$ e eşittir. (Paragraf 15 de verilene tamamen

benzer şekilde, indüksiyon yo'u ile, okuyucu bunu kendisi kolayca yapabilir.) Bundan derhal, yardımcı teorem 15 i kullanarak, $n > 3$ için, hacimleri aynı olan düzgün bir piramid ile bir kübün eşparçalanabi' en olmadıkları görülür (paragraf 15 e bakınız).

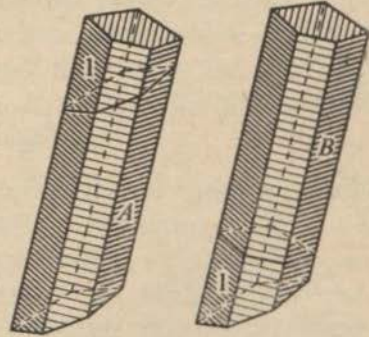
6. Hacim hesabı için metodlar

18. LİMİTLER METODU

Düzlem şekiller için kullandığımız alan hesabı metodumuzu hatırlıya'ım. Dik dörtgenin alanı için formül bulunduğundan sonra, diğer çokgenlerin alanları hesabı, basit iki metoddan birisinin kullanılmasına indirgenmiş olur: parçalama metodu veya tamamlama metodu. Düzlem geometride limitler metodu yalnız eğrisel şekillerin alanlarının hesabında kullanılır.



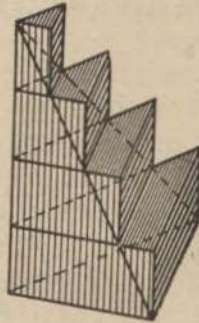
Şek. 53



Şek. 54

Katı cisimlerin hacimlerini hesaplariken, bazan parçalama veya tamamlama metodunu kullanırız. Meselâ, bir eğik prizmanın hacminin, bir kenarının uzunluğu ile o kenara dik olan kesitinin alanının çarpımına eşit olduğunu göstermek için, ya parçalama metodu (Şek. 53), veya tamamlama metodu (Şek. 54) kullanılabilir. Başka bir

deyimle, her eğik prizma, bir *dik* prizma ile eşparçalanabilen (ve eştamamlanabilen) dir. Bu dik prizmanın yan kenarının uzunluğu verilen prizmanınki ile aynidir. Tabanı da verilen prizmanın yan kenarına dik olan bir kesitine denktir. Her dik prizma da bir düzgün paralelyüzle eşparçalanabilen (ve eştamamlanabilen) olduğundan, aşağıdaki teoremi elde ederiz: *Her eğik prizma, eşit hacimli bir dik dörtgenler prizması ile eşparçalanabilen (eştamamlanabilen) dir.* Şu halde, herhangi bir (dik veya eğik) prizmanın hacminin hesabında hem parçalama ve hem de tamamlama metodu başarı ile kullanılabilir.

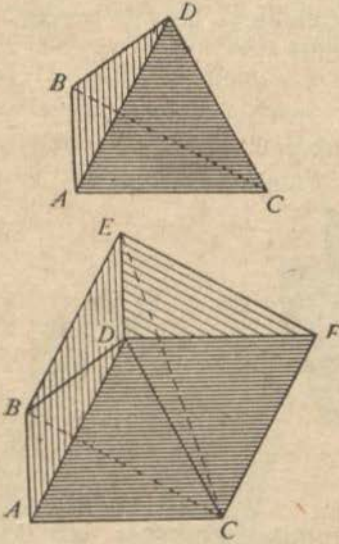


Şek. 55

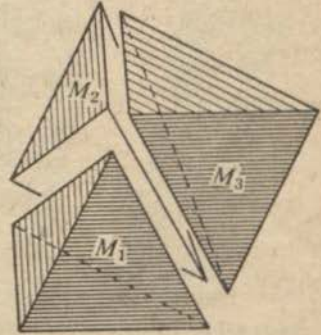
Fakat, bir piramidin hacminin hesabında bu iki metoddan hiç birisi kullanılamaz. Bunlar yerine *limitler metodu* kullanılır: bir takım basamaklardan meydana gelmiş, biraz karışık bir katı cisim gözönüne alalım (Şek. 55), sonsuz sayıda küçük basamaklara ayırarak (şeytan merdiveni) limite geçelim. Burada ne olabilir? Acaba matematikçilerin, parçalama veya tamamlama metodlarını kullanarak, bir piramidin hacminin hesabı için basit bir formül bulamamaları sadece daha az şansları yüzünden midir? Hal böyle değildir: bu metodlar bir piramidin

hacmini veren formülün bulunmasında tamamen yetersizdirler. Böyle bir formülün elde edilmesi için, daha karışık bir metodun (limitler metodunun) tatbikinden kaçınılamaz.

Buna kanaat getirmek maksadiyle, piramidin hacim hesabı için verilen alışılmış usulü hatırlıyalım. $ABCD$ bir dörtyüzlü olsun. Tabanı ABC , yan kenarı AD olan bir $ABCDEF$ eğik, üçgen prizmasını inşa edelim (Şek. 56).



Şek. 56



Şek. 57

Bu prizma üç $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$ dörtyüzlüsüne ayrılabilir (Şek. 57). Kısalığı temin için bunları M_1 , M_2 , M_3 ile gösterelim. M_1 , M_2 , M_3 piramidlerinden herhangi iki tane sinin denk taban arı ve eşit yükseklikleri olduğu kolayca görülebilir. O halde geriye, *tabanları denk ve yükseklikleri eşit olan iki piramidin hacimlerinin aynı olduğunun gös-*

terilmesi kalır. Limitler metodu ile ispat ettiğimiz bu iddiadır. Bunu parçalama metodu ile ispat etmenin kabil olmadığını göstereceğiz. Bunun için, tabanları denk ve yükseklikleri eşit olan, fakat uygun bir f aditif fonksiyonu için invaryantları ([12] ye bakınız) farklı olan bir çift piramidin mevcut olduğunu gösterelim. Bunun neticesi olarak, Hadwiger teoreminden bu iki piramidin eşparçalanabilen olmadıkları neticesi elde edilir.

Tekrar Şek. 56 ve 57 ye dönelim. M_1 piramidinin (yani, $ABCDEF$ prizmasının inşasında kullanılan $ABCD$ piramidinin) düzgün piramid yani, düzgün bir dörtyüzlü olduğunu kabul edelim. Yardımcı teorem 16 ya göre (23) aditif fonksiyonunu, M_1, M_2, M_3 piramidlerinin ve $ABCDEF$ prizmasının bütün ikiyüzlü açılarının bir aditif fonksiyonu olacak şekilde geniş etmek mümkündür. Şu halde $f(M_1) + f(M_2) + f(M_3)$ toplamı, $ABCDEF$ prizmasının invaryantıdır (yardımcı teorem 17). Bu dik prizma, bir dik paralelyüz ile eşparçalanabilen olduğundan (burada bütün ikiyüzlü açılar $\pi/2$ ye eşittir), bu prizmanın invaryantı sifıra eşittir. O halde

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 0 \quad (41)$$

dır. M_1 düzgün piramidinin $f(M_1)$ invaryantının sıfırdan farklı olduğunu önceden biliyoruz. O halde

$$f(M_1) = f(M_2) = f(M_3)$$

eşitliği mevcut olamaz. Zira aksi hal (41) formülüne uymaz. Buna göre M_1, M_2, M_3 piramidleri arasında invaryantları farklı olan bir çift vardır ve do'ayısıyle bu çift eşparçalanabilen değildir (Hadwiger teoremine göre). Böylece, tabanları denk, yükseklikleri aynı olan ve eşpar-

çalanabilir olmıyan bir çift piramidin mevcut olduğunu göstermiş bulunuyoruz.

Görülüyor ki, parça ama metodu bir piramidin hacmini hesaplamak için kâfi gelmez. Tamamlama metodu için ne söylenebilir? Aşağıdaki teoremden, tamamlama metodunun tatbik edilemeyeceği derhal görülür *.

TEOREM. *A ve B çokyüzlüleri Hadwiger teoremindeki şartları gerçekliyorlarsa, eştamamlanabilen değildirler.*

İspat. Aksinin doğru olduğunu farzedelim. $M_1, M_2, \dots, M_n$ gibi, A ve B den her birine katmakla aynı C çokyüzlüsünü veren çokyüzlüler mevcuttur. Yardımcı teorem 16 ya göre, (14) aditif fonksiyonu, $M_1, M_2, \dots, M_n, C$ çokyüzlülerinin, bütün ikiyüzlü açılarının bir aditif fonksiyonunu verecek şekilde genişletilebilir. Yardımcı teorem 17 yi tatbik ederek

$$f(C) = f(A) + f(M_1) + \dots + f(M_n),$$

$$f(C) = f(B) + f(M_1) + \dots + f(M_n)$$

elde ederiz. Fakat bu eşitlikler (1) bağıntısı ile bir çelişme teşkil ederler. Böylece, A ve B çokyüzlülerinin eştamamlanamaz oldukları görülmüş olur.

Bu teoremden, düzgün bir dörtyüzlü ile bir kübün yalnız eşparçalanamaz değil, aynı zamanda eştamamlanamaz oldukları görülür. Denk taban ve eşit yükseklikleri olan, fakat invaryantları farklı olan piramid çiftleri de eştamamlanamazlar. Yukarda, böyle piramid çiftlerinin mevcut olduğunu gördüğümüzden, bir piramidin hacminin hesabında tamamlama metodunun kullanılamıyacağı aşikârdır.

*) Tamamlama metodunun tatbik edilemeyeceği, aşağıda ispatı verilen, daha genel Sydler teoreminin bir neticesidir.

19. PARÇALAMA VE TAMAMLAMA METODLARININ EŞDEĞERLİĞİ *

Bu kitapçığın ilk bölümünde, düzlem çokgenler için eşparçalanabilme ve eştamamlanabilmenin aynı mânayı haiz olduğunu gördük; yani düzlem çokgenler için parçalama ve tamamlama metodları eşdeğerdir. Bunun, 1. Bölümde verilen ispatı, alanları eşit olan çokgen çiftlerinin eşparçalanabilir olduğuna dair Bolyai-Gerwin teoremine dayanır. Biliyoruz ki, iki çokyüzlünün hacimlerinin eşit olması eşparçalanabilir veya eştamamlanabilir olmalarını icap ettirmez. Buna göre, Bölüm 1 de kullanılan usullerle, çokyüzlüler için tamamama ve parçalama metodlarının eşdeğerliğini göstermek mümkün değildir. Bu metodların, çokyüzlüler için eşdeğer olup olmadıkları sualine aşağıdaki teorem cevap verir.

SYDLER TEOREMİ. *İki çokyüzlü yalnız eşparçalanabilen oldukları takdirde (ve ancak bu halde) eştamamlanabilmektedirler ([8] e bakınız).*

Bu teoremi birkaç yardımcı teorem yardımı ile ispat edeceğiz.

YARDIMCI TEOREM 18. *A ve B eşparçalanabilen iseler, aynı zamanda eştamamlanabilirler.*

$M_1, M_2, \dots, M_k$ uygun şekilde birleştirilmekle A veya B nin elde edilebileceği çokyüzlüler olsunlar. Gerekteğinde B yi kaydırmak suretiyle, A ile B nin ortak noktalarının bulunmadığını farzedelim. M, her iki A ve B çokyüzlüsünün içinde ihtiva eden bir çok yüzlü olsun. M_0 da M çokyüzlüsünün, A ve B nin dışında kalan parçası olsun. Kolayca görülür ki, $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerini kullanarak A ve B çokyüzlülerini M çokyüzlüsüne tamamlamak müm-

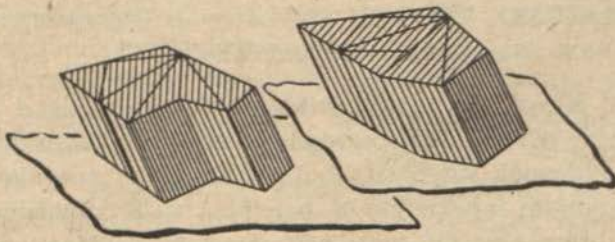
*) Bu paragraf ilk okuyuşta terkedilebilir.

kün olur. Gerçekten, $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerini A çokyüzlüsünü teşkil edecek şekilde birleştirirsek, $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlüleri o şekilde birleştirilir ki, B istisna edilmek suretiyle, bütün M çokyüzlüsü dolduru muş olsun; yani bu çok yüzlüler M çokyüzlüsünde B yi tamam larlar. $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerini B çokyüzlüsünü teşkil edecek tarzda birleştirirsek, A çokyüzlüsünün $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ ile M çokyüzlüsünü verecek şekilde tamamlanabileceği görülür. Buna göre A ve B eştamamlanabilirler.

Şunu kaydedelim ki, M_0 çokyüzlüsü, içinde A ve B çokyüzlüleri şeklinde iki boşluk olan M çokyüzlüsünden başka bir şey değildir. Okuyucu M_0 in bir «çokyüzlü» olmadığını düşünüyorsa, bu cismi «boşluklar» ihtiva etmiyen bir takım çokyüzlülere «parçalıyarak» ispatı tamamlayabilir.

YARDIMCI TEOREM 19. *Hacimleri eşit olan bütün prizma çiftleri eşparçalanabilmelidirler.*

İlk önce şunu kaydedelim ki, eğer iki prizmanın tabanlarının alanları eşit ise ve paralel düzlemlerde bulu-

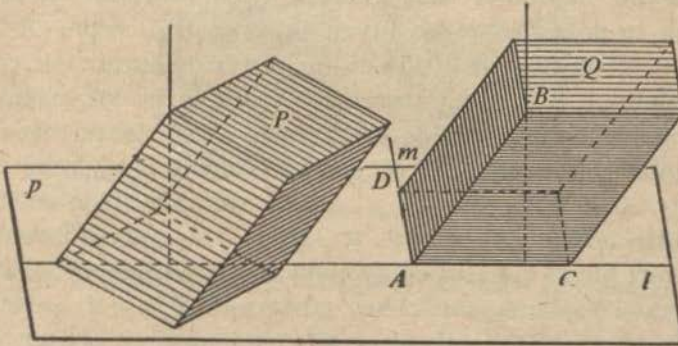


Şek. 58

nuyorlarsa, ve eğer doğuranları da eşit ve paralel ise'ler (Şek. 58), bu prizmalar eşparçalanabilirler; zira, Bolyai-Gerwin teoremine göre tabanları eşparçalanabilirler.

Bundan şu netice çıkar: her prizma bir paralelyüz (genel olarak eğik) ile eşparçalanabilir.

Bundan başka her eğik paralelyüz bir dik paralelyüz ile eşparçalanabilir. P eğik paralelyüzün tabanının düzlemi p , A bu düzlemin bir noktası, AB doğru parçası da P paralelyüzünün yan kenarı ile eşit uzunlukta ve ona paralel olsun (Şek. 59). l de AB doğrusunun p düzlemindeki izdüşümü, ve m , p düzleminde A noktasından geçip, l ye dik olan bir doğru olsun.



Şek. 59

l ve m doğruları üzerinde, kenarları AC ve AD olan dik dörtgenin alanı, P paralelyüzünün tabanınıninkine eşit olacak şekilde C ve D noktalarını seçelim. Tabanı bu dik dörtgen ve yan kenarı AB olan Q paralelyüzünü çizelim. Tabanları hakkında evvelce söy enenlere göre P ve Q paralelyüzleri eşparçalanabilirler. Şimdi kenarları AB ve AC olan paralel kenarlı Q paralelyüzünün tabanı, AD yi de yan kenarı olarak alalım; Q paralelyüzünün dik olduğunu görürüz ($AD \perp AB$, $AD \perp AC$).

K , Q paralelyüzü ile aynı hacimde olan bir küp, ve a da K nın kenarlarının uzunluğu olsun. Q nün tabanı yerine, bir kenarı a olan ve alanı Q nün tabanına eşit olan

bir dik dörtgen alalım; Q i e eşparçalanabilir olan ve bir kenarının uzunluğu a olan bir dik paralelyüz elde ederiz. Bu dik paralelyüzün uzunluğu a olan kenarını yükseklik olarak alır ve tabanını da aynı alanlı bir kare ile değiştirsek, K kübünü elde ederiz.

O halde, her prizma aynı hacim i bir küp ile eşparçalanabilendir; bundan, hacimleri eşit olan iki prizmanın eşparçalanabilir olduğu neticesi çıkar.

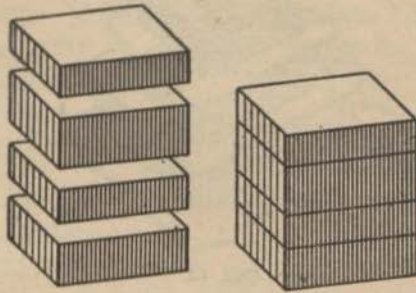
Aşağıdaki yardımcı teoremleri ifade etmeden önce, notasyon hakkında bazı gerekli izahat verelim. A ve B ortak iç nokta arı bulunmayan iki çokyüzlü olsun. A ve B nin birlikte işgal ettiği bütün uzayı dolduran tek çokyüzlüyü $A + B$ ile gösterelim. İkidenden fazla çokyüzlünün «toplamı» benzer şekilde tarif edilir. Özel olarak, eğer A çokyüzlüsü $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerine parçalanmışsa, bunu $A = M_1 + M_2 + \dots + M_k$ şeklinde ifade edelim. Bundan başka, eğer n tane $M_1, M_2, \dots, M_n$ çokyüzlüsünden her biri bir M çokyüzlüsüne denk ise, yukarda tarif edi en şekildeki toplamlarını kısaca göstermek için nM işaretini kullanacağız. Bir çokyüzlü, M çokyüzlüsüne benzer ise ve benzerlik katsayısı λ ise, onu da $M^{(\lambda)}$ ile göstereceğiz. Nihayet, $\sim$ işaretini çokyüzlü erin eşparçalanabilir olduklarını göstermek için kullanacağız; yani $A \sim B$ işareti, A ve B çokyüzlülerinin eşparçalanabilir olduklarını ifade eder.

YARDIMCI TEOREM 20. $P_1, P_2, \dots, P_k$ ortak iç noktaları olmayan bir prizmalar dizisi ve P de, hacmi, $P_1, P_2, \dots, P_k$ nin hacimleri toplamına eşit olan bir prizma olsun. Bu takdirde

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k \sim P$$

dir.

Bu yardımcı teoremi ispat için $P_1, P_2, \dots, P_k$ prizmalarından her biri yerine, tabanları sırasıyla $P_1, P_2, \dots, P_k$ nin tabanlarına denk, hacimleri de sırasıyla $P_1, P_2, \dots, P_k$ nin hacimlerine eşit olan $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ dik paralelyüzlerini alalım. Sonra, bu yeni paralelyüzleri üst üste yerleştirelim (Şek. 60). Bu tarzda büyük bir π paralelyüzü elde



Şek. 60

ederiz. π nin hacmi P prizmasının hacmine eşit olduğundan

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k \sim \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k \sim \pi \sim P$$

elde ederiz (Yardımcı teorem 19 a bakınız).

YARDIMCI TEOREM 21. *M lâlettâyin bir çokyüzlü ve n bir tabii sayı olsun. Öyle bir P prizması vardır ki*

$$M^{(n)} \sim P + nM$$

olsun.

Bu yardımcı teoremi önce M nin bir dörtyüzlü olması halinde ispat edelim. Bu halde $M^{(n)}$ de, yüksekliği M nin yüksekliğinin n katı olan bir dörtyüzlüdür.

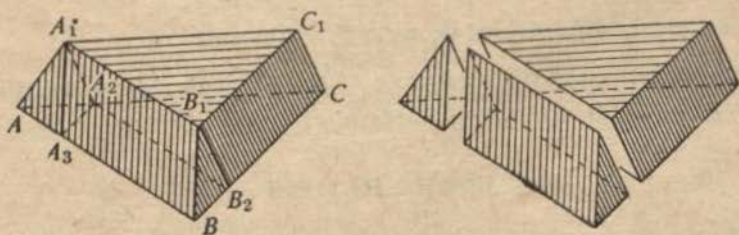
$M^{(n)}$ nin yüksekliğini n eşit parçaya ayıralım, ve her bölüm noktasından tabana para'el bir düzlem geçirelim.

Bunlar $M^{(n)}$ yi n «tabaka» ya ayırır. En üstteki M ye denk olan bir dörtyüzlüdür (Şek. 61). Alttakilerden



Şek. 61

lâlettâyin bir tabakayı alalım. Bu bir piramid kesitidir. Alt ve üst taban'larını ABC ve $A_1B_1C_1$ ile gösterelim. Üst tabanın A_1B_1 kenarından, CC_1 kenarına paralel olan bir düzlem geçirelim (Şek. 62). Bu, alt tabanı A_2B_2 doğru



Şek. 62

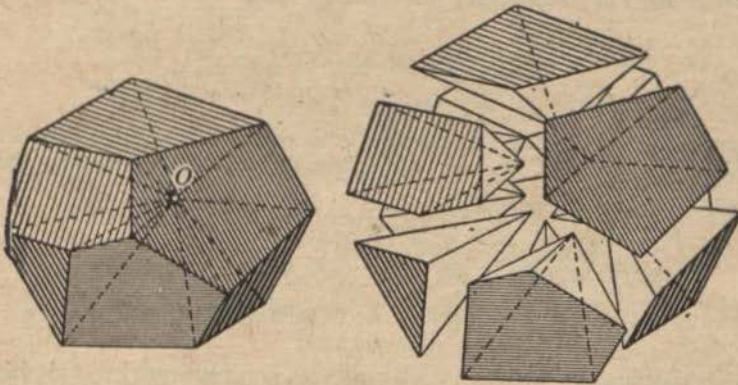
parçası boyunca keser; ve gözönüne alınan piramid kesitini de iki parçaya ayırır: $A_2B_2CA_1B_1C_1$ prizması ile $AA_1A_2BB_1B_2$ çokyüzlüsü. Şimdi de A_1A_2 kenarından, bu son çokyüzlünün BB_1B_2 yüzüne paralel bir düzlem geçi-

relim. Bu, $AA_1A_2BB_1B_2$ çokyüzlüsünü yeni iki parçaya ayırır: $A_1A_2A_3B_1B_2B$ prizması ile $AA_1A_2A_3$ dörtyüzlüsü. $AA_1A_2A_3$ dörtyüzlüsünün M dörtyüzlüsüne denk olduğu kolayca görülür. (Zira, M ye benzer ve aynı yüksekliği haizdir.) O halde, en üstteki istisna edilirse, bütün tabakalar, M ye denk bir dörtyüzlü ile iki prizmaya ayrılır. $M^{(n)}$ dörtyüzlüsünün bütünü, n tane M ye denk dörtyüzlü ile bir takım prizmalardan meydana gelir. Yardımcı teorem 20 ye göre bu prizmalar yerine tek bir P prizması koyabiliriz. Bu suret'e

$$M^{(n)} \sim P + nM$$

elde ederiz ki bu da, M bir dörtyüzlü ise teoremin doğru olduğunu gösterir.

Şimdi M lâlettâyin bir çokyüzlü olsun. Eğer konveks değilse, M nin yüzlerini ihtiva eden bütün düzlem'lerle keserek, onu sonlu sayıda konveks çokyüzlülere ayırırız. Her konveks çokyüzlü de piramidlere ayrılabilir; bunu temin için çokyüzlünün bir O iç noktasını alıp, tepeleri bu nokta, tabanları çokyüzlünün yüzleri olan piramidleri düşünmek kâfidir (Şek. 63). Nihayet, her piramid de bir

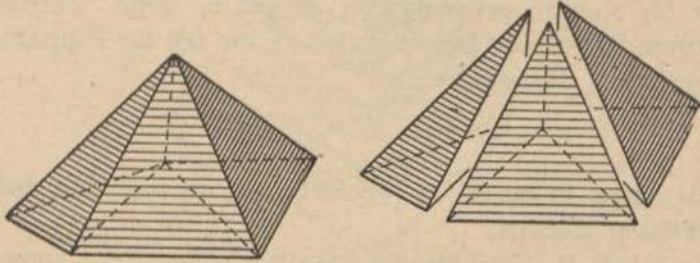


Şek. 63

çok dörtyüzlüye ayrılabilceğinden (Şek. 64), her çok-yüzlü sonlu sayıda dörtyüzlülere parçalanabilir.

$$M = T_1 + T_2 + \dots + T_k \quad (42)$$

böyle bir parçalanma olsun. Bütün bu cisimleri n çarpanı



Şek. 64

ile genişleterek

$$M^{(n)} = T_1^{(n)} + T_2^{(n)} + \dots + T_k^{(n)}$$

buluruz. Yukarda ispat ettiğimize göre

$$T_1^{(n)} \sim P_1 + nT_1, T_2^{(n)} \sim P_2 + nT_2, \\ + \dots + T_k^{(n)} \sim P_k + nT_k$$

dir; burada $P_1, P_2, \dots, P_k$ bir takım prizmalardır. Şu halde

$$M^{(n)} \sim (P_1 + P_2 + \dots + P_k) + \\ + (nT_1 + nT_2 + \dots + nT_k) \sim P + nM$$

dir; burada $P_1 + P_2 + \dots + P_k$ top'amı yerine tek bir P prizması (yardımcı teorem 20), ve $T_1, T_2, \dots, T_k$ nin

n katlarının toplamı yerine, (42) ye göre, nM koyabiliriz. Böylece yardımcı teorem 21 ispat edilmiş olur.

YARDIMCI TEOREM 22. *İki çokyüzlü eştamamlanabilen iseler, eşparçalanabilendirler.*

Bu yardımcı teoremin ispatında verilen bir M çokyüzlüsünün hacmini $V(M)$ ile göstereceğiz. A ve B eştamamlanabilen iki çokyüzlü olsunlar. O halde öyle iki eşparçalanabilen C ve D çokyüzlüleri mevcuttur ki, A ve B ile tamamlandıkları zaman denk çokyüzlüler elde edilsin:

$$A + C \cong B + D, \quad C \sim D. \quad (43)$$

C_1 , C çokyüzlüsünü içine alabilen bir küp, n de $\sqrt[n]{1 + \frac{V(A)}{V(C_1)}}$ sayısından büyük olan bir tam sayı olsun.

O halde $n^2 > 1 + \frac{V(C_1)}{V(A)}$, veya $n^2 V(A) > V(A) + V(C_1)$

dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını n ile çarpalım. $n^3 V(A)$ yerine $A^{(n)}$ çokyüzlüsünün hacmini koyabileceğimizi düşünerek

$$V(A^{(n)}) > nV(A) + nV(C_1) \quad (44)$$

yazabiliriz. Bundan başka, yardımcı teorem 21 e göre, P ve Q prizmalar olmak üzere

$$A^{(n)} \sim P + nA, \quad B^{(n)} \sim Q + nB \quad (45)$$

elde ederiz; bu bağıntıların ilkinden

$$V(A^{(n)}) = V(P) + nV(A)$$

bulunur. Bundan ve (44) den derhal $V(P) > nV(C_1)$ çıkar; yani P prizmasının hacmi, C_1 kübünün hacminin n katından büyük olmalıdır. Yardımcı teorem 19 a göre, P nin C_1 kübü ile tabanı aynı olan bir dik paralelyüz olduğunu kabul edebiliriz. O halde P paralelyüzünün yüksekliği, en az C_1 kübünün yüksekliğinin n katı olmalıdır. Yani, P nin içine C_1 e denk n tane küp konabilir; o halde, daha kuvvetli bir sebepten, P nin içine C ye denk n tane çokyüzlü de konabilir. P nin içine nC şeklini yerleştirelim. P paralelyüzünün geriye kalan kısmını (nC nin içinde olmayan kısmını) T ile gösterelim:

$$P = T + nC \quad (46)$$

dir. Bundan başka P ve Q prizmalarının hacimleri eşittir ($V(A) = V(B)$, $V(A^{(n)}) = V(B^{(n)})$) olduğundan, (45) e göre $V(P) = V(Q)$ elde edilir; o halde P ve Q prizmaları eşparçalanabilendirler (yardımcı teorem 19):

$$P \sim Q \quad (47)$$

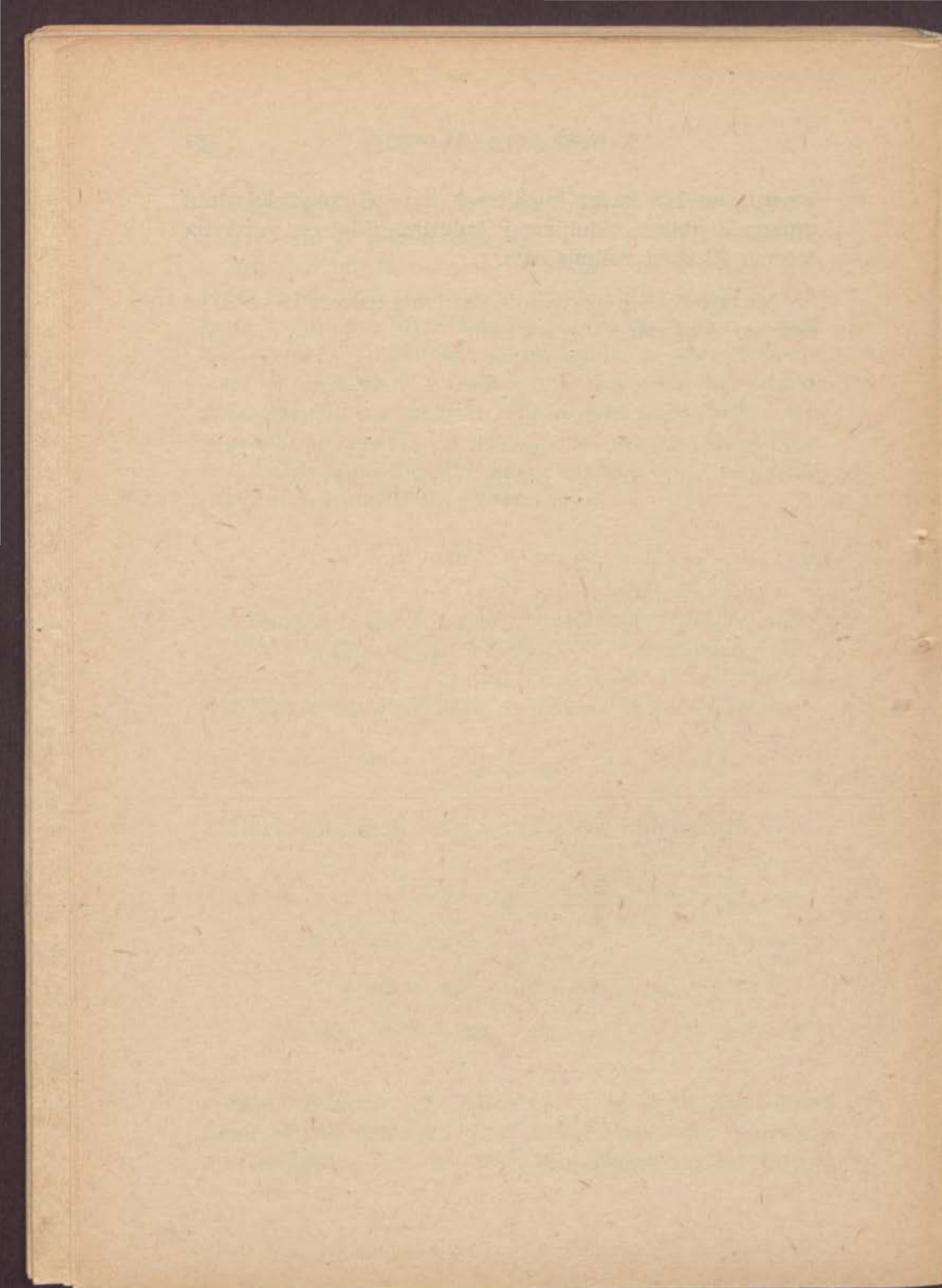
(47) yi kullanarak, (43) ve (45) bağıntılarından

$$\begin{aligned} A^{(n)} &\sim P + nA = T + nC + nA = T + n(A + C) \\ &\sim T + n(B + D) \\ &= T + nB + nD \sim T + nB + nC \\ &= (T + nC) + nB \sim P + nB \sim Q + nB \sim B^{(n)} \end{aligned}$$

olduğu gösterilir. Şu halde $A^{(n)}$ ve $B^{(n)}$ çokyüzlüleri eşparçalanabilendirler; yani mütekaabil denk parçalara ayrılabilirler. $A^{(n)}$ ve $B^{(n)}$ çokyüzlülerinin her birinin

boyutlarını $1/n$ kadar küçülterek A ve B çokyüzlülerinin eşparçalanabilen olduklarını buluruz. Böylece yardımcı teorem 22 ispat edilmiş olur.

Geriye Sydler teoreminin yardımcı teorem 18 ve 20 ye eşdeğer olduğunu söylemek kalır.



EK

1. ÇOKYÜZLÜLERİN EŞPARÇALANABİLİRLİKLERİ İÇİN GEREK VE YETER ŞARTLAR

Şimdi Hadwigerin bir yazısında verilen ([16] ya bakınız), çokyüzlülerin eşparçalanabilir olmaları şartlarını (ispatsız) vereceğiz. Her A çokyüzlüsüne, aşağıdaki şartları gerçekliyen bir $\chi(A)$ sayısının tekabül ettirildiğini farzedelim:

- (1) Denk, A ve B çokyüzlülerine eşit sayılar tekabül eder: $\chi(A) = \chi(B)$ (invaryanlık şartı);
- (2) A çokyüzlüsü bir takım $M_1, M_2, \dots, M_k$ çokyüzlülerine parçalanmış ise

$$\chi(A) = \chi(M_1) + \chi(M_2) + \dots + \chi(M_k)$$

eşitliği mevcuttur (aditiflik şartı);

- (3) $A^{(\lambda)}$, A çokyüzlüsüne benzer bir çokyüzlü ise ve benzerlik katsayısı da λ ise, $\chi(A^{(\lambda)}) = \lambda \chi(A)$ dır (lineerlik şartı).

Bu şartları gerçekliyen χ ye, bir *lineer aditif invaryant* deriz. Aşağıdaki teorem câridir:

TEOREM. A ve B çokyüzlülerinin eşparçalanabilir olması için gerek ve yeter şartlar hacimlerinin eşit olması ve her χ lineer aditif invaryantı için $\chi(A) = \chi(B)$ olmasıdır.

Diğer bir tâbirle, eğer A ve B çokyüzlülerinin hacimleri eşit ise, fakat esparçalanabilen değillerse, bu takdirde $\chi(A) \neq \chi(B)$ olacak şekilde bir lineer aditif invariant mevcuttur. Şunu da kaydedelim ki, Sydler teoremine göre (yukarda ispat edilmişti), bu eştamlanabilmek için de gerek ve yeter şarttır.

Bu şartı evvelce ispat edilen (paragraf 16) Hadwiger teoremi ile karşılaştırmak ilgiye değerdir. Orada da bir $f(A)$ invariantı kullanmıştık. Denk olan A ve B çokyüzlülerinin invariantları da eşitti: $f(A) = f(B)$. Bu invariant aditif idi (yardımcı teorem 17). Aynı zamanda lineerdir de (zira $A^{(\lambda)}$ çokyüzlüsünün kenarlarının uzunluğu, A nın kenarlarının uzunluğunun λ katı idi), ve A ile $A^{(\lambda)}$ çokyüzlülerinin iki yüzlü açıları eşit olduklarından, $f(A^{(\lambda)}) = \lambda f(A)$ dır (f aditif invariantının paragraf 14 de verilen tarifi kullanılmıştır). Bununla beraber f invariantı, yukarda ifade edilen teoremdaki invariantlardan farklıdır: f invariantı bütün çokyüzlüler için tarif edilmemiştir. Bu invariant yalnız Hadwiger teoreminde adı geçen iki çokyüzlü için tarif edilmişti, ve diğer çokyüzlülerle karşılaştığımız zaman da (yardımcı teorem 17 de), bu çokyüzlülere mahsus f invariantının değerleri için yeni tarif vermiştik.

Şunu da kaydedelim ki, *bütün* çokyüzlüler için aynı zamanda tarif edilebilen lineer aditif invariantların mevcudiyetinin ispatı, aslında *elemanter değildir*. Böyle invariantları * elde etmek (ve yukarda ifade edilen teoremi ispat etmek) için *transfını indüksiyon* denen bir

*) Yalnız bir invariantın elemanter bir tarifi vardır; bu da her A çokyüzlüsü için sıfır değerini halz olan invarianttır. Bununla beraber, bu invariantı göz önüne almak bir mâna ifade etmez.

nevi indüksiyondan faydalanmak gerekir ki, bunun incelenmesi bu kitapçığın çerçevesi dışına çıkar.

2. ÇOKYÜZLÜLERİN G -EŞPARÇALANABİLİRLİĞİ

Çokgenlerde olduğu gibi, çokyüzlülerde de G -eşparçalanabilirlikten bahsetmek mümkündür; burada G bir hareket grubudur. (Tabii, katı cisimlerin, özellikle çokyüzlülerin bir hareket grubu anlaşılmalıdır.) T , uzaydaki bütün ötelemelerden meydana gelen grup olsun. İki çokyüzlünün T -eşparçalanabilen olup olmadıklarını araştırabiliriz. Gene Hadwiger tarafından ispat edilmiş olan ([7] ye bakınız) aşağıdaki enteresan teoremi kaydedelim.

TEOREM. *Bir konveks çokyüzlünün bir küp ile T -eşparçalanabilen olması için gerek ve yeter şart, yüzlerinden her birinin bir merkeze göre simetrik bir çokgen * olmasıdır.*

Bundan derhal şu netice elde edilir: hacimleri eşit olan ve her birinin yüzleri bir merkeze göre simetrik olan iki çokyüzlü T -eşparçalanabilendirler. Özellikle, yüzleri bir merkeze göre simetrik olan iki denk çokyüzlü gözönüne alırsak, bunlar birbirlerine nazaran nasıl döndürülürlerse döndürülsünler, daima birbirleri ile T -eşparçalanabilendirler.

G -eşparçalanabilirlikle birlikte, çokyüzlüler için G eştamamlanabilmek de tetkik edilebilir (G bir hareket grubudur). G grubu bütün ötelemeleri ilâve olarak ihtiva ediyorsa (ötelemelere ilâve olarak diğer hareketleri de

*) Sovyet geometriçisi A. D. Alexandroff tarafından elde edilen neticelere göre, bu özelliği hâiz olan bir çokyüzlü kendi kendisi ile bir merkeze göre simetriktr.

ihativa edebilir), iki çokyüzlü yalnız G -eşparçalanabilir oldukları takdirde (ve ancak bu halde) G -eştamamlanabilirler. n -boyutlu uzay için de doğru olan bu teoremin ispatı, Sydler teoreminin yukarda verilen ispatında ufak değişiklikler yapmakla e'de edilebilir ([5] e bakınız).

Bibliyografya

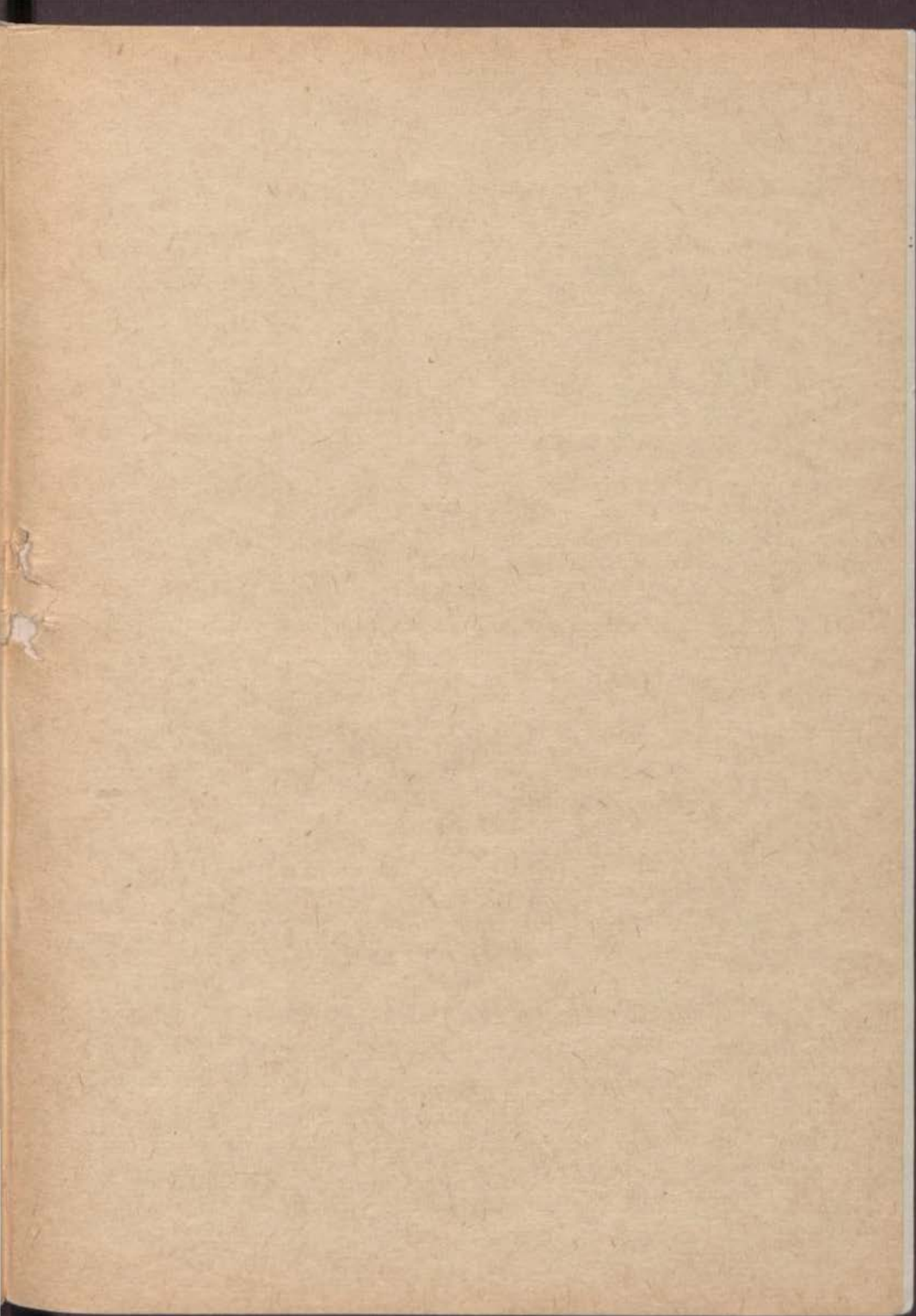
Aşağıdakiler, bu kitapçığın konularının daha geniş bir şekilde incelendiği orjinal araştırma yazılarıdır.

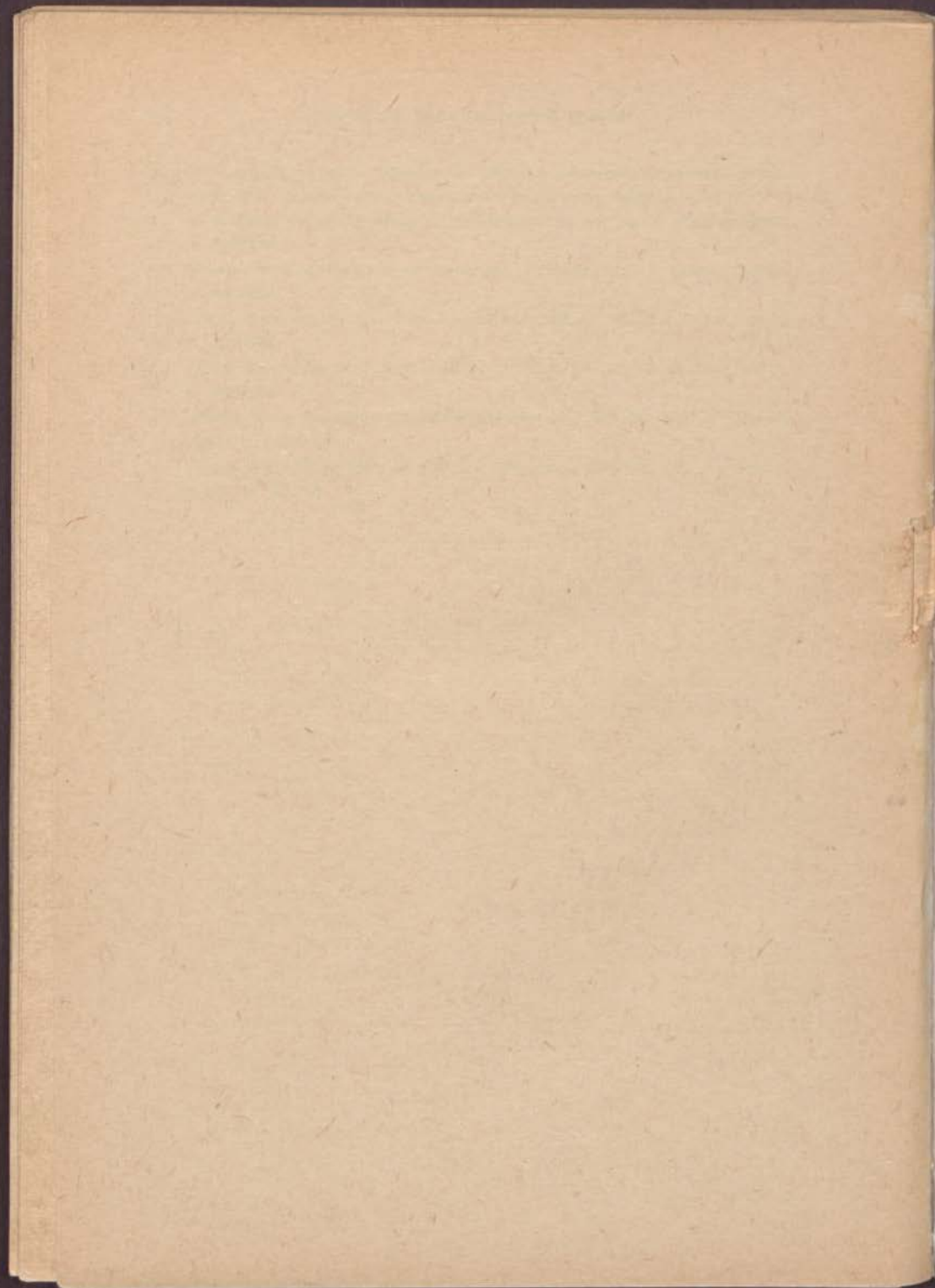
1. Dehn, M. «Ueber den Rauminhalt», *Math. Ann.* 55 (1902), s. 465-478.
2. Hadwiger, H., ve Glur, P. «Zerlegungsgleichheit ebener Polygone», *Elem. der Math.* 6 (1951), s. 97-106.
3. Hadwiger, H. «Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder», *Archiv der Math.* 2 (1949-1950), s. 441-444.
4. Hadwiger, H. «Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder», *Math. Ann.* 127 (1954), s. 170-174.
5. Hadwiger, H. «Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder», *Math. Zeit.* 55 (1952), s. 292-298.
6. Hadwiger, H. «Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale», *Archiv der Math.* 1 (1948-1949), s. 468-472.
7. Hadwiger, H. «Mittelpunktpolyeder und translativ Zerlegungsgleichheit», *Math. Nachr.* 8 (1952), s. 53-58.
8. Sydler, J. P. «Sur la décomposition des polyèdres», *Comm. Math. Helv.* 16 (1943-1944), s. 266-273.

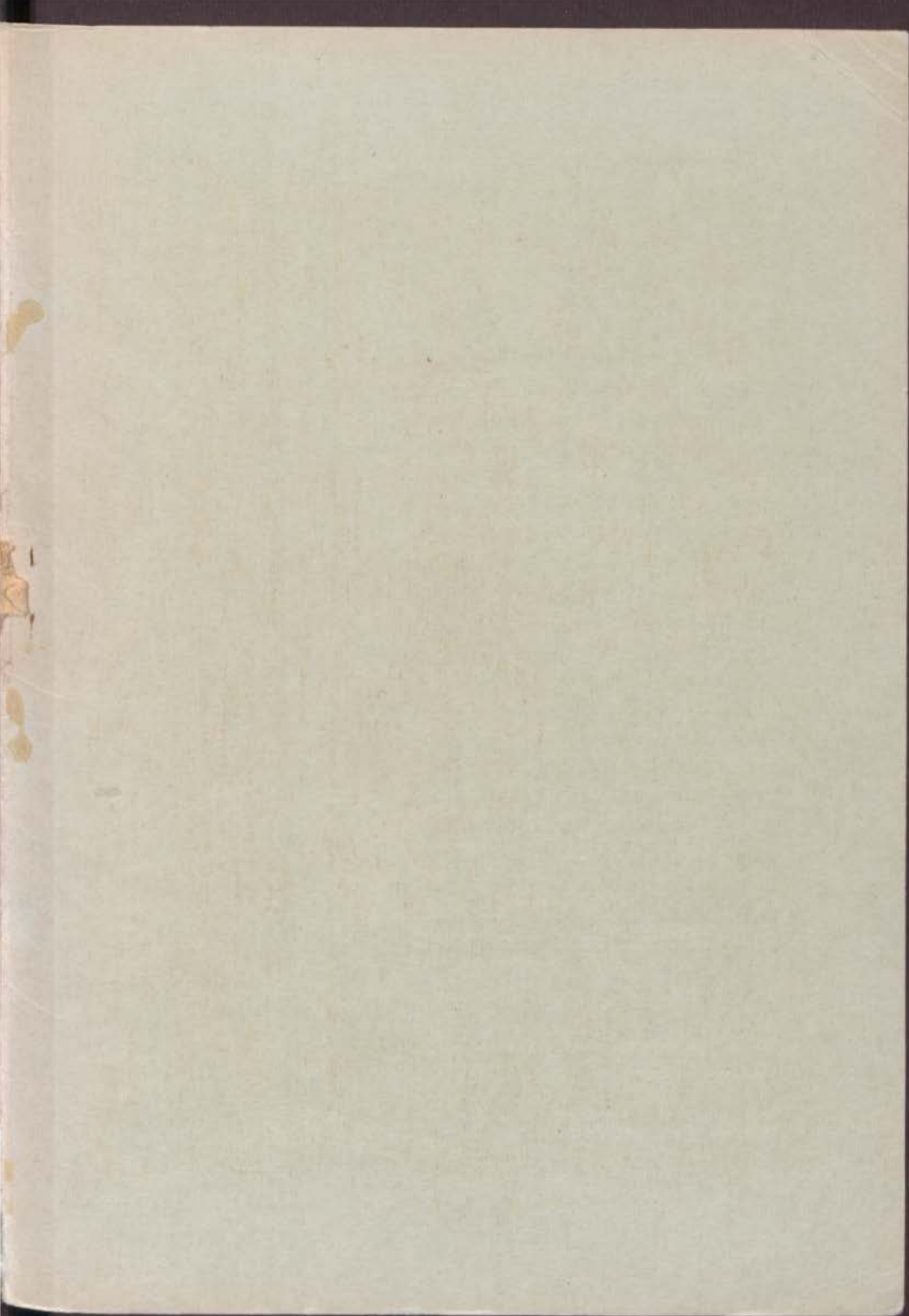
Aşağıdaki kitap ve makaleler, geometrik parçalama problemlerine ait daha basit izahları ihtiva ederler.

9. Cundy, H. M., ve Rollett, A. P. *Mathematical Models*. Oxford: Clarendon Press, 1952. Bölüm 2.
10. Dudeney, H. E. *Amusements in Mathematics*. New-York: Dover Publications, Inc., 1958. s. 27-40.
11. Gardner, Martin. «Mathematical Games», *Scientific American*, Kasım, 1961, s. 158-169.
12. Lindgren, H. «Two Six-Piece Dissections», *The American Mathematical Monthly*, Cilt 64, No. 5 (Mayıs, 1957), s. 368-369.
13. Lindgren, H. «Going One Better in Geometric Dissections», *Mathematical Gazette*, Mayıs, 1961, s. 94-97.

14. Chicago Üniversitesi Matematik bölümü yayınları, aşağıdaki makaleler *The Mathematics Teacher* mecmuasında yayımlanmıştır:
- A problem on the Cutting of Squares», Cilt 49, No. 5 (Mayıs 1956), s. 332-343.
- «More on the Cutting of Squares», Cilt 49, No. 6 (Ekim, 1956), s. 442-454.
- «Still More on the Cutting of Squares», Cilt 49, No. 8 (Aralık, 1956), s. 585-596.
- «New Exercises in Plane Geometry», Cilt 50, No. 2 (Şubat, 1957), s. 125-135.
- «More New Exercises in Plane Geometry», Cilt 50, No. 5 (Mayıs, 1957), s. 330-339.
- «Four More Exercises in Cutting Figures», Cilt 51, No. 2 (Şubat, 1958), s. 96-104.
-







Yayınlanmış olan eserler:

- 1 — Eşitsizlikler (160 Krş.)
- 2 — Çokrenk Problemleri (180 Krş.)
- 3 — Sayılar Teorisinden Problemler (500 Krş.)
- 4 — Tesadüfi Hareketler (250 Krş.)
- 5 — Geometrik İspatlarda Hatalar (180 Krş.)
- 6 — Mekaniğin Matematiğe Bazı Tatbikleri (180 Krş.)
- 7 — Yalnız Pergel Kullanarak Yapılan
Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 8 — Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi
(Diophant Denklemleri) (220 Krş.)
- 9 — Gruplar Teorisine Giriş (375 Krş.)
- 10 — Eşitsizliklere Giriş (425 Krş.)
- 11 — Matematiksel İndüksiyon Metodu (220 Krş.)
- 12 — Sayılar Teorisine Giriş (550 Krş.)
- 13 — Geometrik Eşitsizlikler (450 Krş.)
- 14 — Yalnız Cetvel Kullanarak Yapılan
Geometrik Çizimler (250 Krş.)
- 15 — İhtimaller Hesabına Giriş (550 Krş.)
- 16 — Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar (600 Krş.)
- 18 — İndirgemeli Diziler (200 Krş.)
- 19 — Geometri (Cilt I) (500 Krş.)
- 20 — Geometri (Cilt II) (750 Krş.)
- 21 — Geometri (Cilt III) (400 Krş.)
- 22 — Algoritmalar ve Otomatik Hesap Makinaları (400 Krş.)
- 23 — Konum Teoremleri (200 Krş.)
- 24 — Matematiksel Sonsuz (100 Krş.)
- 25 — Sayılar ve Şekiller (850 Krş.)
- 26 — Eşdeğer ve Eşparçalanabilen Şekiller (300 Krş.)

Yayınlanmak üzere olan eser:

- 17 — Gayri Euklid Geometriler

Matematik Derneğinin adresi:

Fen Fakültesi, Matematik Enstitüsü

Vezneciler - İstanbul

Fiatı: 300 Krş.